HIMPUNAN

Definisi

- Himpunan (*set*) : kumpulan objek-objek yang berbeda (distinct)

- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

- Objek tersebut dapat berupa bilangan, huruf, orang, dan lain-lain
- Contoh ??

Notasi

- Himpunan : huruf besar ; U
- Angota himpunan : huruf kecil (jika huruf) ; a

  Contoh : U = { a, b, c, d, e, f, g }
- Beberapa notasi baku :

  N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

  Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

  Q = himpunan bilangan rasional

  R = himpunan bilangan riil

  C = himpunan bilangan kompleks

Cara Penyajian Himpunan

Enumerasi, Deskripsi, Diagram (Venn)

- **Enumerasi**

  Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci (

  Contoh

  - Himpunan lima bilangan asli pertama : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
  - Himpunan software under windows : *C* = {MsWord, MsExcel, MsPowerPoint,…}
  - $K = \{ \{\} \}$
  - F = { {a, b}, {c, d}, {e, f, g}, {} } (kelas / keluarga himpunan)

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- **Contoh**

  Misal : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

  maka

  $3 \in A$

  $\{2, 6, 10\} \in B$

  $\{2, 4\} \in A$

  $\{2, 4\} \in B$

  $\{1, 3, 5\} \notin B$

  $\{6, 8\} \notin B$

Contoh 3. Bila $P_1 = \{a, b\}$,

$P_2 = \{ \{a, b\} \}$,

$P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

- **Deskripsi (Notasi Pembentuk Himpunan)**

  Mendeskripsikan sifat – sifat yang harus dipenuhi oleh setiap anggota himpunan tersebut

Notasi: $\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$

Contoh

Himpunan lima bilangan asli pertama : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{ x \mid x \text{ bilangan asli lebih kecil dari } 6\}$

atau $A = \{ x \mid x \in N, x < 6 \}$

$M = \{ x \mid x \text{ software under windows } \}$

- ***<u>Diagram Venn</u>***

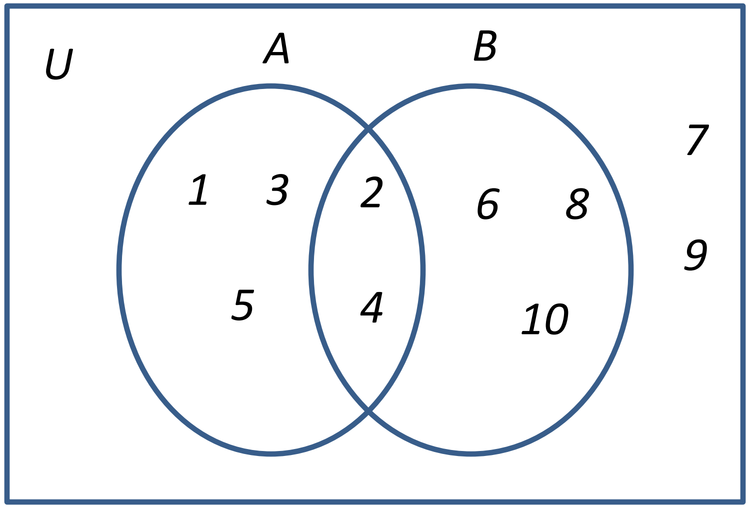
  Cara untuk menggambarkan hubungan antara himpunan – himpunan.

Contoh

Misalkan U = {1, 2, 3, …, 10},

A = {1, 2, 3, 4, 5} dan B = {2, 4, 6, 8, 10}

Diagram Venn:



Kardinalitas

Kardinal dari himpunan *A* : Banyaknya elemen himpunan *A*

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 $\}$, $|B| = 8$

(ii) T = {jeruk, pisang, mangga, pepaya}, $|T| = 4$

(iii) $A = \{a$, b, c, d, e $\}$, $|A| = 5$

Himpunan kosong (*null set*)

Himpunan dengan kardinalitas sama dengan nol (n(A) = 0)

Notasi: $\emptyset$ atau {}

Contoh

(i) $A = \{ x \mid x \notin A \}$, maka n(A) = 0

(ii) B = { orang Indonesia yang pernah mendarat di bulan }, maka n(B) = 0

(iii) $C = \{x \mid x$ adalah akar real persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(C) = 0$

Catatan :

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

Latihan/Tugas

- Tuliskan bentuk enumerasi dari :

  A = Himpunan software aplikasi untuk semua OS

  B = Himpunan bilangan genap positif kurang dari 100
- Tuliskan bentuk deskripsi dari :

