

Kombinatorial



Pendahuluan

- Sebuah kata-sandi (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan kata-sandi yang dapat dibuat?

abcdef

aaaade

a123fr

...

erhtgahn

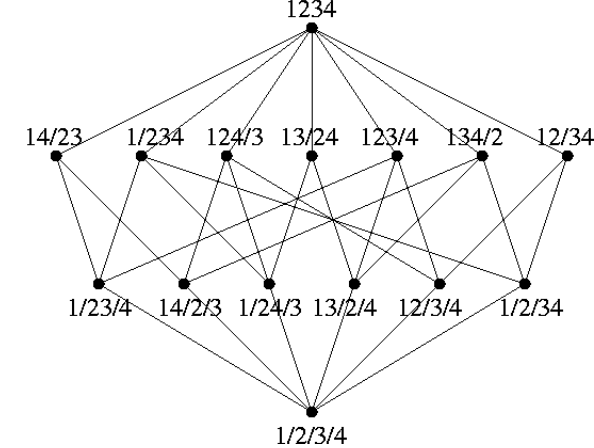
yutresik

...

????



Definisi



- **Kombinatorial** adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

Kaidah Dasar Menghitung

- Kaidah perkalian (*rule of product*)

Percobaan 1: p hasil

Percobaan 2: q hasil

Percobaan 1 **dan** percobaan 2: $p \times q$ hasil

- Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

Percobaan 1: p hasil

Percobaan 2: q hasil

Percobaan 1 **atau** percobaan 2: $p + q$ hasil

- **Contoh 1.** Ketua angkatan TI hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria TI = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua angkatan?

Penyelesaian: $65 + 15 = 80$ cara.

- **Contoh 2.** Dua orang perwakilan TI mendatangi Bapak Dosen untuk protes nilai ujian. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tersebut?

Penyelesaian: $65 \times 15 = 975$ cara.

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

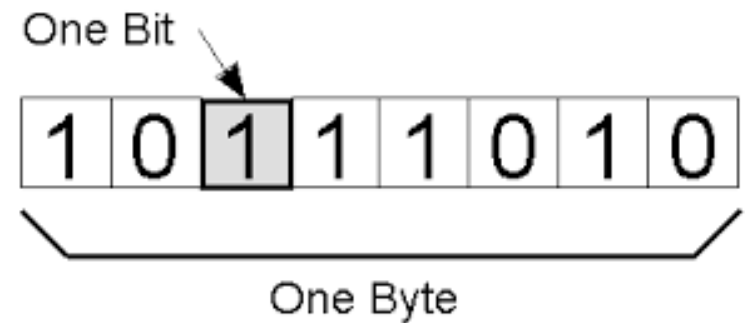
Misalkan ada n percobaan, masing-masing dg p_i hasil

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

$$p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \text{ hasil}$$

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n \text{ hasil}$$



- **Contoh 3.** Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:

- (a) panjang *string* 5 bit
- (b) panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

Penyelesaian:

- (a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah
- (b) $2^8 = 256$ buah

- **Contoh 4.** Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang
 - (a) semua angkanya berbeda
 - (b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (1, 3, 5, 7, 9)

posisi ribuan: 8 kemungkinan angka

posisi ratusan: 8 kemungkinan angka

posisi puluhan: 7 kemungkinan angka

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = $(5)(8)(8)(7) = 2240$ buah.

(b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);

posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)

posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = $(5)(9)(10)(10) = 4500$

- **Contoh 5.** Kata-sandi (*password*) sistem komputer panjangnya 6 sampai 8 karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak kata-sandi yang dapat dibuat?

Penyelesaian:

Jumlah karakter password = 26 (A-Z) + 10 (0-9) = 36 karakter.

Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 6 karakter:
 $(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$

Jumlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 7 karakter:
 $(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$

umlah kemungkinan kata-sandi dengan panjang 8 karakter:
 $(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456$

Jumlah seluruh kata-sandi (kaidah penjumlahan) adalah
 $2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 =$
 $2.901.650.833.888$ buah.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak jumlah *byte* yang dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'?

