Zamfirescu Dönüşümünün Bir Genelleştirmesi

Hakan ERGÜL

Atatürk Üniversitesi

April 2, 2016

Bazı ünlü Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \qquad \text{[B]}$$

$\square$

Bazı ünlü Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \qquad [\text{B}]$$

- (Kannan Dönüşümü[2])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \qquad [\text{K}]$$

$\square$

Bazı ünlü Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \qquad [\text{B}]$$

- (Kannan Dönüşümü[2])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \qquad [\text{K}]$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\} \qquad [\text{C}]$$

$\square$

Bazı ünlü Sabit Nokta Teoremleri

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

- (Banach Daralma İlkesi[1])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y) \qquad [\mathrm{B}]$$

- (Kannan Dönüşümü[2])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\} \qquad [\mathrm{K}]$$

- (Chatterjea Dönüşümü[3])

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \frac{\alpha}{2}\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\} \qquad [\mathrm{C}]$$

şartını sağlıyorsa, f dönüşümünün bu uzayda bir tek sabit noktası vardır.

□

Zamfirescu Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için aşağıdakilerden en az biri doğrudur:

- $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$
- $d(f(x), f(y)) \leqslant \beta\{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\}$
- $d(f(x), f(y)) \leqslant \gamma\{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\}$
-

Not

- Zamfirescu dönüşümü tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.

Zamfirescu Dönüşümü

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ ve $\beta, \gamma \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için aşağıdakilerden en az biri doğrudur:

- $d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$
- $d(f(x), f(y)) \leqslant \beta \{d(x, f(x)) + d(y, f(y))\}$
- $d(f(x), f(y)) \leqslant \gamma \{d(x, f(y)) + d(y, f(x))\}$
-

Not

- Zamfirescu dönüşümü tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.
- Rhoades[] 'deki *Theorem 1. (xiv)* ve *(xxv)*' den Zamfirescu dönüşümünün, [B], [K] ve [c]'den daha genel olduğu görülür.

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X,d) *tam metrik uzay ve* $f : X \to X$ *bir dönüşüm,* $\alpha \in [0,1)$ *olmak üzere*

$$d(f(x),f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x,y), \frac{1}{2}[d(x,f(x))+d(y,f(y))], \frac{1}{2}[d(y,f(x))+d(y,f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. $\square$

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X,d) *tam metrik uzay ve* $f : X \to X$ *bir dönüşüm,* $\alpha \in [0,1)$ *olmak üzere*

$$d(f(x),f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x,y), \frac{1}{2}[d(x,f(x))+d(y,f(y))], \frac{1}{2}[d(y,f(x))+d(y,f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x,y), \frac{1}{2}[d(x,f(x))+d(y,f(y))], \frac{1}{2}[d(y,f(x))+d(y,f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Not

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) *tam metrik uzay ve* $f : X \to X$ *bir dönüşüm,* $\alpha \in [0, 1)$ *olmak üzere*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x))+d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x))+d(y, f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Not

1. Zamfirescu dönüşümünden tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x)) + d(y, f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Not

1. Zamfirescu dönüşümünden tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.
2. Rhoades[] 'deki *Theorem 1. (xxv)*' de görüldüğü gibi yukarıdaki lemma, Zamfirescu dönüşümünden daha geneldir.

Şimdi Zamfirescu dönüşümünden daha genel olan aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma

(X, d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}[d(x, f(x))+d(y, f(y))], \frac{1}{2}[d(y, f(x))+d(y, f(x))]\right\}$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüm bir tek sabit noktası vardır. □

Not

1. Zamfirescu dönüşümünden tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya yakınsar.
2. Rhoades[] 'deki *Theorem 1. (xxv)*' de görüldüğü gibi yukarıdaki lemma, Zamfirescu dönüşümünden daha geneldir.
3. Dolayısıyla lemmada verilen şartları sağlayan dönüşüm, [B], [K] ve [C]'den daha geneldir.

Theorem

(X,d) tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir dönüşüm, $\psi, \phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli fonksiyonlar ayrıca ψ azalmayan ve $\phi(x) = 0 \iff x = 0$ ve

$$M(x,y) := \left\{ d(x,y), \frac{d(x,f(x)) + d(y,f(y))}{2}, \frac{d(x,f(y)) + d(y,f(x))}{2} \right\} \tag{1}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\psi(d(f(x),f(y))) \leqslant \psi(M(x,y)) - \phi(M(x,y)) \tag{2}$$

eşitsizliğini sağlayan f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. □

Lemma

Ana Teorem'de verilen şartlarla birlikte $\{M(x_n, x_{n+1})\}$ *dizisi için* $M(x_n, x_{n+1}) \to 0$ *dır.*

Lemma

Ana Teorem'de verilen şartlarla birlikte $\{M(x_n, x_{n+1})\}$ *dizisi için* $M(x_n, x_{n+1}) \to 0$ *dır.*

Lemma

Ana Teorem'de verilen şartlarla birlikte $\{M(x_n, x_{n+1})\}$ *dizisi için* $M(x_n, x_{n+1}) \to 0$ *dır.*

Proof.

$$\begin{aligned}
M(x_n, x_{n+1}) &= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, f(x_n)) + d(x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2},\right. \\
&\qquad \left.\frac{d(x_n, f(x_{n+1})) + d(x_{n+1}, f(x_n))}{2}\right\} \\
&= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2},\right. \\
&\qquad \left.\frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2}\right\} \\
&= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right\}
\end{aligned}$$

□

Lemma

Ana Teorem'de verilen şartlarla birlikte $\{M(x_n, x_{n+1})\}$ *dizisi için* $M(x_n, x_{n+1}) \to 0$ *dır.*

Proof.

$$\begin{aligned}
M(x_n, x_{n+1}) &= \max\left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, f(x_n)) + d(x_{n+1}, f(x_{n+1}))}{2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{d(x_n, f(x_{n+1})) + d(x_{n+1}, f(x_n))}{2} \right\} \\
&= \max\left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{d(x_n, x_{n+2}) + d(x_{n+1}, x_{n+1})}{2} \right\} \\
&= \max\left\{ d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2} \right\}
\end{aligned}$$

□

elde ederiz. Burada iki durum söz konusu olur:

Durum 1. $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ olması halinde :

$$\begin{aligned}\psi\big(d(x_{n+1}, x_{n+2})\big) &= \psi\big(d(f(x_n), f(x_{n+1}))\big)\\ &\leqslant \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - \phi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)\\ &\leqslant \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)\end{aligned}$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leqslant d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Yani $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalandır.

Durum 2. $M(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{2}\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})\big)$ olması hali :

O halde

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leqslant \frac{1}{2}\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})\big) && (3) \\ &\leqslant d(x_{n+1}, x_{n+2}) && (4) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \psi\big(d(x_{n+1}, x_{n+2})\big) &= \psi\big(d(f(x_n), f(x_{n+1}))\big) && (5) \\ &\leqslant \psi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) && (6) \\ &\quad - \phi\left(\frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})}{2}\right) && (7) \\ &\leqslant \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big) && (8) \end{aligned}$$

olup ψ azalmayan olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leqslant d(x_n, x_{n+1})$$

dır. Bu ise (2) eşitsizliği ile çelişir.

Lemmanın Sonucu:

Sonuç olarak $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ dır. O halde $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi monoton azalan(artmayan) bir dizidir ve bir $r \geqslant 0$ sayısına yakınsar. Bu bilgiyi kullanırsak

$$\psi\big(d(x_{n+1}, x_{n+2})\big) \leqslant \psi\big(d(x_n, x_{n+1})\big) - \phi\big(d(x_n, x_{n+1})\big)$$

olup $n \to \infty$ iken limitini alırsak

$$\psi(r) \leqslant \psi(r) - \phi(r)$$

elde ederiz ki bu $r = 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $\{d(x_n, x_{n+1})\} \to 0$. $\square$

Ana Teoremin İspatı

Öncelikle $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. O halde $\{x_n\}$ dizisinin öyle iki $\{x_{n(k)}\}$ ve $\{x_{m(k)}\}$ altdizisi vardır ki $\varepsilon_0 > 0$ olmak üzere $m(k) > n(k) \geqslant k$ olacak şekildeki her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geqslant \varepsilon_0$$

dır. Dahası yukarıdaki şartları sağlayan $m(k)$ sayısını $n(k)$ dan büyük en küçük sayı olarak seçersek

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \varepsilon_0$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) && (9)\\
&\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) && (10)\\
&< d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + \varepsilon_0 && (11)
\end{aligned}$$

olup $k \to \infty$ iken

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \to \varepsilon_0 \quad (12)$$

olur.

