

(ψ, ϕ)-zayıf Zamfirescu Dönüşümü

Hakan ERGÜL

Atatürk Üniversitesi

April 26, 2016

İçindekiler

1 Giriş

- Mesafe Değiştiren Fonksiyon
- Asimptotik Regülerlik
- Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri
- Zamfirescu Dönüşümü
- Zayıf Daraltan Dönüşüm
- (ψ — ϕ)-zayıf Daraltan Dönüşüm
- (ψ — ϕ)-zayıf Kannan ve Chatterjea Dönüşümleri
- Yardımcı Bir Teorem

2 Ana Sonuçlar

- (ψ , ϕ)-zayıf Zamfirescu dönüşümü
- Bir Lemma
 - Durum 1
 - Durum 2
 - İspatın Sonucu :
- Ana Teorem
- Ana Teoremin İspatı

3 Kaynakça

Özet

Dutta ve Choudhury [4], Banach sabit nokta teoreminden daha genel olan sabit nokta teoremini ortaya attı. Kır ve Kızıltunç [7] aynı mantığı Kannan[5] ve Chatterjea[3] sabit nokta teoremlerine uygulayarak daha genel bir sonuç elde etti. Bu çalışmada aynı mantığı Zamfirescu[10]'den daha genel bir teoreme uygulamaya çalıştık.

Mesafe Değiştiren Fonksiyon

Tanım ([6])

Aşağıdaki şartları sağlayan $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna mesafe değiştiren fonksiyon denir:

1 ψ fonksiyonu sürekli ve azalmayan(monoton artan)dır.

2 $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Görüldüğü gibi her mesafe değiştiren fonksiyon bir metriktir fakat tersi her zaman doğru değildir. Tersineörnek olarak $\psi(t) = t^2$ fonksiyonu verilebilir. [2]

Tanım

(X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n x_0, f^{n+1} x_0) = 0$$

oluyorsa f dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında asimptotik regülerdir denir. [2]

Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

■ (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \quad (B)$$



Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \quad (\text{B})$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fx) + d(y, fy)\} \quad (\text{K})$$



Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \quad (\text{B})$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fx) + d(y, fy)\} \quad (\text{K})$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fy) + d(y, fx)\} \quad (\text{C})$$



Bazı Bilinen Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y) \quad (B)$$

- (Kannan Dönüşümü[5])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fx) + d(y, fy)\} \quad (K)$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(fx, fy) \leq \frac{\alpha}{2} \{d(x, fy) + d(y, fx)\} \quad (C)$$

şartını sağlıyorsa, f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.



Zamfirescu Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

1 $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$

2 $d(fx, fy) \leq \beta \{d(x, fx) + d(y, fy)\}$

3 $d(fx, fy) \leq \gamma \{d(x, fy) + d(y, fx)\}$

şartlarından en az biri doğru ise f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Not

- Zamfirescu dönüşümü [11] tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.

Zamfirescu Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

1 $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$

2 $d(fx, fy) \leq \beta \{d(x, fx) + d(y, fy)\}$

3 $d(fx, fy) \leq \gamma \{d(x, fy) + d(y, fx)\}$

şartlarından en az biri doğru ise f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Not

- Zamfirescu dönüşümü [11] tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.
- Rhoades [8] 'de *Theorem 1. (xiv)* ve *(xxv)*' den Zamfirescu dönüşümünün, (B), (K) ve (c)'den daha genel olduğu göstermiştir.

Tanım ([9])

(X, d) metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve ϕ mesafe değıştiren fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y))$$

oluyorsa f dönüşümüne zayıf daraltan dönüşüm denir.

Not

Rhoades[9], tam metrik uzayda zayıf daraltan dönüşümün bir tek sabit noktası olduğunu ve bu dönüşümün (\mathfrak{B}) 'den daha genel olduğunu göstermiştir. Gerçekten de $k \in (0, 1)$ olmak üzere $\phi(t) = kt$ alındığında $[\mathfrak{B}]$ elde edilir.

Dutta ve Choudhury[4], Rhoades[9]'in vermiş olduğu zayıf daraltan dönüşümden daha genel olan aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Teorem ([4])

(X, d) metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve ψ ve ϕ mesafe değiştiren fonksiyonlar olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y))$$

oluyorsa f dönüşümü bu uzayda bir tek sabit noktaya sahiptir.

Dutta ve Choudhury[4]'nin mantığını kullanarak Kır ve Kızıltunç[7], sırasıyla Kannan ve Chatterjea sabit nokta teoremlerinden daha genel olan $(\psi - \phi)$ -zayıf Kannan ve $(\psi - \phi)$ -zayıf Chatterjea teoremlerini ortaya atmıştır.

Teorem $((\psi - \phi)$ -zayıf Kannan[7])

(X, d) tam metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve ψ ve ϕ mesafe değiştiren fonksiyonlar olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi\left(\frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x, fx) + d(y, fy)}{2}\right)$$

oluyorsa f dönüşümü bu uzayda bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem $((\psi - \phi)$ -zayıf Chatterjea[7])

(X, d) tam metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve ψ ve ϕ mesafe değiştiren fonksiyonlar olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \psi\left(\frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2}\right)$$

oluyorsa f dönüşümü bu uzayda bir tek sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \max \left\{ d(x, y), \frac{1}{2} [d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2} [d(y, f(x)) + d(y, f(x))] \right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \max \left\{ d(x, y), \frac{1}{2} [d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2} [d(y, f(x)) + d(y, f(x))] \right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \max \left\{ d(x, y), \frac{1}{2} [d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2} [d(y, f(x)) + d(y, f(x))] \right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. \square

Proof.

Zamfirescu dönüşümünün tanımının direk sonucudur. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı, tanımdaki 3 şarttan herhangi biri için daha büyüktür. \square

Tanım (ψ, ϕ) -zayıf Zamfirescu dönüşümü

(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $\psi, \phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar ayrıca ψ azalmayan ve $\phi(x) = 0 \iff x = 0$ ve

$$M(x, y) := \left\{ d(x, y), \frac{d(x, f(x)) + d(y, f(y))}{2}, \frac{d(x, f(y)) + d(y, f(x))}{2} \right\} \quad (1)$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(M(x, y)) - \phi(M(x, y)) \quad (2)$$

eşitsizliğini sağlayan f dönüşümüne (ψ, ϕ) -zayıf Zamfirescu dönüşümü denir. \square

Lemma (Asimptotik Regulerlik)

f bir (ψ, ϕ) -zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ dır.

Lemma (Asimptotik Regulerlik)

f bir (ψ, ϕ) -zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ dır.

Lemma (Asimptotik Regülerlik)

f bir (ψ, ϕ) -zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ dır.

Proof.

$$\begin{aligned}
 M(x_n, x_{n+1}) &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, f(x_n)) + d(x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{d(x_n, f(x_{n+1})) + d(x_{n+1}, f(x_n))}{2} \right\} \\
 &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2} \right\} \\
 &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \right\}
 \end{aligned}$$



Lemma (Asimptotik Regülerlik)

f bir (ψ, ϕ) -zayıf Zamfirescu dönüşümü olmak üzere $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ dır.

Proof.

$$\begin{aligned}
 M(x_n, x_{n+1}) &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, f(x_n)) + d(x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{d(x_n, f(x_{n+1})) + d(x_{n+1}, f(x_n))}{2} \right\} \\
 &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2} \right\} \\
 &= \max \left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \right\}
 \end{aligned}$$



elde ederiz. Burada iki durum söz konusu olur:

Durum 1. $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ olması halinde :

$$\begin{aligned}\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) &= \psi(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \\ &\leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1})) \\ &\leq \psi(d(x_n, x_{n+1}))\end{aligned}$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Yani $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalandır.

Durum 2. $M(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{2}(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}))$ olması hali :

O halde

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})) \quad (3)$$

$$\leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) \quad (4)$$

olur. Ayrıca

$$\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) = \psi(d(f(x_n), f(x_{n+1}))) \quad (5)$$

$$\leq \psi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) \quad (6)$$

$$- \phi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) \quad (7)$$

$$\leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) \quad (8)$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Bu ise (4) eşitsizliği ile çelişir.

Lemmanın Sonucu:

Sonuç olarak $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ dır. O halde $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi monoton azalan (artmayan) bir dizidir ve bir $r \geq 0$ sayısına yakınsar. Bu bilgiyi kullanırsak

$$\psi(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \psi(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1}))$$

olup $n \rightarrow \infty$ iken limitini alırsak

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \phi(r)$$

elde ederiz ki bu $r = 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $\{d(x_n, x_{n+1})\} \rightarrow 0$. □

Teorem $((\psi, \phi)$ -zayıf Zamfirescu dönüşümü)

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir (ψ, ϕ) -zayıf Zamfirescu dönüşümü ise bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

Ana Teoremin İspatı

Öncelikle $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. O halde $\{x_n\}$ dizisinin öyle iki $\{x_{n(k)}\}$ ve $\{x_{m(k)}\}$ alt dizisi vardır ki $\varepsilon_0 > 0$ olmak üzere $m(k) > n(k) \geq k$ olacak şekildeki her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon_0$$

dır. Dahası yukarıdaki şartları sağlayan $m(k)$ sayısını $n(k)$ dan büyük en küçük sayı olarak seçersek

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \varepsilon_0$$

elde ederiz. Buradan

$$\varepsilon_0 \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \quad (9)$$

$$\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (10)$$

$$< d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + \varepsilon_0 \quad (11)$$

olup $k \rightarrow \infty$ iken

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \rightarrow \varepsilon_0 \quad (12)$$

olur.

