

Éléments de géodésie

Sébastien GUILLAUME

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud
Institut d'ingénierie du territoire

Yverdon-les-Bains

2021

Table des matières

I Systèmes de coordonnées	9
1 Introduction	11
2 Systèmes de coordonnées cartésiennes	13
2.1 Coordonnées cartésiennes standards	13
2.2 Coordonnées cartésiennes dans 2 systèmes	14
2.2.1 Exemple	16
2.3 Transformations rigides	17
2.4 Matrice de rotation paramétrisées par 3 angles	18
2.4.1 La convention de Cardan ($x-y-z$)	18
2.4.2 La convention d'Euler ($z-x-z$)	19
2.4.3 Matrice de rotation différentielle	20
2.4.4 Matrice de rotation différentielle en convention de Cardan	21
2.5 Matrice de rotation paramétrisée par 1 axe fixe et 1 angle de rotation	21
2.5.1 Matrice de rotation différentielle selon la paramétrisation 1 axe fixe et 1 angle	21
2.6 Matrice de rotation paramétrisée par 1 quaternion unitaire	22
2.6.1 Rotation par multiplications de quaternions	22
2.7 Exemple	23
2.8 Blocage cardanique (gimbal lock)	24
2.9 Dérivée temporelle d'une matrice de rotation	25
2.9.1 Apparition de $\dot{\mathbf{R}}_I^H$	25
2.9.2 Calcul de $\dot{\mathbf{R}}_I^H$	26
2.10 Transformations de similitude	28
2.11 Orthonormalisation de Gram-Schmidt	28
3 Systèmes de coordonnées sphériques	31
4 Systèmes de coordonnées ellipsoïdales	33
4.1 L'ellipsoïde de révolution	33
4.2 L'ellipse dans le plan vertical ($\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z$)	35
4.2.1 Relations entre les paramètres a, b, e, f	35
4.2.2 Calcul des coordonnées w et z pour un point de l'ellipse	36
4.3 Coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ellipsoïdales (λ, φ)	39
4.4 Coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ellipsoïdales (λ, φ, h)	40

5 Systèmes de coordonnées projetées	45
5.1 Exemple introductif / la projection plate-carrée	46
5.1.1 Distances dans le plan de projection	47
5.1.2 Distances sur la sphère	48
5.1.3 Comparaison des distances planimétriques et sphériques	50
5.1.4 Comparaison des surfaces	51
5.1.5 Comparaison de l'azimut sphérique et du gisement dans le plan	52
5.1.6 Image dans le plan, d'un cercle sur la sphère	53
5.2 Tenseurs métriques	55
5.2.1 Tenseurs métriques des surfaces de référence	55
5.2.2 Tenseurs métriques des coordonnées projetées	60
5.3 Indicatrice de Tissot	64
5.3.1 Indicatrices de Tissot de la projection plate-carrée sphérique	65
5.3.2 Conformité d'une projection	67
5.3.3 Equivalence d'une projection	68
5.4 Classes de projections	68
5.4.1 Projections cylindriques	68
5.4.2 Projections coniques	69
5.4.3 Projections azimutales	69
5.4.4 Projections quelconques	70
5.5 Projection de Mercator sphérique normale	73
5.5.1 Coordonnées sphériques $(\lambda, \phi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)	74
5.5.2 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées sphériques (λ, ϕ)	74
5.5.3 Loxodromie	74
5.5.4 Orthodromie	77
5.6 Projections obliques	82
5.7 Projection de Mercator sphérique oblique	83
5.8 Projection de Mercator sphérique transverse	85
5.9 Projection de Mercator ellipsoïdale normale	88
5.9.1 Coordonnées ellipsoïdales $(\lambda, \varphi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)	88
5.9.2 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées ellipsoïdales (λ, φ)	89
5.10 Projection de Mercator ellipsoïdale oblique	89
5.11 Projection de Mercator ellipsoïdale transverse	89
5.12 Projection UTM (Universal Transverse Mercator)	90
5.12.1 Zones UTM	90
5.12.2 Coordonnées ellipsoïdales $(\lambda, \varphi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)	90
5.12.3 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées ellipsoïdales (λ, φ)	92
5.13 Double projection conforme cylindrique à axe oblique Suisse	94
5.13.1 Coordonnées ellipsoïdales $(\lambda, \varphi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)	95
5.13.2 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées ellipsoïdales (λ, φ)	97
II Systèmes et cadres de référence	99
6 Introduction	101

7 Systèmes de référence célestes	103
7.1 Chute libre dans un système de référence terrestre	103
7.2 Chute libre dans un système de référence céleste	106
7.3 Le système de référence ICRS	111
7.4 Les cadres de référence ICRF	111
8 Systèmes de référence terrestres	113
8.1 Définition formelle d'un système de référence terrestre	114
8.1.1 Base orthonormée	114
8.1.2 Transformation entre deux systèmes/cadres de références terrestres .	114
8.1.3 Paramètres de transformation	116
8.1.4 Ellipsoïde de référence	116
8.2 Le système de référence ITRS	116
8.2.1 Mouvements tectoniques	117
8.2.2 Marées terrestres	118
8.3 Les cadres de références ITRF	119
8.4 Le système de référence ETRS89	122
8.5 Les cadres de références ETRF	122
8.6 Le système de référence CHTRS95	125
8.7 Le système de référence CH1903+	125
8.8 Le système de référence CH1903	125
9 Systèmes de référence locaux	127
9.1 Systèmes topocentriques ellipsoïdaux	127
9.1.1 Transformation de coordonnées TRS \leftrightarrow topo	128
9.2 Systèmes topocentriques astronomiques	130
9.2.1 Transformation de coordonnées TRS \leftrightarrow topo*	130
9.2.2 Transformation de coordonnées topo \leftrightarrow topo*	132
9.2.3 Transformation des observations terrestres topo \leftrightarrow topo*	134
III Géodésie physique	137
10 Mécanique classique	139
10.1 Introduction	139
10.2 Lois de Newton dans les systèmes de référence inertIELS	139
10.2.1 Première loi de Newton	139
10.2.2 Deuxième loi de Newton	140
10.2.3 Troisième loi de Newton	140
10.2.4 Transformation entre systèmes de référence inertIELS	140
10.3 Deuxième loi de Newton dans les systèmes de référence non-inertIELS	141
11 Loi de la gravitation universelle de Newton	147
11.1 Le principe de superposition	148
11.2 Le champ gravitationnel	149
11.3 Théorème de Gauss pour les champs gravitationnels	150
11.4 Champ gravitationnel généré par une boule homogène	150
11.4.1 Champ gravitationnel à l'extérieur de la boule	150
11.4.2 Champ gravitationnel à l'intérieur de la boule	151

12 Le champ de gravité	153
12.1 Système Terre-Soleil-Lune - \mathcal{P} fixe sur la Terre	153
12.2 Cas particulier de la Terre considérée comme une boule homogène	157
12.3 Système Terre-Soleil-Lune - \mathcal{P} en chute libre sur la Terre	162
12.4 Cas particulier de la Terre considérée comme une boule homogène	164
12.5 Gravité en géodésie physique	169
13 Théorie du potentiel	171
13.1 Travail d'une force	171
13.2 Théorème de l'énergie cinétique	172
13.3 Forces conservatives	172
13.3.1 Exemple : la force gravitationnelle	173
13.4 Energie potentielle et mécanique	174
13.4.1 Exemple : énergie potentielle gravitationnelle	174
13.4.2 Exemple : énergie potentielle gravitationnelle proche de la surface de la Terre	174
13.5 Potentiels en géodésie	175
13.5.1 Potentiel gravitationnel général de la Terre	175
13.5.2 Potentiel gravitationnel d'une boule homogène	175
13.5.3 Exemple	176
13.5.4 Potentiel centrifuge	176
13.5.5 Exemple	177
13.5.6 Potentiel de gravité	177
13.5.7 Exemple	177
13.5.8 Différentiel de potentiel de gravité	178
13.5.9 Différentiel de potentiel de gravité le long de la verticale	178
13.5.10 Différence de potentiel de gravité entre deux points	178
13.5.11 Lien avec les énergies potentielles	178
14 Géométrie du champ de gravité	181
14.1 Surfaces de niveau	181
14.1.1 Exemple (1) : boule homogène	181
14.1.2 Exemple (2) : 1 boule homogène + 2 anomalies (boules homogènes) .	181
14.2 Le géoïde	182
14.3 La ligne d'aplomb	183
14.4 La cote du géoïde	184
14.4.1 Détermination géométrique de N	184
14.4.2 Modélisation physique de N	184
14.4.3 Exemple	186
14.5 Le géoïde Suisse CHGeo2004	188
15 Systèmes d'altitudes	193
15.1 La hauteur ellipsoïdale	194
15.1.1 Détermination par GNSS	194
15.1.2 Détermination à partir de l'altitude orthométrique	194
15.1.3 Détermination par niveling trigonométrique	195
15.1.4 Détermination par niveling géométrique	195
15.2 La cote géopotentielle	196

15.2.1	Détermination par niveling géométrique	196
15.2.2	Détermination par GNSS	196
15.3	L'altitude usuelle	197
15.4	L'altitude dynamique	197
15.5	L'altitude orthométrique	198
15.5.1	Correction orthométrique	199
15.5.2	Les différences d'altitudes orthométriques	200
15.6	L'altitude normale	201
15.7	Le système d'altitude Suisse NF02	202
15.8	Le système d'altitude Suisse RAN95	204
15.8.1	La transformation RAN95-NF02 (HTRANS)	206
Appendices		209
Appendices		209
A Algèbre linéaire		209
A.1	Notations	209
A.2	Types de matrices réelles	209
A.3	Algèbre matricielle de base	210
A.4	Décomposition en valeurs et vecteurs propres	210
A.4.1	Matrice réelle 2×2	210
Appendices		213
B Analyse		213
B.1	Projection de Mercator sphérique	213
Appendices		215
C Géométrie différentielle des surfaces		215
C.1	Surfaces dans \mathbb{R}^3	215
C.2	Vecteurs tangents	215
C.3	Première forme fondamentale = tenseur métrique	215
C.4	Seconde forme fondamentale	216
C.5	Opérateur de forme (Gauss-Weingarten)	216
C.6	Courbures	217
C.6.1	Courbures principales	217
C.6.2	Courbure moyenne	217
C.6.3	Courbure de Gauss	217
C.6.4	Theorema egregium de Gauss	218
C.7	Trajectoire sur une surface	218
C.7.1	Vecteur de position	218
C.7.2	Vecteur de vitesse instantanée	218
C.7.3	Longueur de la trajectoire	218
C.8	Courbe sur une surface	219
C.8.1	Vecteur de position	219
C.8.2	Vecteur tangent	219
C.8.3	Vecteur de courbure	219

C.8.4	Courbure	219
C.8.5	Courbure normale	220
C.8.6	Courbure géodésique	220
C.8.7	Reparamétrisation d'une trajectoire \mathcal{T} en courbe \mathcal{C}	220
C.9	Géodésique	220
C.10	Théorème de Gauss-Bonnet local	220

Première partie

Systèmes de coordonnées

Chapitre 1

Introduction

Cette partie traite des systèmes de coordonnées principaux utilisés en géodésie. Ils regroupent les concepts mathématiques indispensables à l'identification et à la paramétrisation univoque d'un point dans l'espace. Ils représentent le socle mathématique des systèmes et cadres de références qui seront traités dans les prochaines parties.

Chapitre 2

Systèmes de coordonnées cartésiennes

Les systèmes de coordonnées cartésiennes sont les systèmes les plus simples et les plus aisés à aborder mathématiquement. Ils sont définis par une origine \mathbf{o} et 3 vecteurs orthonormaux ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$), appelés aussi vecteurs de bases, sur lesquels sont associés les coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Un point quelconque de l'espace tridimensionnel peut donc être identifié et localisé de façon univoque par ses coordonnées (x, y, z) ainsi qu'à la connaissance des vecteurs de base et origine $(\mathbf{o}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ associés à ces dernières. Vecto-riellement, un point \mathbf{x} quelconque de l'espace est défini par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{o} + x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y + z \cdot \mathbf{e}_z \quad (2.1)$$

Cette relation est vraie dans tous les systèmes de coordonnées, pourvu que les composantes (coordonnées) des vecteurs de base et d'origine soient données dans le **même** système de coordonnées. Elle peut aussi s'écrire sous forme de produit matriciel par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{o} + (\mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_y \quad \mathbf{e}_z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{x_x} & e_{y_x} & e_{z_x} \\ e_{x_y} & e_{y_y} & e_{z_y} \\ e_{x_z} & e_{y_z} & e_{z_z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{o} + \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec la matrice de transformation \mathbf{T} . Par la suite, nous allons considérer que les vecteurs de base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ sont orthonormaux. Dans ce cas, la matrice \mathbf{T} est dite *orthonormale*.

2.1 Coordonnées cartésiennes standards

Dans le cas de figure le plus simple, si l'origine \mathbf{o} et les vecteurs de base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ ne sont pas définis par rapport à un autre système de coordonnées, leurs composantes sont

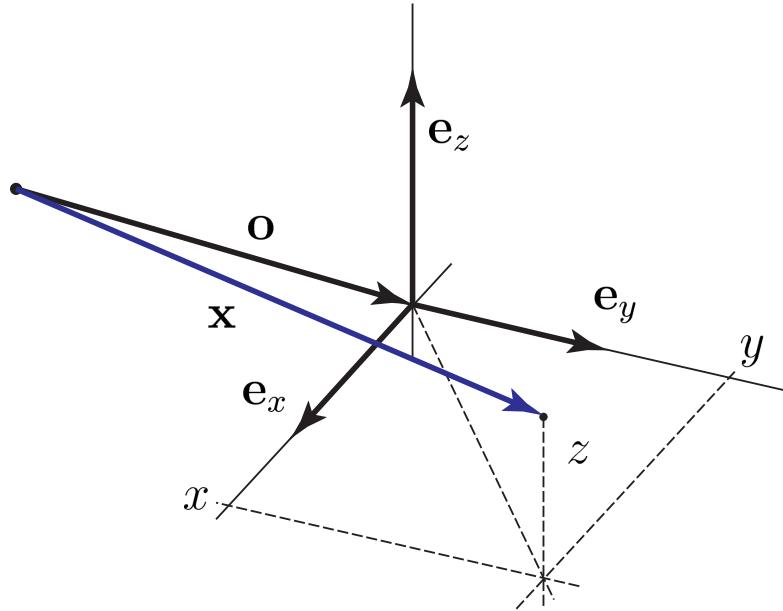


Figure 2.1 – Système de coordonnées cartésiennes.

données simplement par :

$$\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Et nous pouvons donc directement écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ce qui permet d'associer directement les coordonnées (x, y, z) au vecteur \mathbf{x} , sans donner explicitement les vecteurs de base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et l'origine \mathbf{o} :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

2.2 Coordonnées cartésiennes dans 2 systèmes

L'intérêt de définir correctement les vecteurs de base d'un système de coordonnées devient évident lorsque l'on doit travailler avec plusieurs systèmes de coordonnées. Par exemple, lorsque l'on cherche à transformer les coordonnées entre les différents systèmes. Prenons un exemple avec 2 systèmes de coordonnées cartésiennes :

1. Le premier est défini par son origine \mathbf{o}^I , et ses vecteurs de bases $(\mathbf{e}_x^I, \mathbf{e}_y^I, \mathbf{e}_z^I)$
2. Le deuxième est défini par son origine \mathbf{o}^{II} , et ses vecteurs de bases $(\mathbf{e}_x^{II}, \mathbf{e}_y^{II}, \mathbf{e}_z^{II})$

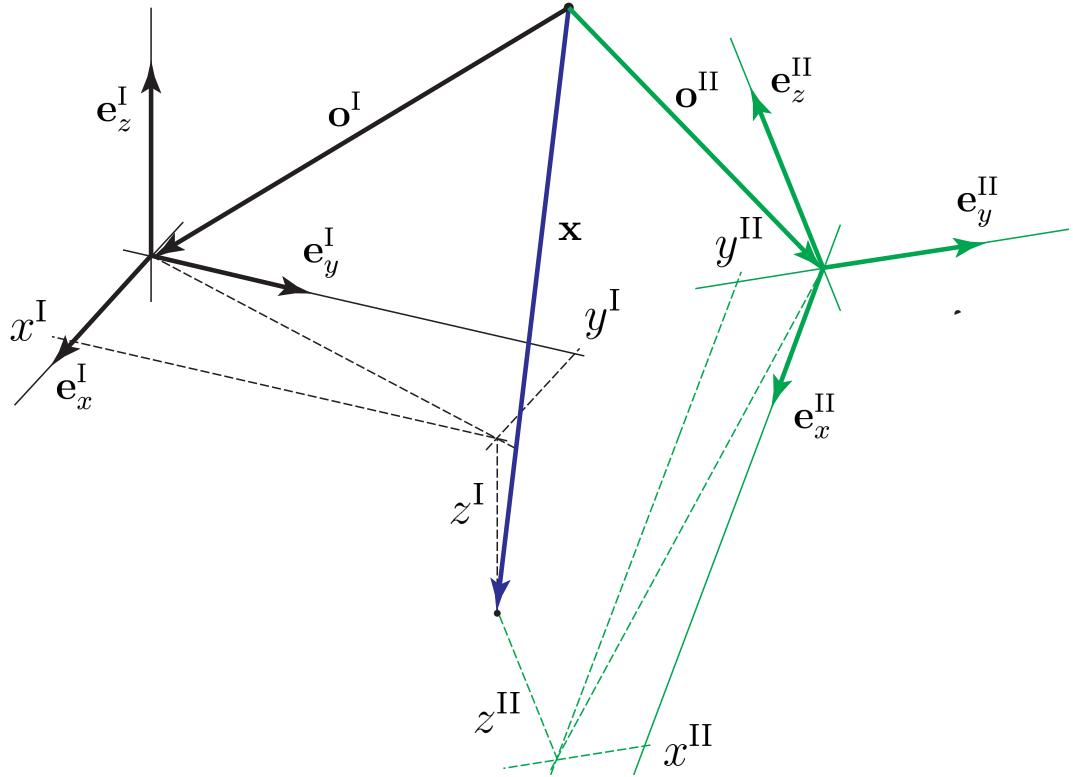


Figure 2.2 – Deux systèmes de coordonnées cartésiennes.

Un point quelconque \mathbf{x} peut être donné soit dans le premier système :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{o}^I + x^I \cdot \mathbf{e}_x^I + y^I \cdot \mathbf{e}_y^I + z^I \cdot \mathbf{e}_z^I \\ &= \mathbf{o}^I + \mathbf{T}^I \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.6)$$

soit dans le deuxième système :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{o}^{II} + x^{II} \cdot \mathbf{e}_x^{II} + y^{II} \cdot \mathbf{e}_y^{II} + z^{II} \cdot \mathbf{e}_z^{II} \\ &= \mathbf{o}^{II} + \mathbf{T}^{II} \cdot \begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.7)$$

en combinant les équations 2.6 et 2.7 nous avons :

$$\mathbf{x} = \mathbf{o}^I + \mathbf{T}^I \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} = \mathbf{o}^{II} + \mathbf{T}^{II} \cdot \begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix}\quad (2.8)$$

et il est possible d'exprimer les coordonnées du deuxième système $(x^{\text{II}}, y^{\text{II}}, z^{\text{II}})$ en fonction des coordonnées du premier système $(x^{\text{I}}, y^{\text{I}}, z^{\text{I}})$ ainsi que des composantes des vecteurs d'origine et de base des deux systèmes $(\mathbf{o}^{\text{I}}, \mathbf{e}_x^{\text{I}}, \mathbf{e}_y^{\text{I}}, \mathbf{e}_z^{\text{I}})$ et $(\mathbf{o}^{\text{II}}, \mathbf{e}_x^{\text{II}}, \mathbf{e}_y^{\text{II}}, \mathbf{e}_z^{\text{II}})$:

$$\begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{\text{II}})^{-1} \cdot (\mathbf{o}^{\text{I}} - \mathbf{o}^{\text{II}}) + (\mathbf{T}^{\text{II}})^{-1} \cdot \mathbf{T}^{\text{I}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Dans notre cas de figure, les matrices \mathbf{T}^{I} et \mathbf{T}^{II} sont orthonormées. Ainsi, leur inverse est simplement égale à leur transposée. Et nous avons finalement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{\text{II}})^T \cdot (\mathbf{o}^{\text{I}} - \mathbf{o}^{\text{II}}) + (\mathbf{T}^{\text{II}})^T \cdot \mathbf{T}^{\text{I}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix}} \quad (2.10)$$

2.2.1 Exemple

Nous connaissons les coordonnées cartésiennes d'un point dans le système I :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 6.0 \\ 4.0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

et nous voulons déterminer les coordonnées de ce point dans le système II. Le premier système est défini comme étant un système cartésien standard avec :

$$\mathbf{o}^{\text{I}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{I}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{I}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{I}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Le deuxième système est défini comme étant un autre système cartésien orthonormé :

$$\mathbf{o}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{II}} = \begin{pmatrix} +0.8660 \\ +0.1710 \\ +0.4698 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{II}} = \begin{pmatrix} +0.000 \\ +0.9397 \\ -0.3420 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{II}} = \begin{pmatrix} -0.5000 \\ +0.2962 \\ +0.8138 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Tout d'abord, vérifions que les deux systèmes sont bien orthonormés. Premièrement, les modules sont bien unitaires :

$$|\mathbf{e}_x^{\text{I}}| = 1.000 \quad |\mathbf{e}_y^{\text{I}}| = 1.000 \quad |\mathbf{e}_z^{\text{I}}| = 1.000 \quad (2.14)$$

$$|\mathbf{e}_x^{\text{II}}| = 1.000 \quad |\mathbf{e}_y^{\text{II}}| = 1.000 \quad |\mathbf{e}_z^{\text{II}}| = 1.000 \quad (2.15)$$

Deuxièmement, il faut vérifier que les vecteurs de bases sont bien orthogonaux entre eux, c'est à dire que les produits scalaires suivants sont nuls :

$$\mathbf{e}_x^{\text{I}} \cdot \mathbf{e}_y^{\text{I}} = 0.000 \quad \mathbf{e}_x^{\text{I}} \cdot \mathbf{e}_z^{\text{I}} = 0.000 \quad \mathbf{e}_y^{\text{I}} \cdot \mathbf{e}_z^{\text{I}} = 0.000 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{e}_x^{\text{II}} \cdot \mathbf{e}_y^{\text{II}} = 0.000 \quad \mathbf{e}_x^{\text{II}} \cdot \mathbf{e}_z^{\text{II}} = 0.000 \quad \mathbf{e}_y^{\text{II}} \cdot \mathbf{e}_z^{\text{II}} = 0.000 \quad (2.17)$$

Ensuite, pour le premier système, nous pouvons former la matrice suivante :

$$\mathbf{T}^I = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x^I & \mathbf{e}_y^I & \mathbf{e}_z^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

et pour le deuxième système :

$$\mathbf{T}^{II} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x^{II} & \mathbf{e}_y^{II} & \mathbf{e}_z^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0.8660 & +0.000 & -0.5000 \\ +0.1710 & +0.9397 & +0.2962 \\ +0.4698 & -0.3420 & +0.8138 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Nous avons donc tous les éléments qui nous permettent de calculer les coordonnées dans le système II à partir de l'équation 2.10 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +0.8660 & +0.1710 & +0.4698 \\ +0.000 & +0.9397 & -0.3420 \\ -0.5000 & +0.2962 & +0.8138 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2.0 \\ -1.0 \\ -3.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +0.8660 & +0.1710 & +0.4698 \\ +0.000 & +0.9397 & -0.3420 \\ -0.5000 & +0.2962 & +0.8138 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5.0 \\ 6.0 \\ 4.0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3.9230 \\ 4.3564 \\ 0.7948 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3 Transformations rigides

Dans la section précédente, avec l'équation 2.10, nous avons vu comment calculer les coordonnées (x^{II}, y^{II}, z^{II}) , associées au système de coordonnées II, lorsque nous connaissons les coordonnées (x^I, y^I, z^I) de ce point dans le système de coordonnées I, ainsi que les vecteurs d'origine et de base des 2 systèmes orthonormés $(\mathbf{o}^I, \mathbf{e}_x^I, \mathbf{e}_y^I, \mathbf{e}_z^I)$ et $(\mathbf{o}^{II}, \mathbf{e}_x^{II}, \mathbf{e}_y^{II}, \mathbf{e}_z^{II})$.

Dans cette section, nous allons voir une autre méthode, qui nous permet de faire cette transformation de façon équivalente, mais sans connaître de façon explicite les vecteurs d'origine et de base. En effet, les coordonnées des systèmes I et II sont reliées par une translation et une rotation tridimensionnelle. En reprenant l'équation 2.10 :

$$\begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{T}^{II})^T \cdot (\mathbf{o}^I - \mathbf{o}^{II})}_{\mathbf{t}_I^{II}} + \underbrace{(\mathbf{T}^{II})^T \cdot \mathbf{T}^I}_{\mathbf{R}_I^{II}} \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

nous pouvons voir 2 termes apparaître. Un vecteur constant qui s'additionne, qui est en fait un vecteur de translation tridimensionnelle :

$$\mathbf{t}_I^{II} = (\mathbf{T}^{II})^T \cdot (\mathbf{o}^I - \mathbf{o}^{II}) = \begin{pmatrix} t_I^{II,x} \\ t_I^{II,y} \\ t_I^{II,z} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

et une matrice orthonormée qui multiplie le vecteur des coordonnées dans le système I, et qui est en fait une matrice rotation tridimensionnelle :

$$\mathbf{R}_I^{II} = (\mathbf{T}^{II})^T \cdot \mathbf{T}^I = \begin{pmatrix} r_{I,11}^{II} & r_{I,12}^{II} & r_{I,13}^{II} \\ r_{I,21}^{II} & r_{I,22}^{II} & r_{I,23}^{II} \\ r_{I,31}^{II} & r_{I,32}^{II} & r_{I,33}^{II} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

et donc :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = \mathbf{t}_I^{\text{II}} + \mathbf{R}_I^{\text{II}} \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

les indices I^{II} signifient que ce sont une translation et une rotation qui permettent de passer du système I au système II. Ces indices sont en principe nécessaires pour lever toute ambiguïté sur le sens de la transformation. Néanmoins, ils sont souvent négligés lorsque le contexte le permet.

Si l'on regarde le vecteur de translation \mathbf{t}_I^{II} de plus près, nous voyons qu'il a 3 composantes indépendantes, en x, y, z , et que pour le construire, nous avons besoin de connaître ses 3 valeurs. En ce qui concerne la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} , nous voyons qu'elle a 9 composantes, mais pas indépendantes les unes des autres. En effet, nous savons que c'est une matrice orthonormée qui peut être paramétrisée avec seulement 3 paramètres indépendants soit :

- 3 rotations dans l'espace.
- 1 axe de rotation (vecteur normé) et un angle par rapport à cet axe.
- 1 quaternion unitaire. Soit 4 paramètres et 1 condition sur la norme du quaternion.

2.4 Matrice de rotation paramétrisées par 3 angles

Pour une matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} donnée, les 3 rotations qui la paramétrisent ne sont hélas pas uniques. Elles dépendent de la convention utilisée. En d'autres termes, si la convention n'est pas précisée, et que 3 angles sont donnés, il est possible de construire plusieurs matrices de rotation. Voyons les 2 conventions les plus utilisées en géodésie :

1. La convention de Cardan ($x-y-z$), avec les angles (α, β, γ) .
2. La convention d'Euler ($z-x-z$), avec les angles (φ, θ, ψ) .

Elles sont toutes les deux basées sur les matrices de rotation de base correspondant à des rotations autour des axes qui ont pour composantes x, y et z . Nous pouvons donc définir :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_y(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_z(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.4.1 La convention de Cardan ($x-y-z$)

La convention de Cardan est très répandue, notamment en navigation où les angles de rotation sont nommés de la façon suivante :

- α = le roulis "roll"
- β = le tangage "pitch"
- γ = le lacet "yaw"

Elle consiste à faire 3 rotations selon les axes x, y et finalement z . Il est important de noter que les axes x, y, z sont dits "tournants" car les rotations sont appliquées sur des coordonnées de systèmes intérmédiaires qui ont été "tournés" par les rotations précédentes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_I^{II}(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ -\sin \gamma \cos \beta & -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix} \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Il est également possible de retrouver les angles de Cardan si l'on connaît la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} :

$$\alpha = \begin{cases} -\text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right) & \text{si : } r_{31} \neq -1, \text{ ou : } r_{31} \neq +1 \\ +\text{atan2}(r_{12}, r_{13}) & \text{si : } r_{31} = -1 \\ +\text{atan2}(-r_{12}, -r_{13}) & \text{si : } r_{31} = +1 \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\beta = \begin{cases} +\arcsin(r_{31}) & \text{si : } r_{31} \neq -1, \text{ ou : } r_{31} \neq +1 \\ -90^\circ & \text{si : } r_{31} = -1 \\ +90^\circ & \text{si : } r_{31} = +1 \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\gamma = \begin{cases} -\text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right) & \text{si : } r_{31} \neq -1, \text{ ou : } r_{31} \neq +1 \\ +0^\circ & \text{si : } r_{31} = -1 \\ +0^\circ & \text{si : } r_{31} = +1 \end{cases} \tag{2.29}$$

2.4.2 La convention d'Euler (z-x-z)

La convention d'Euler est également bien répandue, notamment en astronomie, car elle modélise naturellement la précession ainsi que la nutation. Elle consiste à faire 3 rotations selon les axes z , puis x et finalement z . Il est important de noter que comme pour dans la

convention de Cardan, les axes sont également dits "tournants" :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_I^{II}(\varphi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}_z(\psi) \cdot \mathbf{R}_x(\theta) \cdot \mathbf{R}_z(\varphi) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Il est également possible de retrouver les angles d'Euler si l'on connaît la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} :

$$\varphi = \begin{cases} 180^\circ - \text{atan2}(r_{31}, r_{32}) & \text{si : } r_{33} \neq -1, \text{ ou : } r_{33} \neq +1 \\ + \frac{\text{atan2}(r_{12}, r_{11})}{r_{33}} & \text{si : } r_{33} = -1, \text{ ou : } r_{33} = +1 \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\theta = \begin{cases} \arccos(r_{33}) & \text{si : } r_{33} \neq -1, \text{ ou : } r_{33} \neq +1 \\ 90^\circ \cdot (1 - r_{33}) & \text{si : } r_{33} = -1, \text{ ou : } r_{33} = +1 \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\psi = \begin{cases} + \text{atan2}(r_{13}, r_{23}) & \text{si : } r_{33} \neq -1, \text{ ou : } r_{33} \neq +1 \\ + 0^\circ & \text{si : } r_{33} = -1, \text{ ou : } r_{33} = +1 \end{cases} \tag{2.33}$$

2.4.3 Matrice de rotation différentielle

Lorsque les angles de rotation peuvent être considérés comme petits ($\alpha \rightarrow \delta\alpha$), nous pouvons considérer que :

$$\cos \delta\alpha \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin \delta\alpha \approx \delta\alpha \tag{2.34}$$

et ainsi, les matrices de rotation de l'équation 2.25 se simplifie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_x(\delta\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\alpha \\ 0 & -\delta\alpha & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{R}_y(\delta\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{R}_z(\delta\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha & 0 \\ -\delta\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

2.4.4 Matrice de rotation différentielle en convention de Cardan

En ne retenant que les termes de premier ordre, la matrice de rotation différentielle en convention de Cardan s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_I^{II}(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma) &= \mathbf{R}_z(\delta\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\delta\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\delta\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \delta\gamma & 0 \\ -\delta\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\alpha \\ 0 & -\delta\alpha & 1 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1 & \delta\gamma & -\delta\beta \\ -\delta\gamma & 1 & \delta\alpha \\ \delta\beta & -\delta\alpha & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.36)$$

2.5 Matrice de rotation paramétrisée par 1 axe fixe et 1 angle de rotation

Une matrice de rotation tridimensionnelle peut aussi se paramétriser selon un axe de rotation \mathbf{n} (vecteur normé) et un angle de rotation α autour de cet axe. Sans démonstration, nous avons :

$$\mathbf{R}_I^{II}(\mathbf{n}, \alpha) = \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos \alpha) \cdot \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix}\quad (2.37)$$

qui est aussi appelée la formule de rotation de Rodrigues. Il est également possible de retrouver l'axe et l'angle de rotation si l'on connaît la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)\quad (2.38)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha} \cdot \begin{pmatrix} r_{23} - r_{32} \\ r_{31} - r_{13} \\ r_{12} - r_{21} \end{pmatrix}\quad (2.39)$$

2.5.1 Matrice de rotation différentielle selon la paramétrisation 1 axe fixe et 1 angle

En ne retenant que les termes de premier ordre, la matrice de rotation différentielle selon la paramétrisation 1 axe fixe et 1 angle s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_I^{II}(\mathbf{n}, \delta\alpha) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \delta\alpha \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n_z \cdot \delta\alpha & -n_y \cdot \delta\alpha \\ -n_z \cdot \delta\alpha & 1 & n_x \cdot \delta\alpha \\ n_y \cdot \delta\alpha & -n_x \cdot \delta\alpha & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.40)$$

2.6 Matrice de rotation paramétrisée par 1 quaternion unitaire

Une matrice de rotation peut aussi être paramétrisée selon un objet mathématique peu commun, un quaternion unitaire. Ces quaternions sont souvent utilisés en vision par ordinateur ou en navigation. Sans entrer dans les détails, un quaternion unitaire est un nombre hypercomplexe de norme 1 qui à des propriétés très intéressantes lorsqu'on l'utilise pour encoder une rotation dans l'espace. Lorsqu'une rotation dans l'espace est donnée par sa représentation axe-angle (\mathbf{n}, α) , alors le quaternion unitaire q correspondant est donné par :

$$q = \cos \frac{\alpha}{2} + n_x \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot i + n_y \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot j + n_z \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot k \quad (2.41)$$

avec les nombres hypercomplexes (i, j, k) qui ont les propriétés suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1 \quad (2.42)$$

La formalisation d'un quaternion unitaire donné à l'équation 2.41 ainsi que les propriétés données en 2.42 sont indispensables pour trouver et démontrer les opérations d'addition, de multiplication, de conjugaison, etc..., qui sont associées aux quaternions. Toutefois, pour une utilisation pratique dans le cadre des rotations dans l'espace tridimensionnel, il est plus commode de représenter un quaternion sous la forme d'un vecteur \mathbf{q} de dimension 4. Dans le cas particulier d'une rotation dans l'espace donnée par sa représentation axe-angle (\mathbf{n}, α) ¹, il s'écrit sans les nombres hypercomplexes, de la façon suivante :

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ n_x \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \\ n_y \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \\ n_z \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

avec sa norme unitaire qui s'écrit :

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} = 1 \quad (2.44)$$

Ainsi, la matrice de rotation correspondante se calcule :

$$\mathbf{R}_I^{II}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} q_w^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2q_xq_y + 2q_wq_z & 2q_xq_z - 2q_wq_y \\ 2q_xq_y - 2q_wq_z & q_w^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2q_yq_z + 2q_wq_x \\ 2q_xq_z + 2q_wq_y & 2q_yq_z - 2q_wq_x & q_w^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Il est également possible de retrouver le quaternion \mathbf{q} associé à la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} . Ceci se fait simplement en deux étapes :

1. calculer l'axe \mathbf{n} et l'angle α associés à \mathbf{R}_I^{II} avec les équations 2.38 et 2.39.
2. calcuer le quaternion avec l'équation 2.43.

