KALMAN

Une centrale inertielle est un instrument de mesure de l'accélération et de la vitesse angulaire composé de trois accéléromètres et de trois gyroscopes. Estimer l'accélération et la vitesse angulaire pourrait sembler trivial dans la mesure où un accéléromètre fournit une mesure d'accélération et un gyroscope, une mesure de vitesse angulaire. Néanmoins, nous allons voir que dessous cette apparente facilité se cache des difficultés bien réelles.

Le but de cet article n'est pas de recréer une centrale inertielle, mais simplement d'essayer d'estimer l'angle d'inclinaison ainsi que la vitesse angulaire d'un objet selon un axe uniquement à l'aide d'un filtre de Kalman. Ce problème nous permettra non seulement de toucher du doigt la complexité de la mise en œuvre d'une centrale inertielle, mais aussi et surtout d'utiliser un filtre de Kalman afin de faire de la prédiction d'information et de la fusion de données multi-capteurs.

Prérequis : Pour lire cet article le plus confortablement possible, je vous conseille de vous familiariser avec le filtre de Kalman. Vous trouverez d'autres articles parlant de ce filtre sur ce site :

- Le filtre de Kalman : intérêts et limites
- De l'estimateur optimal au filtre de Kalman (article mathématiques)

I. Les capteurs

Nous disposons de deux capteurs pour cet exemple :

- Un accéléromètre détectant l'accélération d'un mobile selon l'axe Y. Cet accéléromètre nous renvoie des valeurs d'accélérations bruitées.
- Un gyroscope détectant la vitesse angulaire selon l'axe X (donc la vitesse à laquelle le mobile s'incline). Ce gyroscope nous renvoie des valeurs de vitesses angulaires bruitées et biaisées.

Toute la difficulté du problème vient du fait que le gyroscope possède un biais évoluant dans le temps ! C'est à cause de ce biais que l'on dit que les gyroscopes dérivent. Ce qui est problématique, c'est que l'on ne connait pas la forme de la dérive. Du coup, si on se contente d'un seul gyroscope, on aura l'impression que le mobile s'incline lentement alors qu'en réalité, celui-ci ne bouge pas !

Avant d'entamer une modélisation du système, nous allons émettre quelques hypothèses concernant le mobile et les capteurs.

- Tout d'abord, on considère que le mobile ne subit aucune accélération
- Ensuite, on considère les bruits des deux capteurs comme gaussiens
- On considère que l'accéléromètre nous revoie des valeurs d'accélérations directement en mètres par seconde carré
- On considère que le gyroscope nous renvoie des valeurs de vitesses angulaires directement en radians par seconde
- Enfin, on considère le biais du gyroscope à l'instant initial comme nul. (ce qui n'est pas trop compliqué à mettre en place en pratique)

II. Les paramètres à estimer

Comme vous vous en êtes rendu compte, l'accéléromètre ne va pas servir à mesurer une accélération du mobile car on a supposé que le mobile n'accélérait pas ! En réalité, l'accéléromètre va nous servir à obtenir une mesure de l'angle d'inclinaison du mobile ! Comment est-ce faisable ? Tout simplement

parce que la force de gravitation n'est rien d'autre qu'une accélération !
Mettez votre accéléromètre selon l'axe Y et vous ne verrez aucune accélération. Mais orientez le maintenant complètement vers le sol (selon l'axe Z). Vous obtiendrez une valeur non nul en sortie de votre accéléromètre. Cette valeur sera d'environ 9.8 mètres par seconde carré, soit l'équivalent de la constante de pesanteur sur Terre (un g).
Pour obtenir une mesure de l'angle d'orientation du mobile, il suffit donc de prendre moins l'arc sinus du rapport entre l'accélération fournis par l'accéléromètre et la constante de pesanteur g.
Côté gyroscope, nous pouvons obtenir une mesure de la vitesse angulaire du mobile (certes biaisée). Pour obtenir l'angle d'orientation du mobile, il suffit donc d'intégrer la vitesse angulaire par rapport au temps. On peut donc remarquer que cette information n'est pas très précise, car le fait d'intégrer dans le domaine discret (on n'a que des échantillons de la vitesse angulaire) va inéluctablement engendrer une dérive (en plus de celle apporté par le biais du gyroscope lui-même).
Nous chercherons donc, dans cet exemple, à estimer l'angle du mobile, sa vitesse angulaire ainsi que le biais du gyroscope à l'aide d'un accéléromètre et d'un gyroscope.