Penyelesaian:

Misalkan

A = himpunan *byte* yang dimulai dengan '11',

B = himpunan *byte* yang diakhiri dengan '11'

$A \cap B$ = himpunan *byte* yang berawal dan berakhir dengan '11'

maka

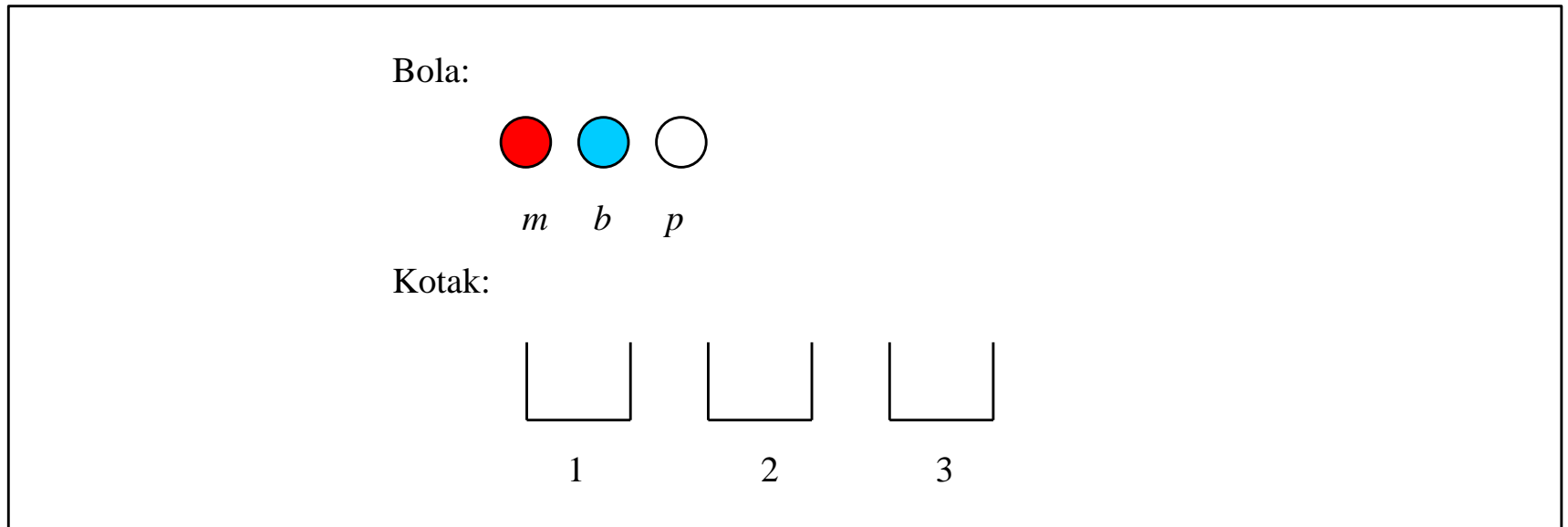
$A \cup B$ = himpunan *byte* yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

