Zamfirescu Dönüşümünün Bir Genelleştirmesi

Hakan ERGÜL

Atatürk Üniversitesi

April 22, 2016

İçindekiler

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

$\square$

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

- (Kannan Dönüşümü[2])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \tag{K}$$

$\square$

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

- (Kannan Dönüşümü[2])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \tag{K}$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\} \tag{C}$$

□

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

- (Kannan Dönüşümü[2])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \tag{K}$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\} \tag{C}$$

şartını sağlıyorsa, f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

□

Zamfirescu Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

1. $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$
2. $d(f(x), f(y)) \leqslant \beta\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\}$
3. $d(f(x), f(y)) \leqslant \gamma\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\}$

şartlarından en az biri doğru ise f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Not

- Zamfirescu dönüşümü [4] tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.

Zamfirescu Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

1. $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$
2. $d(f(x), f(y)) \leqslant \beta\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\}$
3. $d(f(x), f(y)) \leqslant \gamma\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\}$

şartlarından en az biri doğru ise f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Not

- Zamfirescu dönüşümü [4] tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.
- Rhoades [5] 'de *Theorem 1. (xiv)* ve *(xxv)*' den Zamfirescu dönüşümünün, (B), (K) ve (c)'den daha genel olduğu göstermiştir.

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x)) + d(y, f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max \left\{ d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x)) + d(y, f(x))] \right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x))+d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x))+d(y, f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Proof.

Zamfirescu dönüşümünün tanımının direk sonucudur. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı,tanımdaki 3 şarttan herhangi biri için daha büyüktür. □

Definition ((ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü)

(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\psi, \phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar ayrıca ψ azalmayan ve $\phi(x) = 0 \iff x = 0$ ve

$$M(x, y) := \left\{ d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2} \right\} \tag{1}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi\big(d(f(x), f(y))\big) \leqslant \psi\big(M(x, y)\big) - \phi\big(M(x, y)\big) \tag{2}$$

eşitsizliğini sağlayan f dönüşümüne (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü denir. □

Lemma (Asimptotik Regülerlik)

f bir (ψ, ϕ)*-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere* $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ *dır.*

Lemma (Asimptotik Regülerlik)

f bir (ψ,ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ dır.

Lemma (Asimptotik Regülerlik)

f bir (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ dır.

Proof.

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n+1}) &= \max\left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, f(x_n)) + d(x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{d(x_n, f(x_{n+1})) + d(x_{n+1}, f(x_n))}{2} \right\} \\ &= \max\left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2} \right\} \\ &= \max\left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \right\} \end{aligned}$$

□

Lemma (Asimptotik Regülerlik)

f bir (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ dır.

Proof.

$$\begin{aligned}
M(x_n, x_{n+1}) &= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, f(x_n)) + d(x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2},\right.\\
&\qquad \left.\frac{d(x_n, f(x_{n+1})) + d(x_{n+1}, f(x_n))}{2}\right\}\\
&= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2},\right.\\
&\qquad \left.\frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2}\right\}\\
&= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right\}
\end{aligned}$$

□

elde ederiz. Burada iki durum söz konusu olur:

Durum 1. $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ **olması halinde :**

$$\begin{aligned}\psi\big(d(x_{n+1}, x_{n+2})\big) &= \psi\big(d(f(x_n), f(x_{n+1}))\big)\\ &\leqslant \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - \phi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)\\ &\leqslant \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)\end{aligned}$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leqslant d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Yani $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalandır.

Durum 2. $M(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})\right)$ **olması hali :**

O halde

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leqslant \frac{1}{2}\left(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})\right) && (3) \\ &\leqslant d(x_{n+1}, x_{n+2}) && (4) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \psi\left(d(x_{n+1}, x_{n+2})\right) &= \psi\left(d(f(x_n), f(x_{n+1}))\right) && (5) \\ &\leqslant \psi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) && (6) \\ &\quad - \phi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) && (7) \\ &\leqslant \psi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) && (8) \end{aligned}$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leqslant d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Bu ise (4) eşitsizliği ile çelişir.

Lemmanın Sonucu:

Sonuç olarak $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ dır. O halde $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi monoton azalan(artmayan) bir dizidir ve bir $r \geqslant 0$ sayısına yakınsar. Bu bilgiyi kullanırsak

$$\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \leqslant \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1}))$$

olup $n \to \infty$ iken limitini alırsak

$$\psi(r) \leqslant \psi(r) - \phi(r)$$

elde ederiz ki bu $r = 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $\{d(x_n, x_{n+1})\} \to 0$. □

Theorem ((ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü)

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü ise bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Ana Teoremin İspatı

Öncelikle $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. O halde $\{x_n\}$ dizisinin öyle iki $\{x_{n(k)}\}$ ve $\{x_{m(k)}\}$ altdizisi vardır ki $\varepsilon_0 > 0$ olmak üzere $m(k) > n(k) \geqslant k$ olacak şekildeki her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geqslant \varepsilon_0$$

dır. Dahası yukarıdaki şartları sağlayan $m(k)$ sayısını $n(k)$ dan büyük en küçük sayı olarak seçersek

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \varepsilon_0$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) && (9)\\ &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) && (10)\\ &< d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + \varepsilon_0 && (11) \end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ iken

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \to \varepsilon_0 \quad (12)$$

olur.