Ana Teoremin İspatı

Yine

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (13)$$

$$\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) \quad (14)$$

$$+ d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (15)$$

eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \rightarrow \varepsilon_0 \quad (16)$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Benzer olarak

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (17)$$

$$\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (18)$$

eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \rightarrow \varepsilon_0 \quad (19)$$

buluruz.

Ana Teoremin İspatı

Ayrıca

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (20)$$

$$\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \quad (21)$$

eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \rightarrow \varepsilon_0 \quad (22)$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Sonuç olarak Diğer yandan

$$\psi(\varepsilon_0) \leq \psi(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})) \quad (23)$$

$$= \psi(d(fx_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1})) \quad (24)$$

$$\leq \psi(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) - \phi(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})) \quad (25)$$

dır. Burada (12), (16), (19) ve (22) deki bilgileri kullanırsak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max \left\{ d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), \right. \quad (26)$$

$$\left. \frac{1}{2} [d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})], \right. \quad (27)$$

$$\left. \frac{1}{2} [d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})] \right\} \quad (28)$$

$$= \max\{\varepsilon_0, 0, \varepsilon_0\} \quad (29)$$

$$= \varepsilon_0 \quad (30)$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Bunu (25)'te yerine yazarsak

$$\psi(\varepsilon_0) \leq \psi(\varepsilon_0) - \phi(\varepsilon_0) \quad (31)$$

olup $\phi(\varepsilon_0) \leq 0$ olur ki bu da $\varepsilon_0 = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise baştaki kabulümüzle çelişir. Demekki kabulümüz yanlıştır. Yani $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam metrik uzay olduğu için $\{x_n\}$ bu uzayda bir x^* noktasına yakınsar. Buradan hareketle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ d(x_n, x^*), \frac{1}{2} [d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, fx^*)], \right. \quad (32)$$

$$\left. \frac{1}{2} [d(x_n, fx^*) + d(x^*, x_{n+1})] \right\} \quad (33)$$

$$= \frac{d(x^*, fx^*)}{2} \quad (34)$$

elde ederiz. Bu bilgiyi (2) de yerine yazarsak $n \rightarrow \infty$

$$\psi(d(x^*, fx^*)) \leq \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \quad (35)$$

Ana Teoremin İspatı

yani bu da

$$\phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \leq \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \psi(d(x^*, fx^*)) \quad (36)$$

eşittir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı ψ azalmayan olduğu için $d(x^*, fx^*) \neq 0$ olduğu sürece negatif olup ϕ 'nin negatif olmaması ile çelişir. Böylece $d(x^*, fx^*) = 0$ olup x^* noktası f nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x' \neq x^*$, f nin iki sabit noktası olsun. O halde

$$\psi(d(x', x^*)) = \psi(d(fx', fx^*)) \quad (37)$$

$$\leq \psi(M(x', x^*)) - \phi(M(x', x^*)) \quad (38)$$

$$\leq \psi(d(x', x^*)) - \phi(d(x', x^*)) \quad (39)$$

olup $\phi(d(x', x^*)) \leq 0$ elde edilir ki $d(x', x^*) = 0$ olmasını gerektirir. Bu sabit noktanın tek olduğunu kanıtlar. □

KAYNAKÇA

- [1] BANACH, S.
Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.
Publié dans Fund. Math. 3 (1922), 133–181.
- [2] BROWDER, F., AND PETRYSHYN, W.
The solution by iteration of nonlinear functional equations in banach spaces.
Bull. Am. Math. Soc., 1 (1966), 571–575.
- [3] CHATTERJEA, S. K.
Fixed-point theorems.
C. R. Acad. Bulgare Sei. 25 (1972), 727–730.
- [4] DUTTA, P. N., AND CHOUDHURY, B. S.
A generalisation of contraction principle in metric spaces.
Fixed Point Theory Appl. 8 (2008).
- [5] KANNAN, R.
Some results on fixed points-ii.
Am. Math. Mon. 76 (1969), 405–408.
- [6] KHAN, M., SWALEH, M., AND SESSA, S.
Fixed point theorems by altering distances between the points.
Bull. Austral. Math. Soc. 30 (1984), 1–9.
- [7] KIR, M., AND KIZILTUNÇ, H.

A new extension of some well known fixed point theorems in metric spaces.

Math. Sci. Lett. 1, 1 (2013), 179–183.

[8] [RHOADES, B. E.](#)

A comparison of various definitions of contractive mappings.

Trans. Am. Math. Soc. 226, 1970 (1977), 257–290.

[9] [RHOADES, B. E.](#)

Some theorems on weakly contractive mappings.

Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 47 (2001), 2683–2693.

[10] [ZAMFIRESCU, T.](#)

Fix point theorems in metric spaces.

Arch. der Math. 23 (1972), 292–298.

[11] [ZAMFIRESCU, T.](#)

Fixed point and contraction theorems in metric spaces.

Aequationes Mathematicae 11, 2 (1974), 138–142.