2.6.1 Rotation par multiplications de quaternions

Les quaternions ont la particularité de pouvoir effectuer des rotations sans passer par les matrices de rotation, mais en utilisant les opérations de base des quaternions. L'avantage principal de cette façon de faire réside dans le nombre d'opérations mathématiques

1. \mathbf{n} doit être normé.

nécessaires pour réaliser une rotation. Il en faut 45 avec une matrice de rotation, mais seulement 28 pour les quaternions. Si nous voulons obtenir les coordonnées $x^{\text{II}}, y^{\text{II}}, z^{\text{II}}$, à partir des coordonnées $x^{\text{I}}, y^{\text{I}}, z^{\text{I}}$, avec les systèmes I et II reliés par une rotation paramétrisée selon un quaternion $\mathbf{q}_\text{I}^{\text{II}}$, alors il suffit de calculer :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{q}}_\text{I}^{\text{II}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\text{I}} \\ y^{\text{I}} \\ z^{\text{I}} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{q}_\text{II}^{\text{II}} \quad (2.46)$$

avec :

$$\mathbf{q}_\text{I}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

et son quaternion conjugué :

$$\bar{\mathbf{q}}_\text{I}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} q_w \\ -q_x \\ -q_y \\ -q_z \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Le symbole \otimes représente l'opération de multiplication pour les quaternions, qui se définit, pour deux quaternions \mathbf{q} et \mathbf{p} , de la façon suivante :

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = \begin{pmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_w \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_w \cdot p_w - q_x \cdot p_x - q_y \cdot p_y - q_z \cdot p_z \\ q_w \cdot p_x + q_x \cdot p_w + q_y \cdot p_z - q_z \cdot p_y \\ q_w \cdot p_y - q_x \cdot p_z + q_y \cdot p_w + q_z \cdot p_x \\ q_w \cdot p_z + q_x \cdot p_y - q_y \cdot p_x + q_z \cdot p_w \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

La paramétrisation des rotations tridimensionnelles par les quaternions bénéficie d'autres avantages significatifs. Elle résout de façon élégante la problématique du blocage cardanique, qui intervient dans toutes les paramétrisations basées sur des angles. De plus, cette paramétrisation permet de réaliser des interpolations entre deux orientations de façon naturelle.

2.7 Exemple

Les paramétrisations suivantes génèrent la même matrice de rotation $\mathbf{R}_\text{I}^{\text{II}}$:

1. En convention de Cardan :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\text{I}^{\text{II}}(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{R}_\text{I}^{\text{II}}(10^\circ, 20^\circ, 30^\circ) \\ &= \begin{pmatrix} +0.813798 & +0.543838 & -0.204874 \\ -0.469846 & +0.823173 & +0.318796 \\ +0.34202 & -0.163176 & +0.925417 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.50)$$

2. En convention d'Euler :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_I^{II}(\varphi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}_I^{II}(+64.4944^\circ, +22.2687^\circ, -32.7268^\circ) \\ &= \begin{pmatrix} +0.813798 & +0.543838 & -0.204874 \\ -0.469846 & +0.823173 & +0.318796 \\ +0.34202 & -0.163176 & +0.925417 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.51)$$

3. Avec 1 axe et 1 angle :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_I^{II}(\mathbf{n}, \alpha) &= \mathbf{R}_I^{II}\left(\begin{pmatrix} +0.38601 \\ +0.43801 \\ +0.81187 \end{pmatrix}, +38.6300^\circ\right) \\ &= \begin{pmatrix} +0.813798 & +0.543838 & -0.204874 \\ -0.469846 & +0.823173 & +0.318796 \\ +0.34202 & -0.163176 & +0.925417 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.52)$$

4. Avec 1 quaternion unitaire :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_I^{II}(\mathbf{q}) &= \mathbf{R}_I^{II}\left(\begin{pmatrix} +0.943714 \\ +0.127679 \\ +0.144878 \\ +0.268536 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} +0.813798 & +0.543838 & -0.204874 \\ -0.469846 & +0.823173 & +0.318796 \\ +0.34202 & -0.163176 & +0.925417 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.53)$$

2.8 Blocage cardanique (gimbal lock)

Le blocage cardanique est un phénomène qui se produit lorsqu'on paramétrise les rotations dans l'espace tridimensionnel par 3 angles. Ceci se traduit par la perte d'un degré de liberté dans certaines configurations. Par exemple, lorsque nous paramétrisons une rotation 3D par les 3 angles de Cardan nous obtenons la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_I^{II}(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.54)$$

qui contient 3 degrés de liberté. En d'autres termes, a priori, chaque triplet (α, β, γ) peut être associé à une orientation dans l'espace unique. Et bien ceci n'est pas exacte lorsque

$\beta = \pm 90^\circ$. Par exemple, pour $\beta = +90^\circ$, alors l'équation 2.54 s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_I^{II}(\alpha, +90^\circ, \gamma) &= \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(+90^\circ) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \\
&= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha & -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ 0 & -\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

puis en remarquant les identités trigonométriques suivantes :

$$\sin(\alpha + \gamma) = \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \quad \text{et} \quad \cos(\alpha + \gamma) = \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \tag{2.56}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_I^{II}(\alpha, +90^\circ, \gamma) &= \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(+90^\circ) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sin(\alpha + \gamma) & -\cos(\alpha + \gamma) \\ 0 & \cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Ceci démontre que lorsque β est fixé à 90° , alors les angles α et β génèrent des rotations identiques, autour du même axe. Dès lors, dans ce cas particulier, nous voyons qu'un degré de liberté est perdu. Nous voyons aussi que dans ce cas, un triplet $(\alpha, \pm 90^\circ, \beta)$ ne donne pas une orientation dans l'espace univoque.

Cet effet de blocage cardanique à des conséquences numériques facheuses, notamment lorsque les angles sont incrémentés au cours du temps, comme en navigation, en vision par ordinateur, etc. C'est en autre pour cette raison que les quaternions, jamais affectés par ces singularités, sont souvent préférés aux paramétrisations angulaires.

2.9 Dérivée temporelle d'une matrice de rotation

Lorsque une matrice de rotation entre 2 systèmes est fonction du temps t , $\mathbf{R}_I^{II}(t)$, alors il est parfois utile de connaître sa dérivée temporelle, notée $\dot{\mathbf{R}}_I^{II}$, et formellement définie de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{R}}_I^{II} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_I^{II}(t + \Delta t) - \mathbf{R}_I^{II}(t)}{\Delta t} \tag{2.58}$$

2.9.1 Apparition de $\dot{\mathbf{R}}_I^{II}$

Prenons un exemple simple qui fait apparaître $\dot{\mathbf{R}}_I^{II}$. Soit un point en mouvement qui suit une trajectoire. Sa position est donnée en fonction du temps dans le système I. Nous

notons son vecteur des coordonnées dans le système I :

$$\mathbf{x}^I(t) = \begin{pmatrix} x^I(t) \\ y^I(t) \\ z^I(t) \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Si nous voulons calculer les coordonnées du vecteur de vitesse instantanée dans le système I. Il suffit de dériver les 3 composantes de $\mathbf{x}^I(t)$ en fonction du temps :

$$\mathbf{v}^I(t) = \dot{\mathbf{x}}^I(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}^I(t) \\ \dot{y}^I(t) \\ \dot{z}^I(t) \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Ensuite, nous avons un deuxième système (le système II) dont les composantes \mathbf{x}^{II} d'un point quelconque sont reliées au système I par une transformation rigide, également dépendante du temps, de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x^{II}(t) \\ y^{II}(t) \\ z^{II}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{t}_I^{II}(t) + \mathbf{R}_I^{II}(t) \cdot \begin{pmatrix} x^I(t) \\ y^I(t) \\ z^I(t) \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

ou de façon équivalente :

$$\mathbf{x}^{II}(t) = \mathbf{t}_I^{II}(t) + \mathbf{R}_I^{II}(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) \quad (2.62)$$

Dès lors, si nous voulons calculer les composantes du vecteur vitesse dans le système II. Nous devons dériver le vecteur des coordonnées $\mathbf{x}^{II}(t)$ par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{II}(t) &= \dot{\mathbf{x}}^{II}(t) \\ &= \dot{\mathbf{t}}_I^{II}(t) + \dot{\mathbf{R}}_I^{II}(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) + \mathbf{R}_I^{II}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}^I(t) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Ainsi, nous voyons que le calcul $\mathbf{v}^{II}(t)$ peut se faire de 2 façons :

1. Si nous connaissons la trajectoire dans le système II, $\mathbf{x}^{II}(t)$, par simple dérivation temporelle des coordonnées.
2. Si nous connaissons la trajectoire dans le système I, ainsi que les éléments de la transformation qui relie les 2 systèmes, c'est à dire $\dot{\mathbf{t}}_I^{II}(t)$, $\mathbf{R}_I^{II}(t)$ et surtout $\dot{\mathbf{R}}_I^{II}(t)$.

2.9.2 Calcul de $\dot{\mathbf{R}}_I^{II}$

Comme nous allons le voir, le calcul de $\dot{\mathbf{R}}_I^{II}(t)$ peut se faire de façon élégante en fonction du vecteur de vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\omega}_{I-II}^I(t)$. Ce vecteur représente la vitesse angulaire instantanée du système II par rapport au système I (indices en bas), dont les coordonnées sont exprimées dans le système I (indice du haut).

$$\boldsymbol{\omega}_{I-II}^I = \begin{pmatrix} \omega_{I-II}^I x \\ \omega_{I-II}^I y \\ \omega_{I-II}^I z \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Prenons un point dont les coordonnées sont fixes dans le système II, et par définition, son vecteur vitesse est nul dans le système II :

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{II}} = \mathbf{0} \quad (2.65)$$

Définissons un système I qui est relié au système II par une rotation qui varie dans le temps (pas de translation, les origines sont confondues) :

$$\mathbf{x}^{\text{II}} = \mathbf{R}_I^{\text{II}}(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) \quad (2.66)$$

Calculons maintenant le vecteur vitesse dans le système II selon l'équation 2.63, qui avec 2.65 :

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{II}} = \mathbf{0} = \dot{\mathbf{R}}_I^{\text{II}}(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) + \mathbf{R}_I^{\text{II}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}^I(t) \quad (2.67)$$

Puis isolons le vecteur vitesse dans le système I :

$$\dot{\mathbf{x}}^I(t) = -\mathbf{R}_{\text{II}}^I(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}_I^{\text{II}}(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) \quad (2.68)$$

Ensuite, nous savons que par les équations de la cinématique des corps solides, qu'il est également possible calculer $\dot{\mathbf{x}}^I(t)$ à partir du vecteur de vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{\text{I-II}}^I(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}^I(t) = \boldsymbol{\omega}_{\text{I-II}}^I(t) \times \mathbf{x}^I(t) \quad (2.69)$$

qui peut aussi s'écrire sous forme matricielle, en introduisant la matrice de vitesse angulaire anti-symétrique $\boldsymbol{\Omega}_{\text{I-II}}^I(t)$, de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{x}}^I(t) = \boldsymbol{\Omega}_{\text{I-II}}^I(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) \quad (2.70)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{I-II}}^I = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^I & \omega_y^I \\ \omega_z^I & 0 & -\omega_x^I \\ -\omega_y^I & \omega_x^I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec, ici} \quad \begin{pmatrix} \omega_x^I \\ \omega_y^I \\ \omega_z^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\text{I-II}x}^I \\ \omega_{\text{I-II}y}^I \\ \omega_{\text{I-II}z}^I \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Ainsi, en combinant les équations 2.68 et 2.70 nous trouvons :

$$-\mathbf{R}_{\text{II}}^I(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}_I^{\text{II}}(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) = \boldsymbol{\Omega}_{\text{I-II}}^I(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) \quad (2.72)$$

ou encore :

$$\dot{\mathbf{R}}_I^{\text{II}}(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) = -\mathbf{R}_I^{\text{II}}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\text{I-II}}^I(t) \cdot \mathbf{x}^I(t) \quad (2.73)$$

Puis en changeant le sens de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{\text{I-II}}^I(t) = -\boldsymbol{\omega}_{\text{II-I}}^I(t)$, nous trouvons finalement :

$$\boxed{\dot{\mathbf{R}}_I^{\text{II}}(t) = \mathbf{R}_I^{\text{II}}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\text{II-I}}^I(t)} \quad (2.74)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{II-I}}^I = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^I & \omega_y^I \\ \omega_z^I & 0 & -\omega_x^I \\ -\omega_y^I & \omega_x^I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec, ici} \quad \begin{pmatrix} \omega_x^I \\ \omega_y^I \\ \omega_z^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{\text{II-I}x}^I \\ \omega_{\text{II-I}y}^I \\ \omega_{\text{II-I}z}^I \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

2.10 Transformations de similitude

Comme nous allons le voir dans un prochain chapitre, les transformations de similitude permettent de relier différents systèmes de références géodésiques. Elles se basent sur les transformations rigides. Elles ne diffèrent que par un facteur d'échelle m qui est appliqué à la matrice de rotation \mathbf{R}_I^{II} . En partant de l'équation 2.24, nous avons simplement :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{II}} \\ y^{\text{II}} \\ z^{\text{II}} \end{pmatrix} = \mathbf{t}_I^{\text{II}} + m \cdot \mathbf{R}_I^{\text{II}} \cdot \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

2.11 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

L'orthonormalisation de Gram-Schmidt est une méthode qui permet de générer des vecteurs de base orthonormés à partir de vecteurs linéairement indépendants. Bien que cette procédure soit généralisable en n'importe quelle dimension, nous allons voir le cas particulier en 3 dimensions. La procédure consiste donc à déterminer 3 vecteurs de base orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ à partir de 3 vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linéairement indépendants :

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rightarrow \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \quad (2.77)$$

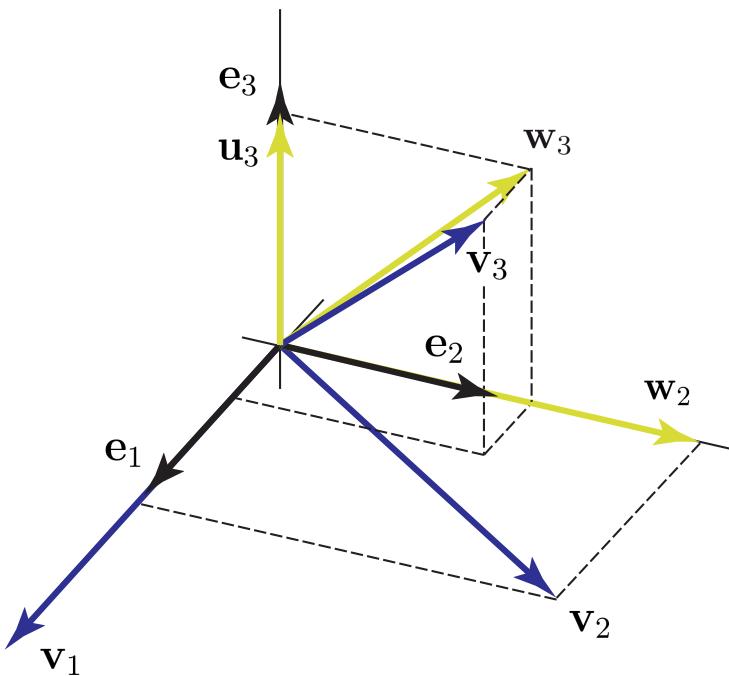


Figure 2.3 – Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Pour commencer, nous allons considérer le vecteur \mathbf{v}_1 comme étant colinéaire au vecteur de base \mathbf{e}_1 , nous avons donc :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \quad (2.78)$$

Ensuite, nous allons construire le vecteur de base \mathbf{e}_2 afin qu'il soit perpendiculaire au vecteur de base \mathbf{e}_1 , et dans le plan défini par les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Ceci peut se faire facilement en remarquant qu'il suffit de soustraire au vecteur \mathbf{v}_2 , sa projection orthogonale sur le vecteur \mathbf{v}_1 , pour obtenir un vecteur \mathbf{w}_2 , colinéaire à \mathbf{e}_2 :

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 \quad (2.79)$$

et donc :

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} \quad (2.80)$$

Le vecteur de base \mathbf{e}_3 peut s'obtenir en procédant de la même façon que pour le vecteur \mathbf{e}_2 . Dans un premier temps, nous pouvons déterminer un vecteur \mathbf{w}_3 , perpendiculaire au vecteur de base \mathbf{e}_1 , et dans le plan défini par les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_3 .

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 \quad (2.81)$$

Ce vecteur n'étant pas perpendiculaire au vecteur de base \mathbf{e}_2 (et par définition perpendiculaire au vecteur \mathbf{e}_1), il est nécessaire de déterminer un vecteur \mathbf{u}_3 , perpendiculaire au vecteur de base \mathbf{e}_2 , et dans le plan défini par les vecteurs \mathbf{e}_2 et \mathbf{w}_3 .

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3 - (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 \quad (2.82)$$

ainsi en combinant les équations 2.81 et 2.82, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &= \mathbf{w}_3 - (\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 - \{[\mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1] \cdot \mathbf{e}_2\} \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (2.83)$$

et donc :

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|} \quad (2.84)$$

Procédure

Pour trois vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en 3 dimensions et linéairement indépendants, les vecteurs de bases orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se déterminent de la façon suivante :

1. $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}$
2. $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1$
3. $\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|}$
4. $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2$
5. $\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{|\mathbf{u}_3|}$

Chapitre 3

Systèmes de coordonnées sphériques

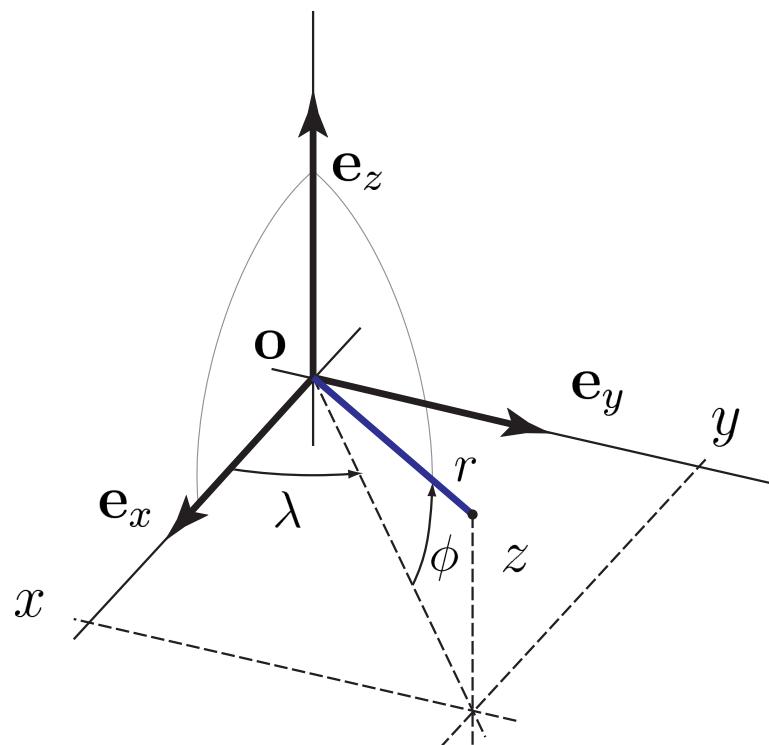


Figure 3.1 – Système de coordonnées sphériques.

Un système de coordonnées sphériques identifie un point quelconque de l'espace à l'aide de 3 coordonnées dites sphériques :

1. Le rayon r .
2. la longitude sphérique λ .
3. la latitude sphérique ϕ .

Ces 3 coordonnées sphériques sont toujours associées à un système de coordonnées cartésiennes ($\mathbf{o}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$). Ainsi, les coordonnées cartésiennes de ce système peuvent être déterminées

grâce aux coordonnées sphériques par la relation suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} x(r, \lambda, \phi) &= r \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ y(r, \lambda, \phi) &= r \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ z(r, \lambda, \phi) &= r \cdot \sin \phi \end{aligned}} \quad (3.1)$$

A l'inverse, si l'on veut déterminer les coordonnées sphériques à partir des coordonnées cartésiennes, nous avons :

$$\boxed{\begin{aligned} r(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda(x, y, z) &= \arctan \frac{y}{x} \\ \phi(x, y, z) &= \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}} \quad (3.2)$$

Remarque

Les formules qui font appel à l'opérateur arctan sont à utiliser avec prudence. En effet, l'ambiguïté du cadran doit être considérée. De plus, les dénominateurs ne doivent pas valoir 0. En pratique, lorsque les calculs numériques sont nécessaires, nous utilisons plutôt l'opérateur atan2 qui permet de s'affranchir de ces 2 problèmes :

$$\boxed{\begin{aligned} r(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda(x, y, z) &= \text{atan2}(y, x) \\ \phi(x, y, z) &= \text{atan2}(z, \sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}} \quad (3.3)$$

Chapitre 4

Systèmes de coordonnées ellipsoïdales

Nous traiterons ici uniquement des système de coordonnées ellipsoïdales de révolution¹. Ils jouent un rôle fondamental en géodésie. Ils sont préférables aux systèmes sphériques pour l'identification d'un point sur Terre. En effet, comme nous allons le voir, ils permettent de relier les systèmes de référence globaux aux systèmes de référence locaux (définis par rapport à la verticale physique) avec une précision acceptable pour la plupart des applications en géodésie. De plus, ils permettent d'approximer la surface de référence des altitudes physiques à +/- 100 mètres sur l'entier du globe. Un point est identifié de façon univoque par 3 coordonnées dites ellipsoïdales :

1. La longitude ellipsoïdale λ (parfois nommée L).
2. La latitude ellipsoïdale φ (parfois nommée B).
3. L'altitude ellipsoïdale h .

Ces 3 coordonnées ellipsoïdales sont toujours associées à un système de coordonnées cartésiennes ($\mathbf{o}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) ainsi qu'à deux paramètres qui définissent la forme de l'ellipsoïde de révolution de référence. Ces 2 paramètres peuvent être choisis de façon équivalente entre :

- Le demi-grand axe a et le demi-petit axe b de l'ellipsoïde de révolution .
- Le demi-grand axe a et l'aplatissement f de l'ellipsoïde de révolution .
- Le demi-grand axe a et l'excentricité e de l'ellipsoïde de révolution .

4.1 L'ellipsoïde de révolution

Un ellipsoïde de révolution est un cas particulier de l'ellipsoïde. Géométriquement, il est construit par la rotation d'une ellipse autour d'un de ses axes principaux (a ou b). Il suffit donc de définir l'ellipse et d'identifier l'axe de rotation pour connaître sa forme. En géodésie, l'axe de rotation est le petit-axe de l'ellipse b et il est confondu avec le vecteur de base \mathbf{e}_z . Les vecteurs de base \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y définissent alors le plan de l'équateur. Mathématiquement, l'ensemble des points de la surface de cet ellipsoïde de révolution satisfont l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.1)$$

1. Il en existe d'autres qui se réfèrent à un ellipsoïde quelconque

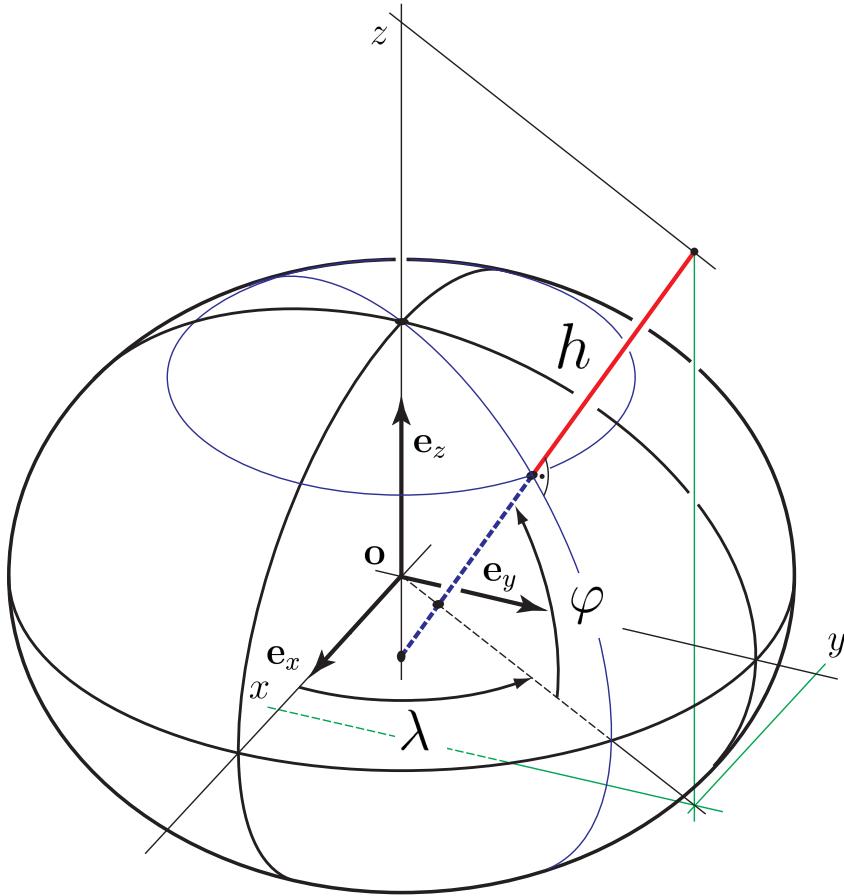


Figure 4.1 – Système de coordonnées ellipsoïdales.

En regardant de plus près cette équation, nous pouvons facilement confirmer notre intuition géométrique.

1. Dans le plan $z = 0$, l'équation 4.1 se simplifie :

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (4.2)$$

qui est l'équation d'un cercle centré à l'origine et de rayon a .

2. Dans n'importe quel plan horizontal $z = \text{cst}$, l'équation 4.1 se simplifie :

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{cst}}{b^2}\right) \quad (4.3)$$

qui est l'équation de cercles centrés à l'origine et de rayon $a^2 \cdot (1 - \frac{\text{cst}}{b^2})$.

3. en faisant le changement de variable suivant $w^2 = x^2 + y^2$, l'équation 4.1 se simplifie :

$$\frac{w^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (4.4)$$

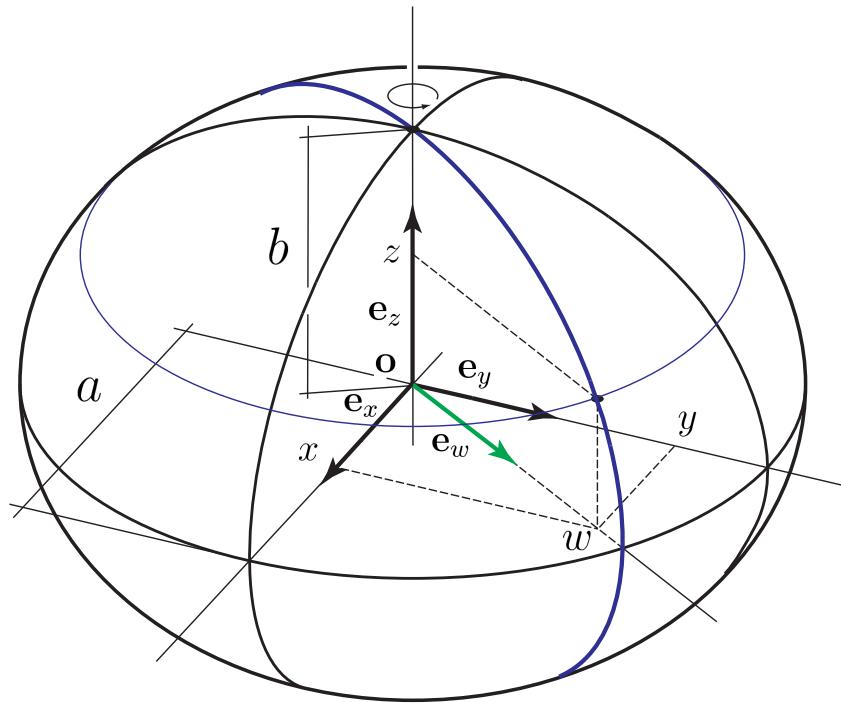


Figure 4.2 – Ellipsoïde de révolution.

qui représente l'équation d'une ellipse dans le plan vertical ($\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z$). Avec la direction :

$$\mathbf{e}_w = \frac{x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y}{|x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y|} \quad (4.5)$$

4.2 L'ellipse dans le plan vertical ($\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z$)

Nous allons tout d'abord établir les relations entre les paramètres qui permettent de définir la forme d'une ellipse de façon univoque.

4.2.1 Relations entre les paramètres a, b, c, f

Une ellipse est définie comme étant le lieu géométrique des points dont la somme des distances (d_1 et d_2) à deux points fixes (nommés foyers) est constante. Il existe une relation simple qui lie les deux demi-axes a et b avec la distance du centre au foyer c . En considérant le point de l'ellipse sur l'axe \mathbf{e}_z , il est facile de voir que :

$$\left(\frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2 = b^2 + c^2 \quad (4.6)$$

De plus, lorsque nous considérons le point de l'ellipse sur l'axe \mathbf{e}_w , nous voyons que :

$$d_1 + d_2 = 2a \quad (4.7)$$

En combinant ces deux dernières équations, nous obtenons la relation suivante :

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (4.8)$$

et en isolant c (que l'on nomme aussi l'excentricité linéaire) :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (4.9)$$

Nous pouvons dès lors calculer la première excentricité numérique e qui par définition vaut :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (4.10)$$

Finalement, en géodésie, nous définissons également l'aplatissement f par :

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (4.11)$$

De ces relations, nous pouvons facilement démontrer les équations suivantes :

$$b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2) \quad (4.12)$$

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \quad (4.13)$$

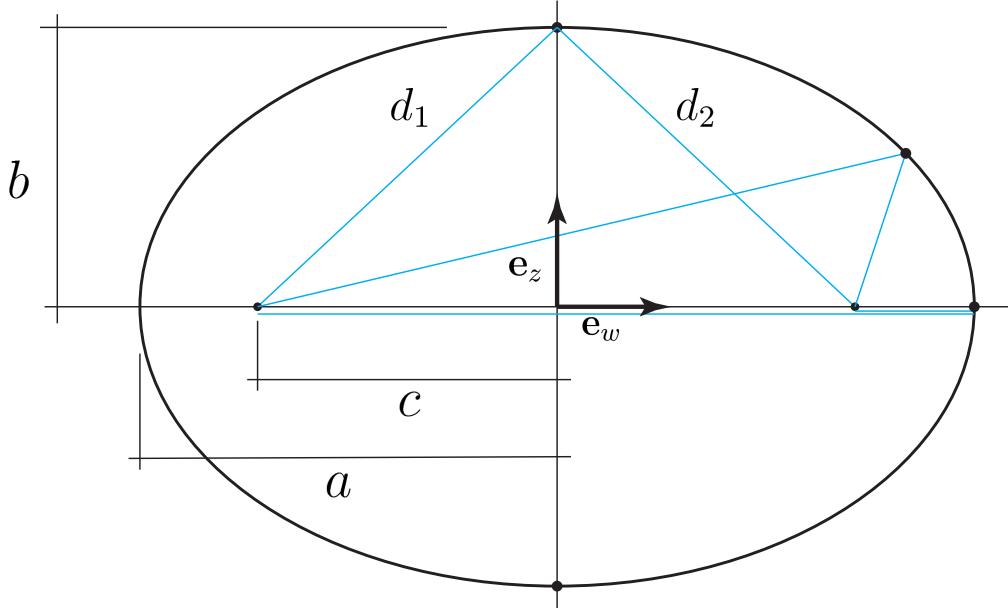


Figure 4.3 – Ellipse dans le plan (e_w, e_z) .

4.2.2 Calcul des coordonnées w et z pour un point de l'ellipse

Nous allons regarder de plus près les différentes relations entre les coordonnées (w, z) d'un point de l'ellipse et la coordonnée ellipsoïdale φ qui lui est associée. Tout d'abord

il est important de définir la latitude ellipsoïdale φ précisément. Elle représente l'angle entre le vecteur de base \mathbf{e}_w (qui représente l'équateur) et la normale à l'ellipse. Cette paramétrisation est la plus adéquate pour les applications géodésiques car elle contient implicitement la direction de la pesanteur ainsi que du plan horizontal local, ceci à l'approximation ellipsoïdale près.

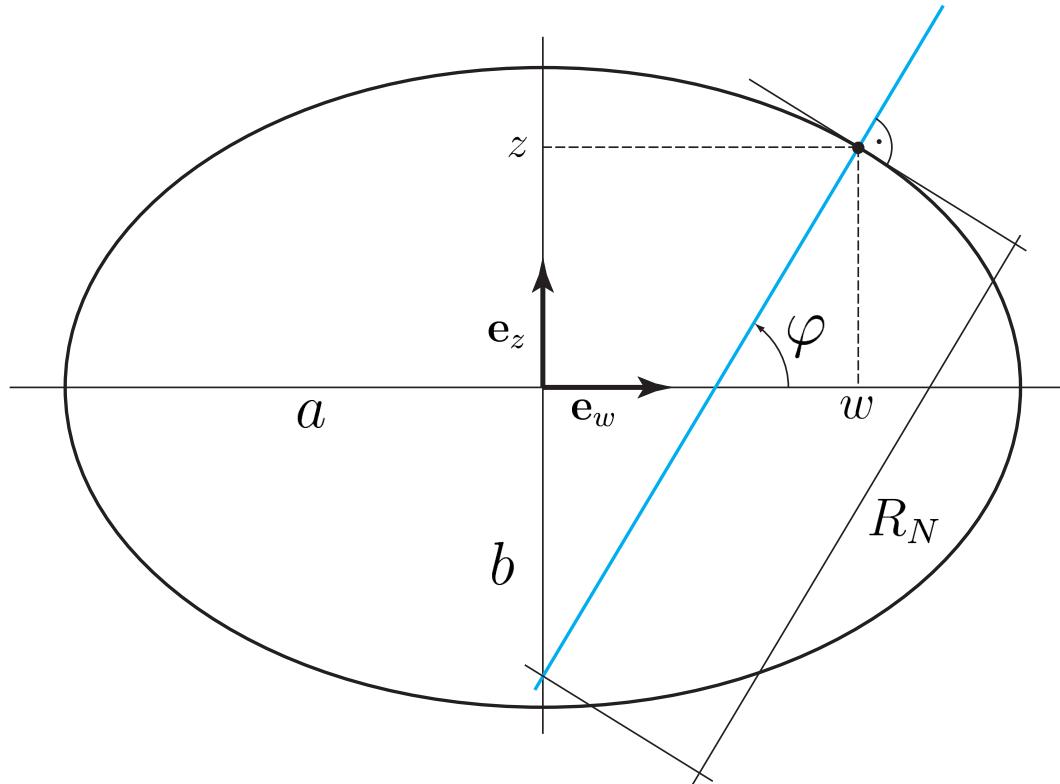


Figure 4.4 – Ellipse dans le plan ($\mathbf{e}_w, \mathbf{e}_z$).

