

# $(\psi, \phi)$ -zayıf Zamfirescu Dönüşümü

Hakan ERGÜL

Atatürk Üniversitesi

September 26, 2016

# İçindekiler

## 1 Giriş

- Mesafe Değiştiren Fonksiyon
- Asimptotik Regülerlik
- Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri
- Zamfirescu Dönüşümü
- Zamfirescu'ya Denk Bir Teorem
- Zayıf Daraltan Dönüşüm
- ( $\psi - \phi$ )-zayıf Daraltan Dönüşüm
- ( $\psi - \phi$ )-zayıf Kannan ve Chatterjea Dönüşümleri

## 2 Ana Sonuçlar

- ( $\psi$ ,  $\phi$ )-zayıf Zamfirescu dönüşümü
- Bir Lemma
  - Durum 1
  - Durum 2
  - İspatın Sonucu :
- Ana Teorem
- Ana Teoremin İspatı

## 3 Kaynakça

# Özet

Dutta ve Choudhury [4], Banach sabit nokta teoreminden daha genel olan sabit nokta teoremini ortaya attı. Kır ve Kızıltunç [7] aynı mantığı Kannan[5] ve Chatterjea[3] sabit nokta teoremlerine uygulayarak daha genel bir sonuç elde etti. Bu çalışmada aynı mantığı Zamfirescu[10]'den daha genel bir teoreme uygulamaya çalıştık.

# Mesafe Değiştiren Fonksiyon

## Tanım ([6])

Aşağıdaki şartları sağlayan  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonuna mesafe değiştiren fonksiyon denir:

1  $\psi$  fonksiyonu sürekli ve azalmayan(monoton artan)dır.

2  $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Görüldüğü gibi her mesafe değiştiren fonksiyon bir metriktir fakat tersi her zaman doğru değildir. Tersineörnek olarak  $\psi(t) = t^2$  fonksiyonu verilebilir. [2]

## Tanım

$(X, d)$  metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n x_0, f^{n+1} x_0) = 0$$

oluyorsa  $f$  dönüşümü  $x_0 \in X$  noktasında asimptotik regülerdir denir. [2]

## Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

$(X, d)$  tam metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm,  $\alpha \in [0, 1)$  olmak üzere

■ (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \quad (B)$$



## Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

$(X, d)$  tam metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm,  $\alpha \in [0, 1)$  olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \quad (\text{B})$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fx) + d(y, fy)\} \quad (\text{K})$$



## Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

$(X, d)$  tam metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm,  $\alpha \in [0, 1)$  olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \quad (\text{B})$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fx) + d(y, fy)\} \quad (\text{K})$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fy) + d(y, fx)\} \quad (\text{C})$$





## Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

$(X, d)$  tam metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm,  $\alpha \in [0, 1)$  olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \quad (\text{B})$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fx) + d(y, fy)\} \quad (\text{K})$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fy) + d(y, fx)\} \quad (\text{C})$$

şartını sağlıyorsa,  $f$  dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.



# Zamfirescu Dönüşümü

$(X, d)$  tam metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm,  $\alpha \in [0, 1)$  ve  $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$  olmak üzere her  $x, y \in X$  için

1  $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$

2  $d(fx, fy) \leq \beta \{d(x, fx) + d(y, fy)\}$

3  $d(fx, fy) \leq \gamma \{d(x, fy) + d(y, fx)\}$

şartlarından en az biri doğru ise  $f$  dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

## Not

- Zamfirescu dönüşümü [11] tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.

# Zamfirescu Dönüşümü

$(X, d)$  tam metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm,  $\alpha \in [0, 1)$  ve  $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$  olmak üzere her  $x, y \in X$  için

1  $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$

2  $d(fx, fy) \leq \beta \{d(x, fx) + d(y, fy)\}$

3  $d(fx, fy) \leq \gamma \{d(x, fy) + d(y, fx)\}$

şartlarından en az biri doğru ise  $f$  dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

## Not

- Zamfirescu dönüşümü [11] tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.
- Rhoades [8] 'de *Theorem 1. (xiv)* ve *(xxv)*' den Zamfirescu dönüşümünün, (B), (K) ve (c)'den daha genel olduğu göstermiştir.

Rhoades[8]'de *sayfa 266*'da Zamfirescu dönüşümüne denk olan aşağıdaki teoremi vermiştir:

Rhoades[8]'de *sayfa 266*'da Zamfirescu dönüşümüne denk olan aşağıdaki teoremi vermiştir:

Rhoades[8]'de *sayfa 266*'da Zamfirescu dönüşümüne denk olan aşağıdaki teoremi vermiştir:

### Lemma

$(X, d)$  tam metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm,  $\alpha \in [0, 1)$  olmak üzere

$$d(fx, fy) \leq \alpha \max \left\{ d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, fx) + d(y, fy)], \frac{1}{2}[d(y, fx) + d(y, fy)] \right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

### Tanım ([9])

$(X, d)$  metrik uzay,  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm ve  $\phi$  mesafe değiştiren fonksiyon olmak üzere her  $x, y \in X$  için

$$d(fx, fy) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y))$$

oluyorsa  $f$  dönüşümüne zayıf daraltan dönüşüm denir.

### Not

Rhoades[9], tam metrik uzayda zayıf daraltan dönüşümün bir tek sabit noktası olduğunu ve bu dönüşümün  $(\mathfrak{B})$ 'den daha genel olduğunu göstermiştir. Gerçekten de  $k \in (0, 1)$  olmak üzere  $\phi(t) = kt$  alındığında  $[\mathfrak{B}]$  elde edilir.

Dutta ve Choudhury[4], Rhoades[9]'in vermiş olduğu zayıf daraltan dönüşümden daha genel olan aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

#### Teorem ([4])

$(X, d)$  metrik uzay,  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm ve  $\psi$  ve  $\phi$  mesafe değiştiren fonksiyonlar olmak üzere her  $x, y \in X$  için

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y))$$

oluyorsa  $f$  dönüşümü bu uzayda bir tek sabit noktaya sahiptir.



Dutta ve Choudhury[4]'nin mantığını kullanarak Kır ve Kızıltunç[7], sırasıyla Kannan ve Chatterjea sabit nokta teoremlerinden daha genel olan  $(\psi - \phi)$ -zayıf Kannan ve  $(\psi - \phi)$ -zayıf Chatterjea teoremlerini ortaya atmıştır.

### Teorem $((\psi - \phi)$ -zayıf Kannan[7])

$(X, d)$  tam metrik uzay,  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm ve  $\psi$  ve  $\phi$  mesafe değiştiren fonksiyonlar olmak üzere her  $x, y \in X$  için

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi\left(\frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}\right)$$

oluyorsa  $f$  dönüşümü bu uzayda bir tek sabit noktaya sahiptir.

### Teorem $((\psi - \phi)$ -zayıf Chatterjea[7])

$(X, d)$  tam metrik uzay,  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm ve  $\psi$  ve  $\phi$  mesafe değiştiren fonksiyonlar olmak üzere her  $x, y \in X$  için

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi\left(\frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2}\right)$$

oluyorsa  $f$  dönüşümü bu uzayda bir tek sabit noktaya sahiptir.

### Tanım (( $\psi$ , $\phi$ )-zayıf Zamfirescu dönüşümü)

$(X, d)$  bir metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir dönüşüm,  $\psi, \phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  sürekli fonksiyonlar ayrıca  $\psi$  azalmayan ve  $\phi(x) = 0 \iff x = 0$  ve

$$M(x, y) := \left\{ d(x, y), \frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}, \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2} \right\} \quad (1)$$

olmak üzere her  $x, y \in X$  için

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi(M(x, y)) - \phi(M(x, y)) \quad (2)$$

eşitsizliğini sağlayan  $f$  dönüşümüne ( $\psi$ ,  $\phi$ )-zayıf Zamfirescu dönüşümü denir.  $\square$



## Lemma (Asimptotik Regularlik)

*$f$  bir ( $\psi$ ,  $\phi$ )-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere  $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$  dir.*

## Lemma (Asimptotik Regulerlik)

*$f$  bir  $(\psi, \phi)$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere  $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$  dir.*

## Lemma (Asimptotik Regülerlik)

$f$  bir  $(\psi, \phi)$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere  $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$  dir.

## Proof.

$$\begin{aligned}
 M(x_n, x_{n+1}) &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, fx_n) + d(x_{n+1}, fx_{n+1})}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{d(x_n, fx_{n+1}) + d(x_{n+1}, fx_n)}{2} \right\} \\
 &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2} \right\} \\
 &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \right\}
 \end{aligned}$$



## Lemma (Asimptotik Regülerlik)

$f$  bir  $(\psi, \phi)$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere  $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$  dir.

## Proof.

$$\begin{aligned}
 M(x_n, x_{n+1}) &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, fx_n) + d(x_{n+1}, fx_{n+1})}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{d(x_n, fx_{n+1}) + d(x_{n+1}, fx_n)}{2} \right\} \\
 &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2} \right\} \\
 &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \right\}
 \end{aligned}$$



elde ederiz. Burada iki durum söz konusu olur:

Durum 1.  $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$  olması halinde :

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) &= \psi(d(fx_n, fx_{n+1})) \\ &\leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1})) \\ &\leq \psi(d(x_n, x_{n+1}))\end{aligned}$$

olup  $\psi$  azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Yani  $\{d(x_n, x_{n+1})\}$  dizisi azalandır.



Durum 2.  $M(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{2} (d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}))$  olması hali :

O halde

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2} (d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})) \quad (3)$$

$$\leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) \quad (4)$$

olur. Ayrıca

$$\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) = \psi(d(fx_n, fx_{n+1})) \quad (5)$$

$$\leq \psi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) \quad (6)$$

$$- \phi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) \quad (7)$$

$$\leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) \quad (8)$$

olup  $\psi$  azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Bu ise (4) eşitsizliği ile çelişir.

### Lemmanın Sonucu:

Sonuç olarak  $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$  dir. O halde  $\{d(x_n, x_{n+1})\}$  dizisi monoton azalan (artmayan) bir dizidir ve bir  $r \geq 0$  sayısına yakınsar. Bu bilgiyi kullanırsak

$$\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1}))$$

olup  $n \rightarrow \infty$  iken limitini alırsak

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \phi(r)$$

elde ederiz ki bu  $r = 0$  olmasını gerektirir. Sonuç olarak  $\{d(x_n, x_{n+1})\} \rightarrow 0$ . □

### Teorem $((\psi, \phi)$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü)

$(X, d)$  tam metrik uzay ve  $f : X \rightarrow X$  bir  $(\psi, \phi)$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü ise bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

## Ana Teoremin İspatı

Öncelikle  $\{x_n\}$  dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Varsayalım ki  $\{x_n\}$  bir Cauchy dizisi olmasın. O halde  $\{x_n\}$  dizisinin öyle iki  $\{x_{n(k)}\}$  ve  $\{x_{m(k)}\}$  alt dizisi vardır ki  $\varepsilon_0 > 0$  olmak üzere  $m(k) > n(k) \geq k$  olacak şekildeki her  $k \in \mathbb{N}$  için

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon_0$$

dır. Dahası yukarıdaki şartları sağlayan  $m(k)$  sayısını  $n(k)$  dan büyük en küçük sayı olarak seçersek

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \varepsilon_0$$

elde ederiz. Buradan

$$\varepsilon_0 \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \quad (9)$$

$$\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (10)$$

$$< d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + \varepsilon_0 \quad (11)$$

olup  $k \rightarrow \infty$  iken

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \rightarrow \varepsilon_0 \quad (12)$$

olur.

## Ana Teoremin İspatı

Yine

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (13)$$

$$\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) \quad (14)$$

$$+ d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (15)$$

eşitsizliğinde  $k \rightarrow \infty$  iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \rightarrow \varepsilon_0 \quad (16)$$

elde ederiz.

## Ana Teoremin İspatı

Benzer olarak

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (17)$$

$$\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (18)$$

eşitsizliğinde  $k \rightarrow \infty$  iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \rightarrow \varepsilon_0 \quad (19)$$

buluruz.

## Ana Teoremin İspatı

Ayrıca

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (20)$$

$$\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (21)$$

eşitsizliğinde  $k \rightarrow \infty$  iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \rightarrow \varepsilon_0 \quad (22)$$

elde ederiz.

## Ana Teoremin İspatı

Sonuç olarak Diğer yandan

$$\psi(\varepsilon_0) \leq \psi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})) \quad (23)$$

$$= \psi(d(fx_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1})) \quad (24)$$

$$\leq \psi(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \phi(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) \quad (25)$$

dır. Burada (12), (16), (19) ve (22) deki bilgileri kullanırsak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max \left\{ d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), \right. \quad (26)$$

$$\left. \frac{1}{2} [d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})], \right. \quad (27)$$

$$\left. \frac{1}{2} [d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})] \right\} \quad (28)$$

$$= \max\{\varepsilon_0, 0, \varepsilon_0\} \quad (29)$$

$$= \varepsilon_0 \quad (30)$$

elde ederiz.



## Ana Teoremin İspatı

Bunu (25)'te yerine yazarsak

$$\psi(\varepsilon_0) \leq \psi(\varepsilon_0) - \phi(\varepsilon_0) \quad (31)$$

olup  $\phi(\varepsilon_0) \leq 0$  olup ki bu da  $\varepsilon_0 = 0$  olmasını gerektirir. Bu ise baştaki kabulümüzle çelişir. Demekki kabulümüz yanlıştır. Yani  $\{x_n\}$  bir Cauchy dizisidir.  $(X, d)$  tam metrik uzay olduğu için  $\{x_n\}$  bu uzayda bir  $x^*$  noktasına yakınsar. Buradan hareketle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ d(x_n, x^*), \frac{1}{2} [d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, fx^*)], \right. \quad (32)$$

$$\left. \frac{1}{2} [d(x_n, fx^*) + d(x^*, x_{n+1})] \right\} \quad (33)$$

$$= \frac{d(x^*, fx^*)}{2} \quad (34)$$

elde ederiz. Bu bilgiyi (2) de yerine yazarsak  $n \rightarrow \infty$

$$\psi(d(x^*, fx^*)) \leq \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \quad (35)$$

## Ana Teoremin İspatı

yani bu da

$$\phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \leq \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \psi(d(x^*, fx^*)) \quad (36)$$

eşittir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı  $\psi$  azalmayan olduğu için  $d(x^*, fx^*) \neq 0$  olduğu sürece negatif olup  $\phi$  'nin negatif olmaması ile çelişir. Böylece  $d(x^*, fx^*) = 0$  olup  $x^*$  noktası  $f$  nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki  $x' \neq x^*$ ,  $f$  nin iki sabit noktası olsun. O halde

$$\psi(d(x', x^*)) = \psi(d(fx', fx^*)) \quad (37)$$

$$\leq \psi(M(x', x^*)) - \phi(M(x', x^*)) \quad (38)$$

$$\leq \psi(d(x', x^*)) - \phi(d(x', x^*)) \quad (39)$$

olup  $\phi(d(x', x^*)) \leq 0$  elde edilir ki  $d(x', x^*) = 0$  olmasını gerektirir. Bu sabit noktanın tek olduğunu kanıtlar.  $\square$

- [1] BANACH, S.  
Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.  
*Publié dans Fund. Math.* 3 (1922), 133–181.
- [2] BROWDER, F., AND PETRYSHYN, W.  
The solution by iteration of nonlinear functional equations in banach spaces.  
*Bull. Am. Math. Soc.*, 1 (1966), 571–575.
- [3] CHATTERJEA, S. K.  
Fixed-point theorems.  
*C. R. Acad. Bulgare Sei.* 25 (1972), 727–730.
- [4] DUTTA, P. N., AND CHOUDHURY, B. S.  
A generalisation of contraction principle in metric spaces.  
*Fixed Point Theory Appl.* 8 (2008).
- [5] KANNAN, R.  
Some results on fixed points-ii.  
*Am. Math. Mon.* 76 (1969), 405–408.
- [6] KHAN, M., SWALEH, M., AND SESSA, S.  
Fixed point theorems by altering distances between the points.  
*Bull. Austral. Math. Soc.* 30 (1984), 1–9.

- [7] KIR, M., AND KIZILTUNÇ, H.  
A new extension of some well known fixed point theorems in metric spaces.  
*Math. Sci. Lett.* 1, 1 (2013), 179–183.
- [8] RHOADES, B. E.  
A comparison of various definitions of contractive mappings.  
*Trans. Am. Math. Soc.* 226, 1970 (1977), 257–290.
- [9] RHOADES, B. E.  
Some theorems on weakly contractive mappings.  
*Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.* 47 (2001), 2683–2693.
- [10] ZAMFIRESCU, T.  
Fix point theorems in metric spaces.  
*Arch. der Math.* 23 (1972), 292–298.
- [11] ZAMFIRESCU, T.  
Fixed point and contraction theorems in metric spaces.  
*Aequationes Mathematicae* 11, 2 (1974), 138–142.