Ana Teoremin İspatı

Yine

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) && (13) \\ &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) && (14) \\ &\quad + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) && (15) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \to \varepsilon_0 \tag{16}$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Benzer olarak

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) && (17) \\ &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) && (18) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \to \varepsilon_0 \qquad (19)$$

buluruz.

Ana Teoremin İspatı

Ayrıca

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) && (20) \\ &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) && (21) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \to \varepsilon_0 \quad (22)$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Sonuç olarak Diğer yandan

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon_0) &\leqslant \psi\big(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})\big) &(23)\\ &= \psi\big(d(fx_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1})\big) &(24)\\ &\leqslant \psi\big(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})\big) - \phi\big(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})\big) &(25)\end{aligned}$$

dır. Burada (12), (16), (19) ve (22) deki bilgileri kullanırsak

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) &= \lim_{k\to\infty} \max\Big\{ d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), &(26)\\ &\frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})], &(27)\\ &\frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})]\Big\} &(28)\\ &= \max\{\varepsilon_0, 0, \varepsilon_0\} &(29)\\ &= \varepsilon_0 &(30)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Bunu (25)'te yerine yazarsak

$$\psi(\varepsilon_0) \leqslant \psi(\varepsilon_0) - \phi(\varepsilon_0) \tag{31}$$

olup $\phi(\varepsilon_0) \leqslant 0$ olur ki bu da $\varepsilon_0 = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise baştaki kabulümüzle çelişir. Demekki kabulümüz yanlıştır. Yani $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam metrik uzay olduğu için $\{x_n\}$ bu uzayda bir x^* noktasına yakınsar. Buradan hareketle

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x^*) = \lim_{n\to\infty} \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{1}{2}[d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, fx^*)],\right. \tag{32}$$

$$\left.\frac{1}{2}[d(x_n, fx^*) + d(x^*, x_{n+1})]\right\} \tag{33}$$

$$= \frac{d(x^*, fx^*)}{2} \tag{34}$$

elde ederiz. Bu bilgiyi (2) de yerine yazarsak $n \to \infty$

$$\psi(d(x^*, fx^*)) \leqslant \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \tag{35}$$

Ana Teoremin İspatı

yani bu da

$$\phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \leqslant \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \psi(d(x^*, fx^*)) \tag{36}$$

eşittir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı ψ azalmayan olduğu için $d(x^*, fx^*) \neq 0$ olduğu sürece negatif olup ϕ 'nin negatif olmaması ile çelişir. Böylece $d(x^*, fx^*) = 0$ olup x^* noktası f nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x' \neq x^*$, f nin iki sabit noktası olsun. O halde

$$\begin{aligned} \psi(d(x', x^*)) &= \psi(d(fx', fx^*)) && (37)\\ &\leqslant \psi(M(x', x^*)) - \phi(M(x', x^*)) && (38)\\ &\leqslant \psi(d(x', x^*)) - \phi(d(x', x^*)) && (39) \end{aligned}$$

olup $\phi(d(x', x^*)) \leqslant 0$ elde edilir ki $d(x', x^*) = 0$ olmasını gerektirir. Bu sabit noktanın tek olduğunu kanıtlar. $\square$

Kaynaklar

[1] S. Banach, “Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales,” *Fund. Math.*, vol. 3, p. 160, 1922.

[2] R. Kannan, “Some results on fixed points-ii,” *Am. Math. Mon.*, vol. 76, pp. 405–408, 1969.

[3] S. K. Chatterjea, “Fixed-point theorems,” *C. R. Acad. Bulgare Sei.*, vol. 25, pp. 727–730, 1972.

[4] T. Zamfirescu, “Fixed point and contraction theorems in metric spaces,” *aequationes mathematicae*, vol. 11, no. 2, pp. 138–142, 1974.

[5] B. E. Rhoades, “A comparison of various definitions of contractive mappings,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 226, no. 1970, pp. 257–290, 1977.

[6] T. Zamfirescu, “Fix point theorems in metric spaces,” *Arch. der Math.*, vol. 23, pp. 292–298, 1972.