Tout d'abord, exprimons la coordonnée z en fonction de w . Ceci peut être fait en isolant z dans l'équation 4.4 :

$$z = b \cdot \sqrt{1 - \frac{w^2}{a^2}} \quad (4.14)$$

Nous savons aussi que la dérivée de z par rapport à w est liée à φ par :

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (4.15)$$

Calculons donc la fonction dérivée de 4.14 :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dw} &= b \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2w}{a^2}\right) \\
 &= -w \cdot \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{a^2}}} \\
 &= -w \cdot \frac{b}{a^2} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{a^2}}} \\
 &= -w \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{b \cdot \sqrt{1 - \frac{w^2}{a^2}}} \\
 &= -w \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{z} \\
 &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{w}{z} \\
 &= -(1 - e^2) \cdot \frac{w}{z}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

En combinant les équations 4.15 et 4.14 nous trouvons que :

$$-\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = -(1 - e^2) \cdot \frac{w}{z} \tag{4.17}$$

et en isolant z :

$$z = (1 - e^2) \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot w \tag{4.18}$$

Nous avons donc une équation qui relie les coordonnées z et w avec la latitude φ ainsi que la première excentricité numérique e . En introduisant cette relation 4.18 dans l'équation canonique de l'ellipse 4.4 nous pourrons exprimer w en fonction de φ de a et de e uniquement :

$$\frac{w^2}{a^2} + \frac{\left[(1 - e^2) \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot w\right]^2}{b^2} = 1 \tag{4.19}$$

ou encore :

$$\frac{w^2}{a^2} + \frac{(1 - e^2)^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot w^2}{a^2 \cdot (1 - e^2)} = 1 \tag{4.20}$$

qui se simplifie :

$$\frac{w^2}{a^2} + \frac{(1 - e^2) \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot w^2}{a^2} = 1 \tag{4.21}$$

puis :

$$w^2 + (1 - e^2) \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot w^2 = a^2 \tag{4.22}$$

qui permet d'isoler w^2 :

$$w^2 = \frac{a^2}{1 + (1 - e^2) \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \quad (4.23)$$

et qui peut encore se simplifier :

$$\begin{aligned} w^2 &= \frac{a^2}{\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + (1 - e^2) \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{a^2}{\frac{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \cdot \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \cdot \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{a^2 \cdot \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi} \end{aligned} \quad (4.24)$$

et finalement :

$$w = \frac{a \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (4.25)$$

De façon analogue, il est possible de trouver :

$$z = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (4.26)$$

La relation obtenue en 4.25 permet aussi de déterminer le paramètre R_N qui représente le rayon de courbure de la section normale à l'ellipsoïde (et non pas le rayon de courbure de l'ellipse). Nous voyons que :

$$w = R_N \cdot \cos \varphi \quad (4.27)$$

et donc :

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (4.28)$$

ce qui permet aussi de simplifier l'équation 4.26 par :

$$z = R_N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \quad (4.29)$$

4.3 Coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ellipsoïdales (λ, φ)

Nous allons tout d'abord exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point de la surface de l'ellipsoïde en fonction des coordonnées ellipsoïdales (λ, φ) . Pour cela, nous pouvons décomposer la coordonnée w en coordonnées (x, y) grâce à la longitude λ :

$$\begin{aligned} x &= w \cdot \cos \lambda \\ y &= w \cdot \sin \lambda \end{aligned} \quad (4.30)$$

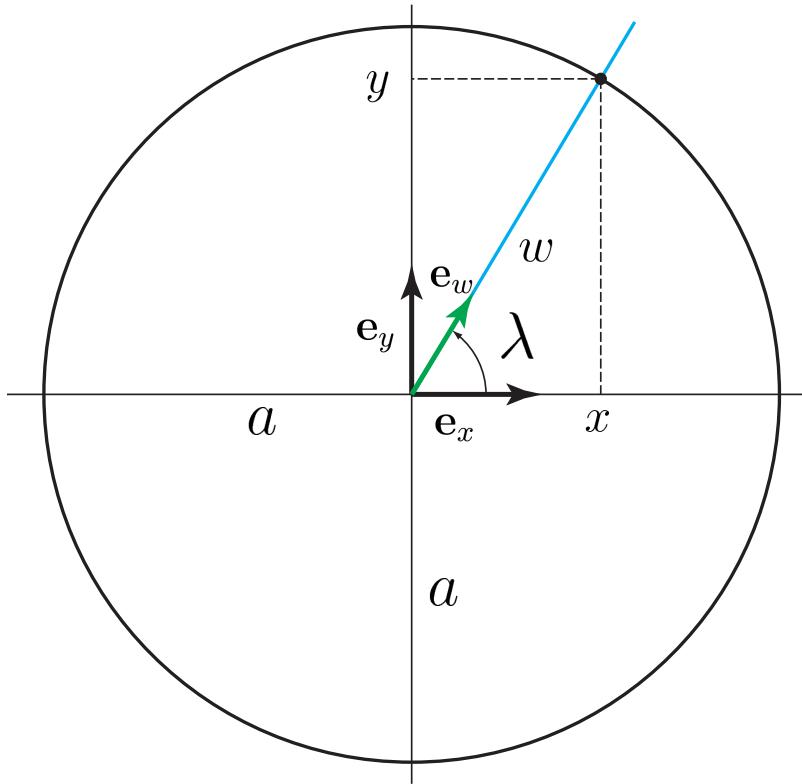


Figure 4.5 – Cercle dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

et en combinant avec 4.27 et 4.29

$$\boxed{\begin{aligned} x(\lambda, \varphi) &= R_N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y(\lambda, \varphi) &= R_N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z(\lambda, \varphi) &= R_N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{aligned}} \quad (4.31)$$

4.4 Coordonnées cartésiennes (x, y, z) et ellipsoïdales (λ, φ, h)

Afin de pouvoir calculer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point quelconque connaissant les coordonnées ellipsoïdales (λ, φ, h) , il est nécessaire de définir 2 vecteurs \mathbf{q} et $h \cdot \mathbf{n}$, qui, additionnés donneront le vecteur position recherché \mathbf{p} . Le vecteur \mathbf{q} est le vecteur position de \mathbf{p} projeté orthogonalement sur la surface de l'ellipsoïde. Ses composantes sont données par l'équation 4.31 :

$$\mathbf{q} = R_N \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

En ce qui concerne le vecteur normal à l'ellipsoïde \mathbf{n} , ses composantes sont données par :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

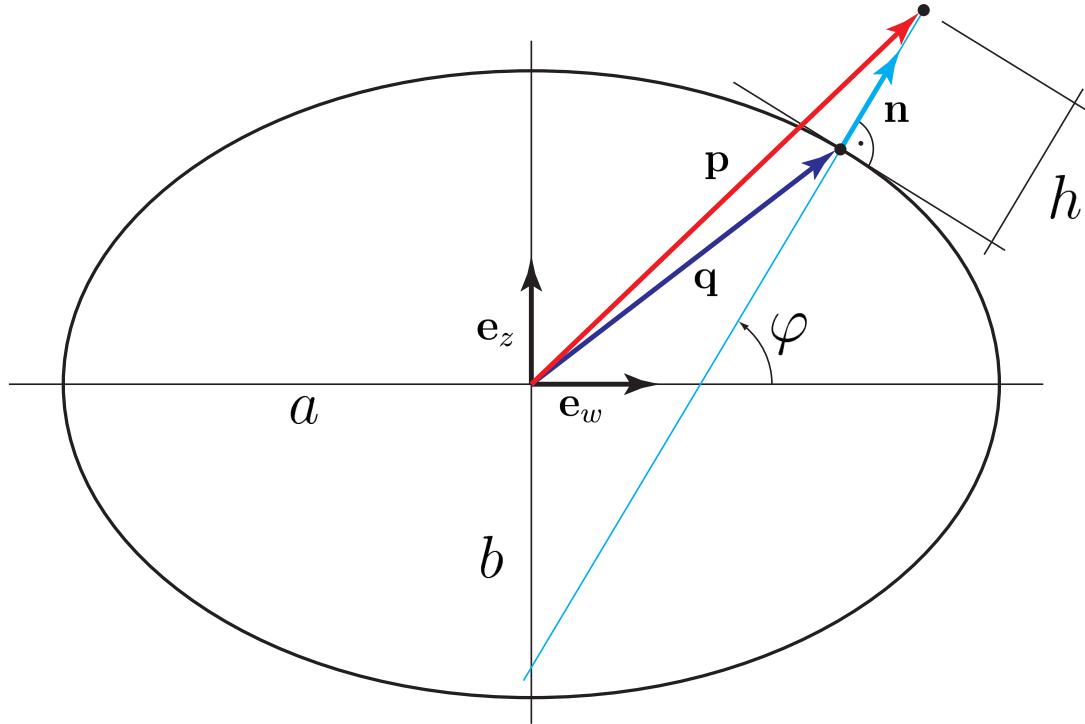


Figure 4.6 – Point hors de la surface de l’ellipsoïde.

Et donc le vecteur \mathbf{p} est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{q} + h \cdot \mathbf{n} \\ &= R_N \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.34)$$

ce qui finalement nous permet d’écrire :

$$\begin{aligned} x(\lambda, \varphi, h) &= (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y(\lambda, \varphi, h) &= (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z(\lambda, \varphi, h) &= [R_N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$R_N(a, e, \varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$$

A l’inverse, nous pouvons trouver les coordonnées ellipsoïdales (λ, φ, h) à partir des coordonnées cartésiennes (x, y, z) . A partir des équations 4.35, nous pouvons trouver facilement la longitude λ :

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{(R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda}{(R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda} \\ &= \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \tan \lambda \end{aligned} \quad (4.36)$$

d'où :

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.37)$$

Pour trouver φ et h nous pouvons écrire :

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{[R_N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin \varphi}{(R_N + h) \cdot \cos \varphi} \quad (4.38)$$

en isolant φ nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{R_N + h}{[R_N \cdot (1 - e^2) + h]} \\ &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_N}{R_N + h} \cdot e^2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

et donc :

$$\varphi = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_N}{R_N + h} \cdot e^2}\right) \quad (4.40)$$

Pour trouver h nous pouvons écrire :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = (R_N + h) \cdot \cos \varphi \quad (4.41)$$

ce qui nous permet d'isoler h :

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - R_N \quad (4.42)$$

et finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \varphi(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_N}{R_N + h} \cdot e^2}\right) \\ h(x, y, z) &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - R_N \\ R_N(a, e, \varphi) &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Remarque

Comme pour le cas des coordonnées sphériques, il est important de remplacer la fonction arctan par la fonction atan2. De plus, il est important de noter que seule la longitude peut être calculée directement en connaissant les coordonnées (x, y) . Les 3 grandeurs restantes (R_N, φ, h) sont toutes inter-dépendantes. Il est donc nécessaire de les calculer itérativement selon le schéma suivant :

$$\textcircled{1} \quad \lambda = \text{atan2}(y, x)$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} h_i = 0 \\ h_{i-1} = 1 \\ R_{N_i} = 1 \end{cases}$$

\textcircled{3} boucle d'itération tant que $|h_i - h_{i-1}| > 0.000001$:

$$\textcircled{1} \quad h_{i-1} = h_i$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi_i = \text{atan2} \left[z, \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(1 - \frac{R_{N_i}}{R_{N_i} + h_i} \cdot e^2 \right) \right]$$

$$\textcircled{3} \quad R_{N_i} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_i}}$$

$$\textcircled{4} \quad h_i = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi_i} - R_{N_i}$$

Chapitre 5

Systèmes de coordonnées projetées

Les systèmes de coordonnées projetées jouent un rôle fondamental en topométrie, en cartographie et en géographie en général. Ils sont indispensables lorsque l'on veut représenter sur un plan des points connus sur la surface de la sphère terrestre ou sur la surface d'un ellipsoïde de révolution. L'opération consiste donc à faire correspondre n'importe quel point d'une surface de référence (la sphère ou l'ellipsoïde de révolution) à un point d'une surface de projection (en général un plan, parfois aussi une sphère¹). Mathématiquement, cela consiste à définir les fonctions suivantes :

Surface de référence	Surface de projection	Formules de projection
Sphère	Plan	$E(\lambda_{\text{sph}}, \phi_{\text{sph}})$ $N(\lambda_{\text{sph}}, \phi_{\text{sph}})$
Ellipsoïde de révolution	Plan	$E(\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}})$ $N(\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}})$
Ellipsoïde de révolution	Sphère	$\lambda_{\text{sph}}(\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}})$ $\phi_{\text{sph}}(\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}})$

avec :

$\lambda_{\text{sph}}, \phi_{\text{sph}}$ [rad] = la longitude et la latitude sphériques.

$\lambda_{\text{ell}}, \varphi_{\text{ell}}$ [rad] = la longitude et la latitude ellipsoïdales.

E, N [m] = les coordonnées Est et Nord (orthonormées) dans le plan de projection.

Fondamentalement, lorsque les surfaces de référence et de projection n'ont pas la même courbure intrinsèque (ou courbure de Gauss), il n'existe pas de projection qui conserve toutes les propriétés géométriques de la surface de référence². Dans ce cas de figure, il n'existe donc pas de projection qui soit optimale pour toutes les applications. En effet,

1. si la surface de référence est un ellipsoïde de révolution

2. Mathématiquement, nous disons que la surface de référence et la surface de projection ne sont pas localement isométrique.

si nous devons créer une carte qui permet de représenter fidèlement les surfaces [m^2] des différents pays, nous n'utiliserons pas la même projection que pour créer une carte qui facilite la navigation maritime.

5.1 Exemple introductif / la projection plate-carrée

En guise d'introduction, prenons un cas de figure très simple. Nous choisissons la surface de référence comme étant une sphère de rayon $R = 6'380'000 \text{ [m]}$, et notre surface de projection un plan. Définissons les formules de projection qui permettent de calculer les coordonnées E et N à partir de la longitude λ et de la latitude ϕ sphériques :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= R \cdot \lambda \\ N(\lambda, \phi) &= R \cdot \phi \end{aligned} \tag{5.1}$$

Cette projection simple est appelée *plate-carrée*. Elle est appelée ainsi car l'image, dans



Figure 5.1 – Sphère terrestre avec les méridiens et les parallèles dessinés avec des intervalles réguliers de $\Delta\lambda = \Delta\phi = 10^\circ$.

le plan de projection, des méridiens et des parallèles forme un pavage carré (Figure 5.2). Maintenant que nous avons une carte sur laquelle nous pouvons projeter n'importe quel point connu en coordonnées sphériques, nous aimerions savoir si il est possible de mesurer directement des distances, des angles, des surfaces sur la carte. Correspondent-ils aux distances, angles et surfaces réels qui sont obtenus en les mesurant directement sur la

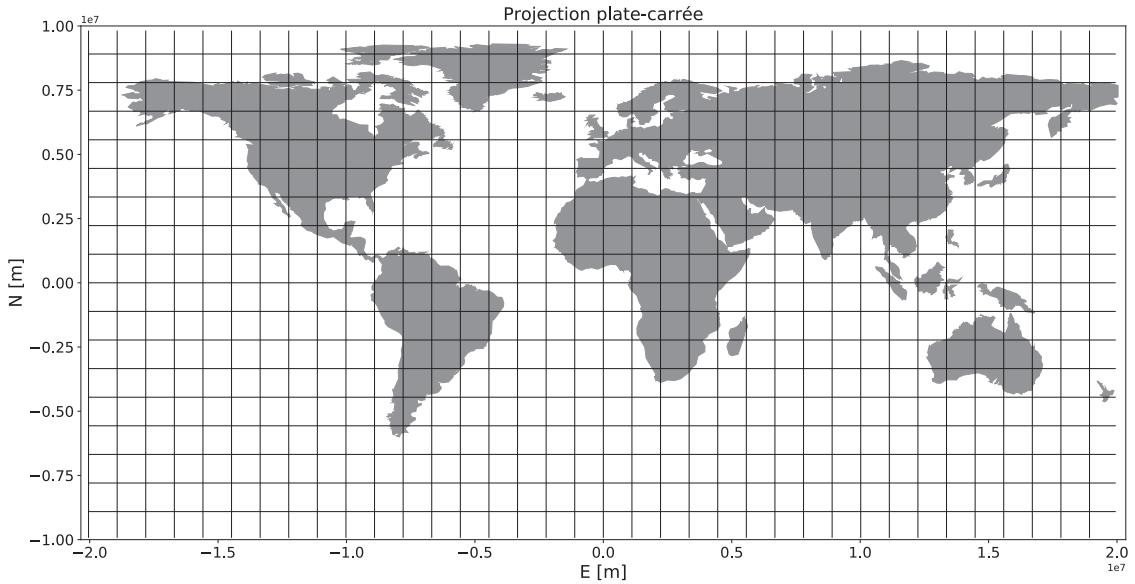


Figure 5.2 – Projection plate-carrée.

sphère ? Pour contrôler ceci, nous avons besoin d'outils qui nous permettent de calculer ces différentes grandeurs géométriques sur la sphère et dans le plan de projection. Concentrons nous d'abord sur les distances.

5.1.1 Distances dans le plan de projection

Si nous connaissons les coordonnées de deux points $\mathbf{A} = (E_{\mathbf{A}}, N_{\mathbf{A}})$ et $\mathbf{B} = (E_{\mathbf{B}}, N_{\mathbf{B}})$, et puisque nous sommes dans un système cartésien orthonormé, la distance $s_{\mathbf{AB}}$ dans le plan de projection se calcule simplement par :

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{AB}} &= \sqrt{(E_{\mathbf{B}} - E_{\mathbf{A}})^2 + (N_{\mathbf{B}} - N_{\mathbf{A}})^2} \\ &= \sqrt{\Delta E_{\mathbf{AB}}^2 + \Delta N_{\mathbf{AB}}^2} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Si les points entre lesquels nous voulons calculer une distance ne sont pas donnés explicitement mais que nous connaissons les accroissements de coordonnées (dE, dN) qui les séparent, alors nous pouvons aussi écrire l'accroissement en distance dS correspondant :

$$dS = \sqrt{dE^2 + dN^2} \quad (5.3)$$

Dans notre problématique, nous ne connaissons pas directement les accroissements dE et dN mais plutôt les accroissements en longitude et latitude $d\lambda$ et $d\phi$. Il est donc nécessaire de calculer dE et dN en fonction de $d\lambda$ et $d\phi$. De façon générale, si nous avons :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) \\ N(\lambda, \phi) \end{aligned} \quad (5.4)$$

alors :

$$\begin{aligned} dE(\lambda, \phi) &= \frac{\partial E}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial E}{\partial \phi} \cdot d\phi \\ dN(\lambda, \phi) &= \frac{\partial N}{\partial \lambda} \cdot d\lambda + \frac{\partial N}{\partial \phi} \cdot d\phi \end{aligned} \quad (5.5)$$

qui dans notre cas valent :

$$\begin{aligned} dE(\lambda, \phi) &= R \cdot d\lambda \\ dN(\lambda, \phi) &= R \cdot d\phi \end{aligned} \quad (5.6)$$

et donc nous pouvons trouver la valeur de l'accroissement de distance dans le plan de projection dS engendré par des accroissements de longitude $d\lambda$ et latitude $d\phi$ en injectant 5.6 dans l'équation 5.3 :

$$dS = R \cdot \sqrt{d\lambda^2 + d\phi^2} \quad (5.7)$$

5.1.2 Distances sur la sphère

Pour calculer une distance sur la sphère entre deux points très proches, nous pouvons nous faciliter la tâche en approximant localement la sphère par un plan tangent défini par :

- un vecteur tangent au parallèle local $d\mathbf{t}_\lambda$,
- un vecteur tangent au méridien local $d\mathbf{t}_\phi$,

puis ensuite calculer la distance dans ce plan.

Avant de pouvoir calculer les vecteurs tangents $d\mathbf{t}_\lambda$ et $d\mathbf{t}_\phi$, définissons les coordonnées tridimensionnelles d'un point sur la sphère dans un système de coordonnées cartésiennes (vecteurs de base orthonormés) :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

ensuite, les vecteurs tangents sont donnés par :

$$d\mathbf{t}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \cdot d\lambda = R \cdot \begin{pmatrix} -\cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\lambda \quad (5.9)$$

$$d\mathbf{t}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} \cdot d\phi = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \phi \cdot \sin \lambda \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot d\phi \quad (5.10)$$

Vérifions maintenant que $d\mathbf{t}_\lambda$ et $d\mathbf{t}_\phi$ forment une base orthogonale. Ceci peut se faire en calculant leur produit scalaire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{t}_\lambda \cdot d\mathbf{t}_\phi &= -\cos \phi \sin \lambda \cdot d\lambda \cdot (-\sin \phi \cos \lambda) \cdot d\phi + \cos \phi \cos \lambda \cdot d\lambda \cdot (-\sin \phi \sin \lambda) \cdot d\phi + 0 \cdot \cos \phi \cdot d\phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

ceci nous permet nous permet d'appliquer le théorème de pythagore pour trouver l'accroissement de distance dans le plan tangent :

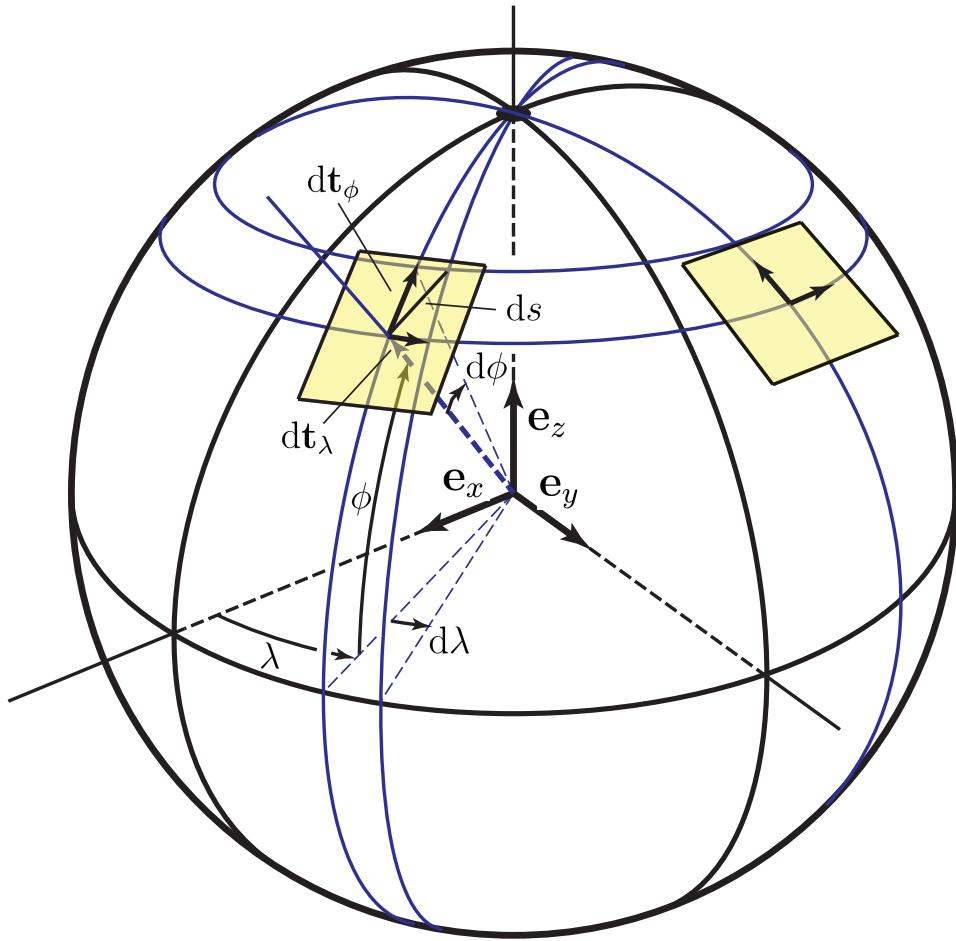


Figure 5.3 – Vecteurs tangents $d\mathbf{t}_\lambda$ et $d\mathbf{t}_\phi$ et accroissements de la distance sur la sphère ds .

croissement de distance sur la sphère ds à partir des normes des vecteur tangents :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{|d\mathbf{t}_\lambda|^2 + |d\mathbf{t}_\phi|^2} \\ &= R \cdot \sqrt{\cos^2 \phi \cdot d\lambda^2 + d\phi^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} |d\mathbf{t}_\lambda|^2 &= R^2 \cdot (\cos^2 \phi \cdot \sin^2 \lambda + \cos^2 \phi \cdot \cos^2 \lambda) \cdot d\lambda^2 \\ &= R^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) \cdot d\lambda^2 \\ &= R^2 \cdot \cos^2 \phi \cdot d\lambda^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

et :

$$\begin{aligned} |d\mathbf{t}_\phi|^2 &= R^2 \cdot (\sin^2 \phi \cdot \cos^2 \lambda + \sin^2 \phi \cdot \sin^2 \lambda + \cos^2 \phi) \cdot d\phi^2 \\ &= R^2 \cdot (\sin^2 \phi \cdot (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + \cos^2 \phi) \cdot d\phi^2 \\ &= R^2 \cdot (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \cdot d\phi^2 \\ &= R^2 \cdot d\phi^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

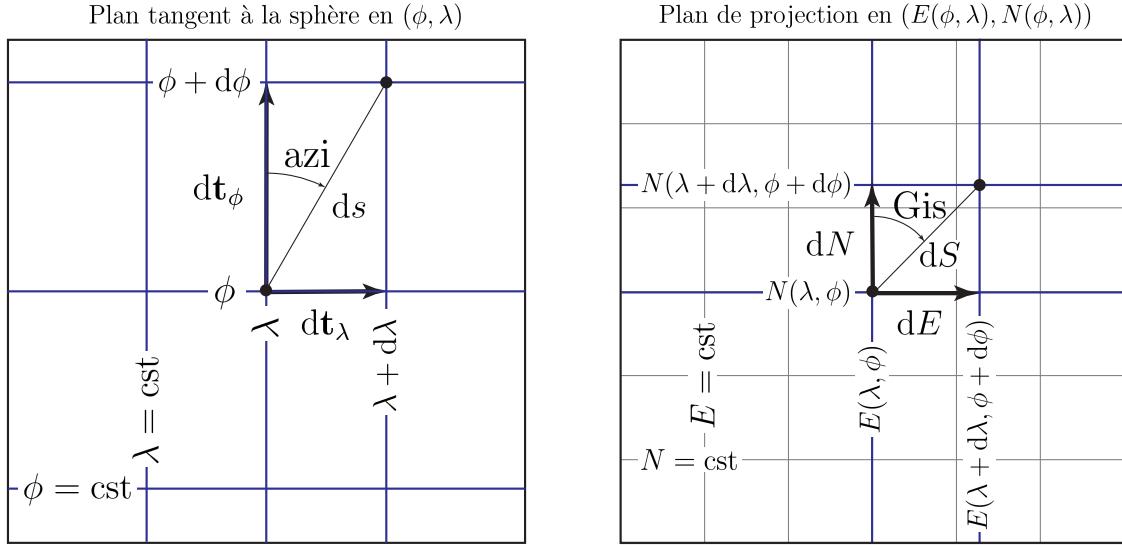


Figure 5.4 – (Gauche) plan tangent à la sphère en un point (λ, ϕ) , vecteurs tangents dt_λ , dt_ϕ et accroissement de la distance sur la sphère ds . (Droite) plan de projection en un point (E, N) avec les méridiens et parallèles projetés en bleu, et la grille des coordonnées (E, N) en gris.

Remarque

Une méthode générale de calcul de la distance ds est possible même si les vecteurs tangents dt_λ et dt_ϕ ne sont pas orthogonaux. Il suffit de les additionner au préalable et d'en prendre la norme :

$$ds = |dt_\lambda + dt_\phi| \quad (5.15)$$

5.1.3 Comparaison des distances planimétriques et sphériques

A partir des équations 5.7 et 5.12, nous pouvons calculer le rapport des distances planimétriques et sphériques :

$$\frac{dS}{ds} = \frac{R \cdot \sqrt{d\lambda^2 + d\phi^2}}{R \cdot \sqrt{\cos^2 \phi \cdot d\lambda^2 + d\phi^2}} \quad (5.16)$$

Nous pouvons constater plusieurs propriétés intéressantes :

1. De façon générale, nous voyons que le facteur d'échelle varie selon la latitude ϕ ainsi que selon la direction $(d\lambda, d\phi)$ dans laquelle la distance ds est considérée.
2. Lorsque l'on considère des points sur l'équateur ($\phi = 0$), nous avons :

$$\frac{dS}{ds} = \frac{R \cdot \sqrt{d\lambda^2 + d\phi^2}}{R \cdot \sqrt{d\lambda^2 + d\phi^2}} = 1 \quad (5.17)$$

Dans ce cas, toutes les distances sont conservées, peu importe la direction de ds .

3. Si l'on considère uniquement des distances ds dans la direction du méridien local ($d\lambda = 0$), nous avons :

$$\frac{dS}{ds} = \frac{R \cdot \sqrt{d\phi^2}}{R \cdot \sqrt{d\phi^2}} = 1 \quad (5.18)$$

Dans ce cas, les distances, dans la direction du méridien local, sont partout conservées.

4. Si l'on considère uniquement des distances ds dans la direction du parallèle local ($d\phi = 0$), nous avons :

$$\frac{dS}{ds} = \frac{R \cdot \sqrt{d\lambda^2}}{R \cdot \sqrt{\cos^2 \phi \cdot d\lambda^2}} = \frac{1}{\cos \phi} \quad (5.19)$$

Dans ce cas, les distances, dans la direction du parallèle local, ne sont pas conservées. Pour une petite distance sur la sphère ds donnée, la distance planimétrique dS correspondante croît comme l'inverse du cosinus de la latitude.

5.1.4 Comparaison des surfaces

Nous pouvons aussi comparer de petites surfaces sur la sphère da et dans leurs surfaces correspondantes dans le plan de projection dA . Elles se calculent également à l'aide des accroissements différentiels $|dt_\lambda|$ et $|dt_\phi|$ pour la sphère, et dE et dN dans le plan. Sur la sphère, puisque les vecteurs tangents dt_λ et dt_ϕ sont orthogonaux, nous avons simplement :

$$\begin{aligned} da &= |dt_\lambda| \cdot |dt_\phi| \\ &= R \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \cdot R \cdot d\phi \\ &= R^2 \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \cdot d\phi \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dans le plan de projection, nous avons simplement :

$$\begin{aligned} dA &= dE \cdot dN \\ &= R \cdot d\lambda \cdot R \cdot d\phi \\ &= R^2 \cdot d\lambda \cdot d\phi \end{aligned} \quad (5.21)$$

et donc le rapport des surfaces se trouve par :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{da} &= \frac{R^2 \cdot d\lambda \cdot d\phi}{R^2 \cdot \cos \phi \cdot d\lambda \cdot d\phi} \\ &= \frac{1}{\cos \phi} \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.1.5 Comparaison de l'azimut sphérique et du gisement dans le plan

A l'aide des éléments différentiels sur la sphère $d\mathbf{t}_\lambda$ et $d\mathbf{t}_\phi$ nous pouvons calculer l'azimut (azi) entre deux points séparés de $d\lambda$ et $d\phi$:

$$\begin{aligned} \text{azi} &= \arctan \left(\frac{|d\mathbf{t}_\lambda|}{|d\mathbf{t}_\phi|} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{R \cdot \cos \phi \cdot d\lambda}{R \cdot d\phi} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{\cos \phi \cdot d\lambda}{d\phi} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

et à l'aide des éléments différentiels dans le plan de projection dE et dN , nous pouvons calculer le gisement (Gis) entre deux points séparés de $d\lambda$ et $d\phi$:

$$\begin{aligned} \text{Gis} &= \arctan \left(\frac{dE}{dN} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{R \cdot d\lambda}{R \cdot d\phi} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{d\lambda}{d\phi} \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Et donc la différence vaut :

$$\text{Gis} - \text{azi} = \arctan \left(\frac{d\lambda}{d\phi} \right) - \arctan \left(\frac{\cos \phi \cdot d\lambda}{d\phi} \right) \quad (5.25)$$

Nous pouvons constater plusieurs propriétés intéressantes :

1. De façon générale, nous voyons que la différence (Gis-azi) varie selon la latitude ϕ ainsi que selon la direction ($d\lambda, d\phi$).
2. Lorsque l'on considère des points sur l'équateur ($\phi = 0$), nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Gis} - \text{azi} &= \arctan \left(\frac{d\lambda}{d\phi} \right) - \arctan \left(\frac{d\lambda}{d\phi} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

ce qui veut dire que sur l'équateur, l'azimut et le gisement dans n'importe quelle direction sont les mêmes. A l'équateur, et à l'équateur seulement, la projection plate-carrée est conforme.

3. Lorsque qu'on l'on considère des directions le long du méridien ($d\lambda = 0$), nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Gis} - \text{azi} &= \arctan \left(\frac{0}{d\phi} \right) - \arctan \left(\frac{0}{d\phi} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

ce qui veut dire que le nord géographique et le nord de la carte sont partout confondus. Attention, seule cette direction est conservée.

5.1.6 Image dans le plan, d'un cercle sur la sphère

Afin de représenter graphiquement les déformations locales générées par une projection, il est très utile d'appliquer la projection à un cercle calculé sur la surface de référence, et ainsi visualiser l'image de ce cercle dans le plan de projection. Voici comment réaliser cette opération pour notre projection plate-carrée.

La première étape consiste à être capable de calculer les coordonnées sphériques (λ_i, ϕ_i) de points sur un cercle de rayon ds centré en (λ_c, ϕ_c) . Nous allons considérer un cercle petit par rapport au rayon de la sphère R . Cela nous permet de travailler dans le plan tangent défini par les vecteurs $(\mathbf{t}_\lambda, \mathbf{t}_\phi)$. De la figure 5.4 nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sin(\text{azi}) &= \frac{|\mathbf{t}_\lambda|}{ds} \\ &= \frac{R \cdot \cos \phi \cdot d\lambda}{ds}\end{aligned}\quad (5.28)$$

et

$$\begin{aligned}\cos(\text{azi}) &= \frac{|\mathbf{t}_\phi|}{ds} \\ &= \frac{R \cdot d\phi}{ds}\end{aligned}\quad (5.29)$$

ce qui nous permet de trouver l'accroissement en $d\lambda$ et $d\phi$ en fonction de l'azimut azi et de la distance ds :

$$\begin{aligned}d\lambda &= \frac{1}{R \cdot \cos \phi} \cdot \sin(\text{azi}) \cdot ds \\ d\phi &= \frac{1}{R} \cdot \cos(\text{azi}) \cdot ds\end{aligned}\quad (5.30)$$

Finalement, les coordonnées sphériques d'un point i sur le cercle de rayon ds centré en (λ_c, ϕ_c) se calcule par :

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \lambda_c + d\lambda_i = \lambda_c + \frac{1}{R \cdot \cos \phi} \cdot \sin(\text{azi}_i) \cdot ds \\ \phi_i &= \phi_c + d\phi_i = \phi_c + \frac{1}{R} \cdot \cos(\text{azi}_i) \cdot ds\end{aligned}\quad (5.31)$$

La figure 5.5 représente la sphère avec des cercles de rayon $ds = 200$ km, calculés sur une grille régulière de 10° . Les cercles sont approximés par 20 points ($\Delta\text{azi} = 18^\circ$).