III. La modélisation du problème

Pour appliquer un filtre de Kalman, il faut d'abord et avant tout modéliser le problème en fonction des paramètres à estimer et des mesures des capteurs.
La mesure de l'angle d'inclinaison du mobile par l'accéléromètre (α_M) s'obtient en ajoutant le bruit de l'accéléromètre (b_2) à la vraie valeur de l'angle d'inclinaison du mobile (α)
La mesure de la vitesse angulaire du mobile par le gyroscope (u) s'obtient en ajoutant le bruit du gyroscope (b_1) et le biais de celui-ci (b) à la vraie valeur de la vitesse angulaire du mobile ($\dot{\alpha}$)
On en déduit les équations suivantes :

$$\alpha_M=\alpha+b_2$$

$$u=\dot{\alpha}+b+b_1$$

On peut écrire ces équations sous la forme matricielle $Y=HX+B$ que l'on appelle l'équation de mesure

- Y s'appelle le vecteur de mesure
- X est le vecteur d'état
- B, le vecteur de bruit
- H, la matrice d'observation

$$(u\alpha_M)=(100110).\left(\dot{\alpha}\,\alpha b\right)+(b_1 b_2)$$

Il faut aussi modéliser l'évolution des paramètres à estimer dans le temps.
Ici, ne connaissant pas le modèle d'évolution du biais du gyroscope, on va le considérer comme fixe : $b(k+1)=b(k)$
Le mobile pouvant faire n'importe quoi, nous ne connaissons pas non plus le modèle d'évolution de la vitesse angulaire du mobile. On va donc aussi la considérer comme étant fixe : $\dot{\alpha}(k+1)=\dot{\alpha}(k)$
Enfin, on peut exprimer l'inclinaison du mobile en fonction de la vitesse angulaire à l'instant précédent : $\alpha(k+1)=\alpha(k)+t_e.\dot{\alpha}(k)$
t_e étant la période d'échantillonnage du système (on récupère les mesures des capteurs de manière discrète).
Ici encore, on peut réécrire ces équations sous la forme matricielle $X_{k+1}=A.X_k$ appelée l'équation d'état

- X_{k+1} est le nouveau vecteur d'état

•X_k est l'ancien vecteur d'état
•A est la matrice de transition

$$\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \alpha\\ b\end{pmatrix}_{k+1}=\begin{pmatrix}1 & t_e & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \alpha\\ b\end{pmatrix}_k$$

Pour pouvoir utiliser le filtre de Kalman, il nous manque deux matrices apparaissant dans les calculs : la matrice de covariance du bruit de mesure et la matrice de covariance du bruit de commande.
Comme on a deux capteurs avec des bruits gaussiens, la matrice de covariance du bruit de mesure (matrice d'auto-corrélation) sera une matrice diagonale de dimension deux avec, pour valeurs des termes sur la diagonale, le carré de l'écart-type du bruit des capteurs. (En effet, les bruits des capteurs sont considérés comme gaussiens et décorrélés entre eux)

$$R=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0\\ 0 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

•σ_1 est l'écart type du bruit du gyroscope
•σ_2 est l'écart type du bruit de l'accéléromètre

Enfin, la matrice de covariance du bruit de commande représente les erreurs de modélisation du système. C'est grâce à cette matrice que les erreurs commises lors de la modélisation (ici, on a estimé que le biais et la vitesse angulaire étaient constants alors qu'en réalité, c'est faux) seront "gommées". Cette matrice sera une matrice diagonale de dimension trois (on a un vecteur d'état de taille 3). Les termes sur la diagonale correspondent au carré des écart-types maximaux de l'erreur que l'on autorise pour chacun des paramètres à estimer. Cette matrice est à déterminer empiriquement en fonction des données du problème.
Il faut avoir conscience que si on définie des termes d'erreur trop petit par rapport à la réalité, alors le filtre de Kalman n'arrivera pas à rectifier les erreurs du modèle et fera des estimations biaisés. Par contre, si les termes d'erreurs sont trop importants par rapport à la réalité, alors le modèle ne sera pas biaisé, mais les estimations produites seront de piètre qualité (la covariance de l'erreur sera importante)
La difficulté du filtre de Kalman est donc de bien estimer cette matrice de covariance du bruit de commande afin d'avoir une estimation la plus précise possible sans pour autant avoir de biais.