  D = { Windows, Linux, Unix, MacOS, OS/2, ... }

  C = { win97, win98, win2000, winXP,... }
- Dari survey terhadap 100 programmer diperoleh data : 60 orang menguasi C++, 25 orang menguasai Pascal, dan 5 orang tidak menguasi keduanya. Berapa orang yang menguasai keduanya? Gambarkan diagram Venn-nya.
- Tentukan $n(A)$, $n(E)$, dan $n(F)$

$$A = \{ a, b, c, d \},\ E = \{ x \mid x^2 - x - 2 = 0 \},\ F = \{ \}$$

Himpunan Bagian (*Subset*)

- **Himpunan Bagian**

  Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B

  Notasi: $A \subseteq B$, B dikatakan *superset* dari A

- ***Subset* Wajar (*Proper Subset*)**

  Dikatan *subset* wajar : A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$. Notasi: $A \subset B$, B dikatakan *superset* wajar dari A

Himpunan Bagian (*Subset*)

Contoh

(i) $\{ 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{2, 4, 6\} \subseteq \{2, 4, 6\}$

(iii) $\{2, 4\} \subset \{2, 4, 6\}$

(iv) {apel, jeruk} $\subseteq$ {apel, jeruk, mangga}

(v) $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

Catatan :

(a) $A \subseteq A$

(b) $\varnothing \subseteq A$

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Himpunan Bagian (*Subset*)

- ***Subset* Tak-Wajar (*Improper Subset*)**

  Dikatan *subset* tak-wajar : himpunan bagian dari A yang terdiri dari setiap elemen dari A.

  Contoh

  Misal : $A=\{1, 2\}$ maka *subset* tak-wajarnya adalah $\{1\}$, $\{2\}$, A, dan $\{\}$

Latihan/Tugas

- Misalkan A = {1, 2, 3}, tentukan semua himpunan bagian dari A
- Misalkan $B = \{ x \mid x$ negatif dan $x^2 - 3x - 10 = 0 \}$, maka banyaknya himpunan bagian dari B adalah …
- Tentukan E dan F agar $E \subseteq A$ dan $E \subset A$ benar, $F \subseteq A$ dan $F \subset A$ salah

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x^2 - x) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{5,4,3,2,1\}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 1,2,3,4,5 \}$ dan $B = \{3,2,4,1\}$, maka $A \neq B$

Catatan :

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekuivalen

- Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh

Misalkan $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d, e \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 5$

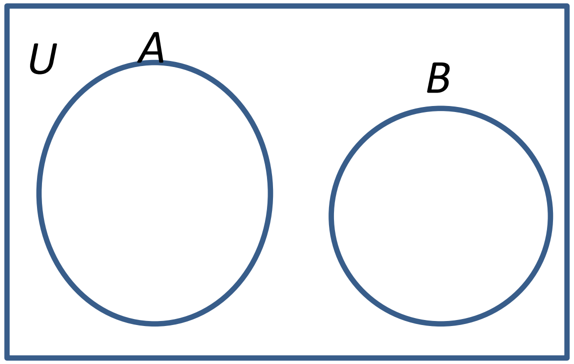
Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : $A // B$

Contoh

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A // B$.



Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau 2^A

- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

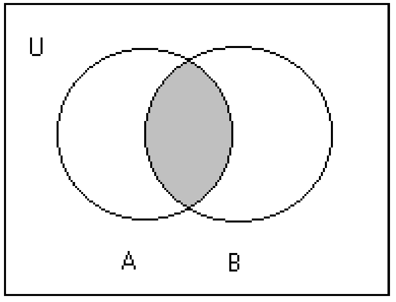
Contoh

Jika $A = \{ 2, 3 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 2 \}, \{ 3 \}, \{ 2, 3 \}\}$