La deuxième étape est triviale et consiste à appliquer les formules de la projection aux cercles préalablement calculés. La figure 5.6 résulte de l'application de la projection plate-carrée sur les cercles représentés sur la figure 5.5. Nous voyons que les cercles de la surface de référence deviennent des ellipses dans le plan de projection. Nous avons la confirmation graphique des variations d'échelles de distances selon la position sur la sphère et selon la direction considérée. Ces ellipses sont communément appelées : *les indicatrices de Tissot*. En effet, il est possible de démontrer qu'un cercle infiniment petit sur une surface de référence données, se projetera toujours en une ellipse infiniment petite, peu importe la surface de référence et la projection considérée. Voyons maintenant comment il est possible de calculer les paramètres de ces indicateurs de Tissot efficacement.

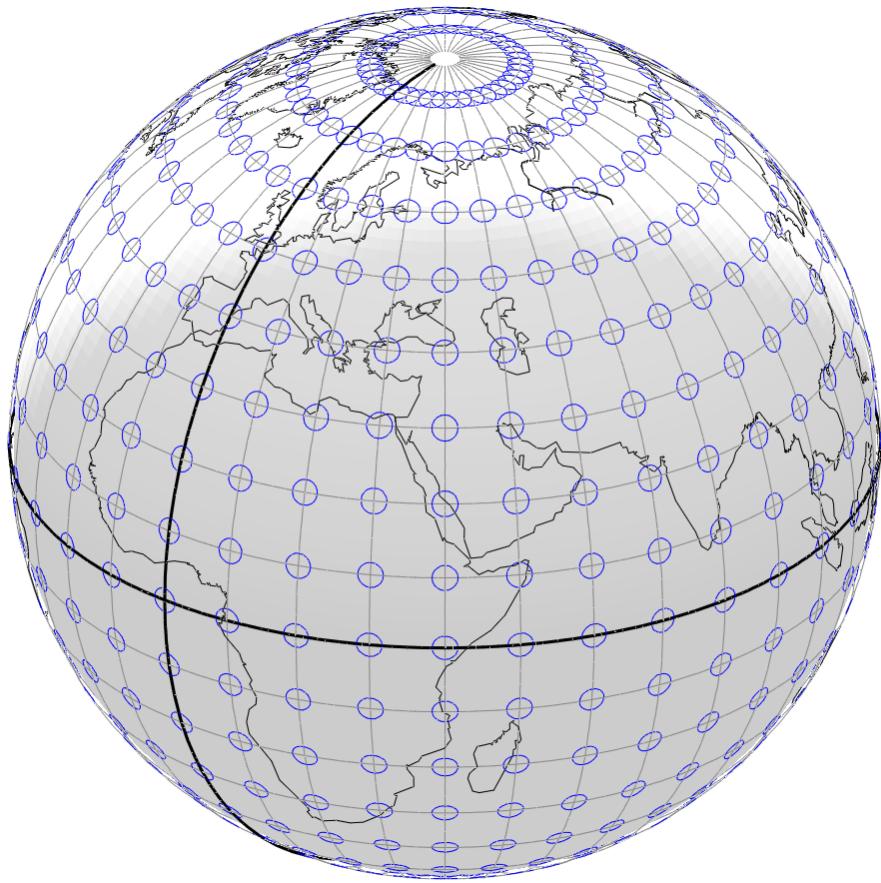


Figure 5.5 – Sphère terrestre avec une grille de cercles sphériques de rayons $ds = 200$ [km].

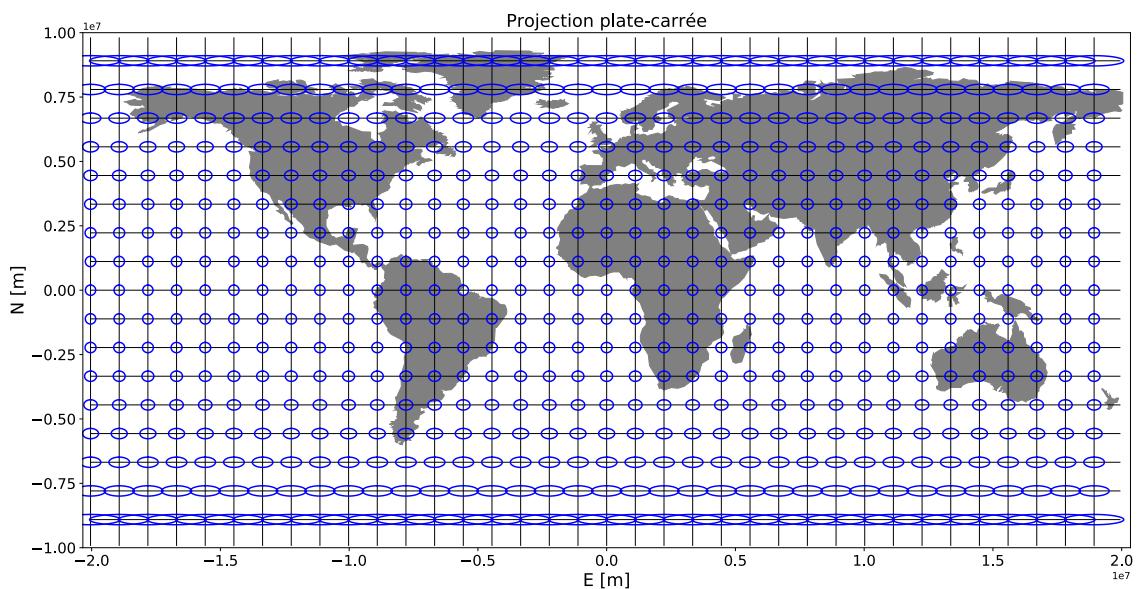


Figure 5.6 – Projection plate carrée avec indicatrices de Tissot.

5.2 Tenseurs métriques

Dans l'exemple introductif de la projection plate-carrée, nous avons vu que les mesures des distances sur la surface de référence ds , et sur la surface de projection dS sont les grandeurs principales utilisées pour l'analyse des déformations générées par la projection. Sur cette base, nous allons introduire un objet mathématique très utile, le tenseur métrique, qui permet de généraliser les mesures de distances, d'angles et de surfaces dans n'importe quel système de coordonnées et pour n'importe quel système de projection. Il nous permettra également de calculer les indicatrices de Tissot de façon élégante. Comme nous allons le voir, chaque surface de référence sera associée à un tenseur métrique différent. Cela sera également le cas pour chaque projection.

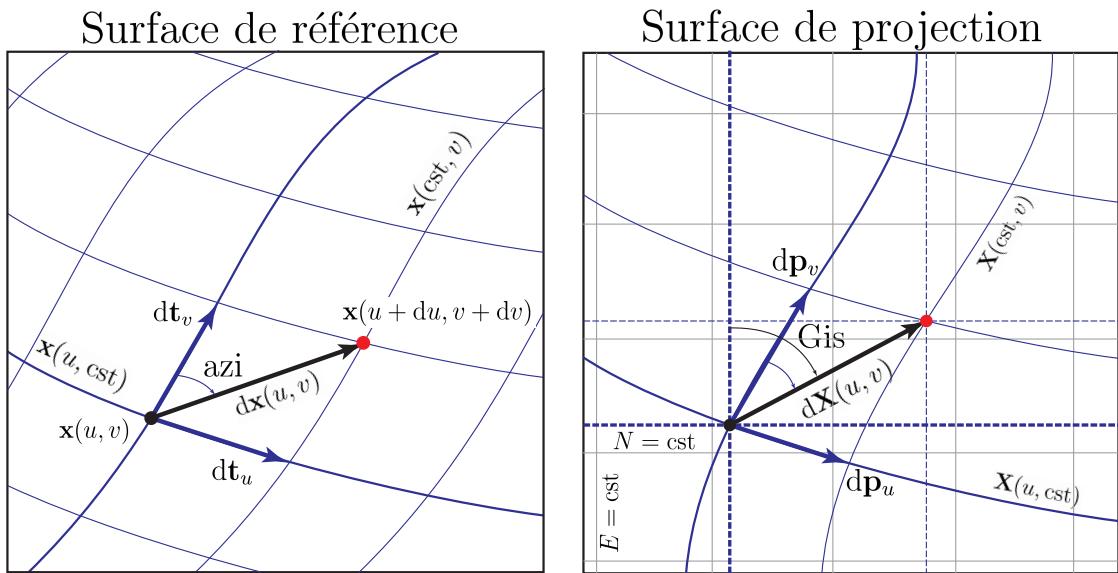


Figure 5.7 – Surface de référence et surface de projection.

5.2.1 Tenseurs métriques des surfaces de référence

De façon générale, une surface de référence est définie par son vecteur position $\mathbf{x}(u, v)$ qui dépend de 2 paramètres (u, v) :

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Comme nous l'avons vu dans l'exemple introductif, nous pouvons calculer deux vecteurs, dt_u et dt_v , tangents à la surface le long des lignes à paramètres constants. Le vecteur dt_u représente le vecteur de variation de position lorsque nous faisons varier le vecteur position d'une quantité du :

$$dt_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \cdot du \quad (5.33)$$

Le vecteur $d\mathbf{t}_v$ représente le vecteur de variation de position lorsque nous faisons varier le vecteur position d'une quantité dv :

$$d\mathbf{t}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot dv \quad (5.34)$$

et en définissant :

$$\mathbf{t}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{t}_u(u, v) &= \mathbf{t}_u(u, v) \cdot du \\ d\mathbf{t}_v(u, v) &= \mathbf{t}_v(u, v) \cdot dv \end{aligned} \quad (5.36)$$

et de façon plus générale, le vecteur de variation de position $d\mathbf{x}(u, v)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(u, v) &= d\mathbf{t}_u(u, v) + d\mathbf{t}_v(u, v) \\ &= \mathbf{t}_u(u, v) \cdot du + \mathbf{t}_v(u, v) \cdot dv \end{aligned} \quad (5.37)$$

Calcul de distances sur la surface de référence

Pour obtenir la distance ds , entre les points $\mathbf{x}(u, v)$ et $\mathbf{x}(u, v) + d\mathbf{x}(u, v)$, de façon générale, même si les vecteurs tangents ne sont pas perpendiculaires, nous prenons le module du vecteur de variation de position :

$$\begin{aligned} ds &= |d\mathbf{x}| \\ &= |d\mathbf{t}_u + d\mathbf{t}_v| \end{aligned} \quad (5.38)$$

mais afin d'alléger les formules de la racine carrée, voyons plutôt comment se calcule ds^2 :

$$\begin{aligned} ds^2 &= |d\mathbf{t}_u + d\mathbf{t}_v|^2 \\ &= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \cdot du + \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot dv \right|^2 \\ &= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \\ \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \end{pmatrix} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

et en développant :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv \right)^2 \\
 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] \cdot du^2 \\
 &\quad + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] \cdot dv^2 \\
 &\quad + 2 \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot du \cdot dv
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

qui peut aussi s'écrire, en utilisant le produit scalaire des vecteurs tangents :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dt_u \cdot dt_u + dt_v \cdot dt_v + 2 \cdot dt_u \cdot dt_v \\
 &= t_u \cdot t_u \cdot du^2 + t_v \cdot t_v \cdot dv^2 + 2 \cdot t_u \cdot t_v \cdot du \cdot dv
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$ds^2 = d\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u} \tag{5.42}$$

avec :

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_u \cdot t_u & t_u \cdot t_v \\ t_v \cdot t_u & t_v \cdot t_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{uu} & t_{uv} \\ t_{vu} & t_{vv} \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

et dont la matrice \mathbf{T} est en fait le *tenseur métrique* associé au système de coordonnées cartésien $\mathbf{x}(u, v)$.

Calcul d'angles sur la surface de référence

Pour obtenir l'angle α , entre deux directions, $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ sur la surface de référence, générées par les accroissements des paramètres $d\mathbf{u}_1$ et $d\mathbf{u}_2$, de façon générale, avec :

$$d\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

nous pouvons tout d'abord calculer les vecteurs sur la surface de référence :

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{x}_1 &= t_u \cdot du_1 + t_v \cdot dv_1 \\
 d\mathbf{x}_2 &= t_u \cdot du_2 + t_v \cdot dv_2
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

pour lesquels nous savons que leur produit scalaire est lié à l'angle spatial α par :

$$\cos \alpha = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1| \cdot |d\mathbf{x}_2|} \tag{5.46}$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{t}_u \cdot d\mathbf{u}_1 + \mathbf{t}_v \cdot d\mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{t}_u \cdot d\mathbf{u}_2 + \mathbf{t}_v \cdot d\mathbf{v}_2)}{\sqrt{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_1} \cdot \sqrt{d\mathbf{u}_2^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_2}} \quad (5.47)$$

et par une démonstration analogue au calcul de la distance, nous trouvons finalement :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_2}{\sqrt{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_1} \cdot \sqrt{d\mathbf{u}_2^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}_2}} \right) \quad (5.48)$$

Calcul d'azimuts sur la surface de référence

Pour obtenir l'azimut α , d'une direction $d\mathbf{x}$ générée par l'accroissement des paramètres $d\mathbf{u}$, de façon générale, il suffit de considérer le cas particulier de l'équation 5.48 dans laquelle nous définissons $d\mathbf{x}_1 = dt_v$, ce qui nous permet de définir :

$$d\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ dv \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_2 = d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

et après quelques simplifications, voici la formule générale de l'azimut :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{t_{12} \cdot du + t_{22} \cdot dv}{\sqrt{t_{22}} \cdot \sqrt{d\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}}} \right) \quad \forall \quad \mathbf{T} \quad (5.50)$$

Attention, en utilisant l'équation 5.50, la problématique des quadrants n'est pas résolue. Néanmoins, lorsque la métrique de la surface de référence \mathbf{T} est diagonale, c'est à dire que les vecteurs tangents \mathbf{t}_u et \mathbf{t}_v sont orthogonaux ($t_{12} = 0$), nous pouvons utiliser la formule de la tangente :

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\sqrt{t_{11}} \cdot du}{\sqrt{t_{22}} \cdot dv} \right) \quad \forall \quad \mathbf{T} \text{ diagonal} \quad (5.51)$$

et lorsque l'on veut réaliser des calculs numériques avec un traitement rigoureux des quadrants :

$$\alpha = \text{atan2}(\sqrt{t_{11}} \cdot du, \sqrt{t_{22}} \cdot dv) \quad \forall \quad \mathbf{T} \text{ diagonal} \quad (5.52)$$

Calcul de surfaces sur la surface de référence

Pour obtenir la surface da du parallélogramme généré par les 2 vecteurs tangents à la surface dt_u et dt_v , de façon générale, nous savons que leur produit vectoriel est lié à da par :

$$da = |dt_u \times dt_v| \quad (5.53)$$

avec :

$$\begin{aligned} dt_u &= \mathbf{t}_u \cdot du \\ dt_v &= \mathbf{t}_v \cdot dv \end{aligned} \quad (5.54)$$

ce qui nous permet de développer l'équation 5.53 :

$$da = |\mathbf{t}_u \cdot du \times \mathbf{t}_v \cdot dv| \quad (5.55)$$

et par une démonstration analogue au calcul de la distance, nous trouvons finalement :

$$da = \sqrt{\det(\mathbf{T})} \cdot du \cdot dv \quad (5.56)$$

Tenseur métrique des coordonnées sphériques

Lorsque la surface de référence est une sphère paramétrée avec les coordonnées sphériques (λ, ϕ) nous avons :

$$\begin{aligned} u &= \lambda \\ v &= \phi \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix}$$

le vecteur position :

$$\mathbf{x}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

les vecteurs tangents sont donnés par :

$$\mathbf{t}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} -\cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

et :

$$\mathbf{t}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \phi \cdot \sin \lambda \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\mathbf{T}_{\text{sph}} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\phi \\ \mathbf{t}_\phi \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\phi \cdot \mathbf{t}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cdot \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

Tenseur métrique des coordonnées ellipsoïdales

Lorsque la surface de référence est un ellipsoïde de révolution paramétré avec les coordonnées ellipsoïdales (λ, φ) nous avons :

$$\begin{aligned} u &= \lambda \\ v &= \varphi \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

le vecteur position :

$$\mathbf{x}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} x(\lambda, \varphi) \\ y(\lambda, \varphi) \\ z(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ R_N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ R_N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

les vecteurs tangents sont donnés par :

$$\mathbf{t}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ R_N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

et :

$$\mathbf{t}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_M \cdot \sin \varphi \cdot \cos \lambda \\ -R_M \cdot \sin \varphi \cdot \sin \lambda \\ R_M \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\boxed{\mathbf{T}_{\text{ell}} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\varphi \\ \mathbf{t}_\varphi \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\varphi \cdot \mathbf{t}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_N^2 \cdot \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R_M^2 \end{pmatrix}} \quad (5.66)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \\ R_M &= \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Avec le rayon de courbure de la section normale R_N , et le rayon de courbure du méridien R_M .

5.2.2 Tenseurs métriques des coordonnées projetées

De façon générale, un système de coordonnées projetées est défini par son vecteur position 2D $\mathbf{X}(u, v)$, qui encode les formules de projection, qui dépend des 2 paramètres (u, v) de la surface de référence³ :

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{pmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

A partir de ce vecteur, nous pouvons également déterminer 2 vecteurs $(d\mathbf{p}_u, d\mathbf{p}_v)$, images des vecteurs (dt_u, dt_v) sur la surface de projection, générés lorsque nous faisons varier $\mathbf{X}(u, v)$ de respectivement du et dv :

$$d\mathbf{p}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial Y(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \cdot du \quad \text{et} \quad d\mathbf{p}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial Y(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot dv \quad (5.69)$$

3. Il faut absolument que ces paramètres soient identiques à ceux de la surface de référence.

et en définissant :

$$\mathbf{p}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial Y(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial Y(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}_u(u, v) &= \mathbf{p}_u(u, v) \cdot du \\ d\mathbf{p}_v(u, v) &= \mathbf{p}_v(u, v) \cdot dv \end{aligned} \quad (5.71)$$

et de façon plus générale, l'image du vecteur $d\mathbf{x}(u, v)$ sur la surface de projection s'écrit :

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}(u, v) &= d\mathbf{p}_u(u, v) + d\mathbf{p}_v(u, v) \\ &= \mathbf{p}_u(u, v) \cdot du + \mathbf{p}_v(u, v) \cdot dv \end{aligned} \quad (5.72)$$

Calcul de distances sur la surface de projection

De façon analogue au calcul des distances sur la surface de référence, nous pouvons écrire une relation générale pour la distance dS entre deux points, $\mathbf{X}(u, v)$ et $\mathbf{X}(u, v) + d\mathbf{X}(u, v)$, sur la surface de projection, avec :

$$dS = |d\mathbf{X}| \quad (5.73)$$

nous trouvons :

$$dS^2 = d\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u} \quad (5.74)$$

avec :

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} & p_{uv} \\ p_{uv} & p_{vv} \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

Calcul d'angles sur la surface de projection

De façon analogue au calcul des angles sur la surface de référence, nous pouvons écrire une relation générale pour obtenir l'angle ω , entre deux directions, $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$ sur la surface de projection, générées par les accroissements des paramètres $d\mathbf{u}_1$ et $d\mathbf{u}_2$:

$$\omega = \arccos \left(\frac{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}_2}{\sqrt{d\mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}_1} \cdot \sqrt{d\mathbf{u}_2^T \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}_2}} \right) \quad (5.76)$$

avec :

$$d\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} du_1 \\ dv_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

Calcul de gisements sur la surface de projection

Le gisement Gis, d'une direction $d\mathbf{X}$ n'est pas un cas particulier de l'équation 5.76. En effet, contrairement au calcul de l'azimut sur la surface de référence, le gisement entre le point $\mathbf{X}(u, v)$ et le point $\mathbf{X}(u, v) + d\mathbf{X}(u, v)$ est l'angle, sur la surface de projection, entre la

direction de l'axe de coordonnée Y et la direction $d\mathbf{X}(u, v)$. Il se calcule donc directement à partir des composantes de $d\mathbf{X}(u, v)$ par :

$$\text{Gis} = \arctan \left(\frac{dX(u, v)}{dY(u, v)} \right) \quad (5.78)$$

ce qui donné explicitement en fonction des accroissements donne :

$$\boxed{\text{Gis} = \arctan \left(\frac{\frac{\partial X}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot dv}{\frac{\partial Y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot dv} \right)} \quad (5.79)$$

et lorsque l'on veut réaliser des calculs numériques avec un traitement rigoureux des quadrants :

$$\text{Gis} = \text{atan2} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot dv, \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial Y}{\partial v} \cdot dv \right) \quad (5.80)$$

Calcul de la convergence du méridien

En un point donné (u, v) , la convergence du méridien $\mu(u, v)$ est définie comme étant l'opposé du gisement de la direction du méridien, défini par l'accroissement ($du = 0, dv$) :

$$\mu(u, v) = -\text{Gis}(u, v, du = 0, dv) \quad (5.81)$$

ceci afin de pouvoir convertir des gisements en azimuts⁴ facilement par :

$$\text{azi} = \text{Gis} + \mu \quad (5.82)$$

De l'équation 5.79, en considérant $du = 0$, nous avons :

$$\mu = -\arctan \left(\frac{\frac{\partial X}{\partial v}}{\frac{\partial Y}{\partial v}} \right) \quad (5.83)$$

Calcul de surfaces sur la surface de projection

Pour obtenir la surface dA du parallélogramme généré par les 2 vecteurs $d\mathbf{p}_u$ et $d\mathbf{p}_v$, de façon générale, nous savons que leur produit vectoriel est lié à dA par :

$$dA = |d\mathbf{p}_u \times d\mathbf{p}_v| \quad (5.84)$$

et de façon analogue au calcul de la surface sur la surface de référence, nous avons :

$$\boxed{dA = \sqrt{\det(\mathbf{P})} \cdot du \cdot dv} \quad (5.85)$$

4. Ceci ne fait sens que pour des projections conformes.

Tenseur métrique de la projection plate-carrée sphérique

La projection plate-carrée sphérique a comme surface de référence une sphère paramétrée avec les coordonnées sphériques (λ, ϕ) . Ceci défini :

$$\begin{aligned} u &= \lambda \\ v &= \phi \end{aligned} \tag{5.86}$$

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix}$$

et :

$$\mathbf{X}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} X(\lambda, \phi) \\ Y(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\lambda, \phi) \\ N(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \lambda \\ R \cdot \phi \end{pmatrix} \tag{5.87}$$

les vecteurs tangents sont donnés par :

$$\mathbf{p}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial N(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.88}$$

et :

$$\mathbf{p}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial N(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \tag{5.89}$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\boxed{\mathbf{P}_{\text{plate-carrée/sph}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\phi \\ \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}} \tag{5.90}$$

Tenseur métrique de la projection de Mercator sphérique

La projection de Mercator a comme surface de référence une sphère paramétrée avec les coordonnées sphériques (λ, ϕ) . Ceci défini :

$$\begin{aligned} u &= \lambda \\ v &= \phi \end{aligned} \tag{5.91}$$

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\phi \end{pmatrix}$$

et les formules de projection sont :

$$\mathbf{X}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} X(\lambda, \phi) \\ Y(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\lambda, \phi) \\ N(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \lambda \\ R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right] \end{pmatrix} \tag{5.92}$$

les vecteurs tangents sont donnés par :

$$\mathbf{p}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial N(\lambda, \phi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.93}$$

et :

$$\mathbf{p}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial N(\lambda, \phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R}{\cos \phi} \end{pmatrix} \quad (5.94)$$

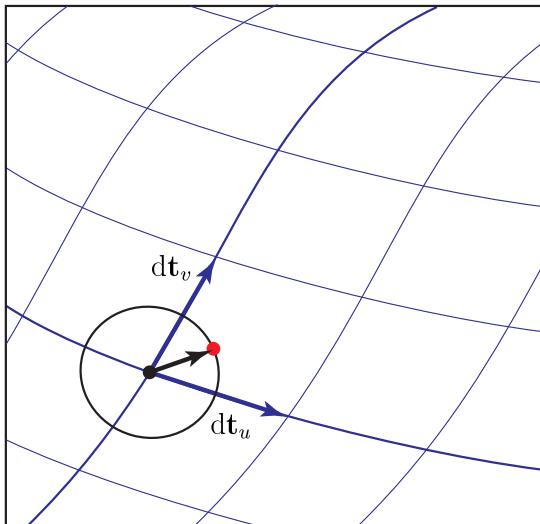
et le tenseur métrique est donné par :

$$\mathbf{P}_{\text{Mercator/sph}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\phi \\ \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^2 \phi} \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

5.3 Indicatrice de Tissot

A partir du tenseur métrique de la surface de référence \mathbf{T} et du tenseur métrique de la projection \mathbf{P} , il est possible de calculer les distortion de distances que subit un vecteur différentiel $d\mathbf{u}$ donné sur la surface de référence lors de son passage à travers les formules de projection.

Cercle sur la surface de référence



Ellipse sur la surface de projection

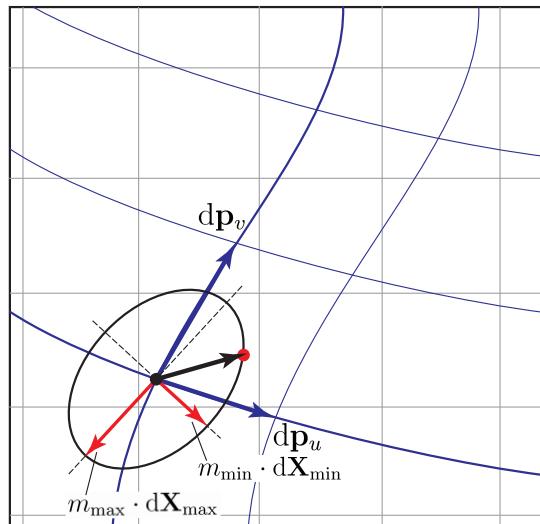


Figure 5.8 – Indicatrice de Tissot.

En reprenant les relations générales par le calcul des distances sur la surface de référence ds (équation 5.74) et sur la surface de projection dS (équation 5.74) nous pouvons écrire que la variation d'échelle du vecteur $d\mathbf{u}$ peut s'écrire de façon générale par :

$$m(d\mathbf{u}) = \frac{dS}{ds} = \frac{\sqrt{d\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}^T}}{\sqrt{d\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u}^T}} \quad (5.96)$$

A partir de cette relation, nous pouvons déterminer la variation d'échelle que subissent deux points séparés de $d\mathbf{u}$ dans n'importe quelle direction. Bien que cela soit très utile, il serait encore plus pertinent de trouver les directions pour lesquelles ces variations d'échelles sont minimales et maximales, et bien entendu, la valeur de ces variations minimale et maximale. La recherche des directions $d\mathbf{u}_{\min}$ et $d\mathbf{u}_{\max}$ qui sont associées aux facteurs

d'échelles minimal m_{\min} et maximal m_{\max} , peut être faite en cherchant les directions pour lesquelles la dérivée de la fonction $m(d\mathbf{u})$ s'annule :

$$\frac{dm(d\mathbf{u})}{d\mathbf{u}} = 0 \quad (5.97)$$

Il est possible de démontrer que la solution peut se trouver par les valeurs et vecteurs propres de la matrice de distorsion suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{P} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.98)$$

La matrice \mathbf{D} peut être décomposée en valeurs et vecteurs propres de la façon suivante (formules en annexe A.4.1) :

$$\mathbf{D} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^{-1} \quad (5.99)$$

avec :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1u} & v_{2u} \\ v_{1v} & v_{2v} \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

Les quantités recherchées ($m_{\min}, d\mathbf{u}_{\min}$) et ($m_{\max}, d\mathbf{u}_{\max}$). Si $\lambda_1 < \lambda_2$ sont données par :

$$\begin{aligned} m_{\max} &= \sqrt{\lambda_1} & d\mathbf{u}_{\max} &= \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1u} \\ v_{1v} \end{pmatrix} \\ m_{\min} &= \sqrt{\lambda_2} & d\mathbf{u}_{\min} &= \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2u} \\ v_{2v} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.101)$$

5.3.1 Indicatrices de Tissot de la projection plate-carrée sphérique

Calculons les indicatrices de Tissot de la projection plate-carrée sphérique. Nous avons les tenseurs métriques de la surface de référence \mathbf{T}_{sph} et de la projection $\mathbf{P}_{\text{plate-carrée/sph}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{sph}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\phi \\ \mathbf{t}_\phi \cdot \mathbf{t}_\lambda & \mathbf{t}_\phi \cdot \mathbf{t}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cdot \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{\text{plate-carrée/sph}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\lambda \cdot \mathbf{p}_\phi \\ \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\lambda & \mathbf{p}_\phi \cdot \mathbf{p}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.102)$$

Nous pouvons calculer le tenseur de déformation \mathbf{D} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{T}_{\text{sph}}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{\text{plate-carrée/sph}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2 \cdot \cos^2 \phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{R^2}{R^2 \cdot \cos^2 \phi} & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{R^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.103)$$

Et à partir du tenseur de déformation \mathbf{D} , nous pouvons calculer les axes de déformation minimal et maximal en calculant les valeurs et vecteurs propres selon les formules données dans l'annexe A.4 :

$$\begin{aligned} T &= \text{trace} \{ \mathbf{D} \} = \frac{1}{\cos^2 \phi} + 1 \\ D &= \det \{ \mathbf{D} \} = \frac{1}{\cos^2 \phi} \end{aligned} \quad (5.104)$$

nous avons les valeurs propres* :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{T^2}{4} - D} = \frac{1}{\cos^2 \phi} \\ \lambda_2 &= \frac{T}{2} - \sqrt{\frac{T^2}{4} - D} = 1 \end{aligned} \quad (5.105)$$

et les vecteurs propres :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

et les facteurs d'échelle maximal et minimal s'obtiennent des valeurs propres :

$$\begin{aligned} m_{\max} &= \sqrt{\lambda_1} = \frac{1}{\cos \phi} \\ m_{\min} &= \sqrt{\lambda_2} = 1 \end{aligned} \quad (5.107)$$

et leurs directions respectives s'obtiennent par leur vecteur propre correspondant :

$$\begin{aligned} d\mathbf{u}_{\max} &= \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \cdot d\lambda \\ 0 \cdot d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\ d\mathbf{u}_{\min} &= \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \cdot d\lambda \\ 1 \cdot d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d\phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.108)$$

Nous voyons bien que, pour toutes les positions sur Terre, la déformation maximale m_{\max} est dans la direction du parallèle du lieu $d\mathbf{u}_{\max}$. Tandis que la déformation minimale m_{\min} est dans le méridien du lieu $d\mathbf{u}_{\min}$.

*Le terme :

$$\sqrt{\frac{T^2}{4} - D} \quad (5.109)$$

peut se calculer facilement dans ce cas de figure. En effet, si l'on considère le changement de variable suivant :

$$a = \frac{1}{\cos^2 \phi} \quad (5.110)$$

alors :

$$T = a + 1 \quad \text{et} \quad D = a \quad (5.111)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{T^2}{4} - D} &= \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4} - a} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2 + 2a + 1 - 4a}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{a^2 - 2a + 1}{4}} \\
 &= \sqrt{\frac{(a-1)^2}{4}} \\
 &= \frac{(a-1)}{2} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 \phi} - 1\right)}{2}
 \end{aligned} \tag{5.112}$$

5.3.2 Conformité d'une projection

Une projection est dite conforme si la différence entre α , l'angle mesuré entre deux directions $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ sur la surface de référence, et l'angle ω entre ces mêmes vecteurs sur la surface de projection $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$, est nulle. Et ceci doit être valable pour tous les vecteurs $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$ et pour tous les points $\mathbf{x}(u, v)$ de la surface de référence :

$$\alpha = \omega \quad \forall u, v, d\mathbf{u}_1, d\mathbf{u}_2 \iff \text{projection conforme} \tag{5.113}$$

De façon équivalente, il est possible de démontrer que la condition de conformité peut se formuler à partir du demi-grand axe m_{\max} et du demi-petit axe m_{\min} de l'indicatrice de Tissot. Un projection est dite conforme si les indicatrices de Tissot sont des cercles pour tous les points. Mathématiquement cela se formule par :

$$m_{\max} = m_{\min} \quad \forall u, v \iff \text{projection conforme} \tag{5.114}$$

Il est absolument indispensable de comprendre que les angles sont conservés pour des directions engendrées par des vecteurs infinitésimaux. C'est à dire de très petits vecteurs devant le rayon de courbure. En d'autres termes, nous pouvons aussi dire que seuls de petits triangles sur la surface de référence ont la « même forme » sur la surface de projection. En effet, dans le cas contraire nous serions confrontés à des incohérences farouches.

Prenons le cas d'une surface de référence sphérique et une surface de projection plane. Nous savons que la somme des angles d'un triangle sphérique (lorsque que les côtés sont des arcs de grands cercles) est plus grande que 180° . Il est donc par définition impossible que ce même triangle, sur la surface de projection, soit conforme. En effet, nous savons que la somme des angles d'un triangle dans un plan vaut exactement 180° . Comment résoudre ce paradoxe ? Et bien ce paradoxe se résout de différentes façons :

1. Voyons ce qu'il se passe pour un triangle infiniment petit. Nous savons que la valeur de son excès sphérique (la somme des angles d'un triangle moins 180°) est proportionnel à surface du triangle sphérique $F_{\text{sphère}}$:

$$\alpha [\text{rad}] + \beta [\text{rad}] + \gamma [\text{rad}] - \pi [\text{rad}] = \frac{F_{\text{sphère}} [\text{m}^2]}{R^2 [\text{m}^2]} \tag{5.115}$$

Dès lors, lorsque nous faisons tendre la surface d'un triangle sphérique vers 0, c'est-à-dire lorsque que le triangle devient infinitésimalement petit, la somme des angles du triangle se rapproche de 180° . Nous voyons donc que les angles ne se conservent que pour des éléments infinitésimaux.

2. Une autre façon de résoudre le paradoxe pour des triangles arbitrairement grands est de regarder comment les arcs de grands cercles sur la sphère sont projetés sur la surface de projection. En faisant ceci, il est facile de remarquer que les arcs de grands cercles ne sont pas des droites sur la surface de projection et donc ne définissent pas un triangle. Autrement dit, seul les sommets du triangle sphérique correspondent aux sommets du triangle dans le plan, mais ceci n'est pas valable pour les arrêtes.

