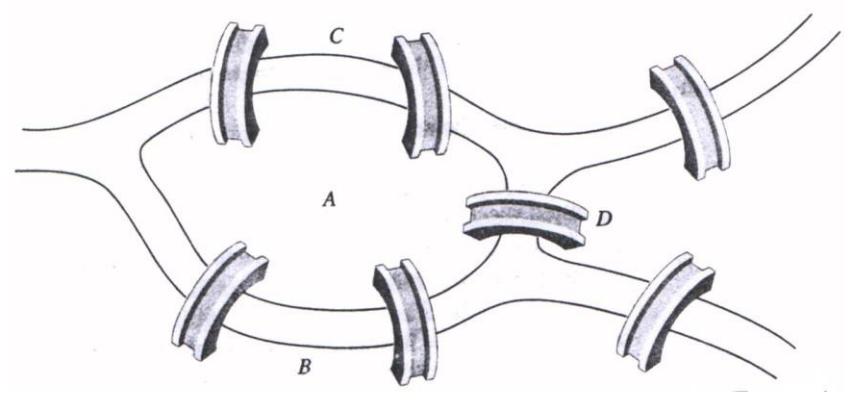
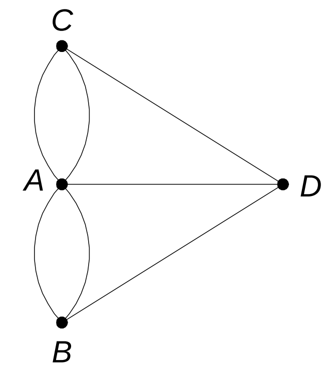
# GRAF

Definisi, Jenis, Contoh, Terminologi, Lintasan, Sirkuit

# Königsberg Bridge Problem (1736)

- Bisakah melalui setiap jembatan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat semula?




- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg:
  Simpul (*vertex*) → menyatakan daratan
  Sisi (*edge*) → menyatakan jembatan

# Definisi Graf

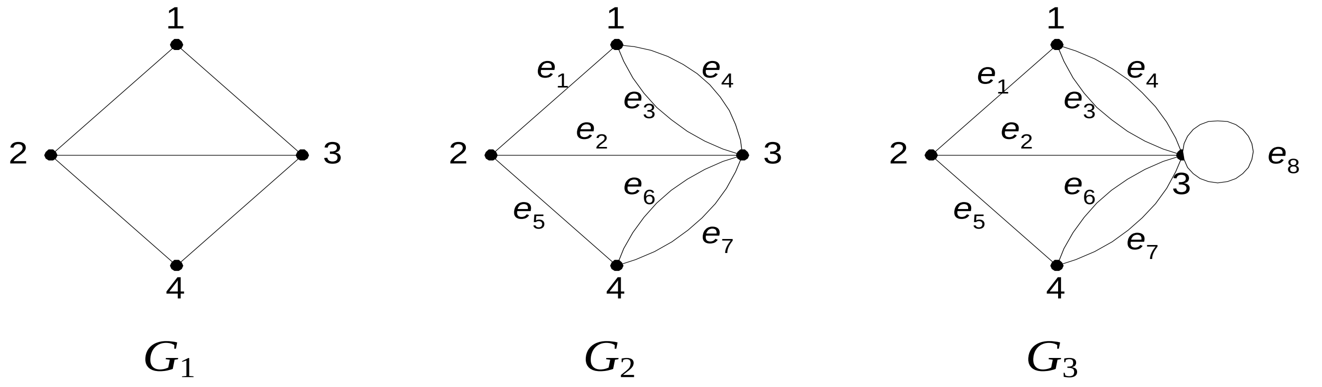
Graf $G = (V, E)$, yang dalam hal ini:

$V$ = himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices*)

$= \{ v_1 , v_2 , ... , v_n \}$

$E$ = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul

$= \{e_1 , e_2 , ... , e_n \}$




**Gambar 2.** (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

**Contoh 1.** Pada Gambar 2, $G_1$ adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ $E = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$

$G_2$ adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$

$G_3$ adalah graf dengan

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3, 3) \}$
$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$

# Jenis-Jenis Graf

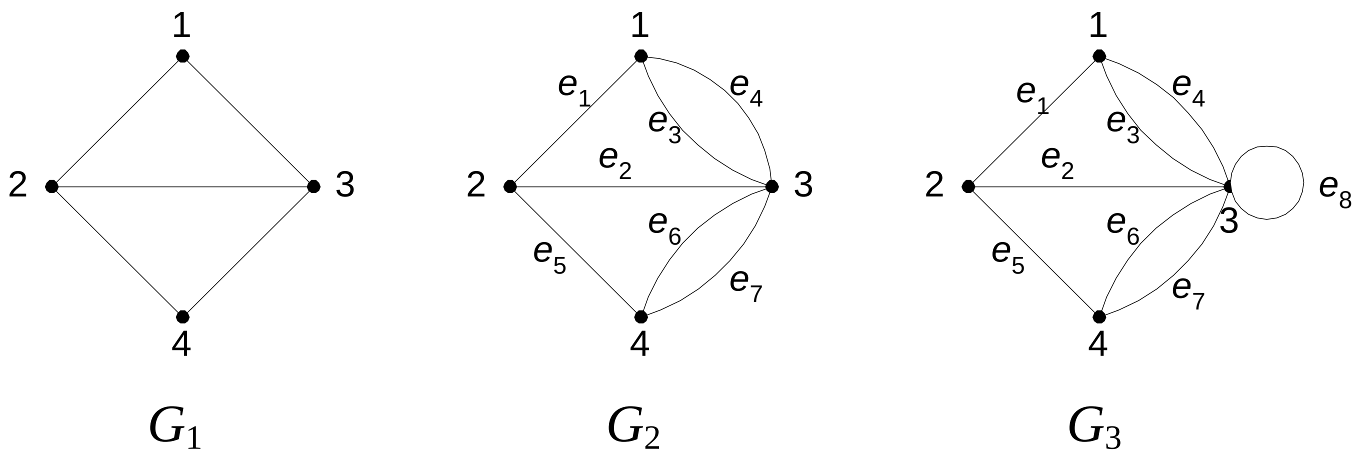
- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

  1. **Graf sederhana** (*simple graph*).

     Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. $G_1$ pada Gambar 2 adalah contoh graf sederhana

  2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*).

     Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). $G_2$ dan $G_3$ pada Gambar 2 adalah contoh graf tak-sederhana




**Gambar 2.** (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

- Pada $G_2$, sisi $e_3 = (1, 3)$ dan sisi $e_4 = (1, 3)$ dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungi dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.