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



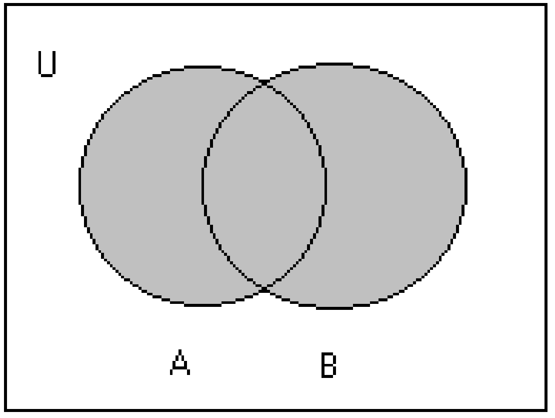
Contoh

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$. Artinya: A // B

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



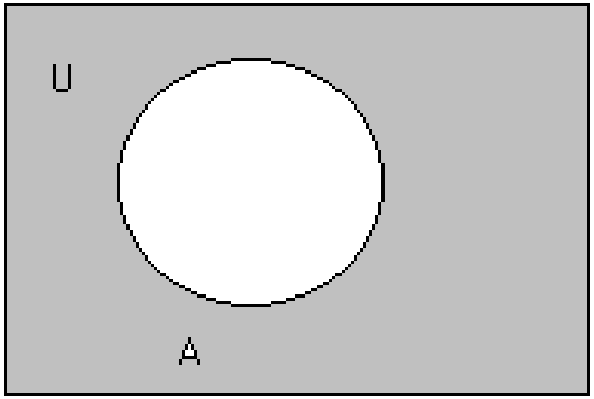
Contoh

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.

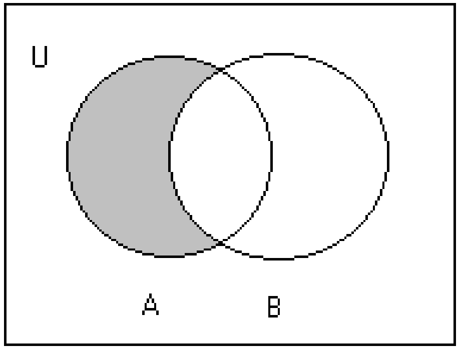
Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



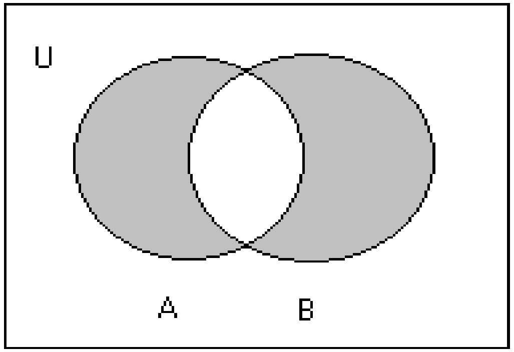
Contoh

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



- Sifat - sifat :
  1. Komutatif : $A \oplus B = B \oplus A$
  2. Asosiatif : $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

Contoh

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
   $\left| A \times B \right| = \left| A \right| \, . \, \left| B \right|$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,
   $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$
   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$
   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Contoh 22.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

Hukum-hukum Himpunan

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan
- Disebut juga hukum aljabar himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap U = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = U$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$

5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = U$ – $\overline{U} = \varnothing$	

Latihan

1. Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

   (a) $A \cap P(A) = P(A)$ (b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$

   (c) $A - P(A) = A$ (d) $\{A\} \in P(A)$

   (e) $A \subseteq P(A)$

2. Tentukan himpunan kuasa (semua anggota himpunan)

   (a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

3. Tuliskan dalam notasi himpunan

   A = himpunan semua PC buatan dalam negeri

   C = himpunan semua PC yang dibuat sebelum tahun 1990

   D = himpunan semua PC yang nilai jualnya kurang dari Rp 10jt

   “semua PC produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 10jt”

4. U = himp. mahasiswa

P = himp. mahasiswa yang nilai ujian UTS > 80

Q = himp. mahasiswa yang nilain ujian UAS > 80

A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya > 80,
B jika salah satu ujian > 80,
C jika kedua ujian < 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A"
(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B
(iii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C"

5. $A = \{ s, g, n, m \}$ $B = \{ c, t, d \}$
Berapa banyak kombinasi yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Prinsip Dualitas pada Himpunan

Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti

$\cup \rightarrow \cap$,
$\cap \rightarrow \cup$,
$\varnothing \rightarrow U$,
$U \rightarrow \varnothing$,

sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

Contoh :

1. Hukum identitas: $A \cup \varnothing = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \varnothing = \varnothing$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \varnothing$

Pernyataan : $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan B berlaku :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh

Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Consider the following data among 110 students in a college dormitory:
30 students are on a list A (taking Artificial Intelegence class)
25 students are on a list G (taking Game Development class)
20 students are on both list.

Find the number of students : (a) on list A or B, (b) on exactly one of the two lists, (c) on neither list

Contoh Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Dik : A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK dari 3 dan 5)

Dit : $|A \cup B|$ =...?