Ana Teoremin İspatı

Yine

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) && (13)\\ &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) && (14)\\ &\quad + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) && (15) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) \to \varepsilon_0 \tag{16}$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Benzer olarak

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) && (17) \\ &\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) && (18) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \to \varepsilon_0 \qquad (19)$$

buluruz.

Ana Teoremin İspatı

Ayrıca

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leqslant d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \tag{20}$$

$$\leqslant d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \tag{21}$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limit alırsak

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) \to \varepsilon_0 \tag{22}$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Sonuç olarak Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\psi(\varepsilon_0) &\leqslant \psi\big(d(x_{m(k)}, x_{n(k)})\big) && (23)\\
&= \psi\big(d(fx_{m(k)-1}, fx_{n(k)-1})\big) && (24)\\
&\leqslant \psi\big(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})\big) - \phi\big(M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1})\big) && (25)
\end{aligned}$$

dır. Burada (12), (16), (19) ve (22) deki bilgileri kullanırsak

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} M(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}) &= \lim_{k\to\infty} \max\Big\{ d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)-1}), && (26)\\
&\qquad \frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})], && (27)\\
&\qquad \frac{1}{2}[d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1})]\Big\} && (28)\\
&= \max\{\varepsilon_0, 0, \varepsilon_0\} && (29)\\
&= \varepsilon_0 && (30)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Ana Teoremin İspatı

Bunu (25)'te yerine yazarsak

$$\psi(\varepsilon_0) \leqslant \psi(\varepsilon_0) - \phi(\varepsilon_0) \tag{31}$$

olup $\phi(\varepsilon_0) \leqslant 0$ olur ki bu da $\varepsilon_0 = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise baştaki kabulümüzle çelişir. Demekki kabulümüz yanlıştır. Yani $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam metrik uzay olduğu için $\{x_n\}$ bu uzayda bir x^* noktasına yakınsar. Buradan hareketle

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x^*) = \lim_{n\to\infty} \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{1}{2}[d(x_n, x_{n+1}) + d(x^*, fx^*)], \right. \tag{32}$$

$$\left. \frac{1}{2}[d(x_n, fx^*) + d(x^*, x_{n+1})]\right\} \tag{33}$$

$$= \frac{d(x^*, fx^*)}{2} \tag{34}$$

elde ederiz. Bu bilgiyi (2) de yerine yazarsak $n \to \infty$

$$\psi(d(x^*, fx^*)) \leqslant \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \tag{35}$$

Ana Teoremin İspatı

yani bu da

$$\phi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) \leqslant \psi\left(\frac{d(x^*, fx^*)}{2}\right) - \psi(d(x^*, fx^*)) \tag{36}$$

eşittir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı ψ azalmayan olduğu için $d(x^*, fx^*) \neq 0$ olduğu sürece negatif olup ϕ 'nin negatif olmaması ile çelişir. Böylece $d(x^*, fx^*) = 0$ olup x^* noktası f nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x' \neq x^*$, f nin iki sabit noktası olsun. O halde

$$\begin{aligned} \psi(d(x', x^*)) &= \psi(d(fx', fx^*)) & (37)\\ &\leqslant \psi(M(x', x^*)) - \phi(M(x', x^*)) & (38)\\ &\leqslant \psi(d(x', x^*)) - \phi(d(x', x^*)) & (39) \end{aligned}$$

olup $\phi(d(x', x^*)) \leqslant 0$ elde edilir ki $d(x', x^*) = 0$ olmasını gerektirir. Bu sabit noktanın tek olduğunu kanıtlar. □

Sonuç

Sonuç kısmı buraya