- Pada $G_3$, sisi $e_8 = (3, 3)$ dinamakan **gelang** atau **kalang** (*loop*) karena ia berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

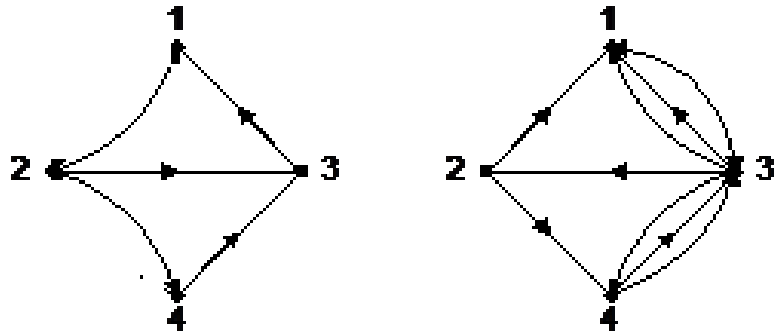
- Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Tiga buah graf pada Gambar 2 adalah graf tak-berarah.

2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

   Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Dua buah graf pada Gambar 3 adalah graf berarah.




(a) $G_4$ (b) $G_5$

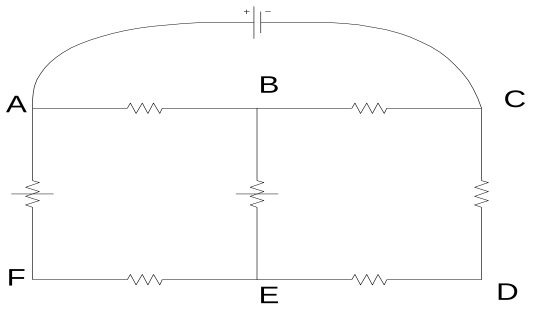
**Gambar 3** (a) graf berarah, (b) graf-ganda berarah

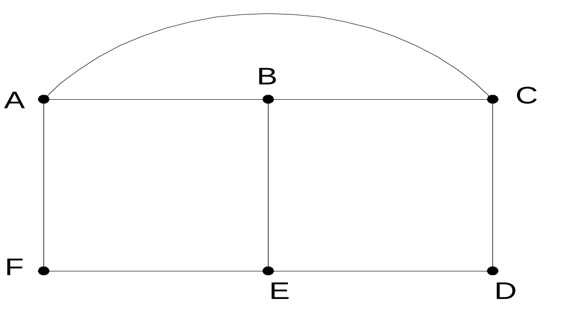
Jenis-jenis graf

| Jenis | Sisi | Sisi ganda dibolehkan? | Sisi gelang dibolehkan? |
|---|---|---|---|
| Graf sederhana | Tak-berarah | Tidak | Tidak |
| Graf ganda | Tak-berarah | Ya | Tidak |
| Graf semu | Tak-berarah | Ya | Ya |
| Graf berarah | Bearah | Tidak | Ya |
| Graf-ganda berarah | Bearah | Ya | Ya |

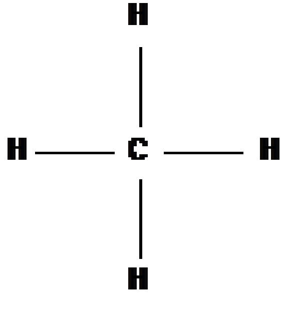
# Contoh/Aplikasi Graf

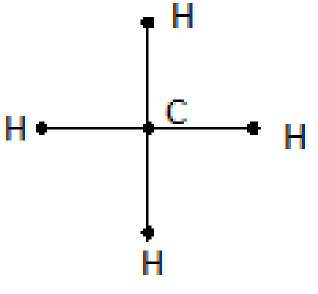
-- Rangkaian Listrik




-- Senyawa Kimi

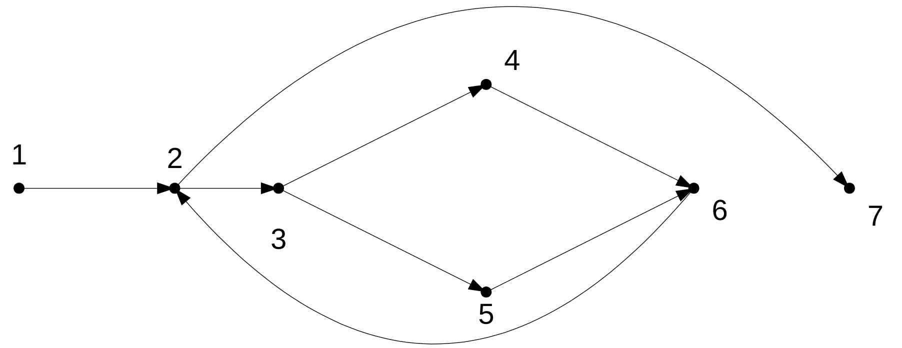


# Contoh/Aplikasi Graf

-- *Pengujian program*

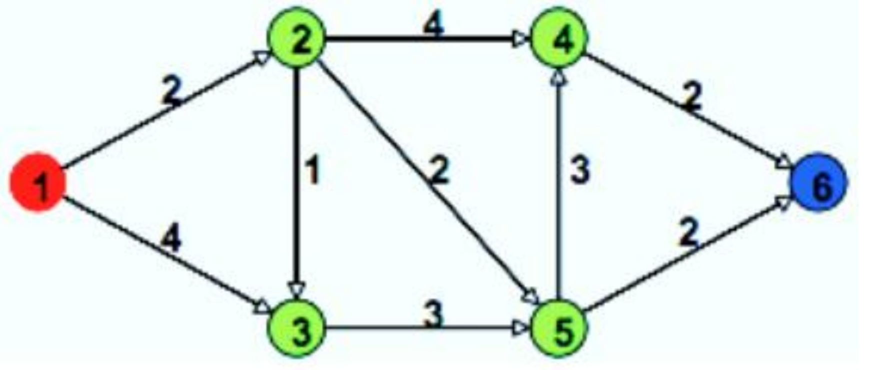
```
scanf(&x);
while (x != 9999) {
  if x < 0 then
    printf('Masukan tidak boleh negatif');
  else
        x=x*1000;
  scanf(&x);
 }
printf(x);
```