5.3.3 Équivalence d'une projection

Une projection est dite équivalente si la différence entre la surface da sur la surface de référence, engendrée par deux vecteurs $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$, et cette même surface sur la surface de projection dA , engendrée par les vecteurs $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$, est nulle.

$$da = dA \quad \forall u, v, d\mathbf{u}_1, d\mathbf{u}_2 \iff \text{projection équivalente} \quad (5.116)$$

De façon équivalente, il est possible de démontrer que la condition d'équivalence peut se formuler à partir du demi-grand axe m_{\max} et du demi-petit axe m_{\min} de l'indicatrice de Tissot. Une projection est dite équivalente si la surface des indicatrices de Tissot est égale à 1.0 pour tous les points. Mathématiquement cela se formule par :

$$m_{\max} \cdot m_{\min} = 1 \quad \forall u, v \iff \text{projection équivalente} \quad (5.117)$$

5.4 Classes de projections

Parmi toutes les projections cartographiques envisageables, plusieurs classes de projection sont souvent identifiées. Les projections cylindriques, coniques et azimutales. Ces classes de projections correspondent à des surfaces de courbure intrinsèque nulle, donc géométriquement développables sans déformation selon un plan. Néanmoins, contrairement à une idée reçue, les différentes projections ne sont pas réalisées selon des constructions issues de la géométrie Euclidienne depuis la surface de référence (comme la sphère) sur la surface développable (comme le cylindre ou le cône). Les projections sont des applications mathématiquement plus complexes dont leur classe respective n'a qu'un lien indirect avec leur surface. En fait, les classes sont associées à la forme mathématique que prennent les formules des projections.

5.4.1 Projections cylindriques

Les projections cylindriques sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= R \cdot \lambda \\ N(\lambda, \phi) &= R \cdot f(\phi) \end{aligned} \quad (5.118)$$

Elles ont la particularité d'avoir les méridiens et les parallèles qui sont projetés selon des lignes droites perpendiculaires.

Exemple

Voici un exemple simple de projection cylindrique, représenté dans la Figure 5.9 :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= R \cdot \lambda \\ N(\lambda, \phi) &= R \cdot \sin \phi \end{aligned} \quad (5.119)$$

5.4.2 Projections coniques

Les projections coniques sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \cos [\alpha(\lambda, \phi)] \\ N(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \sin [\alpha(\lambda, \phi)] \end{aligned} \quad (5.120)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda, \phi) &= R \cdot f(\phi) \\ \alpha(\lambda, \phi) &= \sin \phi_0 \cdot \lambda + \text{cst} \end{aligned} \quad (5.121)$$

Elles ont la particularité d'avoir les méridiens qui sont projetés selon des lignes droites et les parallèles qui sont projetés selon des arcs de cercles.

Exemple

Voici un exemple simple de projection conique, représenté dans la Figure 5.10 :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \cos [\alpha(\lambda, \phi)] \\ N(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \sin [\alpha(\lambda, \phi)] \end{aligned} \quad (5.122)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda, \phi) &= R \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \\ \alpha(\lambda, \phi) &= \lambda \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.123)$$

5.4.3 Projections azimutales

Les projections azimutales sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \cos [\alpha(\lambda, \phi)] \\ N(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \sin [\alpha(\lambda, \phi)] \end{aligned} \quad (5.124)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda, \phi) &= R \cdot f(\phi) \\ \alpha(\lambda, \phi) &= \lambda + \text{cst} \end{aligned} \quad (5.125)$$

Nous voyons que les projections azimutales sont des cas particuliers des projections coniques. Elles ont la particularité d'avoir les méridiens et les parallèles qui sont projetés selon des lignes droites et les parallèles qui sont projetés selon des cercles.

Exemple

Voici un exemple simple de projection azimutale, représentée dans la Figure 5.11 :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \cos [\alpha(\lambda, \phi)] \\ N(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \sin [\alpha(\lambda, \phi)] \end{aligned} \quad (5.126)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda, \phi) &= R \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \\ \alpha(\lambda, \phi) &= \lambda - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.127)$$

5.4.4 Projections quelconques

Il est évident que toutes les projections ne peuvent pas être classées parmi les projections cylindriques, coniques et azimutales. Il existe d'autres classes de projections importantes, comme les projections stéréographiques, orthographiques, etc. Voici une projection dont l'intérêt est principalement artistique (Figure 5.12) :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \cos [\alpha(\lambda, \phi)] \\ N(\lambda, \phi) &= \rho(\lambda, \phi) \cdot \sin [\alpha(\lambda, \phi)] \end{aligned} \quad (5.128)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda, \phi) &= R \cdot \left(\phi_0 - \phi + \frac{1}{\tan \phi_0} \right) \\ \alpha(\lambda, \phi) &= \frac{\cos \phi}{\phi_0 - \phi + \frac{1}{\tan \phi_0}} \cdot \lambda - \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \phi_0 = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \end{aligned} \quad (5.129)$$

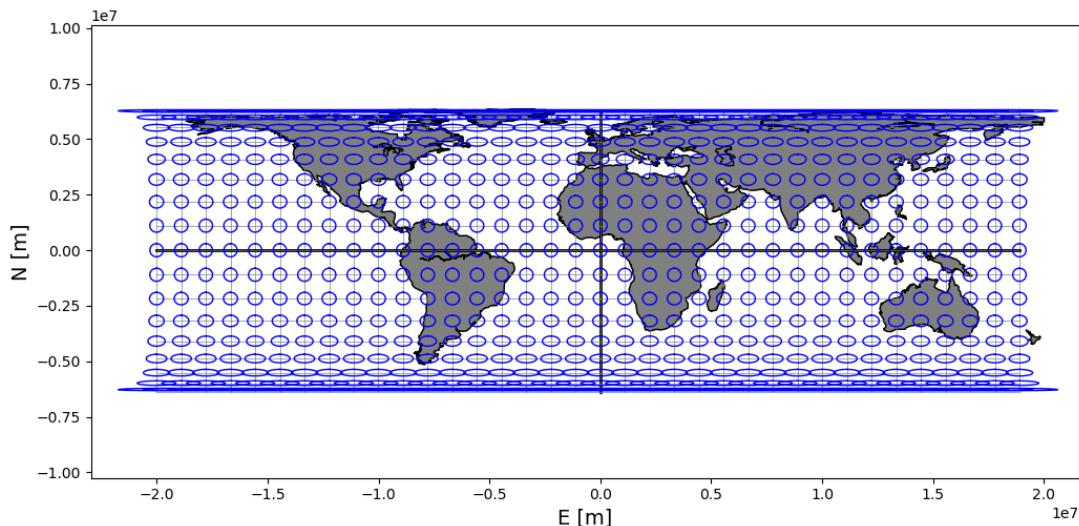


Figure 5.9 – Projection cylindrique définie par les équations 5.119.

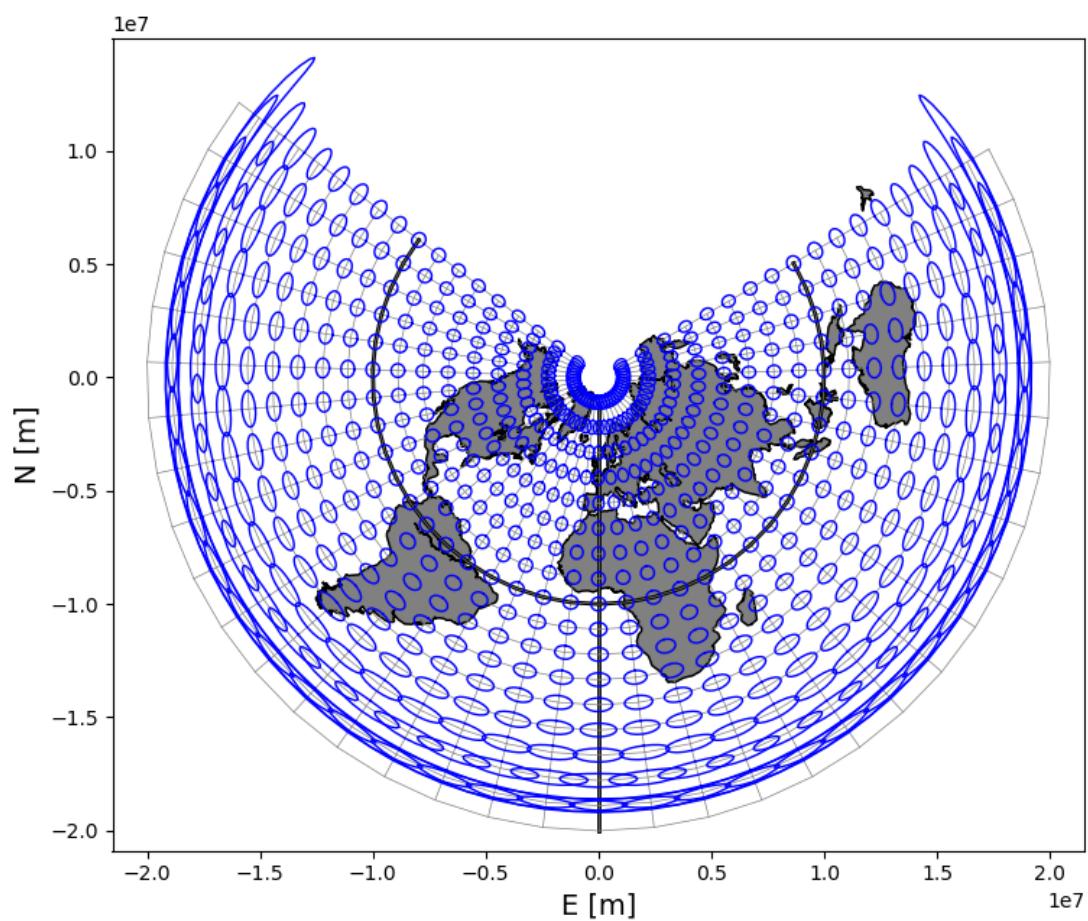


Figure 5.10 – Projection conique définie par les équations 5.122.

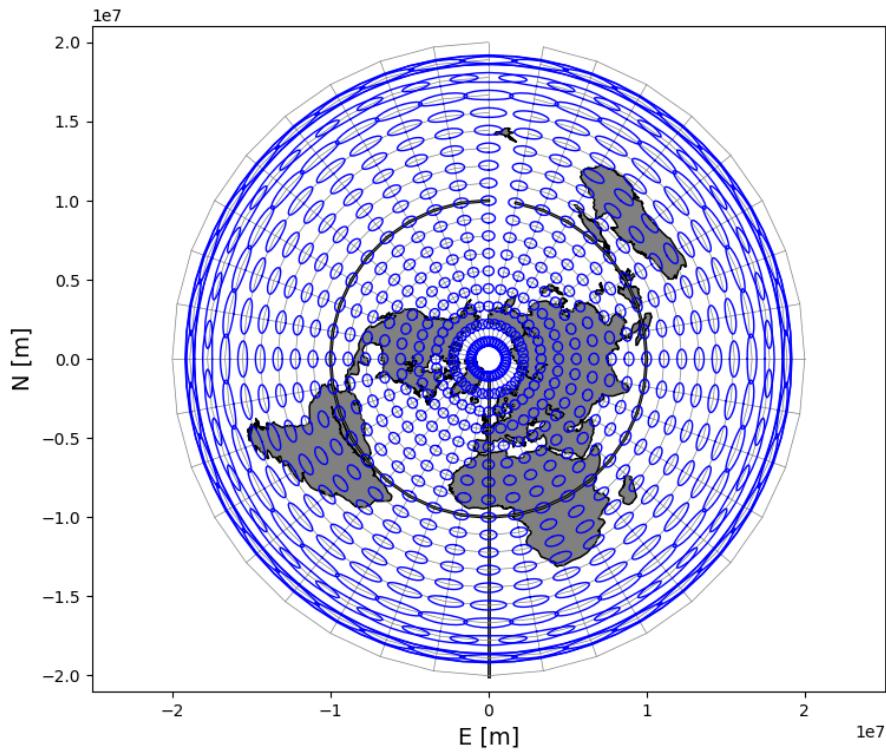


Figure 5.11 – Projection azimutale définie par les équations 5.126.

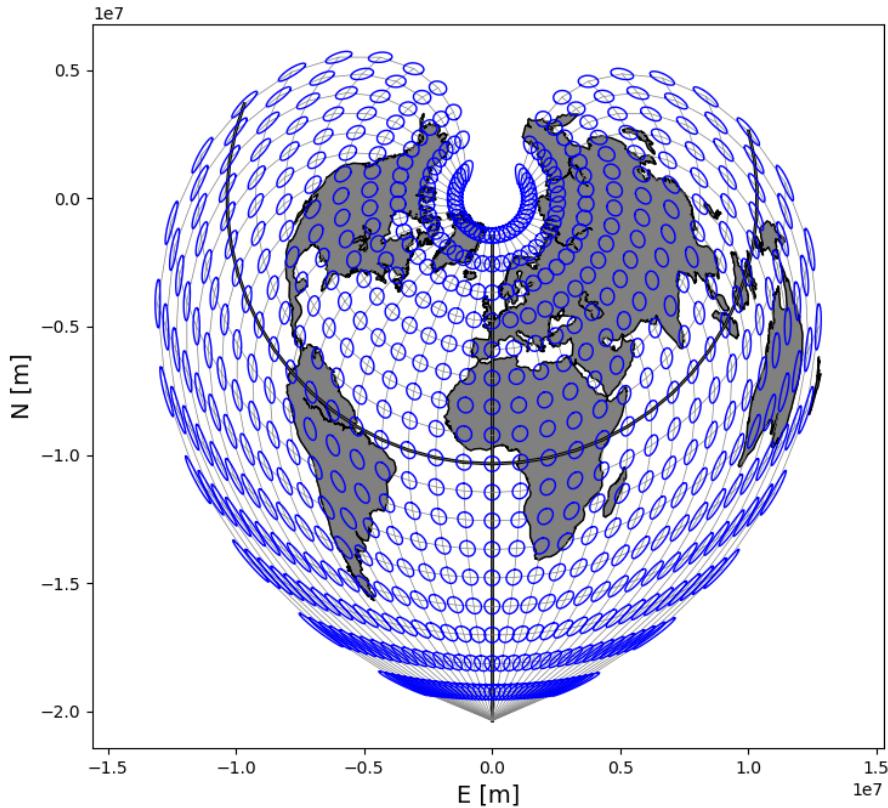


Figure 5.12 – Projection quasi-conique définie par les équations 5.128.

5.5 Projection de Mercator sphérique normale

La projection de Mercator normale⁵, due à Gerardus Mercator en 1569, est une projection cylindrique conforme. La surface de référence est la sphère paramétrée par la longitude

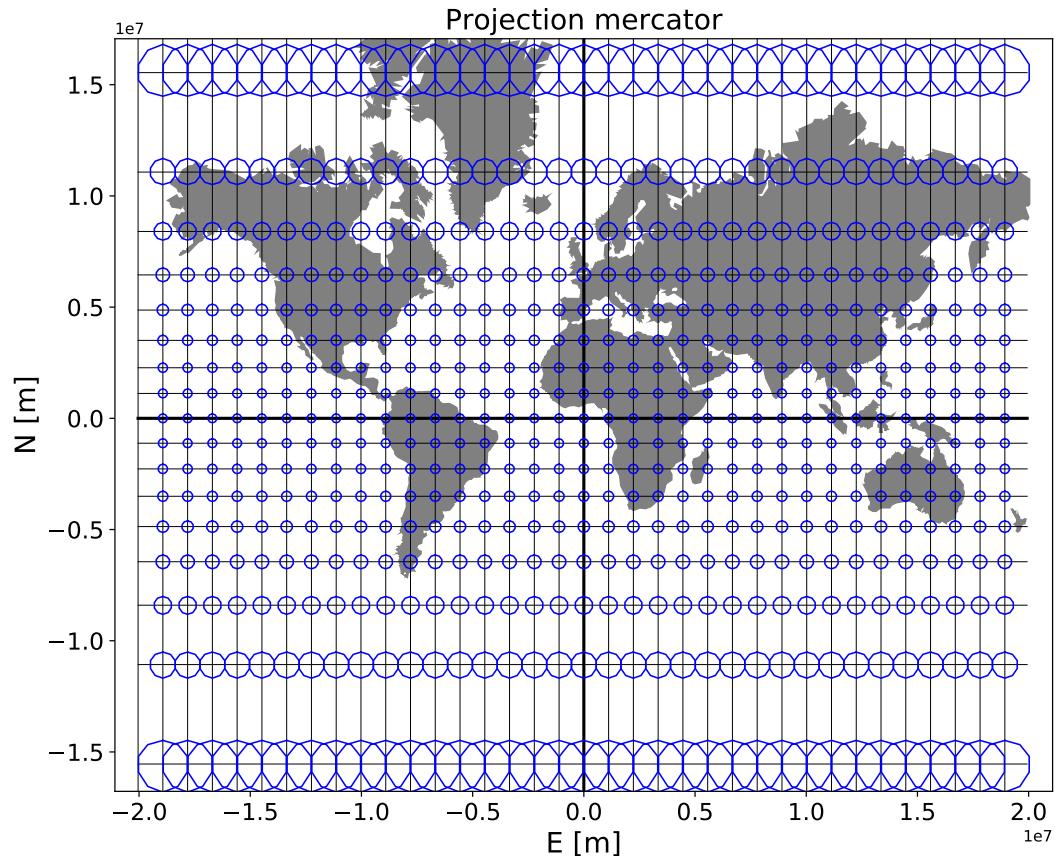


Figure 5.13 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot.

et la latitude sphériques :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \phi \end{pmatrix} \quad (5.130)$$

dont le tenseur métrique vaut :

$$\mathbf{T}_{\text{sph}} = \begin{pmatrix} R^2 \cdot \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad (5.131)$$

5. par opposition aux projections oblique et transverse.

5.5.1 Coordonnées sphériques $(\lambda, \phi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)

Les formules de projection sont données par :

$$\mathbf{X}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} E(\lambda, \phi) \\ N(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \lambda \\ R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (5.132)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\mathbf{P}_{\text{Mercator/sph}} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{\cos^2 \phi} \end{pmatrix} \quad (5.133)$$

la matrice de déformation est donnée par :

$$\mathbf{D}_{\text{Mercator/sph}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 \phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 \phi} \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

l'indicatrice de Tissot est donnée par :

$$m_{\max} = m_{\min} = \frac{1}{\cos \phi} \quad \text{avec} \quad d\mathbf{u}_{\max} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.135)$$

la convergence du méridien est nulle en tous points :

$$\mu(\lambda, \phi) = 0 \quad (5.136)$$

5.5.2 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées sphériques (λ, ϕ)

Les formules de projection inverse sont données par :

$$\mathbf{u}(E, N) = \begin{pmatrix} \lambda(E, N) \\ \phi(E, N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{R} \\ 2 \cdot \arctan \left(e^{\frac{N}{R}} \right) - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad (5.137)$$

5.5.3 Loxodromie

La projection de Mercator sphérique normale a une propriété très intéressante. De part le fait que la convergence du méridien est nulle en tous points, les droites sur la surface de projection sont des trajectoires à azimut (cap) constant, appelées *loxodromies*⁶. Cela fait de cette projection un outil très utile pour la navigation. En effet, il est facile d'atteindre n'importe quel point du globe en suivant la loxodromie reliant le point de départ et le point de destination. Suivre la loxodromie consiste simplement à garder le cap donné par le gisement mesuré sur la carte de Mercator.

Le calcul d'une loxodromie entre deux points donnés en coordonnées de Mercator est trivial, ce sont simplement les points du segment droit entre les deux points. Le calcul des coordonnées sphériques (λ, ϕ) de n'importe quel point de la loxodromie connu en coordonnées de Mercator se fait facilement en utilisant la formule de projection inverse donnée par l'équation 5.187.

6. du grec lox(o)- et -drome course, oblique.

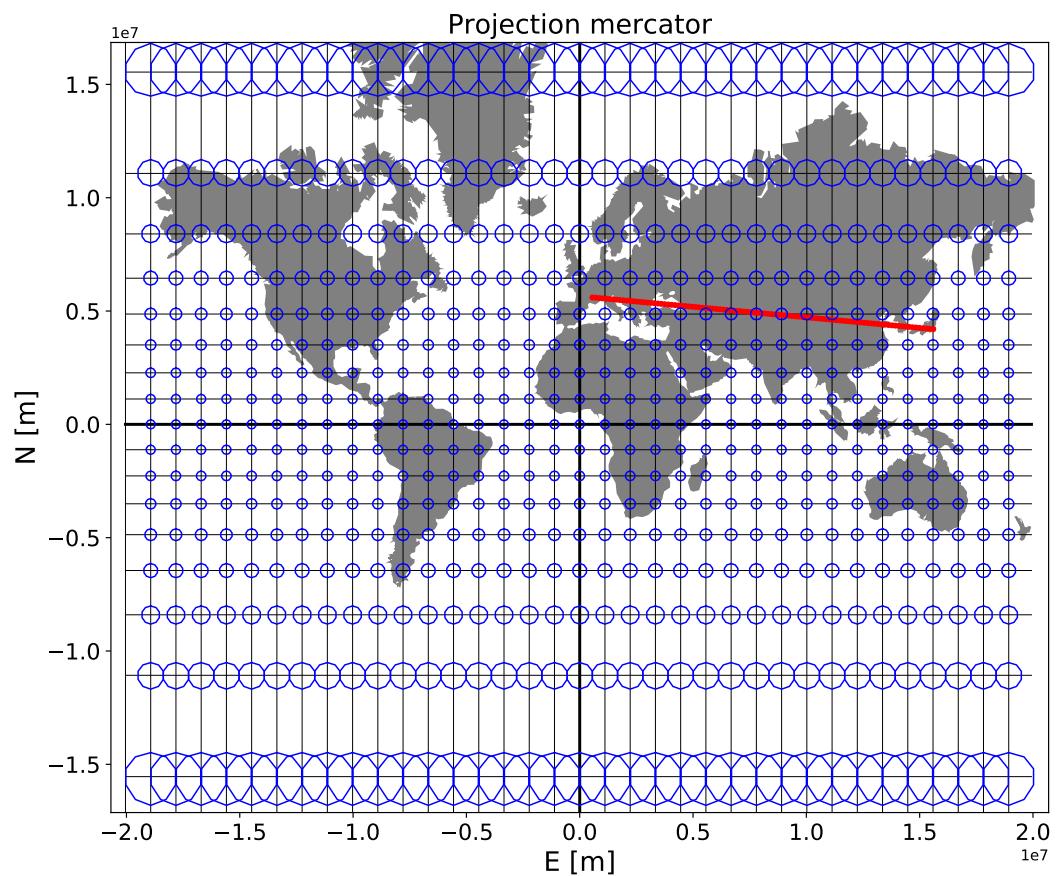


Figure 5.14 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot ainsi qu'une loxodromie entre Genève et Tokyo.

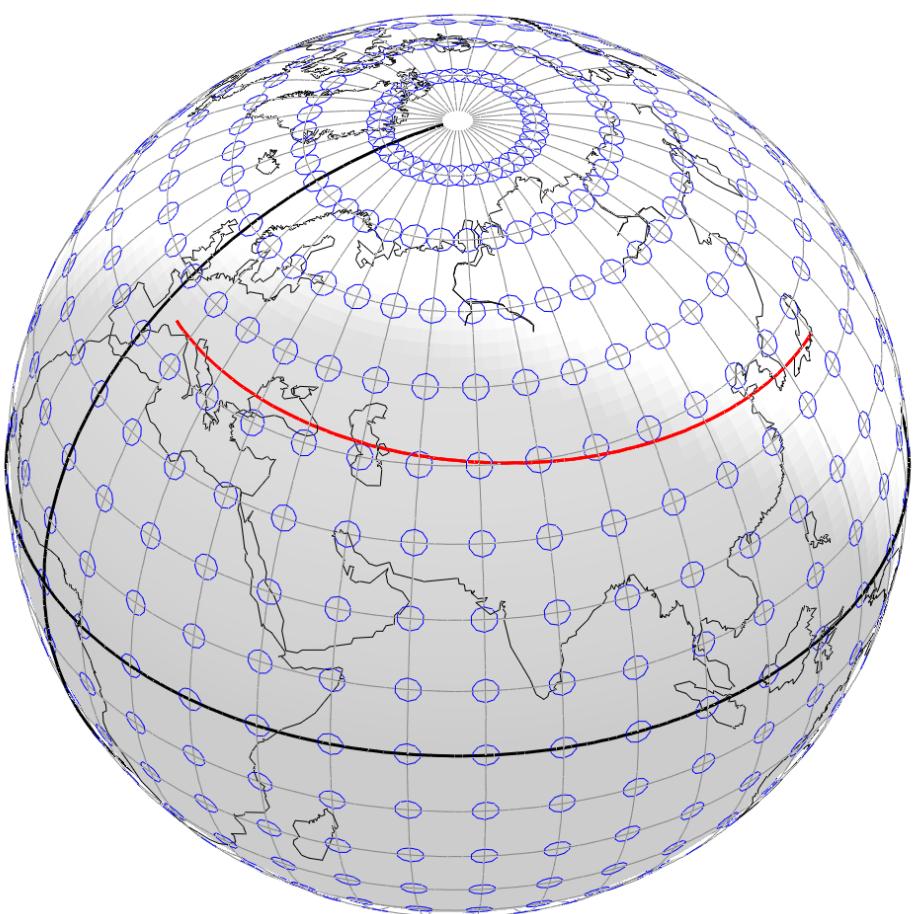


Figure 5.15 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot ainsi qu'une loxodromie entre Genève et Tokyo.

5.5.4 Orthodromie

L'orthodromie⁷ est la courbe de distance minimale entre deux points donnés sur un sphère. Elle n'a fondamentalement rien à voir avec la projection de Mercator mais sa comparaison avec la loxodromie est néanmoins très riche d'enseignement. Il est possible de prouver que l'orthodromie entre deux points sur la sphère est l'arc de grand cercle passant par ces deux points. Le calcul de points sur l'orthodromie peut se faire à l'aide des outils issus de la trigonométrie sphérique. Sans démonstration, entre deux points de la sphère (λ_A, ϕ_A) et (λ_B, ϕ_B) , nous pouvons calculer l'azimut au point de départ Azi_{AB} ainsi que la distance totale de l'orthodromie s_{AB} par :

$$\begin{aligned} s_{AB} &= r \cdot \arccos [\sin \phi_A \cdot \sin \phi_B + \cos \phi_A \cdot \cos \phi_B \cdot \cos (\lambda_A - \lambda_B)] \\ Azi_{AB} &= \arcsin \left[\frac{\cos \phi_B \cdot \sin (\lambda_B - \lambda_A)}{\sin \left(\frac{s_{AB}}{r} \right)} \right] \end{aligned} \quad (5.138)$$

et donc un point P sur l'orthodromie entre A et B à une distance s_{AP} peut être calculé par point lancé sur la sphère à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_P &= \arcsin \left[\sin \phi_A \cdot \cos \left(\frac{s_{AP}}{r} \right) + \cos \phi_A \cdot \sin \left(\frac{s_{AP}}{r} \right) \cdot \cos Azi_{AB} \right] \\ \lambda_P &= \lambda_A + \arcsin \left[\frac{\sin Azi_{AB}}{\cos \phi_B} \cdot \sin \left(\frac{s_{AP}}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.139)$$

Une autre façon de calculer n'importe quel point P sur l'orthodromie entre A et B consiste à calculer P dans le plan du grand cercle passant par A et B et le centre de la sphère, puis de calculer la matrice de rotation qui permet de transformer les composantes de n'importe quel point du plan dans le système initial. Pour faire cela, définissons deux systèmes cartésiens. Le premier système, $(\mathbf{o}^I, \mathbf{e}_x^I, \mathbf{e}_y^I, \mathbf{e}_z^I)$ est rattaché à la sphère de référence dans lequel nous définissons les composantes des vecteurs de base avec :

$$\mathbf{o}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.140)$$

Nous avons les vecteurs \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B qui ont comme composantes dans le système I :

$$\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} x_A^I \\ y_A^I \\ z_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \phi_A \cdot \cos \lambda_A \\ r \cdot \cos \phi_A \cdot \sin \lambda_A \\ r \cdot \sin \phi_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_B^I \\ y_B^I \\ z_B^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \phi_B \cdot \cos \lambda_B \\ r \cdot \cos \phi_B \cdot \sin \lambda_B \\ r \cdot \sin \phi_B \end{pmatrix} \quad (5.141)$$

Le deuxième système, $(\mathbf{o}^{II}, \mathbf{e}_x^{II}, \mathbf{e}_y^{II}, \mathbf{e}_z^{II})$ et rattaché au plan du grand cercle passant par \mathbf{x}_A , \mathbf{x}_B et \mathbf{o}^I . Sur cette base, nous définissons :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}^{II} &= \mathbf{o}^I \\ \mathbf{e}_x^{II} &= \frac{\mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}_A|} \\ \mathbf{e}_z^{II} &= \frac{\mathbf{e}_x^{II} \times \mathbf{x}_B}{|\mathbf{e}_x^{II} \times \mathbf{x}_B|} \\ \mathbf{e}_y^{II} &= \frac{\mathbf{e}_z^{II} \times \mathbf{e}_x^{II}}{|\mathbf{e}_z^{II} \times \mathbf{e}_x^{II}|} \end{aligned} \quad (5.142)$$

7. du grec ortho- et -drome course, droite.

Dans le système II, les vecteurs \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B ont pour composantes :

$$\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} x_A^{II} \\ y_A^{II} \\ z_A^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_B^{II} \\ y_B^{II} \\ z_B^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \alpha \\ r \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.143)$$

avec :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_A| \cdot |\mathbf{x}_B|} \right) \quad (5.144)$$

et un point \mathbf{x}_P à une distance s_{AP} à pour composantes dans le système II :

$$\mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} x_P^{II} \\ y_P^{II} \\ z_P^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \left(\frac{s_{AP}}{r} \right) \\ r \cdot \sin \left(\frac{s_{AP}}{r} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.145)$$

Finalement, nous pouvons trouver les composantes de \mathbf{x}_P par une transformation entre le système I et II selon l'équation 2.10 :

$$\begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^I)^T \cdot (\mathbf{o}^{II} - \mathbf{o}^I) + (\mathbf{T}^I)^T \cdot \mathbf{T}^{II} \cdot \begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} \quad (5.146)$$

qui dans notre cas de figure précis se simplifie, et finalement devient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^I \\ y^I \\ z^I \end{pmatrix} &= \mathbf{T}^{II} \cdot \begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{e}_x^{II} \quad \mathbf{e}_y^{II} \quad \mathbf{e}_z^{II}) \cdot \begin{pmatrix} x^{II} \\ y^{II} \\ z^{II} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.147)$$

Exemple

Nous voulons calculer les coordonnées sphériques du point P, à une distance $s_{AP} = 1000$ km de A, situé sur l'orthodromie entre à A et B. Avec :

$$\begin{pmatrix} \lambda_A \\ \phi_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.1^\circ \\ 46.2^\circ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda_B \\ \phi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139.8^\circ \\ 35.7^\circ \end{pmatrix} \quad (5.148)$$

En fixant le rayon de la sphère à $R = 6'380'000$ m, nous pouvons calculer les coordonnées cartésiennes dans le système I des vecteurs \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B :

$$\begin{pmatrix} x_A^I \\ y_A^I \\ z_A^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4'390'870.527 \\ +469'248.691 \\ +4'604'830.255 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x_B^I \\ y_B^I \\ z_B^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3'957'298.182 \\ +3'344'176.244 \\ +3'722'992.928 \end{pmatrix} \quad (5.149)$$

De ces vecteurs nous pouvons calculer les vecteurs de base du système II avec les composantes dans le système I :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}_A|} = \begin{pmatrix} +0.68822422 \\ +0.07354995 \\ +0.72176023 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_z^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{e}_x^{\text{II}} \times \mathbf{x}_B}{|\mathbf{e}_x^{\text{II}} \times \mathbf{x}_B|} = \begin{pmatrix} -0.33558351 \\ -0.84974918 \\ +0.40658337 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_y^{\text{II}} &= \frac{\mathbf{e}_z^{\text{II}} \times \mathbf{e}_x^{\text{II}}}{|\mathbf{e}_z^{\text{II}} \times \mathbf{e}_x^{\text{II}}|} = \begin{pmatrix} -0.64321935 \\ +0.52203135 \\ +0.56013582 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.150)$$

et donc former la matrice de transformation \mathbf{T}^{II} :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{\text{II}} &= (\mathbf{e}_x^{\text{II}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{II}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{II}}) \\ &= \begin{pmatrix} +0.68822422 & -0.64321935 & -0.33558351 \\ +0.07354995 & +0.52203135 & -0.84974918 \\ +0.72176023 & +0.56013582 & +0.40658337 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.151)$$

Nous pouvons calculer les coordonnées de \mathbf{x}_P dans le système II avec :

$$\mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} x_P^{\text{II}} \\ y_P^{\text{II}} \\ z_P^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\left(\frac{s_{AP}}{r}\right) \\ r \cdot \sin\left(\frac{s_{AP}}{r}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 995'317.117 \\ 96'663.521 \\ 0.000 \end{pmatrix}\quad (5.152)$$

Les coordonnées de \mathbf{x}_P dans le système I se calculent avec la matrice de transformation \mathbf{T}^{II} :

$$\begin{pmatrix} x_P^{\text{I}} \\ y_P^{\text{I}} \\ z_P^{\text{I}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{\text{II}} \cdot \begin{pmatrix} x_P^{\text{II}} \\ y_P^{\text{II}} \\ z_P^{\text{II}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +622'825.499 \\ +123'666.914 \\ +772'525.010 \end{pmatrix}\quad (5.153)$$

qui correspondent aux coordonnées sphériques :

$$\begin{pmatrix} \lambda_P \\ \phi_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.23^\circ \\ 50.58^\circ \end{pmatrix}\quad (5.154)$$

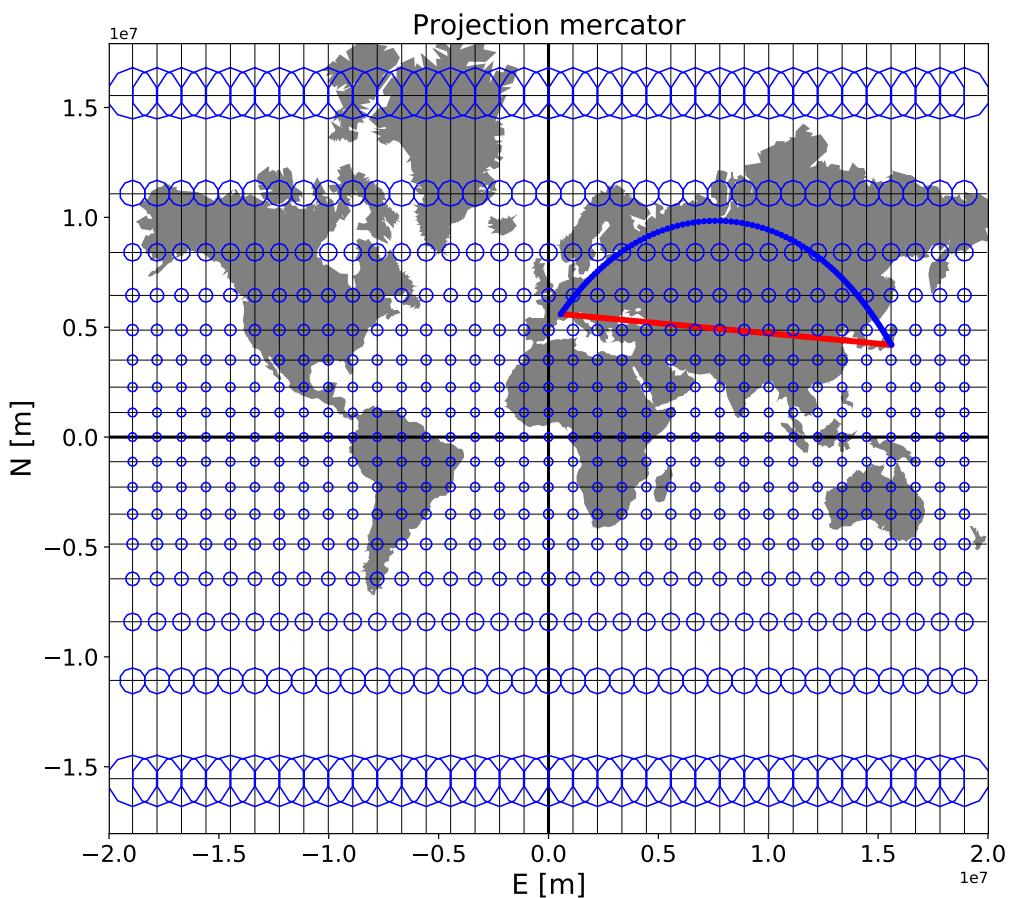


Figure 5.16 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot ainsi qu'une loxo-dromie (rouge) et une orthodromie (bleu) entre Genève et Tokyo.

