Fourier Dönüşümü ve Özellikleri

Hakan ERGÜL
Öğr. No: o182119002
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Matematik Anabilim Dalı
Giresun Üniversitesi

16/11/2018

1 Giriş

Mühendislik ve bilimin birçok dalında uygulaması olan Fourier serileri, periyodik fonksiyonların sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının (sonsuz) toplamı olarak yazılabilmesinde kullanılır. Fakat periyodik olmayan fonksiyonların bu şekilde periyodik fonksiyonların toplamı olarak ifade edilmesinde Fourier serileri yetersiz kalmaktadır. İşte burada Fourier dönüşümü kullanılmaktadır. Öncelikle Fourier dönüşümünün tanımını ve temel özelliklerini ifade edeceğiz.

2 Tanımı

Tanımımızı gerçel sayılar kümesinde tanımlı Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L^1(\mathbb{R})$ üzerinde vereceğiz.

Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun L^1 normu

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

şeklinde tanımlanır. $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ ifadesi yerine sadelik açısından $\|f\|_1$ gösterimini tercih edeceğiz.

Tanım. İşte herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

biçiminde tanımlanır.

3 Özellikleri

Fourier dönüşümünün özelliklerini aşağıdaki teoremle verelim:

Teorem 1. Keyfi $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. Herhangi $\alpha \in \mathbb{C}$ için $(\widehat{\alpha f+g})(t)$= $\alpha\widehat{f}(t)$ + $\widehat{g}(t)$ dir.
2. $\overline{f}$, f fonksiyonunun karmaşık eşleniğini göstermek üzere,

$$\widehat{\overline{f}}(t) = \overline{\widehat{f}}(-t)$$

olur.
3. Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı alalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = f(x+a)$ ise $g \in L^1(\mathbb{R})$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\widehat{g}(t) = e^{iat}\widehat{f}(t)$$

dir.
4. Bir $b \in \mathbb{R}$ sabit sayısı alalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için $h(x) = f(x)e^{bx}$ ise $h \in L^1(\mathbb{R})$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t-b)$$

dir.
5. c sıfırdan farklı bir gerçel sayı ve her $x \in \mathbb{R}$ için $j(x) = f(cx)$ ise $j \in L^1(\mathbb{R})$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\widehat{j}(t) = \frac{\widehat{f}(t/c)}{|c|}$$

dir.

İspat.

1. Herhangi $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
(\widehat{\alpha f+g})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}(\alpha f+g)(x)e^{-itx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha f(x)+g(x)\right]e^{-itx}dx \\
&= \alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}dx + \int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-itx}dx \\
&= \alpha\widehat{f}(t)+\widehat{g}(t)
\end{aligned}$$

dir.

2. Bir f fonksiyonunun karmaşık eşleniğinin Fourier dönüşümü, o fonksiyonun Fourier dönüşümünün karmaşık eşleniğine eşittir:

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{f}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(x)e^{-itx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(x)\overline{e^{itx}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)e^{itx}}dx \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{itx}dx} \\
&= \overline{\widehat{f}(-t)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. İntegralde değişken değiştirme yapacağız, yani $y = x + a$ dersek

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-itx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)e^{-itx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-it(y-a)}dy \\
&= e^{iat}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-ity}dy \\
&= e^{iat}\widehat{f}(t)
\end{aligned}$$

bulunur.

4. $h(x) = f(x)e^{ibx}$ verilmiş. O halde

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-itx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ibx}e^{-itx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(t-b)x}dx \\
&= \widehat{f}(t-b)
\end{aligned}$$

olur.

5. Bir c sıfırdan farklı gerçel sayısı için $j(x) = f(cx)$ verilmiş. Buradan

$$\begin{aligned}
\widehat{j}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} j(x)e^{-itx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(cx)e^{-itx}dx
\end{aligned}$$

olup $u = cx$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$= \frac{1}{c}\int_{c(-\infty)}^{c\infty} f(u)e^{-it\frac{u}{c}}du$$

olur. Fakat burada integralin sınırları c nin işaretine göre değişir. Eğer $c > 0$ ise

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c}\int_{c(-\infty)}^{c\infty} f(u)e^{-it\frac{u}{c}}du \\
&= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-it\frac{u}{c}}du \\
&= \frac{1}{c}\widehat{f}(\frac{t}{c})
\end{aligned}$$

tersine $c < 0$ ise

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c}\int_{c(-\infty)}^{c\infty} f(u)e^{-it\frac{u}{c}}du \\
&= \frac{1}{c}\int_{\infty}^{-\infty} f(u)e^{-it\frac{u}{c}}du \\
&= -\frac{1}{c}\widehat{f}(\frac{t}{c})
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\widehat{j}(t) = \frac{1}{|c|}\widehat{f}(\frac{t}{c})$$

bulunur. □

Şimdi bir f fonksiyonunun tek olması halinde, fonksiyonun Fourier dönüşümü olan $\widehat{f}$ nin de tek olacağınız göstereceğiz. Benzer durum çift olmaları halinde de geçerlidir.

Teorem 2. Keyfi $f \in L^1(\mathbb{R})$ tek ise $\widehat{f}$ de tektir.
İspat. Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ tek fonksiyonu alalım. Buradan $\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx$ olduğunu biliyoruz. İntegralde $y = -x$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$\begin{aligned}\widehat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)e^{-it(-y)}dy \\ &= -\widehat{f}(-t)\end{aligned}$$

Benzer olarak f çift olduğunda $\widehat{f}$ nin de çift olacağı gösterilebilir. □

Teorem 3. Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve bu fonksiyonun Fourier dönüşümü $\widehat{f}$ verilsin. O halde

$$\left|\widehat{f}(t)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \|f\|_1$$

dir.
İspat. Biliyoruz ki bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonu için $\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx$ dir. Her iki tarafın mutlak değerini alırsak

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f}(t)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)e^{-it(x)}\right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\underbrace{\left|e^{-itx}\right|}_{1} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \\ &= \|f\|_1\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. □

4 Girişim

Bu başlıkta girişimin tanımını verip Fourier dönüşümü ile ilgili bir özelliğini vereceğiz.

Tanım $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının girişimi

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$f, g \in L^1(\mathbb{R})$ olarak aldığımızda bu iki fonksiyonun girişimlerinin Fourier dönüşümü, Fourier dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani Fourier dönüşümü sayesinde girişim işlemi uygulanmakta zorluk çekilen durumlarda, fonksiyonların Fourier dönüşümlerini çarpıp daha sonra ters Fourier dönüşümü uygulamak işimizi kolaylaştırabilir. Şimdi bu özelliği ifade eden teoremi verelim:

Teorem 4. Keyfi $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonları için $(f * g) \in L^1(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca