(ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu Dönüşümü

Hakan ERGÜL

Atatürk Üniversitesi

April 26, 2016

İçindekiler

Özet

Dutta ve Choudhury [4], Banach sabit nokta teoreminden daha genel olan sabit nokta teoremini ortaya attı. Kır ve Kızıltunç [7] aynı mantığı Kannan[5] ve Chatterjea[3] sabit nokta teoremlerine uygulayarak daha genel bir sonuç elde etti. Bu çalışmada aynı mantığı Zamfirescu[10]′ den daha genel bir teoreme uygulamaya çalıştık.

Mesafe Değiştiren Fonksiyon

Tanım ([6])

Aşağıdaki şartları sağlayan $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonuna mesafe değiştiren fonksiyon denir:

1. ψ fonksiyonu sürekli ve azalmayan(monoton artan)dır.
2. $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Görüldüğü gibi her mesafe değiştiren fonksiyon bir metriktir fakat tersi her zaman doğru değildir. Tersineörnek olarak $\psi(t) = t^2$ fonksiyonu verilebilir. [2]

Tanım

(X, d) metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) = 0$$

oluyorsa f dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında `asimptotik regulerdir` denir. [2]

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

$\square$

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \tag{K}$$

$\square$

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \tag{K}$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\} \tag{C}$$

□

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \tag{K}$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\} \tag{C}$$

şartını sağlıyorsa, f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

□

Zamfirescu Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

1. $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$
2. $d(f(x), f(y)) \leqslant \beta\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\}$
3. $d(f(x), f(y)) \leqslant \gamma\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\}$

şartlarından en az biri doğru ise f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Not

- Zamfirescu dönüşümü [11] tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.

Zamfirescu Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

1. $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$
2. $d(f(x), f(y)) \leqslant \beta\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\}$
3. $d(f(x), f(y)) \leqslant \gamma\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\}$

şartlarından en az biri doğru ise f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Not

- Zamfirescu dönüşümü [11] tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.
- Rhoades [8] 'de *Theorem 1. (xiv)* ve *(xxv)*' den Zamfirescu dönüşümünün, (B), (K) ve (c)'den daha genel olduğu göstermiştir.

Tanım ([9])

(X, d) metrik uzay, $f : X \to X$ bir dönüşüm ve ϕ mesafe değiştiren fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y) - \phi(d(x, y))$$

oluyorsa f dönüşümüne zayıf daraltan dönüşüm denir.

Not

Rhoades[9], tam metrik uzayda zayıf daraltan dönüşümün bir tek sabit noktası olduğunu ve bu dönüşümün (B)'den daha genel olduğunu göstermiştir. Gerçekten de $k \in (0, 1)$ olmak üzere $\phi(t) = kt$ alındığında [B] elde edilir.

Dutta ve Choudhury[4], Rhoades[9]'in vermiş olduğu zayıf daraltan dönüşümden daha genel olan aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Tanım ([4])

(X, d) metrik uzay, $f : X \to X$ bir dönüşüm ve ψ ve ϕ mesafe değiştiren fonksiyonlar olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leqslant \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y))$$

oluyorsa f dönüşümü bu uzayda bir tek sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x)) + d(y, f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x)) + d(y, f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max \left\{ d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x)) + d(y, f(x))] \right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Proof.

Zamfirescu dönüşümünün tanımının direk sonucudur. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı,tanımdaki 3 şarttan herhangi biri için daha büyüktür. □

Tanım ((ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü)

(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\psi, \phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar ayrıca ψ azalmayan ve $\phi(x) = 0 \iff x = 0$ ve

$$M(x, y) := \left\{ d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2} \right\} \tag{1}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leqslant \psi(M(x, y)) - \phi(M(x, y)) \tag{2}$$

eşitsizliğini sağlayan f dönüşümüne (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü denir. □

Lemma (Asimptotik Regulerlik)

f bir (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ dır.

Lemma (Asimptotik Regulerlik)

f bir (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ dır.

Lemma (Asimptotik Regulerlik)

f bir (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ dır.

Proof.

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n+1}) &= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, f(x_n)) + d(x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{d(x_n, f(x_{n+1})) + d(x_{n+1}, f(x_n))}{2}\right\} \\ &= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2}\right\} \\ &= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right\} \end{aligned}$$

□

Lemma (Asimptotik Regulerlik)

f bir (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ dır.

Proof.

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n+1}) &= \max\Big\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, f(x_n)) + d(x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2}, \\ &\qquad \frac{d(x_n, f(x_{n+1})) + d(x_{n+1}, f(x_n))}{2} \Big\} \\ &= \max\Big\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \\ &\qquad \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2} \Big\} \\ &= \max\Big\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \Big\} \end{aligned}$$

□

elde ederiz. Burada iki durum söz konusu olur:

Durum 1. $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ olması halinde :

$$\begin{aligned}
\psi\big(d(x_{n+1}, x_{n+2})\big) &= \psi\big(d(f(x_n), f(x_{n+1}))\big) \\
&\leqslant \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - \phi\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \\
&\leqslant \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)
\end{aligned}$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leqslant d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Yani $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalandır.

Durum 2. $M(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{2}(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}))$ **olması hali :**

O halde

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})) \tag{3}$$
$$\leqslant d(x_{n+1}, x_{n+2}) \tag{4}$$

olur. Ayrıca

$$\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) = \psi(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \tag{5}$$
$$\leqslant \psi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) \tag{6}$$
$$- \phi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) \tag{7}$$
$$\leqslant \psi(d(x_n, x_{n+1})) \tag{8}$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leqslant d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Bu ise (4) eşitsizliği ile çelişir.

Lemmanın Sonucu:

Sonuç olarak $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ dır. O halde $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi monoton azalan(artmayan) bir dizidir ve bir $r \geqslant 0$ sayısına yakınsar. Bu bilgiyi kullanırsak

$$\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \leqslant \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1}))$$

olup $n \to \infty$ iken limitini alırsak

$$\psi(r) \leqslant \psi(r) - \phi(r)$$

elde ederiz ki bu $r = 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $\{d(x_n, x_{n+1})\} \to 0$. $\square$

Teorem ((ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü)

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir (ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü ise bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Ana Teoremin İspatı

Öncelikle $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. O halde $\{x_n\}$ dizisinin öyle iki $\{x_{n(k)}\}$ ve $\{x_{m(k)}\}$ altdizisi vardır ki $\varepsilon_0 > 0$ olmak üzere $m(k) > n(k) \geqslant k$ olacak şekildeki her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geqslant \varepsilon_0$$

dır. Dahası yukarıdaki şartları sağlayan $m(k)$ sayısını $n(k)$ dan büyük en küçük sayı olarak seçersek

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \varepsilon_0$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) && (9)\\
&\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) && (10)\\
&< d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + \varepsilon_0 && (11)
\end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ iken

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \to \varepsilon_0 \tag{12}$$

olur.

Ana Teoremin İspatı

Yine

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (13)$$

$$\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) \quad (14)$$

$$+ d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (15)$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \to \varepsilon_0 \quad (16)$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Benzer olarak

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (17) \\ &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (18) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \to \varepsilon_0 \quad (19)$$

buluruz.

