TEZ MALZEMELERI

HAKAN ERGÜL

1. TANIMLAR

Tanım 1 (sabit nokta)**.** $f : X \to X$ bir fonksiyon olmak üzere $f(x) = x$ şeklindeki $x \in X$ noktasına f fonksiyonunun sabit noktası denir.

Tanım 2 (periyodik nokta)**.** $f : X \to X$ bir fonksiyon ve $N > 1$ bir doğal sayi olmak üzere $f^1(x) = f(x)$ ve $f^{N+1}(x) = f(f^N(x))$ şeklinde tanimlansin. $f^N(x) = x$ şeklindeki $x \in X$ noktasına f fonksiyonunun periyodik noktası denir. $N = 1$ için bu x noktası sabit noktadır. Ayrica f^N nin sabit noktaları, f nin periyodik noktalarıdır.

Tanım 3 (lipschitz fonksiyon)**.** (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Bir $\alpha > 0$ reel sayısı için f fonksiyonu

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona lipschitz fonksiyonu, α reel sayısına da lipschitz sabiti denir.

Tanım 4 (daraltan fonksiyon)**.** (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Bir $0 \leqslant \alpha < 1$ reel sayısı için f fonksiyonu

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona daraltan fonksiyon denir. $\alpha = 1$ için bu şartı sağlayan f fonksiyonuna genişlemeyen fonksiyon denir.

Tanım 5 (kesin daraltan fonksiyon)**.** (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olmak üzere $x \neq y$ için

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona kesin daraltan fonksiyon denir.

$$\text{daraltan} \Longrightarrow \text{kesin daraltan} \Longrightarrow \text{genişlemeyen} \Longrightarrow \text{Lipschitz}$$

Tanım 6 (mesafe değiştiren fonksiyon)**.** $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu

- ψ sürekli ve azalmayan(monoton artan)dir.
- $\psi(t) = 0 \iff t = 0$

şartlarıni sağlıyorsa bu fonksiyona mesafe değiştiren fonksiyon denir. Her mesafe değiştiren fonksiyon bir metriktir. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Ters örnek: $\psi(t) = t^2$.

Tanım 7 (asimptotik regulerlik)**.** (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere bir $x_0 \in X$ noktası için

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) = 0$$

oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında asimptotik regulerdir denir.

Tanım 8 (alt yarısürekli)**.** (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$$

oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında alt yarısüreklidir denir. Veya X'teki x_0'a yakınsayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(x_0)$$

oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında alt yarısüreklidir denir.

Tanım 9 (üst yarısürekli)**.** (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$$

oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında ust yarısüreklidir denir.Veya X'teki x_0'a yakınsayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(x_0)$$

oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında üst yarısüreklidir denir.

Tanım 10 (metrik uzay)**.** X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$

- $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve d ile birlikte X'e metrik uzay denir ve bu metrik uzay (X,d) ile gosterilir.

Tanım 11 (cauchy dizisi)**.** (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m,n > N$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak bicimde $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 12 (tam metrik uzay)**.** (X,d) metrik uzayındaki her cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsıyorsa bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 13 (vektor(lineer) uzayı)**.** V boş olmayan bir küme, F bir cisim ve $+ : V \times V \to V$ ve $\cdot : F \times V \to V$ işlemleri aşağıdaki şartları sağlasin:

V1. Her $x,y \in V$ için $x+y \in V$ dir.
V2. Her $x,y,z \in V$ için $x+(y+z) = (x+y)+z$ dir.
V3. Her $x \in V$ için $x+\theta = \theta + x = x$ olacak bicimde $\theta \in V$ vardir.
V4. Her $x \in V$ için $x+(-x) = (-x)+x = \theta$ olacak bicimde $-x \in V$ vardir.
V5. Her $x,y \in V$ için $x+y = y+x$ dir.
V6. Her $x \in V$ ve her $\alpha \in F$ için $\alpha \cdot x \in V$ dir.
V7. Her $x \in V$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için $(\alpha\beta)\cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$ dir.
V8. Her $x \in V$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ dir.
V9. Her $x,y \in V$ ve her $\alpha \in F$ için $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ dir.
V10. Her $x \in V$ için $1 \cdot x = x$ dir.