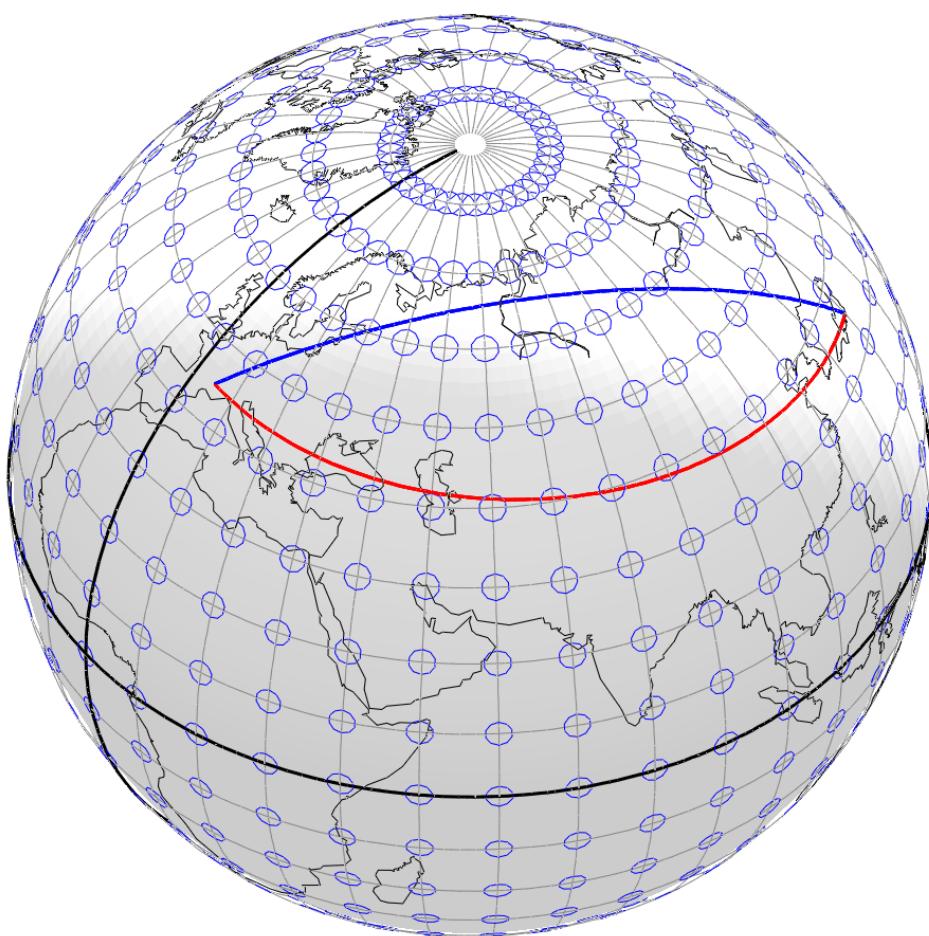


Figure 5.17 – Projection de Mercator normale avec les indicatrices de Tissot ainsi qu'une loxodromie (rouge) et une orthodromie (bleu) entre Genève et Tokyo.

5.6 Projections obliques

Les projections normales sont souvent très intéressantes proche de l'équateur. En effet, comme nous pouvons le voir pour la projection de Mercator normale, la déformation des distances est nulle à l'équateur puis augmente selon la latitude. Dans ce cas, nous disons que le centre de projection est situé à l'intersection du méridien de Greenwich et de l'équateur ($\lambda_0 = 0, \phi_0 = 0$). De façon équivalente, et de façon un peu abusive, nous disons aussi que l'axe principal du cylindre est perpendiculaire et tangent à l'équateur. En pratique, lorsque l'on veut utiliser une projection avec des propriétés particulières (comme la conformité) mais qui limite les déformations au voisinage d'un point différent de ($\lambda_0 = 0, \phi_0 = 0$), au centre d'un pays par exemple, il est nécessaire de pouvoir déplacer le centre de projection (λ_0, ϕ_0) en conservant ses propriétés initiales.

Le déplacement du centre de projection (λ_0, ϕ_0) peut se faire de façon élégante en appliquant des rotations tridimensionnelles aux coordonnées cartésiennes des points sur la surface de référence. De façon générale, nous définissons toujours une surface de référence paramétrisée par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (5.155)$$

et dont les coordonnées cartésiennes tridimensionnelles sont données par :

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.156)$$

en appliquant les formules de projection standards (Mercator normale,...), le centre de projection est implicitement fixé sur le point :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.157)$$

Afin de déplacer le centre de projection, nous pouvons tout d'abord calculer les coordonnées cartésiennes tridimensionnelles sur la surface de référence avec l'équation 5.156, puis appliquer les rotations suivantes :

1. une rotation autour de \mathbf{e}_z d'un angle u_0 .
2. puis une rotation autour de \mathbf{e}_y d'un angle $-v_0$.

Mathématiquement cela revient à calculer de nouvelles coordonnées cartésiennes transformées :

$$\begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} = \mathbf{R}_y(-v_0) \cdot \mathbf{R}_z(u_0) \cdot \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (5.158)$$

Ces dernières peuvent ensuite être reconvertis en paramètres (u^t, v^t) avec les formules de conversion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Par exemple avec les formules 3.2 pour la sphère, et les formules 4.43 pour l'ellipsoïde de révolution. Autrement dit nous pouvons calculer :

$$\begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u^t \\ v^t \end{pmatrix} \quad (5.159)$$

Finalement, les formules de projection standards peuvent être appliquées sur les nouveaux paramètres :

$$\mathbf{X}(u^t, v^t) \quad (5.160)$$

5.7 Projection de Mercator sphérique oblique

La projection de Mercator sphérique oblique s'appuie sur les formules délivrées en section 5.5. Nous avons donc :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \phi \end{pmatrix} \quad (5.161)$$

les coordonnées cartésiennes tridimensionnelles se calculent par :

$$\mathbf{x}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.162)$$

En fixant les coordonnées sphériques du centre de projection (λ_0, ϕ_0) nous pouvons trouver les coordonnées cartésiennes transformées :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_y(-\phi_0) \cdot \mathbf{R}_z(\lambda_0) \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi_0 & 0 & \sin \phi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_0 & 0 & \cos \phi_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 & 0 \\ -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.163)$$

qui nous permettent de calculer les nouveaux paramètres transformés :

$$\begin{aligned} \lambda^t &= \text{atan2}(y^t, x^t) \\ \phi^t &= \text{atan2}(z^t, \sqrt{x^{t2} + y^{t2}}) \end{aligned} \quad (5.164)$$

qui peuvent être introduits dans les formules de la projection de Mercator sphérique normale :

$$\mathbf{X}(\lambda^t, \phi^t) = \begin{pmatrix} E(\lambda^t, \phi^t) \\ N(\lambda^t, \phi^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \lambda^t \\ R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi^t}{2} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (5.165)$$

Des exemples de projection de Mercator sphérique oblique avec différents centres de projection sont représentés en Figure 5.18. Nous pouvons constater que, par rapport à la projection de Mercator sphérique normale, la conformité est conservée mais que la convergence du méridien n'est plus nulle pour tous les points de la surface de la Terre.

Indicatrice de Tissot

L'indicatrice de Tissot est identique à celle de la projection de Mercator normale si l'on remplace simplement les paramètres (λ, ϕ) par (λ^t, ϕ^t) . Nous pouvons donc écrire :

$$m_{\max} = m_{\min} = \frac{1}{\cos \phi^t} \quad \text{avec} \quad d\mathbf{u}_{\max} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.166)$$

Il est également possible d'exprimer la déformation d'échelle des distances en fonction des coordonnées (E, N) en remplaçant les paramètres :

$$\lambda^t, \phi^t \quad \text{par les fonctions} \quad \lambda^t(E, N), \phi^t(E, N) \quad (5.167)$$

données dans l'équation 5.187. Nous pouvons également calculer cette échelle au voisinage du centre de projection en faisant un développement limité du 2ème ordre autour de $\phi^t = 0$:

$$\begin{aligned} m_{\max} = m_{\min} &= \frac{1}{\cos \phi^t} \\ &\approx 1 + \frac{\phi^{t2}}{2} + \mathcal{O}_3 \end{aligned} \quad (5.168)$$

De plus, lorsque ϕ^t est petit, nous avons aussi :

$$\phi^t \approx \frac{N}{R} \quad (5.169)$$

ce qui finalement donne :

$$\begin{aligned} m_{\max} = m_{\min} &= \frac{1}{\cos \phi^t} \\ &\approx 1 + \frac{N^2}{2R^2} + \mathcal{O}_3 \end{aligned} \quad (5.170)$$

Convergence du méridien

La convergence du méridien se calcule selon l'équation 5.83 :

$$\mu(\lambda, \phi) = -\arctan \left(\frac{\frac{\partial E}{\partial \phi}}{\frac{\partial N}{\partial \phi}} \right) \quad (5.171)$$

qui, sans démonstration, est égale à :

$$\mu(\lambda, \phi) = \arctan \left[\frac{\sin \phi_0 \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos \phi_0 \cdot \cos \phi + \sin \phi_0 \cdot \sin \phi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)} \right] \quad (5.172)$$

Nous voyons que la convergence du méridien provient de la latitude ϕ_0 du centre de projection, donc de «l'obliquité du cylindre». En effet, si $\phi_0 = 0$, alors $\mu = 0$.

5.8 Projection de Mercator sphérique transverse

La projection de Mercator sphérique transverse se base sur les même principe que la projection oblique. Néanmoins, la latitude du centre de projection est fixée au pôle nord $\phi_0 = 90^\circ$. Les matrices de rotation qui permettent de déplacer le centre de projection (λ_0) sont légèrement différentes soit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^t \\ y^t \\ z^t \end{pmatrix} &= \mathbf{R}_z(-90^\circ) \cdot \mathbf{R}_y(-90^\circ) \cdot \mathbf{R}_z(90^\circ + \lambda_0) \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 & 0 \\ -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(\lambda, \phi) \\ y(\lambda, \phi) \\ z(\lambda, \phi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.173)$$

qui nous permettent de calculer les nouveaux paramètres transformés :

$$\begin{aligned} \lambda^t &= \text{atan2}(y^t, x^t) \\ \phi^t &= \text{atan2}(z^t, \sqrt{x^{t^2} + y^{t^2}}) \end{aligned} \quad (5.174)$$

qui peuvent être introduits dans les formules de la projection de Mercator sphérique normale en interchangeant les coordonnées E et N tout en prenant l'opposé de N :

$$\mathbf{X}(\lambda^t, \phi^t) = \begin{pmatrix} E(\lambda^t, \phi^t) \\ N(\lambda^t, \phi^t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi^t}{2} \right) \right] \\ R \cdot \lambda^t \end{pmatrix} \quad (5.175)$$

Des exemple de projection de Mercator sphérique transverse avec différents centres de projection sont représentés en Figure 5.19. Nous pouvons constater que, par rapport à la projection de Mercator sphérique normale, la conformité est conservée mais que la convergence du méridien n'est plus nulle pour tous les points de la surface de la Terre.

Indicatrice de Tissot

Dans ce cas, les indicatrices de Tissot sont aussi analogues à celles des la projection de Mercator normale et oblique. Par contre, le facteur d'échelle des distances ne varie pas en fonction de la coordonnée N mais de la coordonnée E , qui représente la distance au méridien du centre de projection :

$$m_{\max} = m_{\min} \approx 1 + \frac{E^2}{2R^2} + \mathcal{O}_3 \quad (5.176)$$

Convergence du méridien

La convergence du méridien se calcule selon l'équation 5.83 :

$$\mu(\lambda, \phi) = -\arctan \left(\frac{\frac{\partial E}{\partial \phi}}{\frac{\partial N}{\partial \phi}} \right) \quad (5.177)$$

qui, sans démonstration, est égale à :

$$\mu(\lambda, \phi) = \arctan [\tan(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin \phi] \quad (5.178)$$

Dans ce cas, nous voyons que la convergence du méridien est seulement nulle sur l'équateur $\phi = 0$ ou sur la longitude qui correspond au centre de projection $\lambda = \lambda_0$.

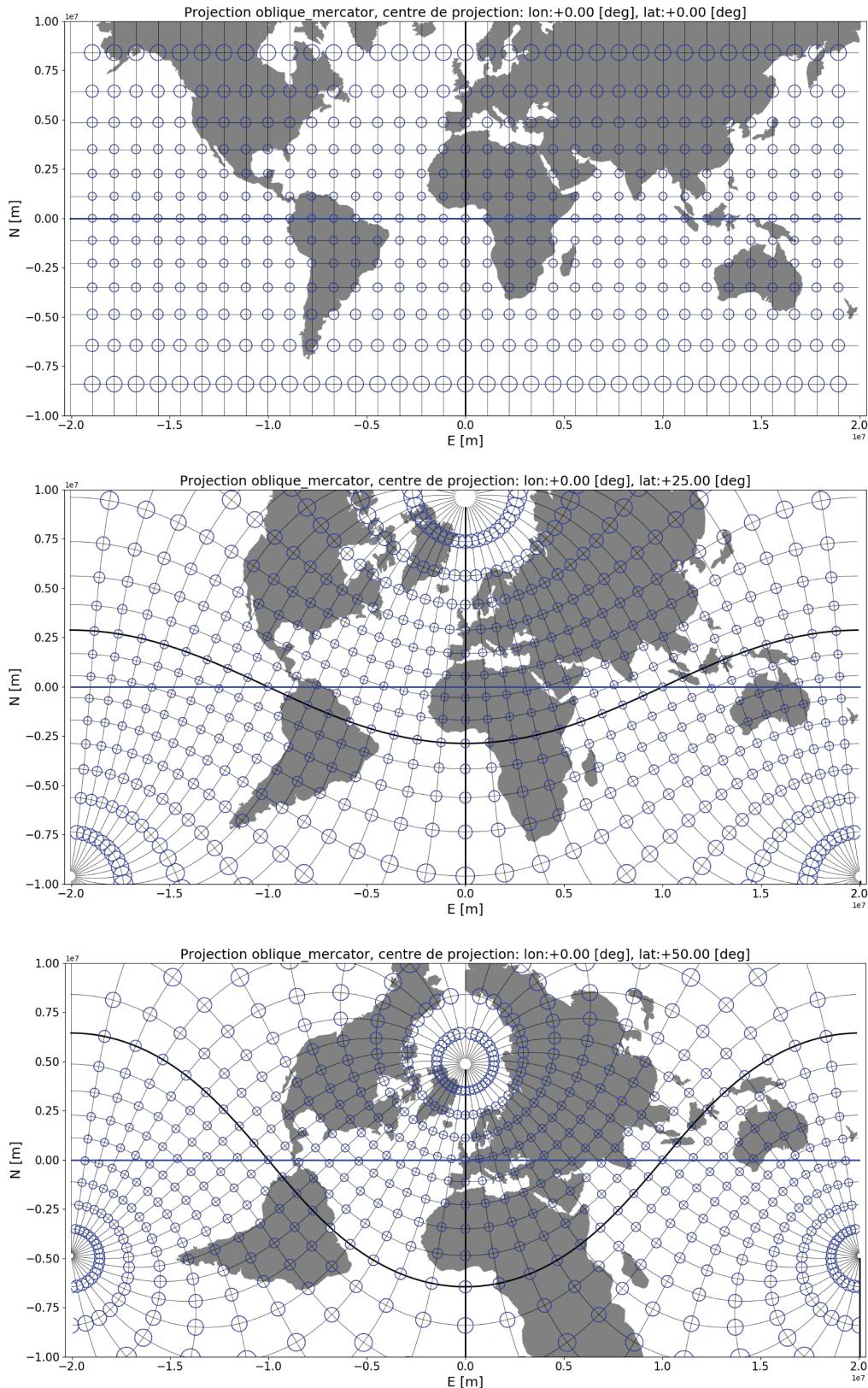


Figure 5.18 – Projections de Mercator obliques avec les indicatrices de Tissot pour différents centres de projection.

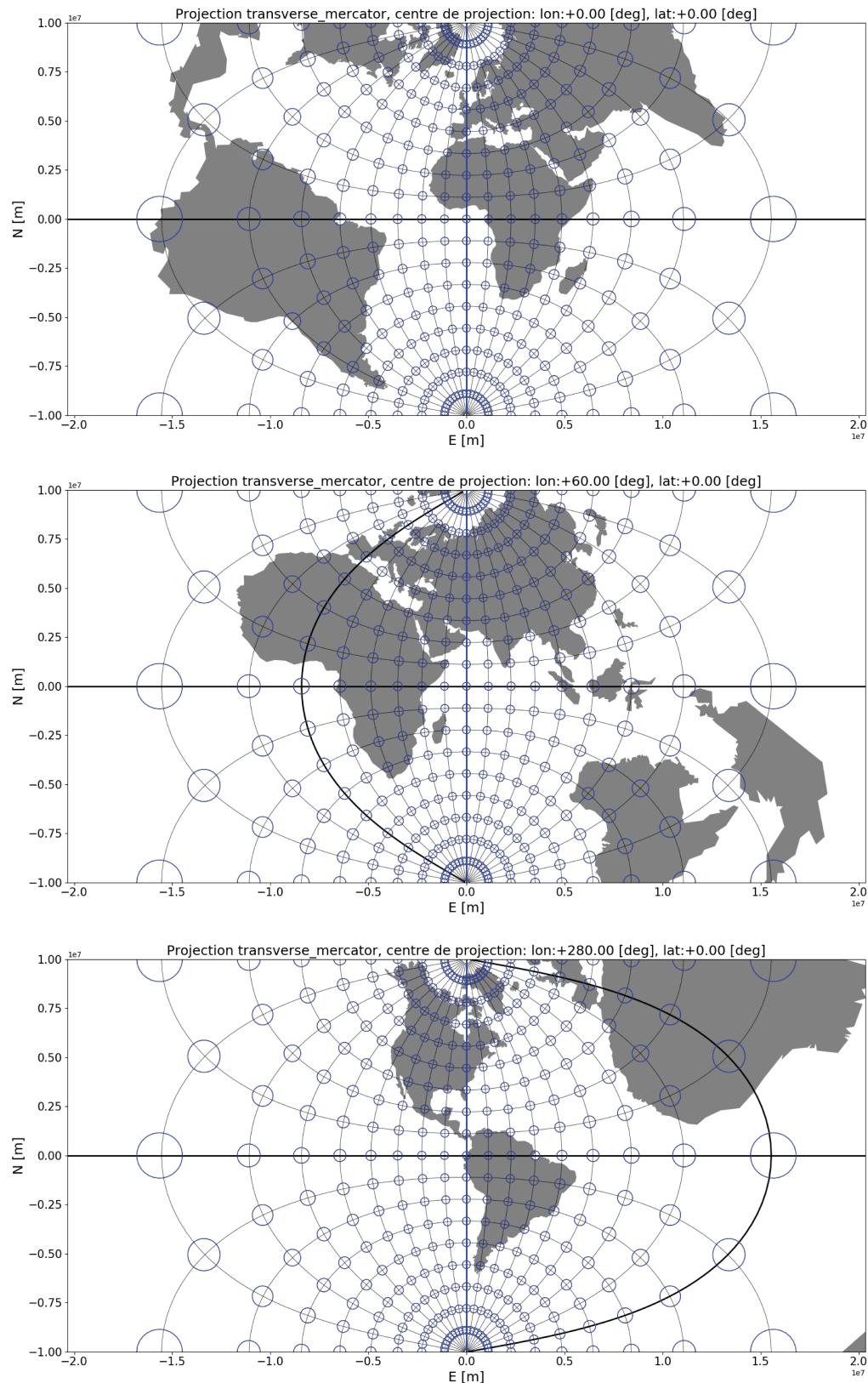


Figure 5.19 – Projections de Mercator transverses avec les indicatrices de Tissot pour différents centres de projection.

5.9 Projection de Mercator ellipsoïdale normale

La projection de Mercator normale⁸, est une projection cylindrique conforme. La surface de référence est l'ellipsoïde de révolution paramétrée par la longitude et la latitude ellipsoïdales :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (5.179)$$

dont le tenseur métrique vaut :

$$\mathbf{T}_{\text{ell}} = \begin{pmatrix} R_N^2 \cdot \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & R_M^2 \end{pmatrix} \quad (5.180)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \\ R_M &= \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.181)$$

5.9.1 Coordonnées ellipsoïdales $(\lambda, \varphi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)

Les formules de projection sont données par :

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} E(\lambda, \varphi) \\ N(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \lambda \\ a \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1-e \cdot \sin \varphi}{1+e \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \end{pmatrix} \quad (5.182)$$

et le tenseur métrique est donné par :

$$\mathbf{P}_{\text{Mercator/ell}} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \cdot R_M^2}{R_N^2 \cdot \cos^2 \varphi} \end{pmatrix} \quad (5.183)$$

la matrice de déformation est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{Mercator/ell}} &= \mathbf{T}_{\text{ell}}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{\text{Mercator/ell}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.184)$$

l'indicatrice de Tissot est donnée par :

$$m_{\max} = m_{\min} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi} \quad \text{avec} \quad d\mathbf{u}_{\max} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u}_{\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.185)$$

la convergence du méridien est nulle en tous points :

$$\mu(\lambda, \phi) = 0 \quad (5.186)$$

8. par opposition aux projections oblique et transverse.

5.9.2 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées ellipsoïdales (λ, φ)

Sans démonstration, les formules de projection inverse sont données par un développement limité :

$$\mathbf{u}(E, N) = \begin{pmatrix} \lambda(E, N) \\ \varphi(E, N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{a} \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_8 \end{pmatrix} \quad (5.187)$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2 \cdot \arctan \left(e^{\frac{N}{R}} \right) - \frac{\pi}{2} \\ \gamma_2 &= \left(\frac{e^2}{2} + \frac{5e^4}{24} + \frac{e^6}{12} + \frac{13e^8}{360} \right) \cdot \sin(2\gamma_1) \\ \gamma_4 &= \left(\frac{7e^4}{48} + \frac{29e^6}{240} + \frac{811e^8}{11520} \right) \cdot \sin(4\gamma_1) \\ \gamma_6 &= \left(\frac{7e^6}{120} + \frac{81e^8}{1120} \right) \cdot \sin(6\gamma_1) \\ \gamma_8 &= \left(\frac{4279e^8}{161280} \right) \cdot \sin(8\gamma_1) \end{aligned} \quad (5.188)$$

5.10 Projection de Mercator ellipsoïdale oblique

La projection de Mercator oblique, est une projection cylindrique conforme. La surface de référence est l'ellipsoïde de révolution paramétré par la longitude et la latitude ellipsoïdale (λ, φ) . Comme pour la projection de Mercator oblique sphérique, l'objectif est de déplacer le centre de projection (λ_0, φ_0) à une position ellipsoïdale donnée. Pour faire ceci, il n'est plus possible d'utiliser la méthode avec les rotations utilisée dans la projection de Mercator oblique sphérique. En effet, en faisant cela, les coordonnées 3D des points «tournés» \mathbf{x}^t ne seraient plus sur la surface de l'ellipsoïde, et la projection orthogonale, implicitement réalisée lorsque que nous recalculerions les coordonnées ellipsoïdales «tournées» (λ^t, φ^t) , détruirait la conformité de la projection. Dès lors, plusieurs solutions ont été envisagées. Elles sont toutes basées sur une projection conforme intermédiaire de l'ellipsoïde de révolution sur une sphère. Puis une fois sur la sphère, il est possible de réaliser une projection de Mercator sphérique oblique. Le premier à avoir réalisé cette opération est le suisse M. Rosenmund en 1903 lors de la définition de la double projection conforme cylindrique à axe oblique, encore utilisée aujourd'hui. Ensuite, nous trouvons des formulations provenant de Laborde (1928) et de Hotine (1946) qui génèrent des résultats similaires au voisinage du centre de projection. De façon analogue à la projection de Mercator sphérique, elle génère une convergence des méridiens non-nulle pour tous les points ne faisant pas partie du méridien du centre de projection λ_0 .

5.11 Projection de Mercator ellipsoïdale transverse

La projection de Mercator ellipsoïdale transverse (aussi appelée projection de Gauss-Krüger), est une projection cylindrique conforme. La surface de référence est l'ellipsoïde de révolution paramétré par la longitude et la latitude ellipsoïdales (λ, φ) . Comme pour la projection oblique, il n'est pas possible de trouver les formules de projections de façon simple à l'aide des rotations tridimensionnelles. Les formules utilisées aujourd'hui ne se

dérivent pas à partir de la projection de Mercator ellipsoïdale oblique, mais par des techniques issues de l'analyse complexe. Il existe des formules exactes (Lee 1976) ainsi que des formules approximatives issues de développements limités (Krüger 1912). Cette projection est certainement la plus utilisée à travers le monde. Elle est la base de la projection UTM. De façon analogue à la projection de Mercator sphérique, elle génère une convergence des méridiens non-nulle pour tous les points ne faisant pas partie du méridien du centre de projection λ_0 .

5.12 Projection UTM (Universal Transverse Mercator)

La projection UTM (Universal Transverse Mercator) est une projection basée sur la projection de Mercator transverse ellipsoïdale, donc une projection conforme. Elle a été introduite par le corps des ingénieurs de l'armée américaine en 1940 afin d'avoir une projection qui limite les déformations sur toute la surface de la Terre. D'un point de vue mathématique, elle est basée sur 60 projections de Mercator transverse ellipsoïdale qui ont chacune un centre de projection ($\lambda_0, \varphi_0 = 0^\circ$) différent. Ces 60 méridiens d'origine sont séparés par 6° . Pour un point donné en coordonnées ellipsoïdales (λ, ϕ) , il suffit de déterminer le méridien d'origine λ_0 correspondant à la zone dans lequel le point se trouve, et appliquer la projection de Mercator transverse ellipsoïdale correspondante. Il est important de noter que par convention, toutes les coordonnées ellipsoïdales utilisées dans UTM sont considérées comme provenant du système de référence WGS 84.

5.12.1 Zones UTM

Les zones UTM divisent la Terre en 60 zones de 6° de longitude. Ces zones sont donc des fuseaux. La zone 01 couvre les longitudes de -180° à -174° avec son méridien d'origine au centre de la zone, c'est à dire, à $\lambda_0^{01} = -177^\circ$. La numérotation des zones augmente vers l'Est jusqu'à la zone 60, qui couvre les longitudes $+174^\circ$ à $+180^\circ$, avec $\lambda_0^{60} = +177^\circ$. Pour un point donné (λ, ϕ) nous pouvons déterminer le numéro Z de la zone qui lui correspond avec :

$$Z = \text{floor}\left(\frac{\lambda^\circ + 180}{6}\right) + 1 \quad (5.189)$$

et la longitude du centre de projection qui correspond à cette zone Z avec :

$$\lambda_0^Z [^\circ] = -180 + Z \cdot 6 - 3 \quad (5.190)$$

Par exemple, pour Yverdon-les-Bains, qui se trouve à une longitude de $\lambda = 6.65^\circ$, nous trouvons $Z=32$, et $\lambda_0^{32} = 9^\circ$. Parfois, et de façon redondante, les fuseaux sont encore divisés en 20 secteurs, du sud au nord, selon la latitude, entre $\varphi = -80^\circ$ et $\varphi = +84^\circ$. Ces secteurs sont identifiés par des lettres majuscules de C à X. Les secteurs de C à W recouvrent chacun $\Delta\varphi = 8^\circ$, tandis que le dernier secteur X recouvre $\Delta\varphi = 12^\circ$. Le secteur C recouvre donc l'intervalle $\varphi = [-80^\circ, -72^\circ]$. La grande partie de la Suisse se trouve donc dans la zone 32T, et l'ouest du canton de Genève dans la zone 31T.

5.12.2 Coordonnées ellipsoïdales $(\lambda, \varphi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)

Les coordonnées UTM peuvent se calculer de différentes façon, voici les formules utilisées dans les normes EPSG et qui garantissent une précision meilleure que 3mm jusqu'à

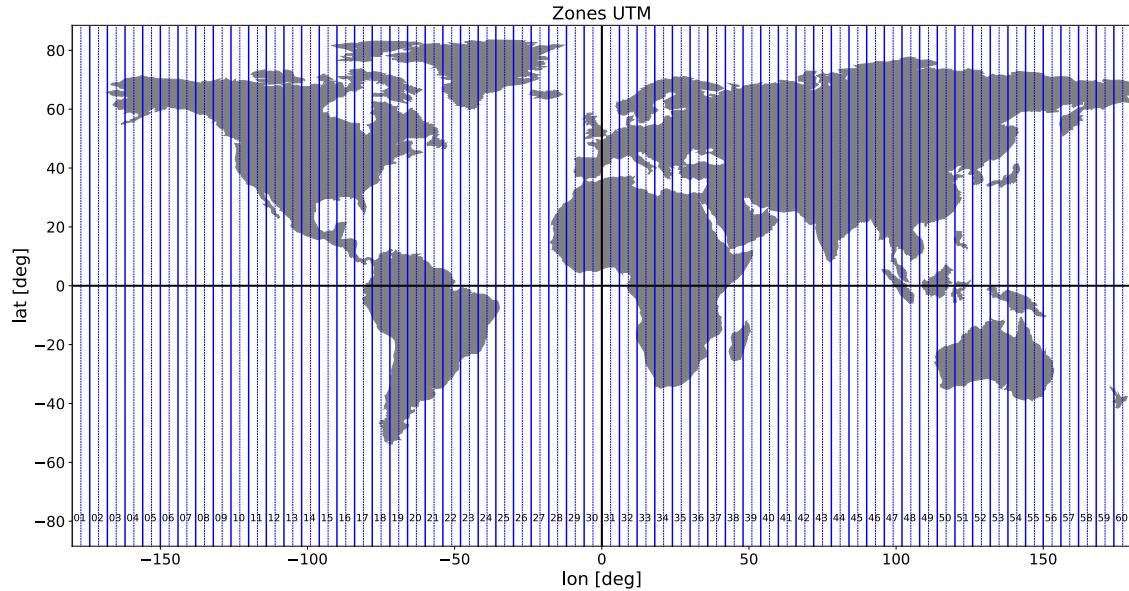


Figure 5.20 – (Bleu épais) limites des zones UTM. (Bleu fin) méridiens d'origine des zones UTM.
Remarque : la projection plate-carrée est utilisée pour cette carte des zones UTM.

des longitudes qui diffèrent de moins de 4° par rapport au méridien d'origine. Nous avons les paramètres de l'ellipsoïde WGS84 :

$$\begin{aligned} a &= 6'378'137.000 \text{ [m]} \\ f &= \frac{1}{298.25722356} \text{ [-]} \end{aligned} \quad (5.191)$$

puis les coordonnées projetées se calculent :

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} E(\lambda, \varphi) \\ N(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 + k_0 \cdot B \cdot \eta \\ N_0 + k_0 \cdot B \cdot \xi \end{pmatrix} \quad (5.192)$$

avec une translation du centre de projection qui diffère selon l'hémisphère de la zone considérée. Ceci afin d'éviter les coordonnées négatives :

$$\begin{aligned} E_0 &= +500'000.000 \text{ [m]} \\ N_0 &= \begin{cases} +0.000 \text{ [m]} & \text{si } \varphi \geq 0^\circ \\ +10'000'000.000 \text{ [m]} & \text{si } \varphi < 0^\circ \end{cases} \end{aligned} \quad (5.193)$$

ensuite nous avons :

$$\begin{aligned}
 k_0 &= 0.9996 \\
 n &= \frac{f}{2-f} \\
 B &= \frac{a}{1+n} \cdot \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64}\right) \\
 h_1 &= \frac{n}{2} - \frac{2n^2}{3} + \frac{5n^3}{16} + \frac{41n^4}{180} \\
 h_2 &= \frac{13n^2}{48} - \frac{3n^3}{5} + \frac{557n^4}{1440} \\
 h_3 &= \frac{61n^3}{240} - \frac{103n^4}{140} \\
 h_4 &= \frac{49561n^4}{161280}
 \end{aligned} \tag{5.194}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}
 Q &= \operatorname{arcsinh}(\tan \varphi) - e \cdot \operatorname{arctanh}(e \cdot \sin \varphi) \\
 \beta &= \operatorname{arctan}(\sinh Q) \\
 \eta_0 &= \operatorname{arctanh}[\cos \beta \sin(\lambda - \lambda_0^z)] \\
 \xi_0 &= \operatorname{arcsin}(\sin \beta \cosh \eta_0) \\
 \xi &= \xi_0 + h_1 \cdot \sin(2\xi_0) \cdot \cosh(2\eta_0) + h_2 \cdot \sin(4\xi_0) \cdot \cosh(4\eta_0) \\
 &\quad + h_3 \cdot \sin(6\xi_0) \cdot \cosh(6\eta_0) + h_4 \cdot \sin(8\xi_0) \cdot \cosh(8\eta_0) \\
 \eta &= \eta_0 + h_1 \cdot \cos(2\xi_0) \cdot \sinh(2\eta_0) + h_2 \cdot \cos(4\xi_0) \cdot \sinh(4\eta_0) \\
 &\quad + h_3 \cdot \cos(6\xi_0) \cdot \sinh(6\eta_0) + h_4 \cdot \cos(8\xi_0) \cdot \sinh(8\eta_0)
 \end{aligned} \tag{5.195}$$

Indicatrice de Tissot

Le facteur d'échelle issu de l'indicatrice de Tissot est en bonne approximation identique à celui de la projection de Mercator transverse sphérique, c'est à dire

$$m_{\max} = m_{\min} \approx 1 + \frac{(E - E_0)^2}{2a^2} + \mathcal{O}_3 \tag{5.196}$$

Convergence du méridien

L'approximation de la projection de Mercator transverse sphérique est aussi valable pour la convergence du méridien :

$$\mu(\lambda, \phi) = \operatorname{arctan} [\tan(\lambda - \lambda_0^z) \cdot \sin \varphi] \tag{5.197}$$

5.12.3 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées ellipsoïdales (λ, φ)

Afin d'appliquer les formules de projection inverse, il est nécessaire de connaître les coordonnées (E, N) ainsi que la zone (le fuseau correspondant). Les formules sont données par :

$$\mathbf{u}(E, N) = \begin{pmatrix} \lambda(E, N) \\ \varphi(E, N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^z + \operatorname{arcsin} \left(\frac{\tanh \eta_0}{\cos \beta} \right) \\ \operatorname{arctan}(\sinh Q_2) \end{pmatrix} \tag{5.198}$$

avec :

$$\lambda_0^Z [^\circ] = -180 + Z \cdot 6 - 3 \quad (5.199)$$

puis :

$$\begin{aligned} k_0 &= 0.9996 \\ n &= \frac{f}{2-f} \\ B &= \frac{a}{1+n} \cdot \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64}\right) \\ h_1 &= \frac{n}{2} - \frac{2n^2}{3} + \frac{37n^3}{96} + \frac{1n^4}{360} \\ h_2 &= \frac{n^2}{48} + \frac{n^3}{15} - \frac{437n^4}{1440} \\ h_3 &= \frac{17n^3}{480} - \frac{37n^4}{840} \\ h_4 &= \frac{4397n^4}{161280} \end{aligned} \quad (5.200)$$

et :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{E - E_0}{B \cdot k_0} \\ \xi &= \frac{N - N_0}{B \cdot k_0} \end{aligned} \quad (5.201)$$

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi - h_1 \cdot \sin(2\xi_0) \cdot \cosh(2\eta_0) - h_2 \cdot \sin(4\xi_0) \cdot \cosh(4\eta_0) \\ &\quad - h_3 \cdot \sin(6\xi_0) \cdot \cosh(6\eta_0) - h_4 \cdot \sin(8\xi_0) \cdot \cosh(8\eta_0) \\ \eta_0 &= \eta - h_1 \cdot \cos(2\xi_0) \cdot \sinh(2\eta_0) - h_2 \cdot \cos(4\xi_0) \cdot \sinh(4\eta_0) \\ &\quad - h_3 \cdot \cos(6\xi_0) \cdot \sinh(6\eta_0) - h_4 \cdot \cos(8\xi_0) \cdot \sinh(8\eta_0) \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin \left(\frac{\sin \xi_0}{\cosh \eta_0} \right) \\ Q_1 &= \operatorname{arcsinh}(\tan \beta) \\ Q_2 &= Q_1 + e \cdot \operatorname{arctanh}(e \cdot \tanh Q_2) \end{aligned} \quad (5.202)$$

la dernière formule se calcule par itération en remplaçant, dans le membre de droite, Q_2 par Q_1 pour la première itération.