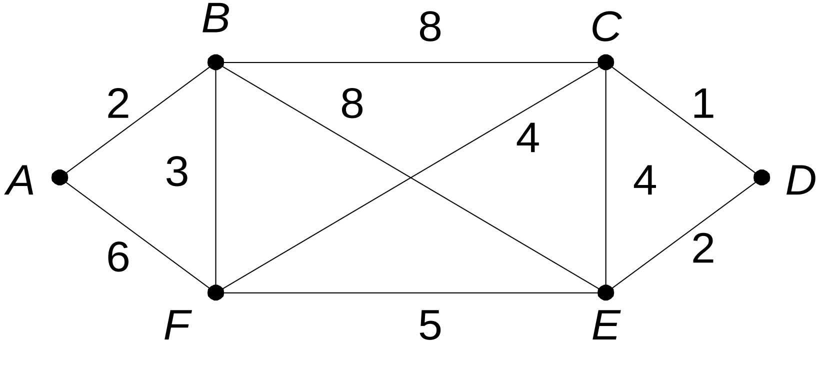

Keterangan:
1 : read(x)
2 : x != 9999
3 : x < 0
4 : printf('Masukan tidak boleh negatif');
5 : x = x + 10
6 : scanf(&x)
7 : printf(x)

# Contoh/Aplikasi Graf

- Shortest Path : Menentukan lintasan dari node asal ke node tujuan dengan jarak terpendek



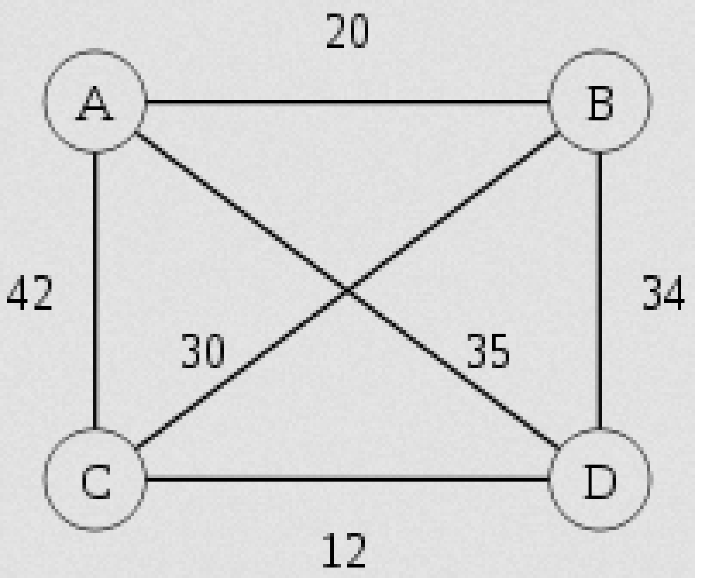

- Chinese Postman Problem [Mei Gan 1962] : Mencari sirkuit Euler (merencanakan rute perjalanan dengan melalui semua sisi (jalan) tepat satu kali dan kembali ke tempat awal keberangkatan)




Lintasan yang dilalui tukang pos: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *C*, *E*, *B*, *F*, *A*.

# Contoh/Aplikasi Graf

Travelling Salesman Problem : Menentukan sirkuit Hamilton dengan bobot paling minimum (menentukan rute perjalanan dengan melalui semua simpul (kota) tepat satu kali dan kembali ke tempat awal keberangkatan dengan bobot paling minimum )



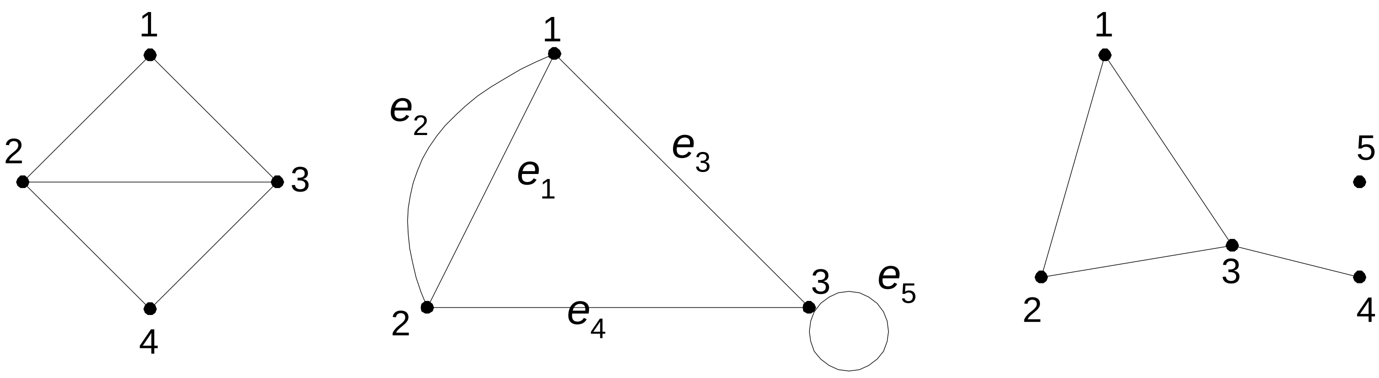

Lintasan yang dilalui salesman : *A*, *B*, *C*, *D*, A dengan total jarak 97
Atau A, D, C, B, A dengan total jarak yang sama

# Terminologi Graf

**1. Ketetanggaan (*Adjacent*)**

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

Tinjau graf $G_1$ : simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 3,
simpul 1 tidak bertetangga dengan simpul 4.



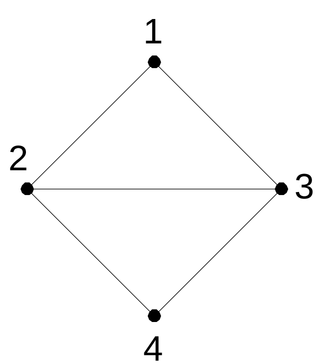

$G_1$ $G_2$ $G_3$

## 2. Bersisian (*Incidency*)

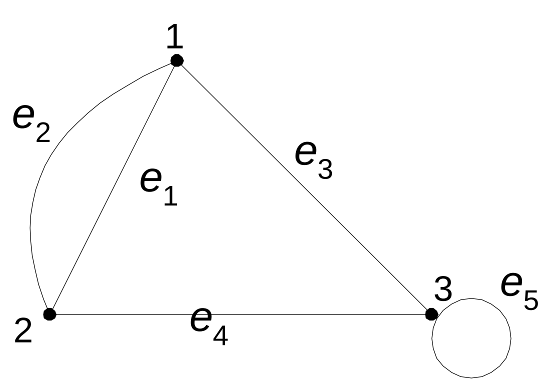
Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$ dikatakan

$e$ bersisian dengan simpul $v_j$ , atau
$e$ bersisian dengan simpul $v_k$

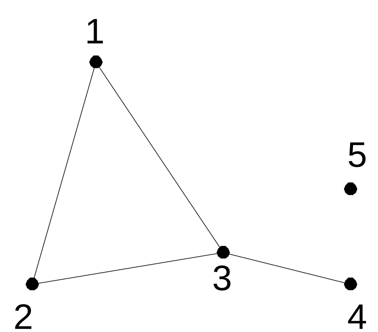
Tinjau graf $G_1$: sisi (2, 3) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 3,
sisi (2, 4) bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4,
tetapi sisi (1, 2) tidak bersisian dengan simpul 4.