Jawab :

$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$

$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$

$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Kerjakan seperti contoh diatas untuk menghitung banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 2 atau 3 dan hitung beda setangkupnya.

Contoh

Consider the following data among 110 students in a college dormitory:
30 students are on a list A (taking Artificial Intelegence class)
35 students are on a list G (taking Game Development class)
20 students are on both list.

Find the number of students : (a) on list A or B, (b) on list A, on list G, (c) on neither list

Jawab:

(a) $|A \cup G| = |A| + |G| - |A \cap G|$ = 30 + 25 – 20 = 45
(b) i. $|A - G| = |A| - |A \cap G|$ = 30 – 20 = 10
ii. $|G - A| = |G| - |A \cap G|$ = 35 – 20 = 15
(c) $|A^c \cap G^c|$ = ?
Dengan Hukum DeMorgan kita punya $A^c \cap G^c = (A \cup G)^c$. Sehingga
$|A^c \cap G^c| = |(A \cup G)^c| = |U| - |A \cup G|$ = 110 – 45 = 65

Untuk tiga buah himpunan A, B, dan C, berlaku

$$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|$$

Untuk himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_r$, berlaku:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r\right| = \sum_{i} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i \le j \le r} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots + (-1)^{r-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r\right|$$

Pembuktian Proposisi Perihal Himpunan

- Proposisi himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.
- Proposisi dapat berupa:

1. Kesamaan (*identity*)

   Contoh: Buktikan "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$"

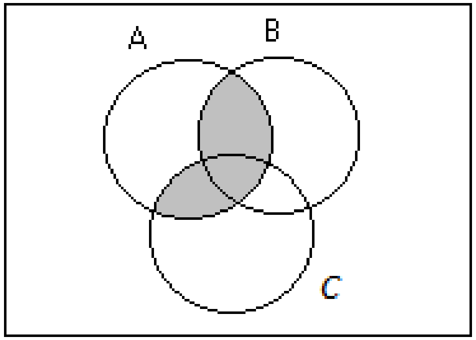
2. Implikasi

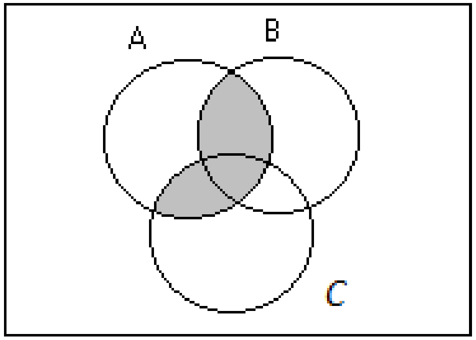
   Contoh: Buktikan bahwa "Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$".

1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:





$A \cap (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.
Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

!! Kerjakan seperti contoh buktikan "$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$" dan "$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B \cup A) = A \oplus B$ "

Kelemahan Pembuktian dengan Diagram Venn

- Hanya dapat digunakan untuk menggambarkan himpunan yang terbatas jumlahnya.

- Metode ini *mengilustrasikan* daripada membuktikan fakta.

- Pembuktian non formal

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan

(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B)$ $= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$ (H. distributif)

$= U \cap (A \cup B)$ (H. komplemen)

$= A \cup B$ (H. identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

$A \cap (\overline{A} \cup B)$ $= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ (H. distributif)

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (H. komplemen)

$= A \cap B$ (H. identitas)

Contoh Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) && \text{(Hukum distributif)} \\
&= (A \cup B) \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\
&= A \cup B && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup \mathrm{C})$. Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

(ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall \mathrm{x} \in A$ juga berlaku $x \in \mathrm{C}$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Himpunan Ganda (*multiset*)

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*).

  Contohnya, {1, 1, 1, 2, 2, 3}, {2, 2, 2}, {2, 3, 4}, {}.

- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: $M = \{ 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 \}$, multiplisitas 0 adalah 4.

- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1.

- Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda.

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$,

   $P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

   $P \cap Q = \{ a, a, c \}$

3. P – Q adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:

- multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, jika selisihnya positif
- 0, jika selisihnya nol atau negatif.

Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P – Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q.

Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
$P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

Daftar Pustaka

- Munir, R. (2005). *Matematika Diskrit*. Bandung:Informatika
- Munir, R. (2014). *Materi Kuliah Matematika Diskrit*
- Anton, H. (2012). *Discrete Mathematichs and Its Applications 7thed*. New York : The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Lipschultz, S. (1998). Set Theory and Related Topics 2-nd ed. USA : The McGraw-Hill Companies, Inc.