5.13 Double projection conforme cylindrique à axe oblique Suisse

La double projection conforme cylindrique à axe oblique Suisse est la projection officielle utilisée actuellement en Suisse. Elle provient des travaux de M. Rosenmund en 1903 qui avait pour objectif de remplacer la projection de Bonne, introduite en 1836, et qui fut appliquée pour la construction, entre 1845 et 1865, de la carte topographique de Dufour (1 :100 000). La projection de Bonne est une projection quasi-conique ellipsoïdale équivalente qui avait donc l'avantage de représenter les surfaces correctement, mais qui avait le désavantage de déformer les angles, sur le territoire Suisse, jusqu'à 77'', soit 0.02 [gon]. A l'époque de la création de la carte Dufour, ces déformations angulaires n'étaient pas fondamentalement limitantes car la précision des angles mesurés sur le terrain pour les relevés locaux était également limitée. En effet, les relevés locaux étaient directement réalisés à la planchette sur la base de points de bases issus d'une triangulation calculée sur l'ellipsoïde, puis calculée et reportée dans le plan de projection avec la projection de Bonne.

Avec l'introduction du cadastre ainsi que l'avénement des théodolites pour les levés de détails, le maintien de la projection de Bonne équivalente aurait nécessité des réductions de distances et d'angles complexes et peu pratiques pour les relevés à toutes les échelles. C'est pour cette raison que l'office fédéral de topographie décida de définir une nouvelle projection qui devait permettre de réaliser des calculs topométriques de précision, à l'aide de la géométrie Euclidienne (plane), et jusqu'à des échelles importantes, 10-15 [km].

Cette projection devait être conforme, avec des déformations de distances minimales sur tout le territoire Suisse. Pour ce faire, Rosenmund calcula le facteur d'échelle maximal pour différentes projections conformes et obtint les valeurs suivantes :

Projection conforme	Centre de projection	$m_{\max} = \frac{ds}{dS}$
Azimutale oblique	Finsteraarhorn	1.000200
Conique oblique	sur le parallèle 46°50'	1.000150
Cylindrique transverse	sur le méridien du Brünigpass 8°10'	1.000380
Cylindrique oblique	sur le parallèle 46°50'	1.000150

Après cette étape préliminaire, Rosenmund dû choisir entre la projection conique oblique et la projection cylindrique oblique. Son choix s'est finalement porté sur la projection cylindrique oblique car elle permettait d'alléger les calculs. En effet, grâce à la double projection conforme, de l'ellipsoïde sur la sphère, puis de la sphère sur le cylindre, il est possible de de réaliser la première projection conforme (ellipsoïde-sphère) grâce à des tables pré-calculées, et ne véritablement calculer, à l'aide des formules, que la deuxième projection conforme (sphère-cylindre).

Aujourd'hui, il n'est plus question de travailler avec des tables ou des approximations. Les formules rigoureuses doivent être appliquées.

5.13.1 Coordonnées ellipsoïdales $(\lambda, \varphi) \rightarrow$ Coordonnées projetées (E, N)

Les coordonnées ellipsoïdales (λ, φ) qui entrent dans les formules de la projection Suisse doivent provenir de l'ellipsoïde de Bessel 1841 avec :

$$\begin{aligned} a &= 6'377'397.155 \text{ [m]} \\ f &= \frac{1}{299.1528128} \text{ [-]} \end{aligned} \quad (5.203)$$

avec tout d'abord la première projection conforme de l'ellipsoïde sur la sphère en déplaçant le méridien d'origine λ_0 sur l'ancien observatoire de Berne :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{sph}} &= \alpha \cdot (\lambda - \lambda_0) \\ \phi_{\text{sph}} &= 2 \cdot \arctan \left[k \cdot \tan^{\alpha} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin \varphi}{1 + e \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{\alpha \cdot e}{2}} \right] - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.204)$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 7^\circ 26' 22''.50 = 7.4395833333^\circ \\ \alpha &= 1.0007291384304 \\ k &= 1.0030714396280 \end{aligned} \quad (5.205)$$

puis nous avons la rotation selon le méridien d'origine afin de déplacer le centre de projection sur le parallèle ϕ_0 de l'ancien observatoire de Berne :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{sph}}^t &= \arctan \left(\frac{\sin \lambda_{\text{sph}}}{\sin \phi_0 \cdot \tan \varphi_{\text{sph}} + \cos \phi_0 \cdot \cos \lambda_{\text{sph}}} \right) \\ \phi_{\text{sph}}^t &= \arcsin (\cos \phi_0 \cdot \sin \phi_{\text{sph}} - \sin \phi_0 \cdot \cos \phi_{\text{sph}} \cos \lambda_{\text{sph}}) \end{aligned} \quad (5.206)$$

puis la deuxième projection conforme de Mercator sphérique normale pour finalement trouver :

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} E(\lambda, \varphi) \\ N(\lambda, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 + R_{\text{sph}} \cdot \lambda_{\text{sph}}^t \\ N_0 + R_{\text{sph}} \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{\text{sph}}^t}{2} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (5.207)$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 46^\circ 54' 27''.83324846 = 46.9077314579^\circ \\ R_{\text{sph}} &= 6'378'815.90365 \text{ [m]} \end{aligned} \quad (5.208)$$

et

$$\begin{aligned} E_0 &= \begin{cases} 600'000 \text{ [m]} & \text{si MN03} \\ 2'600'000 \text{ [m]} & \text{si MN95} \end{cases} \\ N_0 &= \begin{cases} 200'000 \text{ [m]} & \text{si MN03} \\ 1'200'000 \text{ [m]} & \text{si MN95} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.209)$$

Indicatrice de Tissot

Le facteur d'échelle issu de l'indicatrice de Tissot est en bonne approximation identique à celui de la projection de Mercator oblique sphérique, c'est-à-dire

$$m_{\max} = m_{\min} \approx 1 + \frac{(N - N_0)^2}{2R_{\text{sph}}^2} + \mathcal{O}_3 \quad (5.210)$$

Convergence du méridien

L'approximation de la projection de Mercator oblique sphérique est aussi valable pour la convergence du méridien :

$$\mu(\lambda, \phi) = \arctan \left[\frac{\sin \phi_0 \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos \phi_0 \cdot \cos \phi + \sin \phi_0 \cdot \sin \phi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)} \right] \quad (5.211)$$

Angle de réduction à la corde

Sur la surface de l'ellipsoïde, une visée entre deux points **A** et **B** se fait quasiment selon la ligne géodésique qui passe par ces 2 points⁹. Cette géodésique, entre **A** et **B**, projetée dans le plan de projection, n'est pas identique à la droite entre **A** et **B**, mais une courbe quelconque dans le plan de projection. Dans le plan de projection, au point **A**, l'angle entre la tangente à cette courbe et la droite entre **A** et **B** est appelé *angle de réduction à la corde*, noté δ_{AB} .

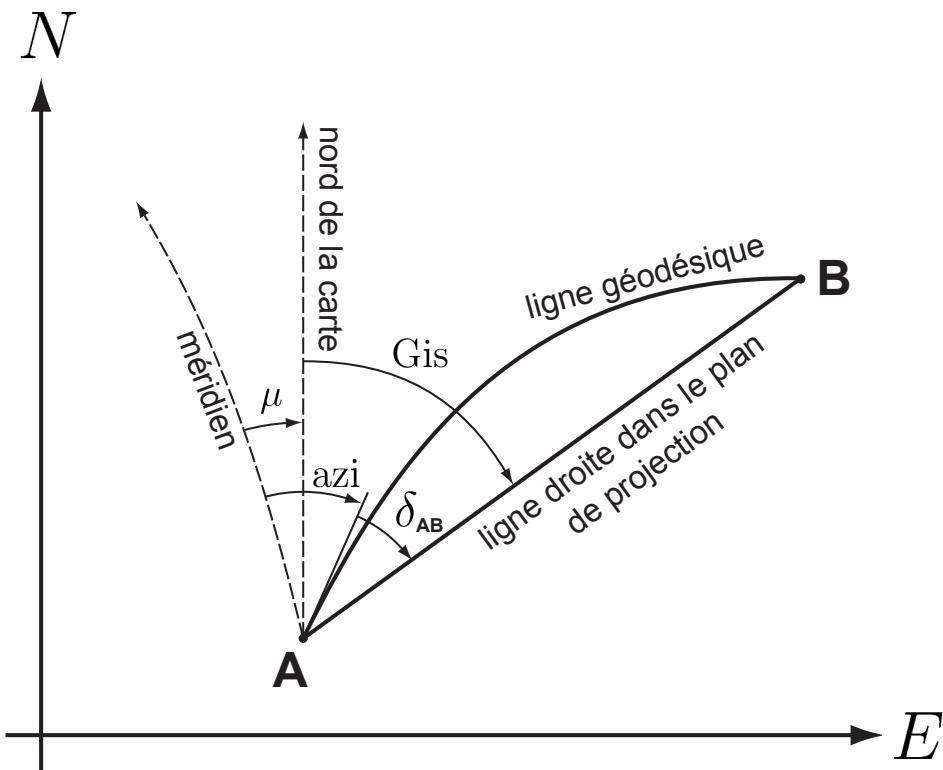


Figure 5.21 – Convergence du méridien et angle de réduction à la corde.

Il peut être calculé par la formule suivante¹⁰ :

$$\delta_{AB} [\text{rad}] = \frac{E_B - E_A}{2 \cdot R_{\text{sph}}^2} \cdot \frac{2 \cdot (N_A - N_0) + (N_B - N_0)}{3} \quad (5.212)$$

Cet angle est maximal pour des directions Est-Ouest et lorsque les points concernés sont éloignés sur la composante Nord par rapport au centre de projection. Par exemple :

9. Sur la sphère la courbe géodésique est l'arc de grand cercle.

10. En approximation sphérique.

- $(E_B - E_A) = 1$ [km] et $(N_A - N_0) = (N_B - N_0) = 100$ [km], il vaut $\delta = 0.8$ [cc].
- $(E_B - E_A) = 10$ [km] et $(N_A - N_0) = (N_B - N_0) = 100$ [km], il vaut $\delta = 7.8$ [cc].

Finalement, nous pouvons écrire la formule qui relie le gisement, l'azimut, la convergence du méridien et l'angle de réduction à la corde :

$$\text{Gis}_{\mathbf{AB}} = \text{azi}_{\mathbf{AB}} - \mu_{\mathbf{A}} + \delta_{\mathbf{AB}} \quad (5.213)$$

5.13.2 Coordonnées projetées $(E, N) \rightarrow$ Coordonnées ellipsoïdales (λ, φ)

Voici les formules de la projection inverse. Tout d'abord avec la projection de Mercator sphérique normale inverse nous trouvons les coordonnées sphériques obliques :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{sph}}^t &= \frac{E - E_0}{R_{\text{sph}}} \\ \phi_{\text{sph}}^t &= 2 \cdot \arctan \left(e^{\frac{N - N_0}{R_{\text{sph}}}} \right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.214)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_{\text{sph}} &= 6'378'815.90365 \text{ [m]} \\ E_0 &= \begin{cases} 600'000 \text{ [m]} & \text{si MN03} \\ 2'600'000 \text{ [m]} & \text{si MN95} \end{cases} \\ N_0 &= \begin{cases} 200'000 \text{ [m]} & \text{si MN03} \\ 1'200'000 \text{ [m]} & \text{si MN95} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.215)$$

puis en appliquant la rotation inverse du système oblique au système normal, nous pouvons trouver les coordonnées sphériques normales :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{sph}} &= \arctan \left(\frac{\sin \lambda_{\text{sph}}^t}{\cos \phi_0 \cdot \cos \lambda_{\text{sph}}^t - \sin \phi_0 \cdot \tan \phi_{\text{sph}}^t} \right) \\ \phi_{\text{sph}} &= \arcsin \left(\cos \phi_0 \cdot \sin \phi_{\text{sph}}^t + \sin \phi_0 \cdot \cos \phi_{\text{sph}}^t \cos \lambda_{\text{sph}}^t \right) \end{aligned} \quad (5.216)$$

avec :

$$\phi_0 = 46^\circ 54' 27''.83324846 = 46.9077314579^\circ \quad (5.217)$$

puis la projection de la sphère sur l'ellipsoïde pour finalement trouver :

$$\mathbf{u}(E, N) = \begin{pmatrix} \lambda(E, N) \\ \varphi(E, N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \frac{1}{\alpha} \cdot \lambda_{\text{sph}} \\ 2 \cdot \arctan \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_{\text{sph}}}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot k^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\frac{1+e \cdot \sin \varphi}{1-e \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad (5.218)$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 7^\circ 26' 22''.50 = 7.4395833333^\circ \\ \alpha &= 1.0007291384304 \\ k &= 1.0030714396280 \end{aligned} \quad (5.219)$$

La latitude ellipsoïdale φ de l'équation 5.218 est une équation implicite. Il est donc nécessaire de calculer φ par itération jusqu'à sa convergence. Dans le membre de droite, la latitude sphérique ϕ_{sph} peut être prise comme valeur initiale de φ .

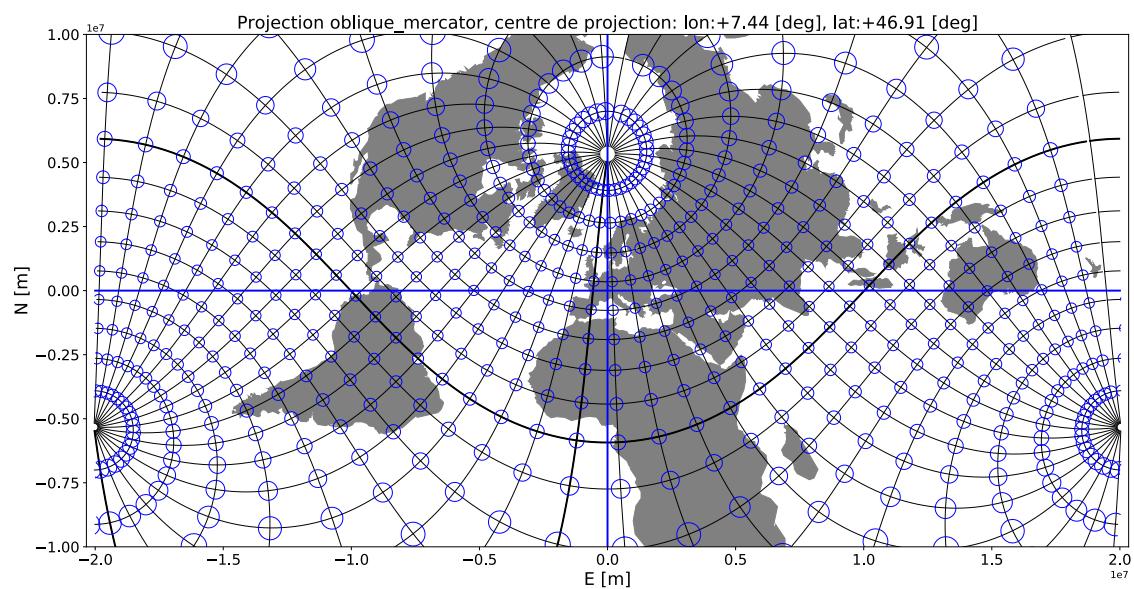


Figure 5.22 – Double projection conforme cylindrique à axe oblique Suisse.

Deuxième partie

Systèmes et cadres de référence

Chapitre 6

Introduction

Dans la partie traitant des systèmes de coordonnées, nous avons vu comment un point peut être décrit de façon univoque en trois dimensions. Soit par des coordonnées cartésiennes, sphériques, ellipsoïdales ou encore projetées. Par exemple, un point peut être identifié de façon univoque par ses coordonnées ellipsoïdales (λ, φ, h) . Néanmoins, intuitivement, nous voyons bien que les coordonnées seules sont incomplètes pour identifier ce point sans ambiguïtés. En effet, pour être complet, il est également nécessaire de connaître les dimensions de l'ellipsoïde, son origine ou encore la direction de ses vecteurs de base. Les systèmes de coordonnées ne forment que l'ensemble des outils mathématiques sur lequel se basent les **systèmes de référence**, qui eux, contiennent toutes les informations permettant de lier les «mondes» mathématique, physique et observationnel.

En géodésie, nous faisons la distinction entre les **systèmes de référence** et les **cadres de référence**. Un système de référence est l'ensemble des *concepts théoriques* ainsi que des conventions utiles à la définition du système, tandis qu'un cadre de référence est la *réalisation* d'un système de référence. Concrètement, un cadre de référence représente, à un instant donné, la liste des coordonnées de points matérialisés, accessibles, et déterminés à l'aide d'observations, correspondant à son système de référence. Nous distinguons également 3 types de systèmes de référence :

1. Les systèmes de référence **célestes**. Ils définissent les systèmes de référence quasi-inertiels. Dans ces systèmes, les coordonnées des objets célestes éloignés sont quasi-maintenant invariantes.
2. Les systèmes de référence **terrestres**. Ils définissent les systèmes de référence liés à la surface de la croûte terrestre. Dans ces systèmes, les coordonnées des points sur la surface de la Terre sont quasi-maintenant invariantes.
3. Les systèmes de référence **locaux**. Ils définissent les systèmes de référence liés à la surface de la croûte terrestre et orientés selon la verticale locale. Dans ces systèmes, les observations issues d'instruments de mesures géodésiques peuvent être exprimées facilement en fonction des coordonnées.

Dans cette partie, nous allons étudier les différents systèmes et cadres de références mentionnés ci-dessus, ainsi que les relations qui nous permettent de passer d'un système de référence à un autre, ainsi que d'un cadre de référence à un autre.

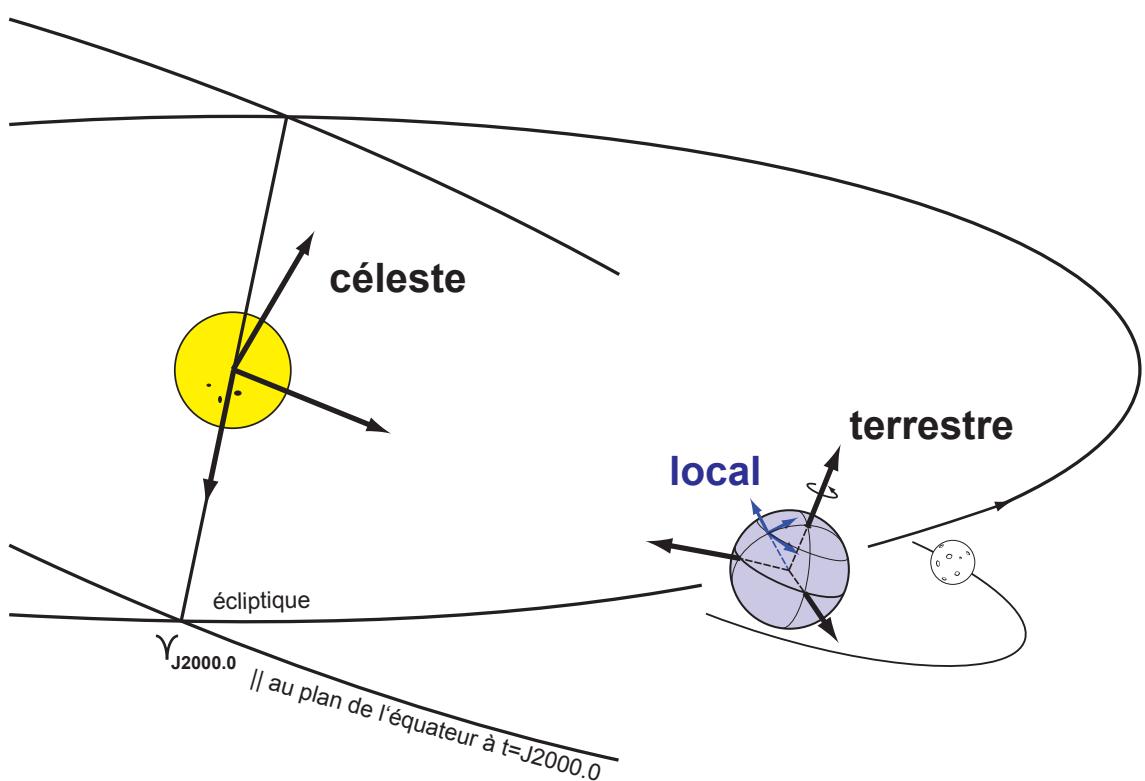


Figure 6.1 – Systèmes de référence céleste, terrestre et local.

Chapitre 7

Systèmes de référence célestes

En première approximation, les systèmes de référence célestes regroupent les systèmes dans lesquels la position des corps célestes éloignés est fixe. D'un point de vue physique, ils sont les seuls systèmes pour lesquels les lois de la dynamique de Newton sont vérifiées. C'est pour cela que l'on appelle ces systèmes : *inertiels*¹. En effet, la célèbre deuxième loi de Newton, qui permet de prédire la trajectoire $\mathbf{x}(t)$ d'un point matériel, de masse m , soumis à des forces extérieures $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$, n'est vraie que dans des systèmes dits inertIELS, c'est-à-dire à des systèmes qui ne sont pas eux-mêmes accélérés :

$$m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (7.1)$$

Afin d'illustrer ce principe, imaginons à l'équateur, dans le méridien de Greenwich, une tour parfaitement verticale de h mètres de hauteur. Au sommet de cette tour, nous lâchons un boulet de masse m et suivons sa trajectoire $\mathbf{x}(t)$ jusqu'au sol. Pour simplifier le problème, nous allons admettre une Terre homogène, parfaitement sphérique et de rayon R , sans atmosphère. La chute se fera donc dans le vide. De plus, en apparence, nous voyons les étoiles et le soleil tourner autour de nous. Intuitivement, il paraît évident que le boulet va toucher le sol, à la verticale parfaite, de son point de départ. A partir de ces hypothèses, voyons ce que nous prédit la deuxième loi de la dynamique de Newton 7.1.

7.1 Chute libre dans un système de référence terrestre

Tout d'abord choisissons un système de référence «attaché» à la Terre, avec son origine \mathbf{o} au centre de la Terre, l'axe \mathbf{e}_x est dans le plan de l'équateur et dans le plan du méridien de Greenwich, l'axe \mathbf{e}_z est confondu avec l'axe de rotation de la Terre, et l'axe \mathbf{e}_y perpendiculaire aux deux autres. Dans ce système, nous pouvons tout d'abord écrire la position du boulet au temps $t = 0$:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} R + h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{m}] \quad (7.2)$$

1. Ceci n'est valable que dans l'approximation de la théorie de Newton. Aujourd'hui, le cadre théorique utilisé est celui de la relativité générale, qui redéfinit plus précisément la définition des systèmes dits inertIELS.

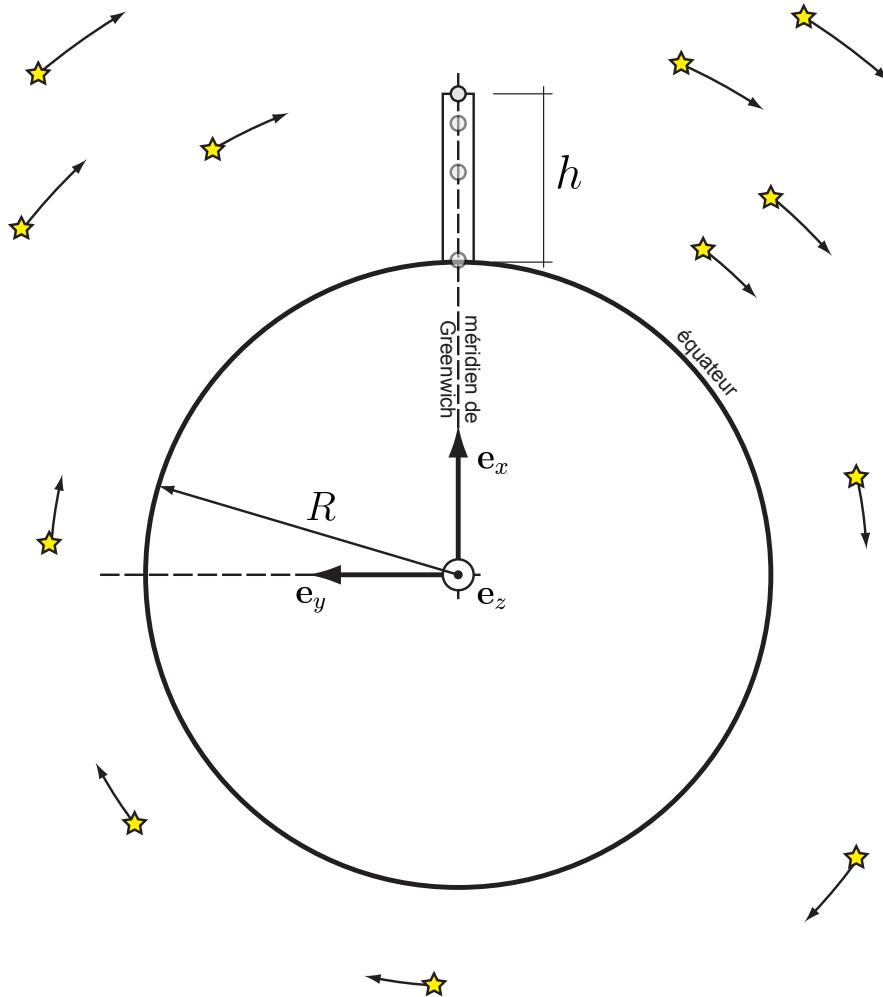


Figure 7.1 – Système de références terrestre. Depuis ce système, nous voyons les étoiles tourner autour de l'axe \mathbf{e}_z .

De plus, dans ce même système, puisque le boulet est initialement au repos, son vecteur vitesse initiale est égal à :

$$\mathbf{v}(0) = \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (7.3)$$

Nous savons également que le boulet ne subit qu'une seule force extérieure, la force de gravitation générée par l'interaction gravitationnelle entre la Terre et le boulet. Nous la considérons constante pour tous les instants du temps.

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = m \cdot \mathbf{g} = m \cdot \begin{pmatrix} -9.81 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{N}] \quad (7.4)$$

Ceci nous permet d'écrire l'équation 7.1, avec la masse m qui se simplifie :

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} -9.81 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Nous avons donc le système suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} -9.81 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} R+h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (7.6)$$

En intégrant deux fois par rapport au temps t , ainsi qu'en introduisant les conditions initiales nous trouvons la trajectoire du boulet :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 + (R+h) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Maintenant nous voulons déterminer sa position à l'impact au sol. Nous savons que cela se passe lorsque la norme du vecteur position vaut R :

$$|\mathbf{x}(t)| = R \quad (7.8)$$

et donc lorsque :

$$-\frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot t^2 + (R+h) = R \quad (7.9)$$

et cela se produit au temps :

$$t^\otimes = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{9.81}} \quad (7.10)$$

et donc la position à l'impact peut se calculer en introduisant t^\otimes dans l'équation 7.11 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t^\otimes) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 9.81 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{9.81}}^2 + (R+h) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Nous voyons donc que $\mathbf{x}(t^\otimes)$ est bien à la verticale de $\mathbf{x}(0)$!

En résumé, nous avons défini un système de référence terrestre, nous avons prédit le résultat d'une expérience physique avec les lois de la mécanique de Newton, nous avons donc indirectement considéré notre système de référence comme étant un système inertiel. Mais est-ce bien le cas ? Comment faire pour vérifier si l'hypothèse de l'inertialité du système de référence est vraie ? Et bien, pas le choix, il faut réaliser l'expérience du boulet en chute libre. Sur Terre, si nous réalisons cette expérience soigneusement, et avec suffisamment de précision, nous allons voir le boulet impacter le sol légèrement à l'Est de la verticale du point initial. Par exemple, pour $h=100$ [m], nous trouvons un décalage vers l'Est de $\delta E = 22$ [mm]².

7.2 Chute libre dans un système de référence céleste

La loi de Newton ne se vérifie donc pas lorsque l'on écrit les équations de Newton dans le référentiel terrestre. En effet, il n'est pas inertiel, il est accéléré (rotation) par rapport au référentiel inertiel que représentent les astres lointains. La modélisation correcte du problème de la chute libre du boulet peut se faire de deux façons :

1. En écrivant les équations du mouvement de Newton dans un référentiel inertiel.
2. En écrivant les équations de Newton modifiées aux référentiels non-inertiels³ et qui font apparaître des forces dites inertielles (force centrifuge, force de Coriolis et force d'Euler).

En choisissant la première méthode, il faut écrire les équations du mouvement de Newton dans un référentiel qui serait cette fois lié aux étoiles. Depuis ce référentiel céleste, nous voyons les étoiles fixes, et la Terre tourner sur elle-même.

Tout d'abord, choisissons un système de référence «attaché» aux étoiles, pour simplifier, prenons son origine \mathbf{o}^* au centre de la Terre, l'axe \mathbf{e}_x^* dans le plan de l'équateur, et dans le plan du méridien de Greenwich, mais seulement à l'instant $t = 0$. Pour les instants suivants, \mathbf{e}_x^* reste fixe par rapport aux étoiles. L'axe \mathbf{e}_z^* est confondu avec l'axe de rotation de la Terre, et l'axe \mathbf{e}_y^* perpendiculaire aux deux autres. Si nous écrivons les

2. Ce décalage vaut : $\delta E = \frac{1}{3} \cdot \omega \cdot \cos \phi \cdot \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$. Avec ω [rad/s] la vitesse de rotation de la Terre, ϕ la latitude et $g = 9.81$ [m/s²] l'accélération de la pesanteur.

3. Les forces inertielles ne sont pas considérées comme de véritables forces, au même titre que les forces d'interactions comme la force de gravitation, la force électromagnétique, etc.

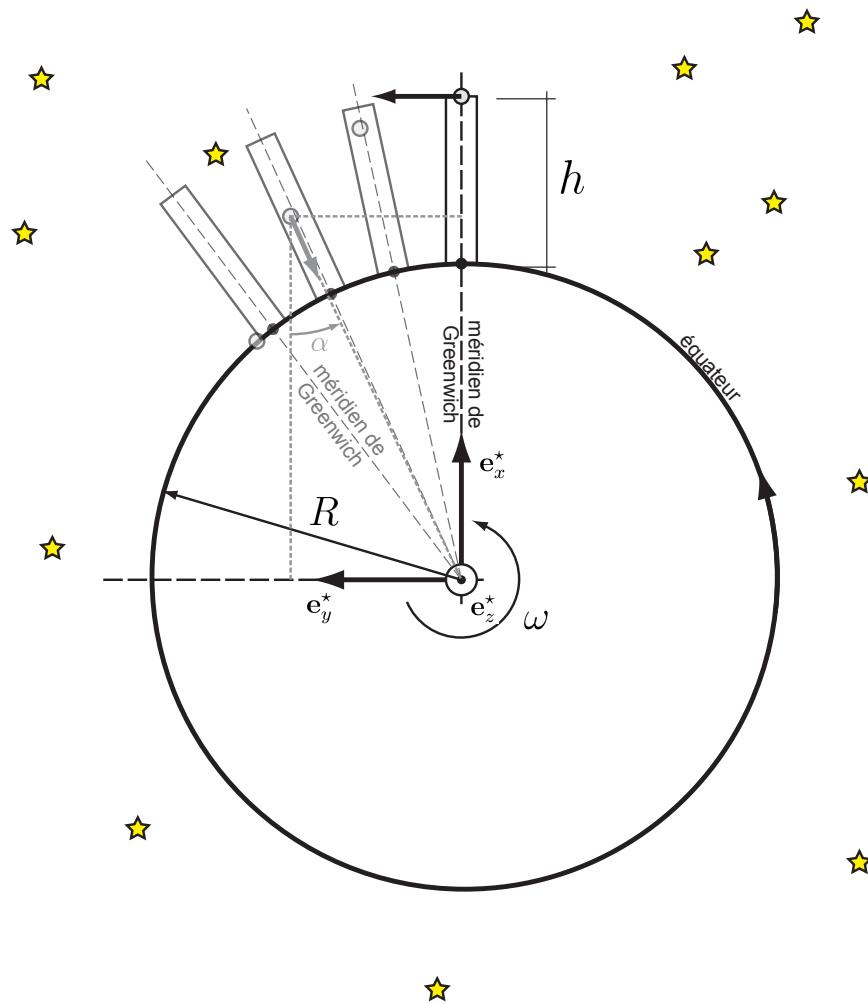


Figure 7.2 – Système de références céleste. Depuis ce système, les étoiles sont fixes et nous voyons la Terre tourner autour de \mathbf{e}_z^*

lois du mouvement du boulet dans ce référentiel, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \mathbf{x}^*(t)}{dt^2} = -9.81 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}^*(0) = \begin{pmatrix} R + h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d\mathbf{x}^*(0)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ (R + h) \cdot \omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (7.12)$$

avec :

$$\alpha = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad (7.13)$$

avec ω , la vitesse de rotation de la Terre en $[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}]$ ⁴. Comme nous pouvons le voir, la vitesse initiale diffère par rapport aux équations du mouvement écrites dans le système d'équation 7.5. En effet, puisque le boulet est lâché depuis la tour qui est elle-même rattachée à la Terre en rotation, il apparaît une vitesse initiale sur la composante \mathbf{e}_y . De plus, les forces extérieures sont les mêmes, seule la force de gravité est présente. Nous pouvons intégrer ces équations numériquement afin d'obtenir la trajectoire du boulet \mathbf{x}^* dans le système céleste.

