İleri Topoloji II Ders Notlarım

Hakan ERGÜL
Matematik Bolumu,
Ataturk Universitesi,
hknrgl@gmail.com

October 21, 2015

Çarpım ve Bölüm Uzayları

Çarpım Uzayları

Hocanın takip edecegi kaynaklar:

- Seymour Lipschutz - General Topology
- Ali Bülbül - Genel Topoloji
- Şaziye Yüksel - Topoloji

X herhangi bir küme, $(Y, \mathcal{T}')$ bir topolojik uzay ve $f : X \to (Y, \mathcal{T}')$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu sürekli yapan en kaba(açık küme sayısı en az) topolojinin araştırılması problemi bizi `izdüşel(başlangıç) topoloji` kavramına götürür.

Tersine $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, Y herhangi bir küme ve $f : (X, \mathcal{T}) \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu sürekli kılan Y üzerindeki en ince(kuvvetli, açık küme sayısı en fazla) topolojinin araştırılması problemi de bizi `tümel(bitiş) topolojisi` kavramına götürür.

Ayrıca bu iki problem $f_\alpha : (X, \mathcal{T}_\alpha) \to Y$ ve $f_\alpha : X \to (Y, \mathcal{T}'_\alpha)$ fonksiyon ailelerine de genişletilebilir. Böylece ÇARPIM ve BÖLÜM uzayları karşımıza çıkar.

İzdüşel(Başlangıç) Topoloji

Teorem 1. *X herhangi bir küme $(Y, \mathcal{T}')$ bir topolojik uzay ve $f : X \to (Y, \mathcal{T}')$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\mathcal{T} = \{G \subset X \mid G = f^{-1}(H), \quad H \in \mathcal{T}'\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji f fonksiyonunu sürekli kılan X üzerindeki en kaba topolojidir.

Proof. $\mathcal{T}$ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

(i) X ve $\emptyset$, $\mathcal{T}$ nun elemanı olduğunu gösterelim. $Y \in \mathcal{T}'$ için $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$ ve yine $\emptyset \in \mathcal{T}'$ için $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$ olup (i) şartı sağlanır.

(ii) Keyfi sayıda elemanın birleşiminin yine $\mathcal{T}$ ailesine ait olduğunu gösterelim.$\mathcal{T}$ ailesinin

$$\begin{gathered} G_1 = f^{-1}(H_1) \quad H_1 \in \mathcal{T}' \\ G_2 = f^{-1}(H_2) \quad H_2 \in \mathcal{T}' \\ \vdots \end{gathered}$$

elemanlarını alalım. Buradan

$$\begin{aligned} G_1 \cup G_2 \cup \cdots &= f^{-1}(H_1) \cup f^{-1}(H_2) \cup \cdots \\ &= f^{-1}(\underbrace{H_1 \cup H_2 \cup \cdots}_{\in \mathcal{T}'}) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu da (ii) şartı da sağlanmış oldu.

(iii) Sonlu sayıda elemanının kesişimi yine $\mathcal{T}$ da olmalı, bunu keyfi iki eleman için göstererek kanıtlayabiliriz.$\mathcal{T}$ nun

$$\begin{gathered} G_1 = f^{-1}(H_1) \quad H_1 \in \mathcal{T}' \\ G_2 = f^{-1}(H_2) \quad H_2 \in \mathcal{T}' \end{gathered}$$

elemanları için

$$\begin{aligned} G_1 \cap G_2 &= f^{-1}(H_1) \cap f^{-1}(H_2) \\ &= f^{-1}(\underbrace{H_1 \cap H_2}_{\in \mathcal{T}'}) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

olup (iii) şartı da sağlanmış olur.

Şimdi de $\mathcal{T}$ nun f fonksiyonunu sürekli yapan X üzerindeki en kaba topoloji olduğunu göstermek kaldı.

$\mathcal{T}''$, X üzerinde f yi sürekli kılan $\mathcal{T}$ dan farklı herhangi bir topoloji olsun. Biz $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}''$ olduğunu gösterelim. Biliyoruz ki

$$\forall G \in \mathcal{T} \quad G = f^{-1}(H), \;\; H \in \mathcal{T}$$

dır. $H \in \mathcal{T}'$ ise $f^{-1}(H) = G \in \mathcal{T}''$ olmalıdır. Buradan $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}''$ olacaktır. ■

Tanım 1 (izdüşel topoloji)**.** *X herhangi bir küme ve $(Y, \mathcal{T}')$ bir topolojik uzay ve $f : X \to (Y, \mathcal{T})$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunu sürekli kılan X üzerindeki en kaba topoloji olan*

$$\mathcal{T} = \{G \subset X \mid G = f^{-1}(H), \;\; H \in \mathcal{T}'$$

topolojisine f fonksiyonunun X üzerinde ürettiği `"izdüşel topoloji"` *veya* `"başlangıç topolojisi"` *denir.*

Bu tanım $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ fonksiyon ailelerine genişletilebilebilir.

Tanım 2. *X herhangi bir küme, $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ topolojik uzaylar ailesi ve her $\alpha \in \Lambda$ için*

$$f_\alpha : X \to (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$$

fonksiyonları verilsin. Her bir f_α fonksiyonunu sürekli kılan X üzerindeki topolojilerin en kabasına $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ fonksiyon ailesinin ürettiği `izdüşel topoloji` *denir.*

Bu tanıma göre $\mathcal{S} = \{f_\alpha^{-1}(G_\alpha) \mid G_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}$ ailesi, bu izdüşel topoloji için bir *alttaban*dr.

`ilk ders sonu, 20 Ekim 2015`