Ana Teoremin İspatı

Ayrıca

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leqslant d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (20)$$
$$\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (21)$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \to \varepsilon_0 \quad (22)$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Sonuç olarak Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\psi(\varepsilon_0) &\leqslant \psi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})) && (23)\\
&= \psi(d(fx_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1})) && (24)\\
&\leqslant \psi(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \phi(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) && (25)
\end{aligned}$$

dır. Burada (12), (16), (19) ve (22) deki bilgileri kullanırsak

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) &= \lim_{k\to\infty} \max \Big\{ d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), && (26)\\
&\quad \frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})], && (27)\\
&\quad \frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})] \Big\} && (28)\\
&= \max\{\varepsilon_0, 0, \varepsilon_0\} && (29)\\
&= \varepsilon_0 && (30)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Bunu (25)'te yerine yazarsak

$$\psi(\varepsilon_0) \leqslant \psi(\varepsilon_0) - \phi(\varepsilon_0) \tag{31}$$

olup $\phi(\varepsilon_0) \leqslant 0$ olur ki bu da $\varepsilon_0 = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise baştaki kabulümüzle çelişir. Demekki kabulümüz yanlıştır. Yani $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam metrik uzay olduğu için $\{x_n\}$ bu uzayda bir x^* noktasına yakınsar. Buradan hareketle

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x^*) = \lim_{n\to\infty} \max\Big\{d(x_n, x^*), \frac{1}{2}[d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, fx^*)], \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}[d(x_n, fx^*) + d(x^*, x_{n+1})]\Big\} \tag{33}$$

$$= \frac{d(x^*, fx^*)}{2} \tag{34}$$

elde ederiz. Bu bilgiyi (2) de yerine yazarsak $n \to \infty$

$$\psi(d(x^*, fx^*)) \leqslant \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \tag{35}$$

Ana Teoremin İspatı

yani bu da

$$\phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \leqslant \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \psi(d(x^*, fx^*)) \tag{36}$$

eşittir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı ψ azalmayan olduğu için $d(x^*, fx^*) \neq 0$ olduğu sürece negatif olup ϕ 'nin negatif olmaması ile çelişir. Böylece $d(x^*, fx^*) = 0$ olup x^* noktası f nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x' \neq x^*$, f nin iki sabit noktası olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\psi(d(x', x^*)) &= \psi(d(fx', fx^*)) && (37)\\
&\leqslant \psi(M(x', x^*)) - \phi(M(x', x^*)) && (38)\\
&\leqslant \psi(d(x', x^*)) - \phi(d(x', x^*)) && (39)
\end{aligned}$$

olup $\phi(d(x', x^*)) \leqslant 0$ elde edilir ki $d(x', x^*) = 0$ olmasını gerektirir. Bu sabit noktanın tek olduğunu kanıtlar. □

KAYNAKÇA

[1] BANACH, S.
Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.
Publié dans Fund. Math. 3 (1922), 133–181.

[2] BROWDER, F., AND PETRYSHYN, W.
The solution by iteration of nonlinear functional equations in banach spaces.
Bull. Am. Math. Soc., 1 (1966), 571–575.

[3] CHATTERJEA, S. K.
Fixed-point theorems.
C. R. Acad. Bulgare Sei. 25 (1972), 727–730.

[4] DUTTA, P. N., AND CHOUDHURY, B. S.
A generalisation of contraction principle in metric spaces.
Fixed Point Theory Appl. 8 (2008).

[5] KANNAN, R.
Some results on fixed points-ii.
Am. Math. Mon. 76 (1969), 405–408.

[6] KHAN, M., SWALEH, M., AND SESSA, S.
Fixed point theorems by altering distances between the points.
BulL. Austral. Math. Soc. 30 (1984), 1–9.

[7] KIR, M., AND KIZILTUNÇ, H.

A new extension of some well known fixed point theorems in metric spaces.
Math. Sci. Lett. 1, 1 (2013), 179–183.

[8] Rhoades, B. E.
A comparison of various definitions of contractive mappings.
Trans. Am. Math. Soc. 226, 1970 (1977), 257–290.

[9] Rhoades, B. E.
Some theorems on weakly contractive mappings.
Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 47 (2001), 2683–2693.

[10] Zamfirescu, T.
Fix point theorems in metric spaces.
Arch. der Math. 23 (1972), 292–298.

[11] Zamfirescu, T.
Fixed point and contraction theorems in metric spaces.
Aequationes Mathematicae 11, 2 (1974), 138–142.