Senin

No.

1 Maret 2021

MTK - DISKRIT

Adria Pramawati A
2003061.

Tugas 2.
Induksi Matematika.

2. Untuk semua bilangan bulat tidak negatif n, buktikan dengan induksi matematik bahwa

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

3. Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

4. Buktikan algoritma berikut dengan induksi matematika, yaitu diakhiri algoritma fungsi mengembalikan nilai a^m

```
function exp (a : integer . m : integer )
{ fungsi untuk menghitung a^m }
Deklarasi
k , r : integer
Algoritma:
r <- 1
k <- m
while k > 0 do
    r <- r * a
    k <- k - 1
end while
return r ( Computer : r = a^m
Loop invariant : r x a^k = a^m )
```

Jawab

2. $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

(i) Tunjukan bahwa p_1 bernilai benar $(n=0)$

$2^0 = 2^{0+1} - 1$ -> Benar sebab $2^0 = 1$

$= 2^{0+1} - 1$

$= 2^1 - 1$

$= 2 - 1$

$= 1$

(ii) Langkah induksi $(n = k)$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Ditunjukan dengan $(n = k + 1)$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1$$

$$\begin{aligned} 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} + 2^{k+1}) - 1 \\ &= (2 \cdot 2^{k+1}) - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 1 \quad // \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat negatif n, terbukti.

3. $n^3 + 2n$ kelipatan 3

(i) Tunjukan bahwa P_1 bernilai benar $(n = 1)$

$1^3 + 2(1) = 3 \rightarrow$ Benar adalah kelipatan 3

(ii) Langkah induksi $(n = k)$

$k^3 + 2(k) \rightarrow$ adalah kelipatan 3

Ditunjukan dengan $(n = k + 1)$

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 2k + 3 \\ &= (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1) \quad // \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan $n^3 + 2n$ kelipatan 3, $n \geq 1$. terbukti.

4. (i) Tunjukkan bahwa P_0 bernilai benar ($n=0$)

$$r_0 \times a^{k_0} = a^m \iff 1 \times a^m = a^m$$

(ii) Langkah induksi

$$r_n \times a^{k_n} = a^m$$

Dirumuskan dengan ($p = n+1$)

$r_{n+1} = r_n \times a$ dan $k_{n+1} = k_n - 1$

maka

$$\begin{aligned} r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} &= (r_n \times a) \times a^{k_n - 1} \\ &= (r_n \times a) \times a^{k_n} \times a^{-1} \\ &= r_n \times a^{k_n} = a^m \;// \end{aligned}$$

Jadi $r_{n+1} \times a^{k_{n+1}} = a^m \rightarrow$ Benar

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan, maka untuk setiap bilangan $n \geq 0$ terbukti benar.