Bu şartları sağlaniyorsa V'ye F cismi üzerinde vektor uzayı denir. Ozel olarak $F = \mathbb{R}$ alınırsa reel vektör uzayı, $\mathbb{C}$ alınırsa kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 14 (normlu uzay)**.** N, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : N \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve bu fonksiyonun bir $x \in N$'deki değeri de $\|x\|$ ile gösterilsin. Her $x,y \in N$ için

N1 $\|x\| = 0 \iff x = \theta$
N2 $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha|\|x\|, \quad (\alpha \in F)$
N3 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa bu $\|\cdot\|$ fonksiyonuna norm, bu fonksiyonla birlikte N vektor uzayına normlu uzay denir.

Tanım 15 (Banach uzay)**.** N bir normlu uzay ve $d(x,y) = \|x-y\|$ şeklinde tanımlanan fonksiyon da gerçekten bir metriktir. Bu metriğe göre tam olan N normlu uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 16 (iç çarpım uzayı)**.** N, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times N \to F$ de fonksiyonu her $x,y,z \in N$ için

İ1 $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
İ2 $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
İ3 $\langle \alpha \cdot x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle, \quad (\alpha \in F)$
İ4 $\langle x,x\rangle \geqslant 0$ ve $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu denir. Bu fonksiyonla birlikte N vektör uzayına iç çarpım uzayı veya ön-Hilbert uzayı denir.

Tanım 17 (Hilbert Uzayı)**.** H bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ bir norm ve $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ bir metrik tanımlar. Bu metriğe göre tam olan H iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Tanım 18 (sınırlı küme)**.** (X,d) bir metrik uzay ve $B \subset X$ olmak üzere her $x,y \in B$ için $d(x,y) \leqslant r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa B kümesine sınırlı küme denir.

Tanım 19 (diameter-çap)**.** (X,d) bir metrik uzay ve $B \subset X$ olmak üzere her $x,y \in B$ için $\sup_{x,y\in B} d(x,y)$ sayısına B kümesinin çapı denir.

Tanım 20 (totally bounded-tamamen sınırlı(precompact-önkompakt))**.** (X,d) bir metrik uzay ve $B \subset X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B_\varepsilon(a_n), \quad \big(B_\varepsilon(a_n) = \{x : d(x,a_n) < \varepsilon\}\big)$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \cdots, a_N \in X$ sonlu sayıda nokta vardır. A uniformly continuous function maps totally bounded sets to totally bounded sets.A totally bounded set is geometrically 'finite', so an infinite sequence of points in a totally bounded set is caged in, so to speak, with nowhere to escape to: A set B is totally bounded $\iff$ Every sequence in B has a Cauchy subsequence.

Tanım 21 (kompakt küme)**.** (X,d) bir metrik uzay ve $K \subseteq X$ olsun. K kümesinin her açık örtüsünün yine K kümesini örten onlu bir alt örtüsü varsa K kümesine kompakt küme denir.

Tanım 22 (convex-konveks)**.** V bir vektör uzay ve $A \subseteq V$ olsun. Eğer $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere her $u, v \in A$ için

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in A$$

oluyorsa A kümesine konveks küme denir.

Tanım 23 (convex hull)**.** V bir vektör uzay ve $A \subseteq V$ olmak üzere A kümesini içeren tüm konveks kümelerin kesişimine (yani en küçük konveks kümeye) convex hull denir.

2. TEOREMLER

Teorem 1 (banach daralma ilkesi)**.** (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $f : X \to X$ *bir daraltan fonksiyon olsun.* f *fonksiyonunun bu uzayda bir tek sabit noktası vardır. Dahası* x *noktasının* f *altındaki* n*-inci iterasyonu olan* $f^n(x)$, $f^0(x) = x, \quad f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ *şeklinde tanımlansın.* $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ *bu fonksiyonun sabit noktasıdır.*

Teorem 2. 3. ÖRNEKLER

Örnek 1 (sabit nokta)**.** $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$ *fonksiyonu için* $x = 0$ *ve* $x = 1$ *noktaları sabit noktalardır. Gerçekten* $f(0) = 0$ *ve* $f(1) = 1$ *dir.*

Örnek 2 (sabit nokta)**.** *aaaaa*