$G_1$




$G_2$

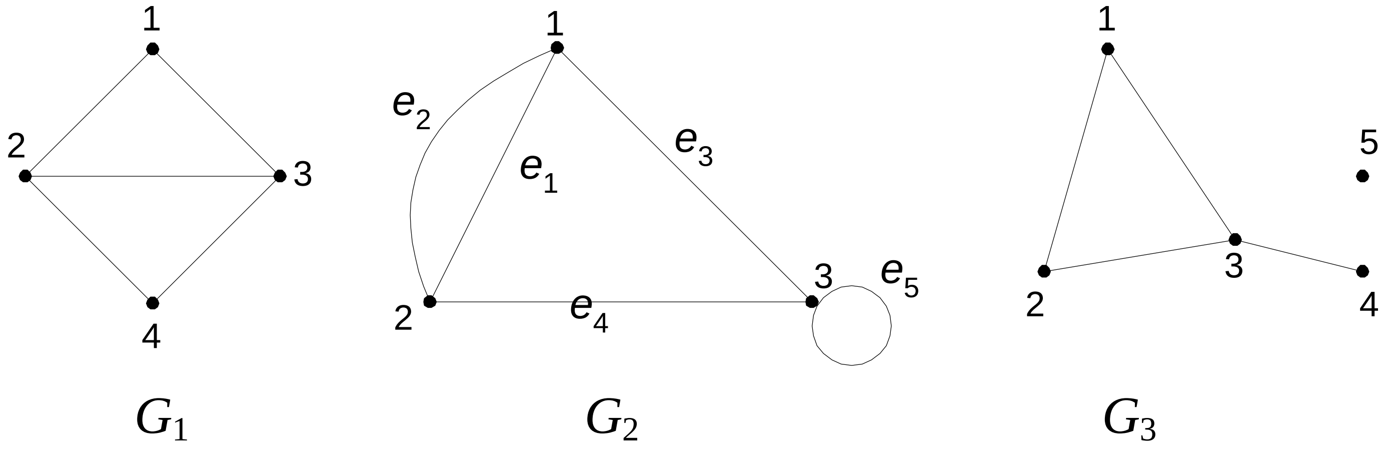



$G_3$

### 3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

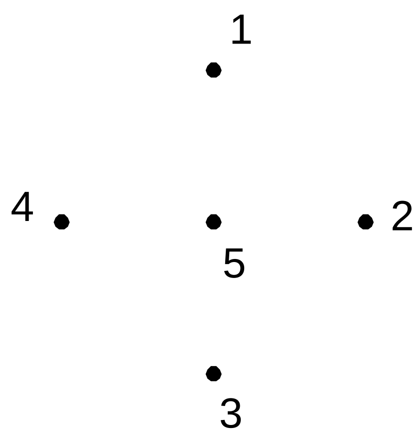
*Simpul terpencil* ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau graf $G_3$: simpul 5 adalah simpul terpencil.



**4. Graf Kosong (*null graph* atau *empty graph*)**

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong ($N_n$).
Graf $N_5$ :



## 5. Derajat (*Degree*)

*Derajat* suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi: $d(v)$

**DEFINITION 3** The *degree of a vertex in an undirected graph* is the number of edges incident with it, except that a loop at a vertex contributes twice to the degree of that vertex. The degree of the vertex $v$ is denoted by $\deg(v)$.

Tinjau graf $G_1$: $d(1) = d(4) = 2$

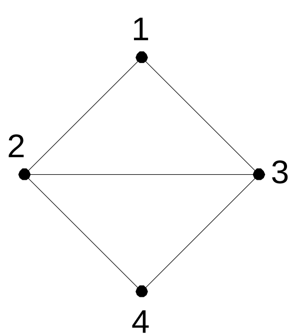
$d(2) = d(3) = 3$

Tinjau graf $G_3$: $d(5) = 0$ → simpul terpencil

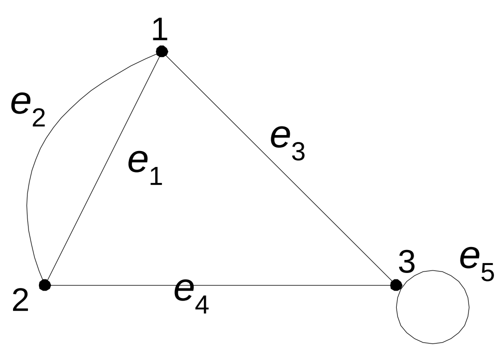
$d(4) = 1$ → simpul anting-anting (*pendant vertex*)

Tinjau graf $G_2$: $d(1) = 3$ → bersisian dengan sisi ganda

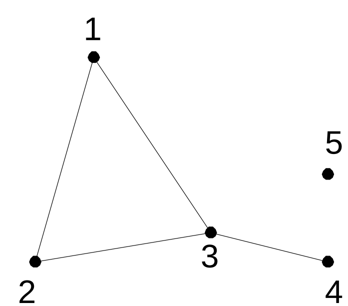
$d(3) = 4$ → bersisian dengan sisi gelang (*loop*)