$$|A| = 2^6 = 64, \quad |B| = 2^6 = 64, \quad |A \cap B| = 2^4 = 16.$$

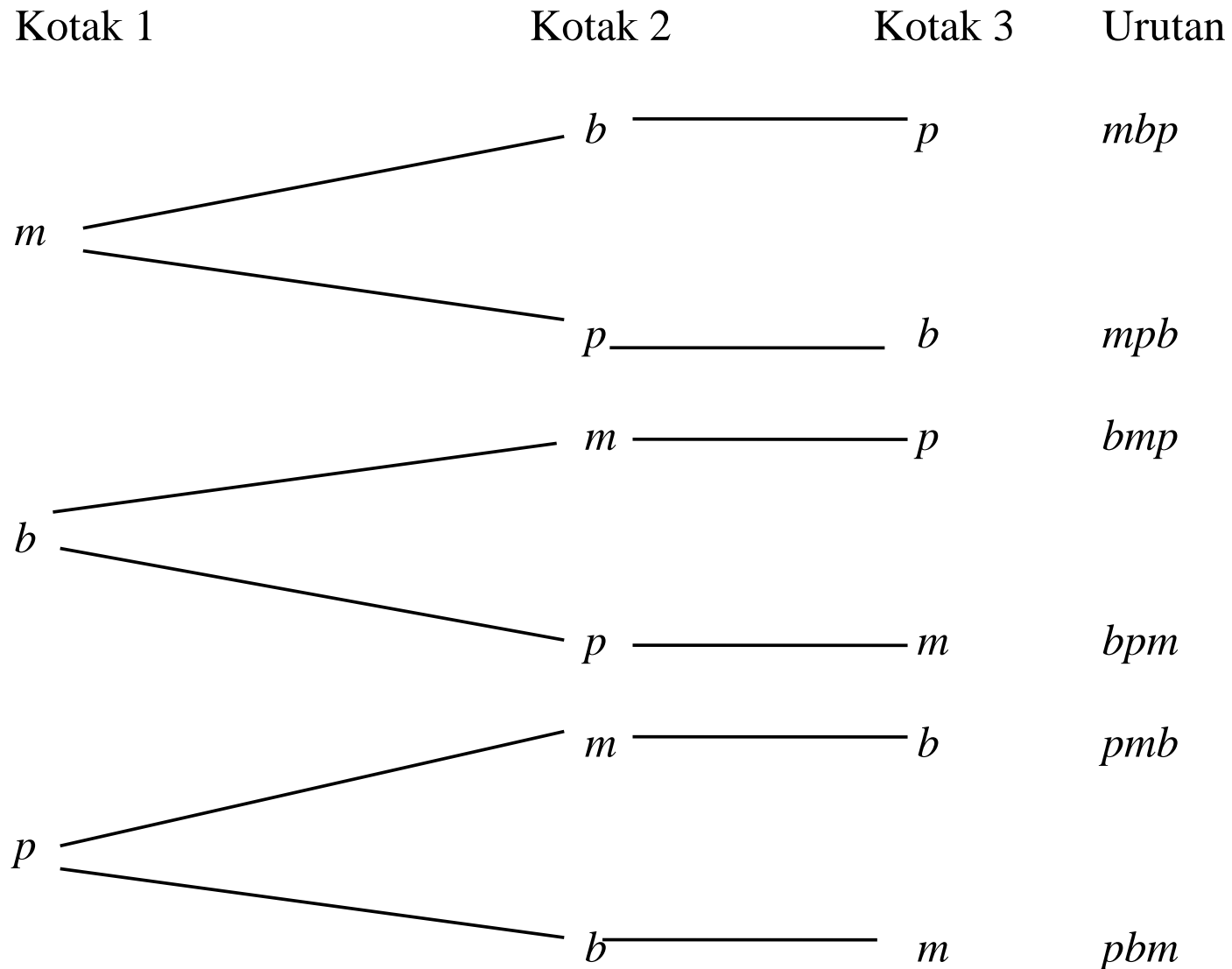
maka

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 2^6 + 2^6 - 16 = 64 + 64 - 16 = 112. \end{aligned}$$

Permutasi



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah $(3)(2)(1) = 3! = 6$.

- **Definisi:** Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.
- Misalkan jumlah objek adalah n , maka
 - ✓ urutan pertama dipilih dari n objek,
 - ✓ urutan kedua dipilih dari $n - 1$ objek,
 - ✓ urutan ketiga dipilih dari $n - 2$ objek,
 - ✓ ...
 - ✓ urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n - 1) (n - 2) \dots (2)(1) = n!$$

- **Contoh 6.** Berapa banyak “kata” yang terbentuk dari kata “HAPUS”?

Penyelesaian:

Cara 1: $(5)(4)(3)(2)(1) = 120$ buah kata

Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

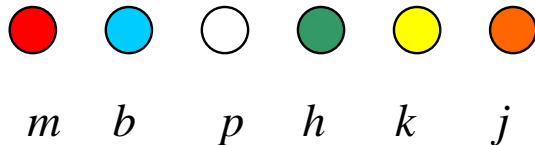
- **Contoh 7.** Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

Penyelesaian: $P(25, 25) = 25!$

Permutasi r dari n elemen

- Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Bola:



Kotak:



Penyelesaian: 1 2 3

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = $(6)(5)(4) = 120$

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola \rightarrow
(ada n pilihan) ;

kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 1)$ bola \rightarrow (ada $n - 1$ pilihan);

kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 2)$ bola \rightarrow (ada $n - 2$) pilihan;

...

kotak ke- r dapat diisi oleh salah satu dari $(n - (r - 1))$ bola \rightarrow
(ada $n - r + 1$ pilihan)