$$Q=\begin{pmatrix}\epsilon_{\dot{\alpha}} & 0 & 0\\ 0 & \epsilon_{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & \epsilon_b\end{pmatrix}$$

•$\epsilon_{\dot{\alpha}}$ est la variance maximale de l'erreur autorisée sur la modélisation de la vitesse angulaire (équation d'état)
•ϵ_{α} est la variance maximale de l'erreur autorisée sur la modélisation de l'inclinaison (équation d'état). Dans notre exemple, cette valeur doit être contrainte à 0. En effet, le modèle pour l'inclinaison a été parfaitement déterminé en fonction de l'inclinaison précédente et de la vitesse angulaire précédente. Il n'y a pas d'erreur possible.
•ϵ_b est la variance maximale de l'erreur autorisée sur la modélisation du biais du gyroscope (équation d'état)

4. Application du filtre de Kalman

Maintenant que l'on a modélisé le système et déterminé toutes les matrices indispensables, nous pouvons appliquer le fameux filtre de Kalman :
La phase de prédiction

$$\hat{X}^{+}_{k}=A.\hat{X}_{k}$$

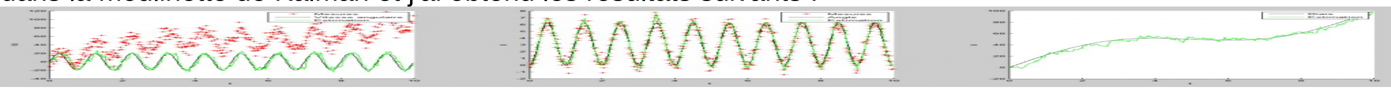
$$P^{+}_{k}=A.P_{k}.A^{T}+Q$$

La phase de mise à jour

$K_{k+1}=P_{+k}.h^T_{k+1}.(R_{k+1}+h_{k+1}.P_{+k}.h^T_{k+1})^{-1}$
$P_{k+1}=(I-K_{k+1}.h_{k+1}).P_{+k}$
$\hat{X}_{k+1}=\hat{X}_{+k}+K_{k+1}.(y_{k+1}-h_{k+1}.\hat{X}_{+k})$
Vous reconnaissez donc $\hat{X}_{k+1}$ comme étant l'estimation du nouveau vecteur d'état et P_{k+1} comme étant la nouvelle matrice de covariance de l'état estimé. Cette dernière matrice vous renseignera sur la précision de l'estimation de chaque paramètre.
Il vous suffit donc d'appliquer ces deux phases à chaque fois que vous obtenez de nouveaux échantillons provenant des capteurs.

5. Simulation sous MatLab

Voici le résultat de la simulation de cet exemple sous Matlab.
J'ai pris une vitesse angulaire réelle sinusoïdale, j'ai calculé l'angle d'inclinaison réel du mobile, j'ai fait des mesures de la vitesse angulaire et de l'angle d'inclinaison en rajoutant le bruit très important et le biais du gyroscope afin de simuler les données capteurs reçu. Enfin, j'ai passé ces données capteurs dans la moulinette de Kalman et j'ai obtenu les résultats suivants :



On s'aperçoit que malgré le bruit important, le filtre de Kalman a réussi à estimer assez correctement le biais du gyroscope, ce qui nous permet donc de retrouver la vitesse angulaire du mobile précisément !!
Beaucoup de personnes me demande le code de ma simulation. C'est pourquoi j'ai décidé de le distribuer, bien que le code ne soit pas très propre, ni bien commenté. Pour afficher le code, il suffit de cliquer ici.

6. Conclusion

Nous avons donc vu un exemple illustrant l'utilisation du filtre de Kalman pour faire de la fusion de donnée multi-capteurs afin d'estimer les paramètres de notre système.
Bien sûr, dans un système réel, bien souvent, le mobile subit des accélérations, ce qui fait que cette méthode n'est pas applicable tel quelle. En effet, dans le cas d'une accélération non nul du mobile, les données obtenues par l'accéléromètre sera donc la somme de l'accélération et de la gravité terrestre, ce qui ne nous permet plus d'estimer l'inclinaison du mobile en prenant l'arc sinus de cette valeur !
Là est toute la difficulté lorsque l'on souhaite créer une centrale inertielle performante.
(Pour encore aller plus loin, découvrez le filtre de Kalman étendu :http://www.ferdinandpiette.com/blog/2011/05/le-filtre-de-kalman-etend