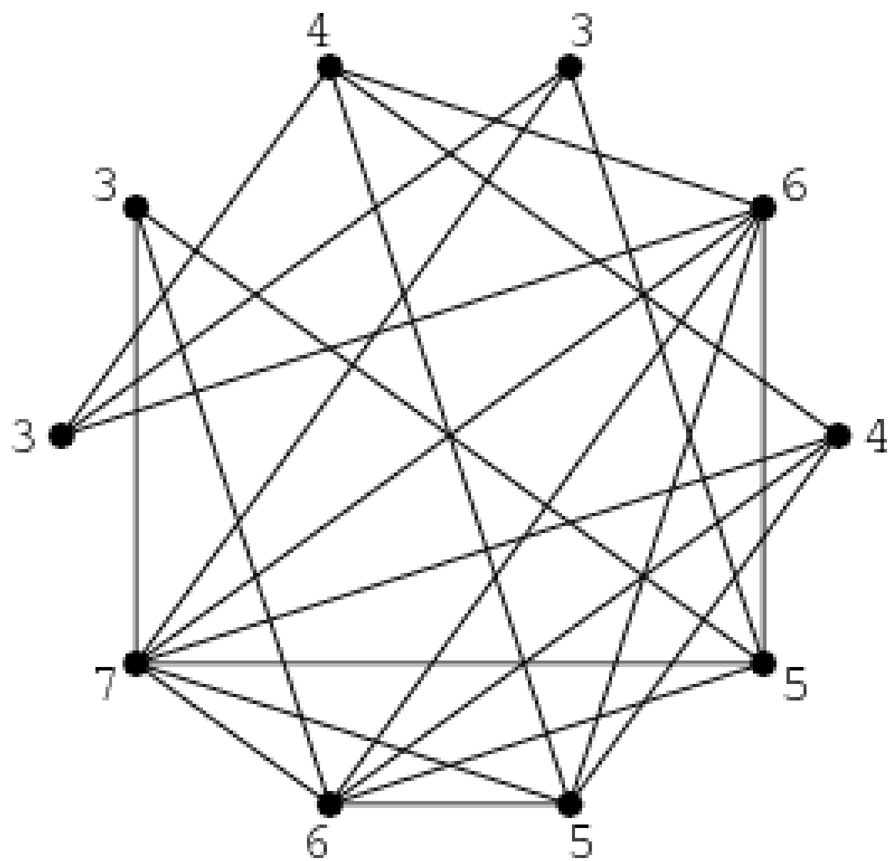

$G_1$



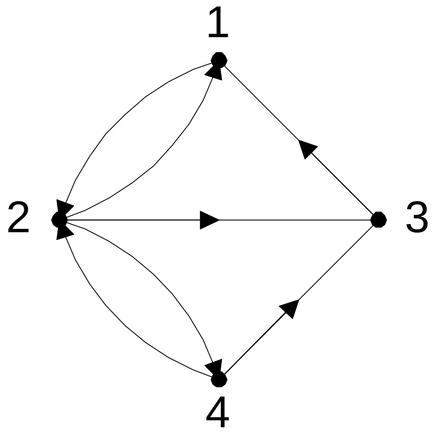

$G_2$



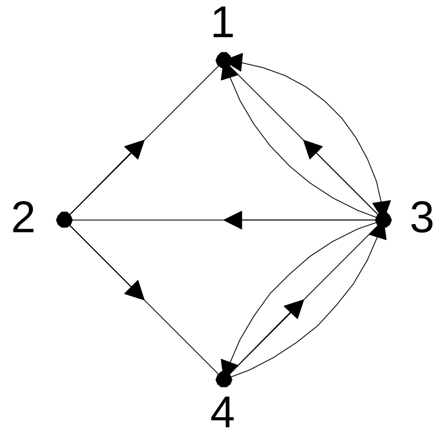

$G_3$




Pada graf di atas, derajat setiap simpul ditunjukkan pada masing-masing simpul




$G_4$




$G_5$

Tinjau graf $G_4$:

$d_{\text{in}}(1) = 2$; $d_{\text{out}}(1) = 1$
$d_{\text{in}}(2) = 2$; $d_{\text{out}}(2) = 3$
$d_{\text{in}}(3) = 2$; $d_{\text{out}}(3) = 1$
$d_{\text{in}}(4) = 1$; $d_{\text{out}}(3) = 2$

**Lemma Jabat Tangan**. Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Tinjau graf $G_1$: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$

$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

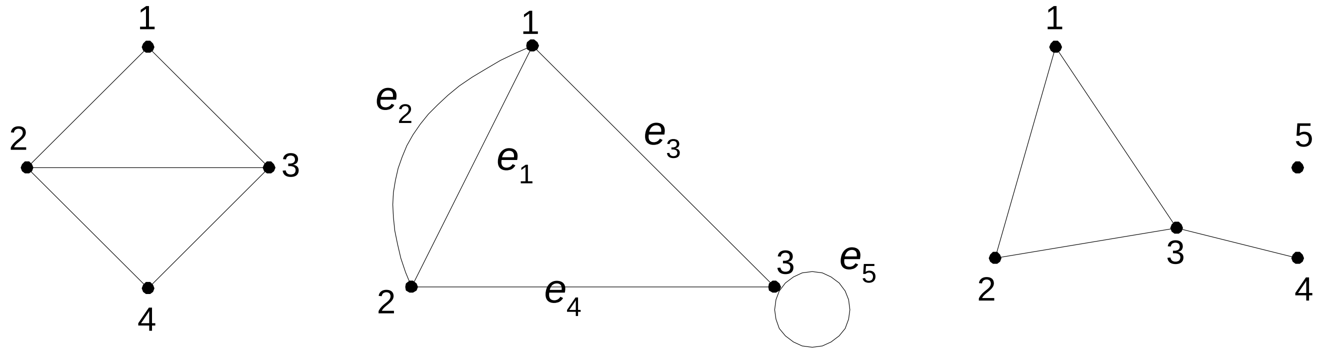
Tinjau graf $G_2$: $d(1) + d(2) + d(3) = 3 + 3 + 4 = 10$

$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 5$

Tinjau graf $G_3$: $d(1) + d(2) + d(3) + d(4) + d(5)$

$= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$

$= 2 \times$ jumlah sisi $= 2 \times 4$




$G_1$ $G_2$ $G_3$

- Akibat dari *lemma* (*corollary*):

  **Teorema**: Untuk sembarang graf G, banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

**Contoh** Diketahui graf dengan lima buah simpul. Dapatkah kita menggambar graf tersebut jika derajat masing-masing simpul adalah:

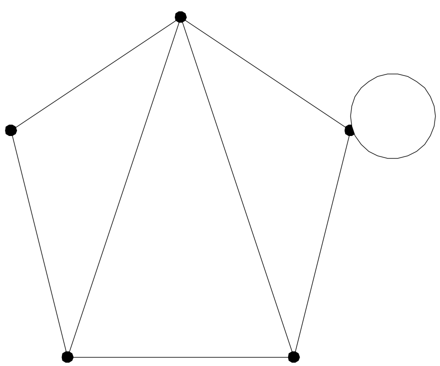
(a) 2, 3, 1, 1, 2

(b) 2, 3, 3, 4, 4

Penyelesaian:

(a) tidak dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya ganjil
$(2 + 3 + 1 + 1 + 2 = 9)$.