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (r - 1))$

Definisi 2. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

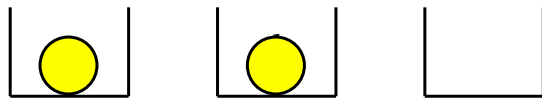
$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (r - 1)) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.
- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

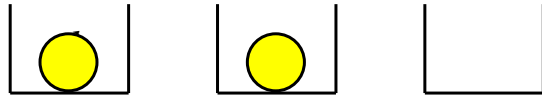
$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$



1

2

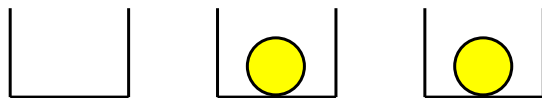
3



1

2

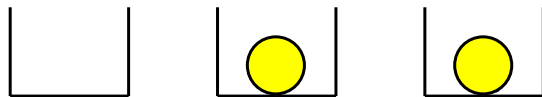
3



1

2

3



1

2

3



1

2

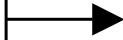
3



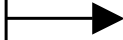
1

2

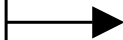
3



sama



sama



sama



hanya 3 cara

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada $3!$ cara memasukkan bola yang warnanya sama.

- Secara umum, jumlah cara memasukkan r buah bola yang berwarna sama ke dalam n buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r) \text{ atau } \binom{n}{r}$$

- $C(n, r)$ sering dibaca " n diambil r ", artinya r objek diambil dari n buah objek.
- **Definisi 3.** Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Interpretasi Kombinasi

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen.

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$

Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\begin{array}{l} \{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\} \end{array} \bigg\rangle 3 \text{ buah}$$

$$\text{atau } \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3 \text{ buah}$$

2. $C(n, r)$ = cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCBE, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Contoh 9. Di antara 10 orang mahasiswa Teknik Informatika Angkatan 2002, berapa banyak cara membentuk sebuah perwakilan beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga:

- (a) mahasiswa bernama A selalu termasuk di dalamnya;
- (b) mahasiswa bernama A tidak termasuk di dalamnya;
- (c) mahasiswa bernama A selalu termasuk di dalamnya, tetapi B tidak;
- (d) mahasiswa bernama B selalu termasuk di dalamnya, tetapi A tidak;
- (e) mahasiswa bernama A dan B termasuk di dalamnya;
- (f) setidaknya salah satu dari mahasiswa yang bernama A atau B termasuk di dalamnya.

Penyelesaian:

- (a) $C(9, 4) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga A selalu termasuk di dalamnya.
- (b) $C(9, 5) = 126$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga A tidak termasuk di dalamnya.
- (c) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga A termasuk di dalamnya, tetapi B tidak.
- (d) $C(8, 4) = 70$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga B termasuk di dalamnya, tetapi A tidak.
- (e) $C(8, 3) = 56$ cara untuk membentuk perwakilan yang beranggotakan 5 orang sedemikian sehingga A dan B selalu termasuk di dalamnya.

(f) Jumlah cara membentuk perwakilan sedemikian sehingga setidaknya salah satu dari A atau B termasuk di dalamnya

= jumlah cara membentuk perwakilan sehingga A termasuk di dalamnya, B tidak

+ jumlah cara membentuk perwakilan sehingga B termasuk di dalamnya, A tidak

+ jumlah cara membentuk perwakilan sehingga A dan B termasuk di dalamnya

$$= 70 + 70 + 56 = 196$$

Prinsip inklusi-eksklusi:

X = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A

Y = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan B

$X \cap Y$ = jumlah cara membentuk perwakilan yang menyertakan A dan B , maka

$$|X| = C(9, 4) = 126; \quad |Y| = C(9, 4) = 126;$$

$$|X \cap Y| = C(8, 3) = 56;$$

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 126 + 126 - 56 = 196$$

Permutasi dan Kombinasi

Bentuk Umum

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

n_1 bola diantaranya berwarna 1,

n_2 bola diantaranya berwarna 2,

\vdots

n_k bola diantaranya berwarna k ,

dan $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah:

$$P(n, n) = n!.$$

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

\vdots

ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, ..., n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$\begin{aligned}
 C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) &= C(n, n_1) C(n - n_1, n_2) C(n - n_1 - n_2, n_3) \\
 &\quad \dots C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k) \\
 &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \\
 &\quad \frac{(n - n_1 - n_2)!}{n_3!(n - n_1 - n_2 - n_3)!} \\
 &\quad \dots \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1})!}{n_k!(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1} - n_k)!} \\
 &= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_k!}
 \end{aligned}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Contoh 10. Berapa banyak “kata” yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

Penyelesaian:

$$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$$

huruf $M = 1$ buah (n_1)

huruf $I = 4$ buah (n_2)

huruf $S = 4$ buah (n_3)

huruf $P = 2$ buah (n_4)

$$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11 \text{ buah} = |S|$$



Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \text{ buah.}$$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

$$= 34650 \text{ buah}$$

Contoh 11. Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

Penyelesaian:

$$n = 8, n_1 = 4, n_2 = 2, n_3 = 2, \text{ dan } n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$$

$$\text{Jumlah cara membagi seluruh mangga} = \frac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420 \text{ cara}$$

Contoh 12. 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:

$n = 18$; $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, dan $n_4 = 6$ (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu = $\frac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$ cara



Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat r buah bola yang semua warnanya sama dan n buah kotak.

(i) Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

(ii) Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$

Contoh 13. Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0 . Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:

- Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).
- Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya,

Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)

Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)

Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)

Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$$

Ada $C(4 + 12 - 1, 12) = C(15, 12) = 455$ buah solusi.

Contoh 14. 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$$

Latihan:

1. Ada 10 soal di dalam ujian akhir *Matematika Diskrit*. Berapa banyak cara pemberian nilai (bilangan bulat) pada setiap soal jika jumlah nilai keseluruhan soal adalah 100 dan setiap soal mempunyai nilai paling sedikit 5. (Khusus untuk soal ini, nyatakan jawaban akhir anda dalam $C(a, b)$ saja, tidak perlu dihitung nilainya)
2. Di perpustakaan Teknik Informatika terdapat 3 jenis buku: buku Algoritma dan Pemrograman, buku Matematika Diskrit, dan buku Basisdata. Perpustakaan memiliki paling sedikit 10 buah buku untuk masing-masing jenis. Berapa banyak cara memilih 10 buah buku?
3. Dari sejumlah besar koin 25-an, 50-an, 100-an, dan 500-an, berapa banyak cara lima koin dapat diambil?

Koefisien Binomial

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

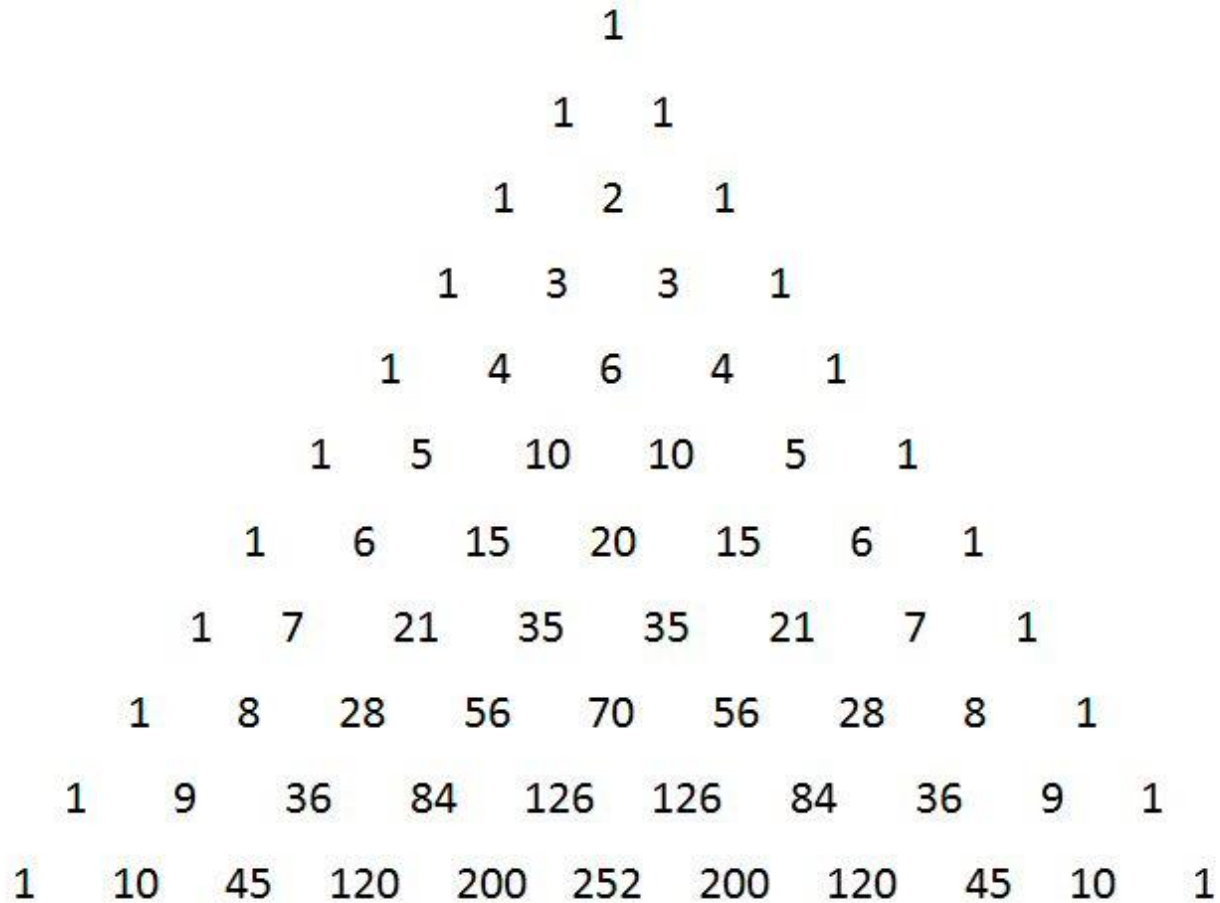
$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

				1							
					1		1				
						1	2	1			
					1		3	3	1		
						1	4	6	4	1	
					1		5	10	10	5	1

$$(x + y)^n = C(n, 0) x^n + C(n, 1) x^{n-1} y^1 + \dots + C(n, k) x^{n-k} y^k + \dots + C(n, n) y^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^{n-k} y^k$$

Koefisien untuk $x^{n-k} y^k$ adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut **koefisien binomial**.

Segitiga Pascal



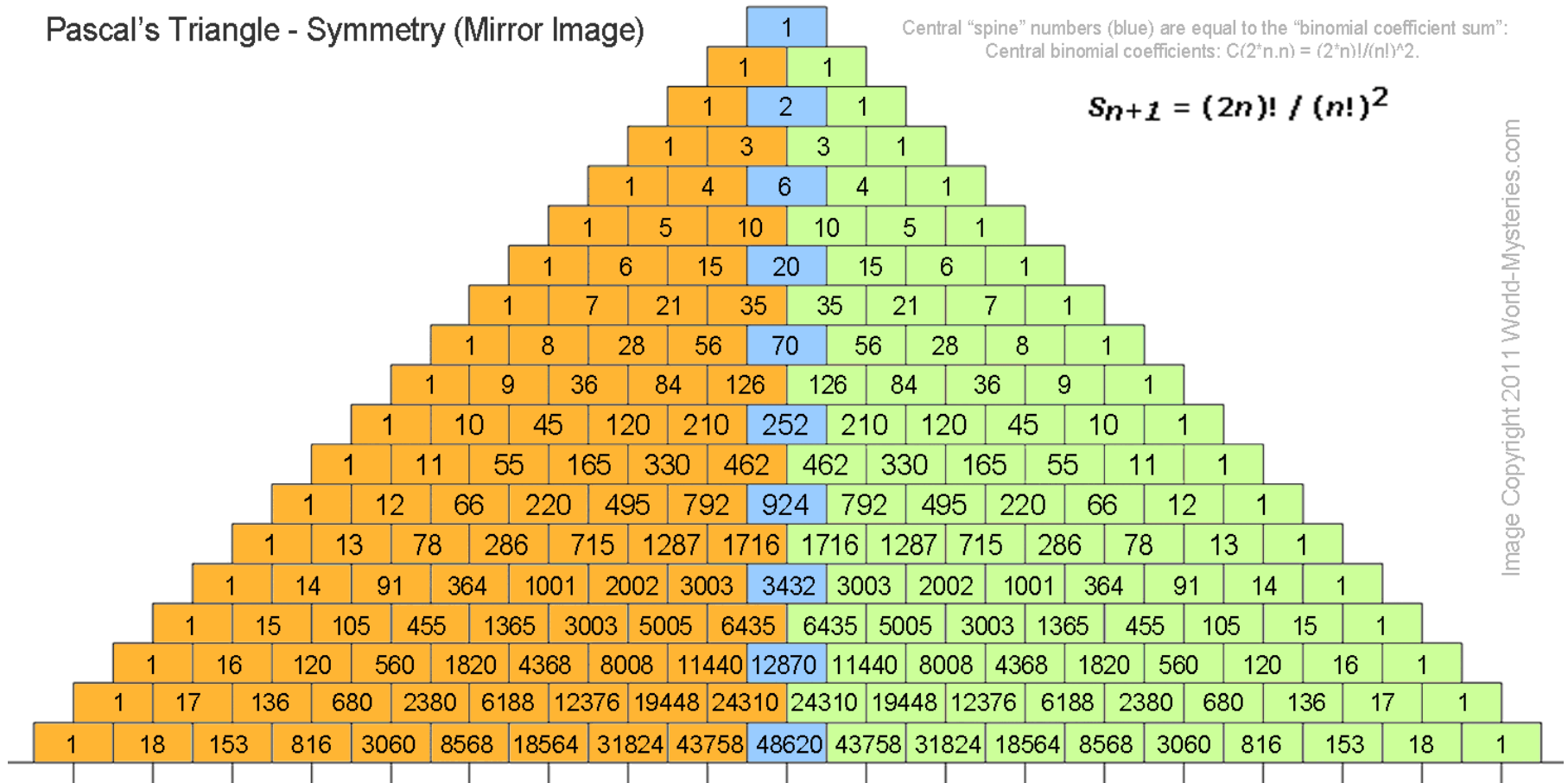
A diagram of Pascal's Triangle, also known as Segitiga Pascal. It consists of 10 rows of numbers arranged in a triangular shape. Each row starts and ends with the number 1. The numbers in each row are the sum of the two numbers directly above them from the previous row. The values increase towards the center of each row and then decrease back to 1. The numbers are: Row 0: 1; Row 1: 1, 1; Row 2: 1, 2, 1; Row 3: 1, 3, 3, 1; Row 4: 1, 4, 6, 4, 1; Row 5: 1, 5, 10, 10, 5, 1; Row 6: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1; Row 7: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1; Row 8: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1; Row 9: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1; Row 10: 1, 10, 45, 120, 200, 252, 200, 120, 45, 10, 1.

						1					
					1		1				