(b) dapat, karena jumlah derajat semua simpulnya genap
$(2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 16)$.



# Latihan

- Mungkinkah dibuat graf-sederhana 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

  (a) 5, 2, 3, 2, 4

  (b) 4, 4, 3, 2, 3

  (c) 3, 3, 2, 3, 2

  (d) 4, 4, 1, 3, 2

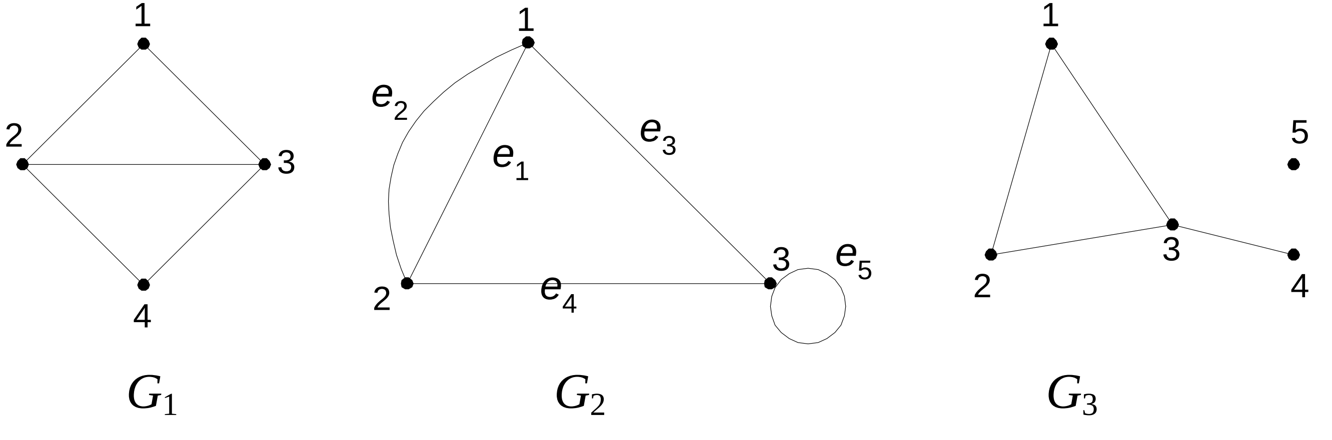
  Jika mungkin, berikan satu contohnya, jika tidak mungkin, berikan alasan singkat.

# Lintasan (*Path*) Graf

**Lintasan** yang panjangnya $n$ dari simpul awal $v_0$ ke simpul tujuan $v_n$ di dalam graf $G$ ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0$, $e_1$, $v_1$, $e_2$, $v_2$,... , $v_{n-1}$, $e_n$, $v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, ... , $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf $G$.

Tinjau graf $G_1$: lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan dengan barisan sisi (1,2), (2,4), (4,3).

**Panjang lintasan** adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut. Lintasan 1, 2, 4, 3 pada $G_1$ memiliki panjang 3.

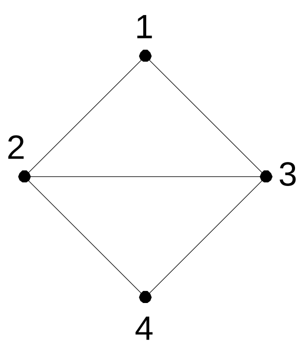


## Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*) Graf

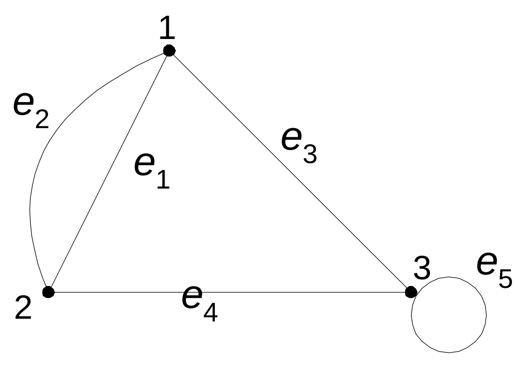
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut **sirkuit** atau **siklus**.

Tinjau graf $G_1$: 1, 2, 3, 1 adalah sebuah sirkuit.

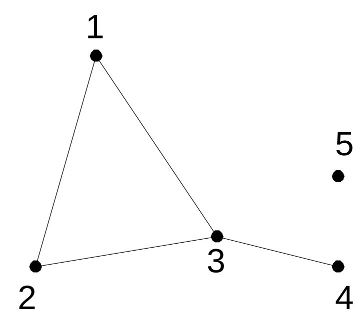
**Panjang sirkuit** adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut. Sirkuit 1, 2, 3, 1 pada $G_1$ memiliki panjang 3.




$G_1$




$G_2$




$G_3$

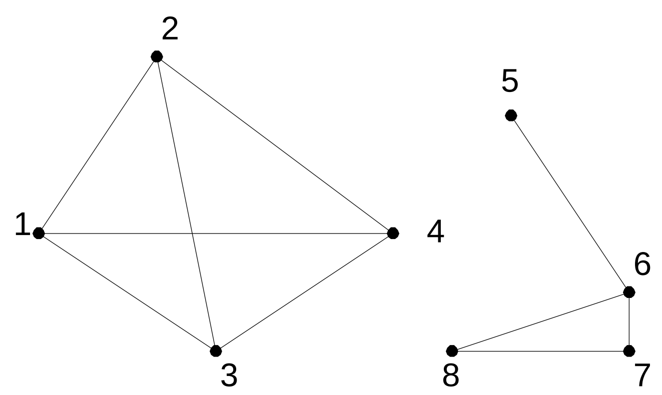
# Graf Terhubung (*Connected*)

Dua buah simpul $v_1$ dan simpul $v_2$ disebut **terhubung** jika terdapat lintasan dari $v_1$ ke $v_2$.

$G$ disebut **graf terhubung** (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul $v_i$ dan $v_j$ dalam himpunan $V$ terdapat lintasan dari $v_i$ ke $v_j$.

Jika tidak, maka $G$ disebut **graf tak-terhubung** (*disconnected graph*).

Contoh graf tak-terhubung:

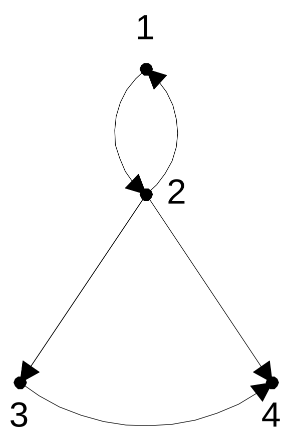


- Graf berarah *G* dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya terhubung (graf tidak berarah dari *G* diperoleh dengan menghilangkan arahnya).

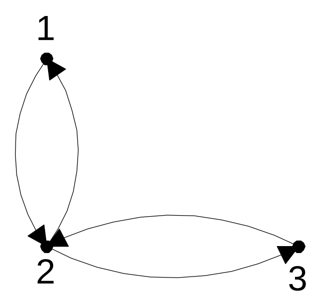
- Dua simpul, *u* dan *v*, pada graf berarah *G* disebut **terhubung kuat** (*strongly connected*) jika terdapat lintasan berarah dari *u* ke *v* dan juga lintasan berarah dari *v* ke *u*.

- Jika *u* dan *v* tidak terhubung kuat tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya, maka *u* dan *v* dikatakan **terhubung lemah** (*weakly coonected*).

- Graf berarah *G* disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang *u* dan *v* di *G*, terhubung kuat. Kalau tidak, *G* disebut **graf terhubung lemah**.




graf berarah terhubung lemah

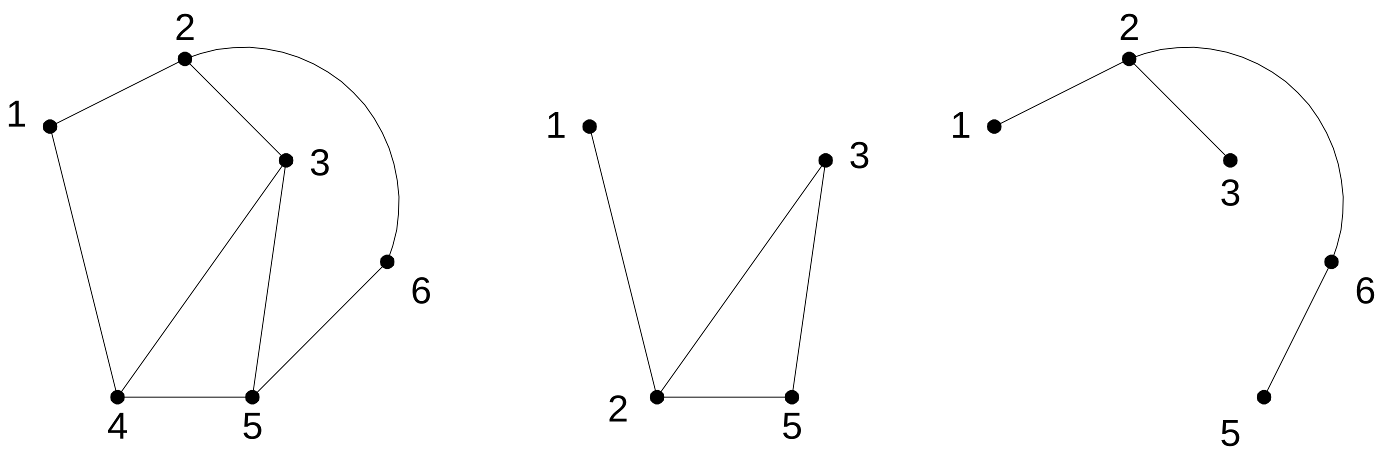



graf berarah terhubung kuat

## Subgraph (Upagraf) dan Komplemen Upagraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah **upagraf** (*subgraph*) dari $G$ jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

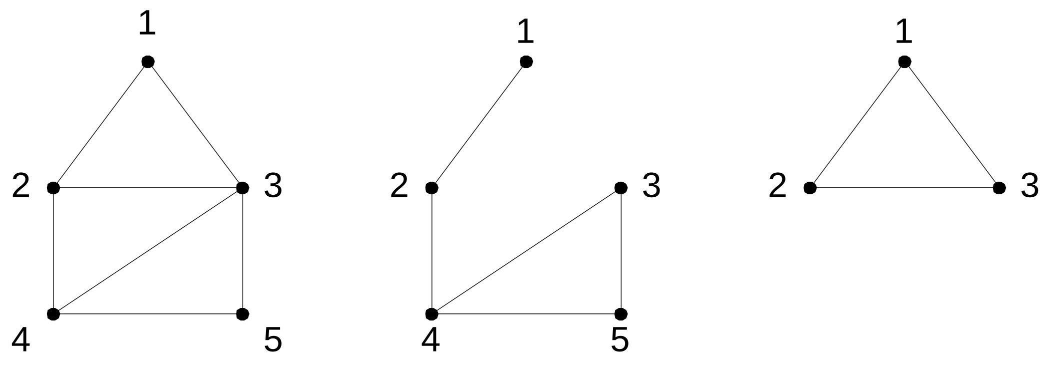
**Komplemen** dari upagraf $G_1$ terhadap graf $G$ adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan $V_2$ adalah himpunan simpul yang anggota-anggota $E_2$ bersisian dengannya.




(a) Graf $G_1$ (b) Sebuah upagraf (c) komplemen dari upagraf (b)

## Spanning Subgraph (Upagraf Rentang)

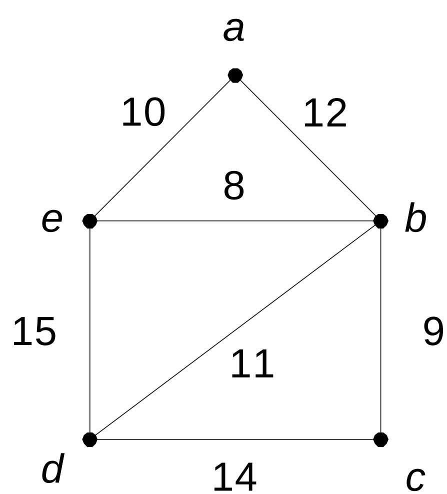
Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **upagraf rentang** jika $V_1 = V$ (yaitu $G_1$ mengandung semua simpul dari $G$).