				1		2		1			
			1		3		3		1		
		1		4		6		4		1	
	1		5		10		10		5		1
	1	6		15		20		15	6		1
	1	7	21		35		35	21	7		1
	1	8	28	56		70		56	28	8	1
	1	9	36	84	126		126	84	36	9	1
1	10	45	120	200	252	200	120	45	10	1	

Pascal's Triangle - Symmetry (Mirror Image)

Central "spine" numbers (blue) are equal to the "binomial coefficient sum":
Central binomial coefficients: $C(2^n, n) = (2^n)! / (n!)^2$.

$$S_{n+1} = (2n)! / (n!)^2$$



Contoh 15. Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0) a^3 + C(3, 1) a^2 b^1 + C(3, 2) a^1 b^2 + C(3, 3) b^3 \\&= 1 (3x)^3 + 3 (3x)^2 (-2) + 3 (3x) (-2)^2 + 1 (-2)^3 \\&= 27 x^3 - 54x^2 + 36x - 8\end{aligned}$$

Contoh 16. Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^5$.

Penyelesaian:

$$(x - y)^5 = (x + (-y))^5.$$

$$\text{Suku keempat adalah: } C(5, 3) x^{5-3} (-y)^3 = -10x^2y^3.$$

Contoh 17. Buktikan bahwa $\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$.

Penyelesaian:

Dari persamaan (6.6), ambil $x = y = 1$, sehingga

$$\Leftrightarrow (x + y)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^{n-k} y^k$$

$$\Leftrightarrow (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n C(n, k)$$

$$\Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^n C(n, k)$$