(a) graf $G$, (b) upagraf rentang dari $G$, (c) bukan upagraf rentang dari $G$

## Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

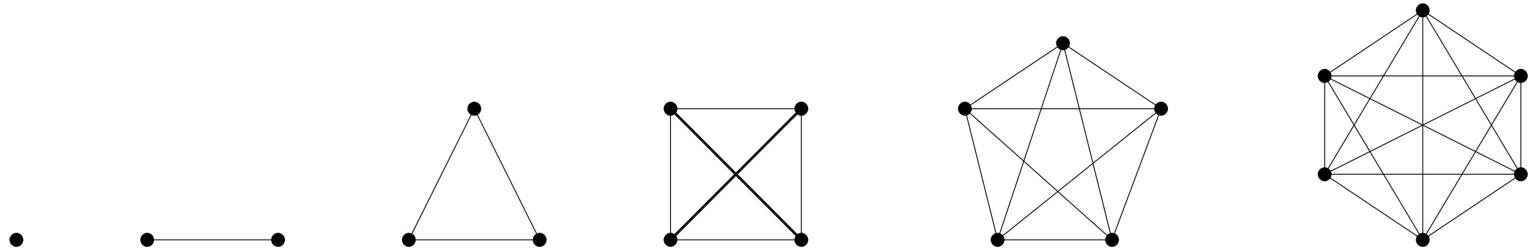
*Graf berbobot* adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



# Beberapa Graf Khusus

**a. Graf Lengkap (*Complete Graph*)**

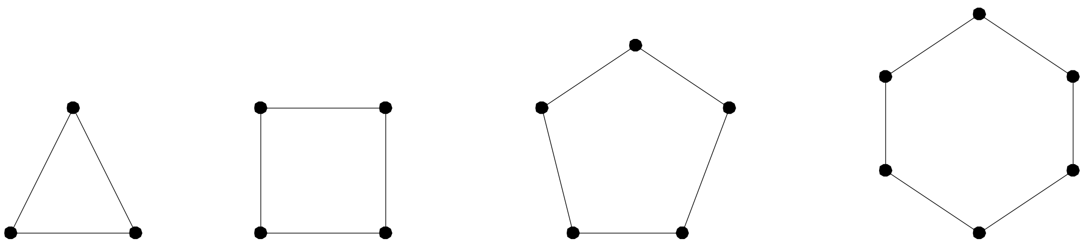
**Graf lengkap** ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan $n$ buah simpul dilambangkan dengan $K_n$. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari $n$ buah simpul adalah $n(n – 1)/2$.



$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$ $K_6$

## b. Graf Lingkaran

**Graf lingkaran** adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan $n$ simpul dilambangkan dengan $C_n$.



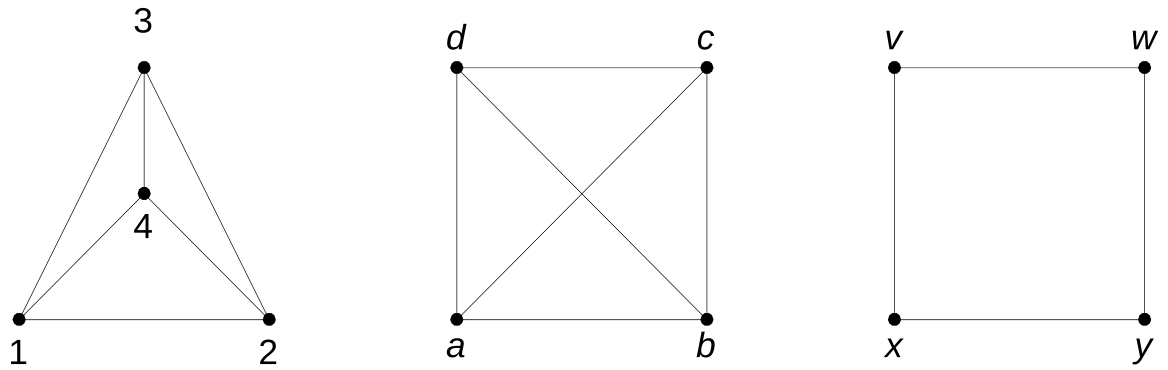
# Graf Isomorfik

- Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling **isomorfik**.

- Dua buah graf, $G_1$ dan $G_2$ dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduaya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.

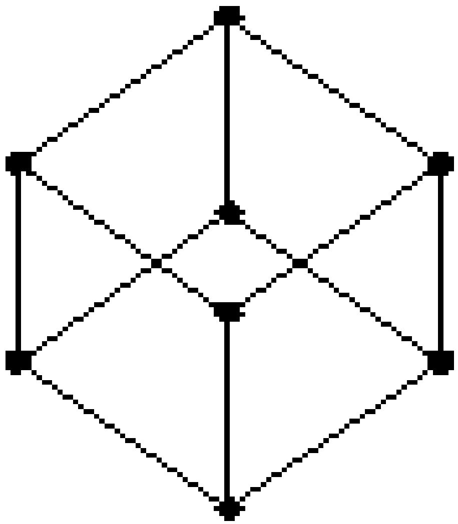
- Dengan kata lain, misalkan sisi $e$ bersisian dengan simpul $u$ dan $v$ di $G_1$, maka sisi $e'$ yang berkoresponden di $G_2$ harus bersisian dengan simpul $u'$ dan $v'$ yang di $G_2$.

- Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara.

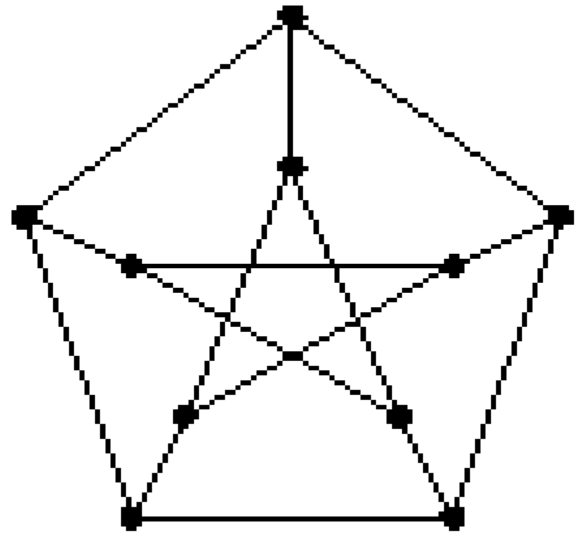



(a) $G_1$ (b) $G_2$ (c) $G_3$

$G_1$ isomorfik dengan $G_2$, tetapi $G_1$ tidak isomorfik dengan $G_3$



(a)



(b)

Gambarkan Graf G1 agar isomorfik dengan graf (a) dan Graf G2 agar isomorfik dengan graf (b)

# Daftar Pustaka


- Munir, R. (2005). *Matematika Diskrit*. Bandung:Informatika
- Munir, R. (2014). *Materi Kuliah Matematika Diskrit*
- Anton, H. (2012). *Discrete Mathematichs and Its Applications 7th ed*. New York : The McGraw-Hill Companies, Inc.
- J.A. Bondy and U.S.R. Murty (1976). Graph Theory with Applications. The Macmillan Press Ltd.