Pour faire ceci, nous devons tout d'abord transformer le système de 3 équations différentielles du second ordre 7.16 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\mathbf{x}^*(t)}{dt^2} = -9.81 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (7.14)$$

par un système de 6 équations différentielles du premier ordre en ajoutant les composantes du vecteur de vitesse \mathbf{v}^* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{v}^*(t)}{dt} = -9.81 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d\mathbf{x}^*(t)}{dt} = \mathbf{v}^*(t) \end{array} \right. \quad (7.15)$$

En écrivant toutes les composantes de façon explicite, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x^*(t)}{dt} = -9.81 \cdot \cos \alpha \\ \frac{dv_y^*(t)}{dt} = -9.81 \cdot \sin \alpha \\ \frac{dv_z^*(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dx^*(t)}{dt} = v_x^*(t) \\ \frac{dy^*(t)}{dt} = v_y^*(t) \\ \frac{dz^*(t)}{dt} = v_z^*(t) \end{array} \right. \quad (7.16)$$

avec :

$$\alpha = \text{atan2}(y^*, x^*) \quad (7.17)$$

en approximant :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x^*(t)}{dt} &\approx \frac{v_x[i+1] - v_x[i]}{t[i+1] - t[i]} & \frac{dx^*(t)}{dt} &\approx \frac{x[i+1] - x[i]}{t[i+1] - t[i]} \\ \frac{dv_y^*(t)}{dt} &\approx \frac{v_y[i+1] - v_y[i]}{t[i+1] - t[i]} & \text{et} & \frac{dy^*(t)}{dt} \approx \frac{y[i+1] - y[i]}{t[i+1] - t[i]} \\ \frac{dv_z^*(t)}{dt} &\approx \frac{v_z[i+1] - v_z[i]}{t[i+1] - t[i]} & \frac{dz^*(t)}{dt} &\approx \frac{z[i+1] - z[i]}{t[i+1] - t[i]} \end{aligned} \quad (7.18)$$

4. La vitesse de rotation de la Terre est égale à $\omega \approx 7.29 \cdot 10^{-5} [\frac{\text{rad}}{\text{sec}}]$

le schéma d'Euler peut s'écrire :

$$\begin{cases} v_x^*[i+1] = v_x^*[i] - 9.81 \cdot \cos \alpha[i] \cdot \Delta t \\ v_y^*[i+1] = v_y^*[i] - 9.81 \cdot \sin \alpha[i] \cdot \Delta t \\ v_z^*[i+1] = v_z^*[i] \\ x^*[i+1] = x^*[i] + v_x^*[i] \cdot \Delta t \\ y^*[i+1] = y^*[i] + v_y^*[i] \cdot \Delta t \\ z^*[i+1] = z^*[i] + v_z^*[i] \cdot \Delta t \end{cases} \quad (7.19)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha[i] &= \text{atan2}(y^*[i], x^*[i]) \\ \Delta t &= t[i+1] - t[i] \end{aligned} \quad (7.20)$$

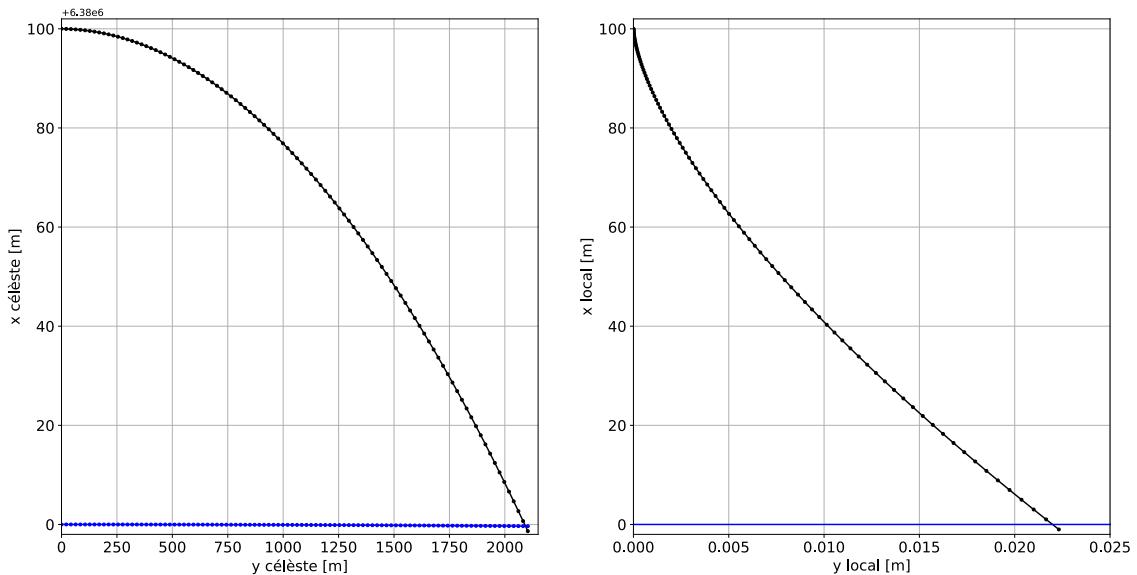


Figure 7.3 – (Droite) Trajectoire de la boule calculée et dessinée dans le système céleste. (Gauche) Trajectoire de la boule calculée dans le système céleste et puis transformée et dessinée dans un système local au pied de la tour.

Pour déterminer la position à l'impact au sol nous pouvons rechercher le point de la trajectoire dont la norme vaut $R = 6'380'000.000$ [m] :

$$|\mathbf{x}^*(t)| = R \quad (7.21)$$

Ceci se produit à $t^\otimes = 4.52283$ [sec] à la position :

$$\mathbf{x}^*(4.52283) = \begin{pmatrix} 6'379'999.653 \\ 2'103.599 \\ 0.000 \end{pmatrix} [\text{m}] \quad (7.22)$$

Reste maintenant à savoir quelles sont les coordonnées, dans le système céleste, du point \mathbf{x}_0^* à la verticale au pied de la tour. Elles se calculent simplement par :

$$\mathbf{x}_0^*(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

qui à l'impact au sol est égal à :

$$\mathbf{x}_0^*(t^\otimes) = \begin{pmatrix} 6'379'999.653 \\ 2'103.577 \\ 0.000 \end{pmatrix} [\text{m}] \quad (7.24)$$

et nous trouvons donc un écart entre l'impact du boulet et la verticale du point de départ :

$$\mathbf{x}^*(t^\otimes) - \mathbf{x}_0^*(t^\otimes) = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.022 \\ 0.000 \end{pmatrix} [\text{m}] \quad (7.25)$$

de 22 [mm] vers l'Est. Ce qui correspond aux observations ! Nous pouvons donc dire que du point de vue de la théorie de Newton, le système céleste est «<plus>» inertiel que le système terrestre. Néanmoins, en réalisant la même expérience plus précisément encore, nous observerions une différence entre la prédition et l'observation. En effet, en plaçant l'origine du système de référence, non pas au centre de la Terre, mais au centre de masse du système solaire, la deuxième loi de Newton serait encore mieux vérifiée par les observations. De nos jours, la recherche du système de référence le plus inertiel ne se fait pas par des expériences de chutes d'objets proches de la Terre, mais se fait en comparant le mouvement des planètes observé et prédit dans le système solaire.

7.3 Le système de référence ICRS

Le système de référence **ICRS** (International Celestial Reference System) est le système le plus fondamental utilisé en géodésie. C'est un système dit quasi-inertiel. Il est défini par les conventions de l'IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) et adopté par IAU (International Astronomical Union). Son origine \mathbf{o}^{ICRS} est fixée au barycentre du système solaire, les vecteurs de base $\mathbf{e}_x^{\text{ICRS}}$ et $\mathbf{e}_y^{\text{ICRS}}$ sont dans le plan de l'équateur à l'époque J2000.0, lui-même défini perpendiculairement au vecteur $\mathbf{e}_z^{\text{ICRS}}$. Le vecteur de base $\mathbf{e}_z^{\text{ICRS}}$ correspond, en première approximation, à l'axe de rotation de la Terre à l'époque J2000.0. De plus, le vecteur de base $\mathbf{e}_x^{\text{ICRS}}$ est dans la direction du point vernal à l'époque J2000.0.

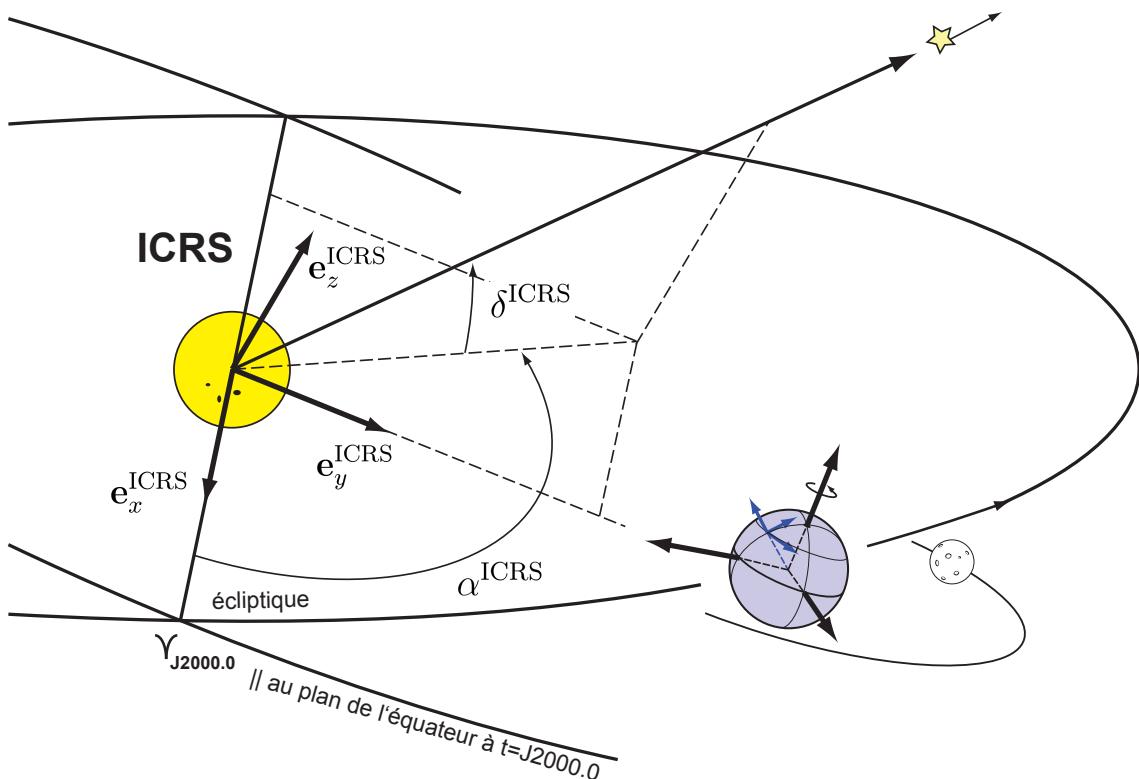


Figure 7.4 – Systèmes de références célestes ICRS.

7.4 Les cadres de référence ICRF

Les cadres de références correspondants aux différentes réalisations du système de référence **ICRS** sont appelés **ICRF** (International Celestial Reference Frame). Actuellement il existe 3 réalisations du système **ICRS** :

- Le cadre de référence **ICRF1** : il regroupe les coordonnées (à l'époque J2000.0) de 608 objets célestes, déterminés en 1998.
- Le cadre de référence **ICRF2** : il regroupe les coordonnées (à l'époque J2000.0) de

3414 objets célestes, déterminés en 2015.

- Le cadre de référence **ICRF3** : il regroupe les coordonnées (à l'époque J2000.0) de 6038 objets célestes, déterminés en 2020.

Les objets célestes qui forment les cadres de références **ICRF** sont des quasars⁵. C'est à dire des noyaux de galaxies très éloignées, à des distances entre 1 et 13 milliards d'années lumières, qui émettent des ondes électromagnétiques dans le spectre des ondes radios (parfois aussi dans le spectre visible). Leurs coordonnées **ICRF** sont obtenues avec des observations obtenues à l'aide de radio-télescopes VLBI⁶. Leurs coordonnées sont traditionnellement données en coordonnées *ascension droite et déclinaison* (α^{ICRF} , δ^{ICRF}) définis comme indiqué sur la Figure 7.4. Un extrait de la liste des coordonées **ICRF3** des quasars qui réalisent le système de référence **ICRS** est donné en Figure 7.5.

ICRF Designation (1)	IERS Des. Inf. (2)	Right Ascension J2000.0 h m s	Declination J2000.0 o ' "	Uncertainty	
				R.A. s	Dec. "
ICRF J000020.3-322101	2357-326	00 00 20.39997606	-32 21 01.2337415	0.00000804	0.0002624
ICRF J000027.0+030715	2357+028	00 00 27.02251377	03 07 15.6463606	0.00005931	0.0003421
ICRF J000053.0+405401	2358+406	00 00 53.08106320	40 54 01.8096518	0.00001504	0.0002670
ICRF J000105.3-155107	2358-161	00 01 05.32873479	-15 51 07.0752302	0.00000702	0.0002261
ICRF J000107.0+605122	2358+605	00 01 07.09981547	60 51 22.7980875	0.00003378	0.0001948
ICRF J000108.6+191433	2358+189	00 01 08.62156616	19 14 33.8017136	0.00000260	0.0000472
ICRF J000211.9-215309	2359-221	00 02 11.98142614	-21 53 09.8655460	0.00001333	0.0004673
ICRF J000315.9-194150	0000-199	00 03 15.94940393	-19 41 50.4018049	0.00000936	0.0002972

Figure 7.5 – Extrait du cadre de référence **ICRF3**.

Source : <https://hpiers.obspm.fr/icrs-pc/newww/icrf/icrf3sx.txt>.

Les coordonnées cartésiennes **ICRF** d'un objet céleste se calculent à partir de l'ascension droite α^{ICRF} , de la déclinaison δ^{ICRF} et de la distance à l'origine s^{ICRF} , de la façon suivante :

$$\mathbf{x}^{\text{ICRF}} = s^{\text{ICRF}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \delta^{\text{ICRF}} \cdot \cos \alpha^{\text{ICRF}} \\ \cos \delta^{\text{ICRF}} \cdot \sin \alpha^{\text{ICRF}} \\ \sin \delta^{\text{ICRF}} \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

Lorsque la distance s^{ICRF} n'est pas connue ou lorsque elle est négligeablement grande, comme pour les quasars, alors nous ne considérons que le vecteur directeur à l'objet céleste, donné par :

$$\mathbf{x}^{\text{ICRF}} = \begin{pmatrix} \cos \delta^{\text{ICRF}} \cdot \cos \alpha^{\text{ICRF}} \\ \cos \delta^{\text{ICRF}} \cdot \sin \alpha^{\text{ICRF}} \\ \sin \delta^{\text{ICRF}} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

5. quasi-stellar radiosource

6. Very Long Baseline Interferometry

Chapitre 8

Systèmes de référence terrestres

Les systèmes de référence terrestres (**TRS**) regroupent l'ensemble des systèmes de référence qui sont liés à la surface de la Terre. Dans ces systèmes, les points sur Terre sont quasiment fixes et leurs coordonnées ne varient presque pas. Néanmoins, de par la précision des méthodes de positionnement global actuelles, les variations de coordonnées dans le temps sont clairement observables. Les variations à grandes échelles (>100 [km]) proviennent principalement des mouvements tectoniques (plusieurs [cm] par année), des rebonds glacières (plusieurs [cm] par année en vertical), ainsi que des marées terrestres (jusqu'à 30 [cm] 2 fois par jour). Aux plus petites échelles les phénomènes localisés de glissements de terrain sont souvent dominants. Pour cette raison, un unique système de référence terrestre pour tous les utilisateurs sur Terre serait peu pratique. En effet, si c'était le cas, il faudrait modifier les coordonnées des points fixes en permanence en fonction du temps.

Comme nous allons le voir, plusieurs systèmes de référence terrestres ont été définis afin de satisfaire les besoins de différents utilisateurs. En Suisse, nous sommes concernés principalement par les systèmes suivants :

- **ITRS**, *International Terrestrial Reference System*. C'est le système terrestre le plus fondamental. Il est relié directement au système céleste ICRS. Il donne également accès aux données de base (orbites,...) utiles aux déterminations GNSS. Les cadres de référence qui lui sont associés sont appelés **ITRFXXXX**. La dernière réalisation officielle est le cadre de référence **IRTF2014**.
- **ETRS89**, *European Terrestrial Reference System*. C'est un système terrestre lié au système ITRS, dans lequel le mouvement principal linéaire de la plaque Eurasienne est réduit. Les cadres de référence qui lui sont associés sont appelés **ETRFXXXX**. Sa dernière réalisation officielle est le cadre de référence **ETRF2014**. Néanmoins, en Suisse, nous utilisons le cadre **ETRF2000** qui offre une meilleure continuité temporelle.
- **CHTRS95**, *Swiss Terrestrial Reference System*. C'est le système terrestre Suisse lié au système **ETRS89**, dans lequel le mouvement principal linéaire global de la Suisse par rapport à la plaque Eurasienne est réduit. Actuellement, il peut être considéré comme étant identique au système **ETRS89**, à une précision mieux que 1 cm. Les cadres de référence qui lui sont associés sont appelés **CHTRFXXXX**. Sa dernière

réalisation est le cadre de référence **CHTRF2016**.

- **CH1903+**. C'est le système terrestre Suisse, lié au système CHTRS95, qui sert de base à la mensuration nationale. Son cadre de référence est appelé **MN95**. C'est le système de référence dans lequel les données de la mensuration officielle sont déterminées. De par son lien direct et précis avec CHTRS95, il est naturellement compatible avec les méthodes de positionnement global modernes.
- **CH1903**. Ce système est l'ancien système terrestre Suisse. Il est lié de façon imprécise et indirecte au système CHTRS95 et donc également aux autres systèmes globaux supérieurs. Son cadre de référence est appelé **MN03**.

8.1 Définition formelle d'un système de référence terrestre

8.1.1 Base orthonormée

De façon générale, un système de référence (**TRS**) se base sur un système de coordonnées cartésiennes orthonormé, défini par son origine et ses vecteurs de base :

$$(\mathbf{o}^{\text{TRS}}, \mathbf{e}_x^{\text{TRS}}, \mathbf{e}_y^{\text{TRS}}, \mathbf{e}_z^{\text{TRS}}) \quad (8.1)$$

Un point dans le système de référence (**TRS**) sera identifié par son vecteur position \mathbf{x}^{TRS} et son vecteur vitesse $\dot{\mathbf{x}}^{\text{TRS}}$. Dans ce contexte, nous admettons que les variations des positions sont très bien modélisées par un mouvement rectiligne uniforme. Dès lors, il est nécessaire de connaître la position $\mathbf{x}^{\text{TRS}}(t_0)$ et la vitesse $\dot{\mathbf{x}}^{\text{TRS}}(t_0)$ des points d'un système de référence (**TRS**) à une époque de référence t_0 , afin de pouvoir prédire leur position et leur vitesse à n'importe quelle époque t . De façon générale, nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}^{\text{TRS}}(t) &= \mathbf{x}^{\text{TRS}}(t_0) + \dot{\mathbf{x}}^{\text{TRS}}(t_0) \cdot (t - t_0) \\ \dot{\mathbf{x}}^{\text{TRS}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}^{\text{TRS}}(t_0) \end{aligned}} \quad (8.2)$$

8.1.2 Transformation entre deux systèmes/cadres de références terrestres

La transformation générale entre deux systèmes (ou cadres) de référence **TRS1** et **TRS2** se fait par une transformation de similitude 3D selon l'équation 2.76. Dans le cas de figure des systèmes de références terrestres, les paramètres de transformations de rotation et facteur d'échelle sont en général très petits et varient linéairement dans le temps. Pour cette raison, il est plus aisné de travailler avec la version linéarisée de l'équation 2.76. Pour les vecteurs de position et de vitesse nous avons :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}^{\text{TRS2}}(t) &= \mathbf{x}^{\text{TRS1}}(t) + \mathbf{t}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) + \delta m_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) \cdot \mathbf{x}^{\text{TRS1}}(t) + \delta \mathbf{R}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) \cdot \mathbf{x}^{\text{TRS1}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}^{\text{TRS2}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}^{\text{TRS1}}(t) + \dot{\mathbf{t}}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) + \delta \dot{m}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) \cdot \mathbf{x}^{\text{TRS1}}(t) + \delta \dot{\mathbf{R}}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) \cdot \mathbf{x}^{\text{TRS1}}(t) \end{aligned}} \quad (8.3)$$

avec le vecteur de translation qui varie linéairement avec le temps :

$$\mathbf{t}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) = \begin{pmatrix} t_x(t) \\ t_y(t) \\ t_z(t) \end{pmatrix}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}} = \begin{pmatrix} t_x(t_0) \\ t_y(t_0) \\ t_z(t_0) \end{pmatrix}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}} + \begin{pmatrix} \dot{t}_x(t_0) \\ \dot{t}_y(t_0) \\ \dot{t}_z(t_0) \end{pmatrix}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}} \cdot (t - t_0) \quad (8.4)$$

le facteur d'échelle différentiel qui varie linéairement avec le temps :

$$\delta m_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) = \delta m_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t_0) + \delta \dot{m}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t_0) \cdot (t - t_0) \quad (8.5)$$

et la matrice de rotation différentielle¹ qui varie linéairement avec le temps :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -\delta\gamma(t) & +\delta\beta(t) \\ +\delta\gamma(t) & 0 & -\delta\alpha(t) \\ -\delta\beta(t) & +\delta\alpha(t) & 0 \end{pmatrix}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\delta\gamma(t_0) & +\delta\beta(t_0) \\ +\delta\gamma(t_0) & 0 & -\delta\alpha(t_0) \\ -\delta\beta(t_0) & +\delta\alpha(t_0) & 0 \end{pmatrix}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}} + \begin{pmatrix} 0 & -\delta\dot{\gamma}(t_0) & +\delta\dot{\beta}(t_0) \\ +\delta\dot{\gamma}(t_0) & 0 & -\delta\dot{\alpha}(t_0) \\ -\delta\dot{\beta}(t_0) & +\delta\dot{\alpha}(t_0) & 0 \end{pmatrix}_{\text{TRS1}}^{\text{TRS2}} \cdot (t - t_0) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Nous voyons donc que de façon générale, il est possible de passer d'un système de référence **TRS1** à un autre système de référence **TRS2** en connaissant les 14 paramètres suivants, définis à l'époque de référence t_0 :

$$\begin{aligned} t_x(t_0) &= \text{translation selon } x \text{ à l'époque } t_0. \\ t_y(t_0) &= \text{translation selon } y \text{ à l'époque } t_0. \\ t_z(t_0) &= \text{translation selon } z \text{ à l'époque } t_0. \\ \dot{t}_x(t_0) &= \text{vitesse de translation selon } x \text{ à l'époque } t_0. \\ \dot{t}_y(t_0) &= \text{vitesse de translation selon } y \text{ à l'époque } t_0. \\ \dot{t}_z(t_0) &= \text{vitesse de translation selon } z \text{ à l'époque } t_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\alpha(t_0) &= \text{rotation selon } x \text{ à l'époque } t_0. \\ \delta\beta(t_0) &= \text{rotation selon } y \text{ à l'époque } t_0. \\ \delta\gamma(t_0) &= \text{rotation selon } z \text{ à l'époque } t_0. \\ \delta\dot{\alpha}(t_0) &= \text{vitesse de rotation selon } x \text{ à l'époque } t_0. \\ \delta\dot{\beta}(t_0) &= \text{vitesse de rotation selon } y \text{ à l'époque } t_0. \\ \delta\dot{\gamma}(t_0) &= \text{vitesse de rotation selon } z \text{ à l'époque } t_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta m(t_0) &= \text{facteur d'échelle à l'époque } t_0. \\ \delta \dot{m}(t_0) &= \text{variation temporelle du facteur d'échelle à l'époque } t_0. \end{aligned}$$

1. La matrice de rotation différentielle donnée ici utilise une convention opposée à celle que l'on dérive à partir de l'équation 2.76.

8.1.3 Paramètres de transformation

Voici une table avec les paramètres de transformation entre différents cadres de références utilisés en Suisse.

TRS1/TRF1	TRS2/TRF2	t_0	t_x	t_y	t_z	$\delta\alpha$	$\delta\beta$	$\delta\gamma$	δm
		[année]	[mm]	[mm]	[mm]	[mas]	[mas]	[mas]	[ppb]
			\dot{t}_x	\dot{t}_y	\dot{t}_z	$\delta\dot{\alpha}$	$\delta\dot{\beta}$	$\delta\dot{\gamma}$	$\delta\dot{m}$
			[$\frac{\text{mm}}{\text{année}}$]	[$\frac{\text{mm}}{\text{année}}$]	[$\frac{\text{mm}}{\text{année}}$]	[$\frac{\text{mas}}{\text{année}}$]	[$\frac{\text{mas}}{\text{année}}$]	[$\frac{\text{mas}}{\text{année}}$]	[$\frac{\text{ppb}}{\text{année}}$]
ITRF2014	ITRF2008	2010.0	1.6 0.0	1.9 0.0	2.4 -0.1	0.000	0.000	0.000	-0.02 0.030
ITRF2014	ITRF1993	2010.0	-50.4 -2.8	3.3 -0.1	-60.2 -2.5	-2.810	-3.380	0.400	4.290 0.12
ITRF2014	ETRF2000	1989.0	54.0 0.0	51.0 0.0	-48.0 0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
ITRF1993	ETRF1993	1989.0	19.0 0.0	53.0 0.0	-21.0 0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
ETRF2000	CHTRF2016	1993.0	0.0 0.0	0.0 0.0	0.0 0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
ETRF1993	CHTRS95	1993.0	0.0 0.0	0.0 0.0	0.0 0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
CHTRF2016	CHTRS95	1993.0	0.0 0.0	0.0 0.0	0.0 0.0	0.000	0.000	0.000	0.000
CHTRS95	CH1903+	1993.0	- 674'374.0 0.0	- 15'056.0 0.0	- 405'346.0 0.0	0.000	0.000	0.000	0.000

8.1.4 Ellipsoïde de référence

On associe généralement un ellipsoïde de révolution à un système de référence particulier. Ceci afin de pouvoir convertir les coordonnées cartésiennes géocentriques (x^{TRS} , y^{TRS} , z^{TRS}) en coordonnées ellipsoïdales (λ^{TRS} , φ^{TRS} , h^{TRS}). Le choix de l'ellipsoïde de référence se fait, selon les cas, de différentes manières. Pour les systèmes de référence terrestres globaux, il découle d'un modèle global du champ de gravité. Pour les systèmes de référence terrestres locaux, il est choisi de telle manière à minimiser les déviations de la verticale de la région concernée. Un ellipsoïde de référence est déterminé par 2 paramètres qui peuvent être de façon équivalente :

- Le demi-grand axe a et le demi-petit axe b de l'ellipsoïde de révolution .
- Le demi-grand axe a et l'aplatissement f de l'ellipsoïde de révolution .
- Le demi-grand axe a et l'excentricité e de l'ellipsoïde de révolution .

8.2 Le système de référence ITRS

Le système **ITRS** (International Terrestrial Reference System) est le système terrestre le plus fondamental utilisé en géodésie. C'est un système géocentrique dont les axes sont

Ellipsoïde	a [m]	b [m]	e [-]	$\frac{1}{f}$ [-]	TRS
GRS80	6'378'137.000	6'356'752.3141	0.08181919104281517	298.257222101	ITRS ETRS89 CHTRS95 WGS84
Bessel 1841	6'377'397.155	6'356'078.9628	0.0816968312225269	299.15281285	CH1903+ CH1903

fixes (en première approximation) par rapport à la surface de la Terre. En simplifiant, $\mathbf{e}_z^{\text{ITRS}}$ est selon l'axe de rotation de la Terre, $\mathbf{e}_x^{\text{ITRS}}$ se trouve dans le plan de l'équateur et dans le méridien de Greenwich, et finalement $\mathbf{e}_y^{\text{ITRS}}$ est dans le plan de l'équateur et perpendiculaire à $\mathbf{e}_x^{\text{ITRS}}$ et $\mathbf{e}_z^{\text{ITRS}}$.

Comme pour le système **ICRS**, il est défini par les conventions de l'IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service). Son origine \mathbf{o}^{ITRS} est fixée au centre de gravité de la Terre (océans et atmosphère inclus), les vecteurs de base $\mathbf{e}_x^{\text{ITRS}}$, $\mathbf{e}_y^{\text{ITRS}}$ et $\mathbf{e}_z^{\text{ITRS}}$ sont fixés de façon conventionnels à l'époque $t = 1984.0$ afin qu'ils correspondent aux axes de l'ancien système de référence défini par le BIH (Bureau International de l'Heure). En d'autres termes, les vecteurs de bases du système **ITRS** sont implicitement fixés à l'époque $t = 1984.0$ afin d'assurer une continuité des coordonnées des points donnés dans le système BIH et les cadres de références **ITRFXXXX**.

8.2.1 Mouvements tectoniques

Afin de résoudre de façon univoque la question de la dépendance de l'orientation des vecteurs de base **ITRS** aux mouvements tectoniques de la surface de la Terre, la condition de *no-net rotation* sur les vitesses horizontales a été choisie. Cette condition à l'avantage de ne pas lier l'orientation de ces vecteurs de base à un point donné de la surface terrestre, mais à la tectonique globale. En effet, si nous avions choisi de fixer, par exemple, la position de l'observatoire de Greenwich dans le temps, donc implicitement son vecteur vitesse à **0**, alors, les vecteurs vitesses de tous les autres points de la Terre seraient relatifs à l'observatoire de Greenwich. Bien que cette approche soit tout à fait envisageable, elle ne serait pas idéale d'un point de vue pratique et théorique. D'un point de vue pratique, il est facile d'imaginer les conséquences sur les positions et les vitesses, des tous les autres points, si un mouvement local de l'observatoire de Greenwich adviendrait. Dans ce cas de figure, ce mouvement local aurait une impact direct sur la position et la vitesse de tous les points différents de l'observatoire de Greenwich. Ce raisonnement est bien entendu généralisable à n'importe quel autre point, ou groupe de points, sur Terre.

Mathématiquement, la condition de *no-net rotation* peut être exprimée de la façon suivante :

$$\iint_{\delta} \mathbf{x}^{\text{ITRS}} \times \mathbf{v}_{\text{hz}}^{\text{ITRS}} \cdot dA = \mathbf{0} \quad (8.7)$$

Cette condition se dérive de la résultante des moments de forces exercés par les forces de frottement des plaques tectoniques sur le manteau. En considérant un élément surfacique

de plaque tectonique dA , dont la force de frottement $d\mathbf{F}$ est proportionnelle à la vitesse horizontale relative au manteau \mathbf{v}_{hz} :

$$d\mathbf{F} = \mu \cdot \mathbf{v}_{hz} \cdot dA \quad (8.8)$$

avec μ le coefficient de frottement dynamique par unité de surface. Ainsi, le moment de force $d\mathbf{M}$ généré par l'élément de surface dA se calcule par :

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \mathbf{x} \times d\mathbf{F} \\ &= \mathbf{x} \times (\mu \cdot \mathbf{v}_{hz} \cdot dA) \\ &= \mu \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{v}_{hz} \cdot dA \end{aligned} \quad (8.9)$$

avec le vecteur position \mathbf{x} de l'élément surfacique dA . Si l'on considère un coefficient de frottement constant sur l'ensemble de la Terre, la résultante des moments de forces \mathbf{M} se trouve par :

$$\mathbf{M} = \iint_{\delta} d\mathbf{M} = \mu \cdot \iint_{\delta} \mathbf{x} \times \mathbf{v}_{hz} \cdot dA \quad (8.10)$$

Cette résultante dépend du système de référence dans lequel les vitesses horizontales \mathbf{v}_{hz} ainsi que les positions \mathbf{x} sont déterminées. Néanmoins, il existe un système de référence dans lequel la résultante \mathbf{M} s'annule, c'est ce système qui a été choisi pour définir **ITRS** :

$$\mathbf{M}^{\text{ITRS}} = \mathbf{0} = \mu \cdot \iint_{\delta} \mathbf{x}^{\text{ITRS}} \times \mathbf{v}_{hz}^{\text{ITRS}} \cdot dA \quad (8.11)$$

qui représente des conditions équivalentes à l'équation 8.7.

8.2.2 Marées terrestres

Le phénomène des marées terrestres déforme la Terre et donc sa surface avec des amplitudes pouvant aller jusqu'à 30 [cm]. Les amplitudes principales sont à des fréquences journalières et semi-journalière. Cela signifie qu'un point sur la surface de la Terre à une position **ITRS** qui pourrait varier de +/- 30 [cm] chaque jour ou demi-jour. Afin d'éviter de devoir modifier les coordonnées des points sur la surface de la Terre en permanance, les coordonnées **ITRS** des points sur Terre sont réduites des variations temporelles des marées terrestres. Cette réduction ne pose pas de problème pratique car les déformations de la croûte terrestre dues aux marées terrestres peuvent être prédites avec une grande précision. D'ailleurs, le modèle mathématique qui doit être utilisé pour prédire ces déformations est donné dans les conventions de l'IERS.

Il existe deux autres phénomènes du même type, mais d'amplitudes bien plus faibles, qui sont définis dans les conventions de l'IERS. Ce sont les déformations de la croûte terrestre dues aux charges océaniques et aux charges atmosphériques.

Il est clair que ces réductions s'appliquent aux points attachés à la surface de la Terre et non aux positions des satellites GNSS par exemple.

8.3 Les cadres de références ITRF

Les cadres de références correspondants aux différentes réalisations du système de référence **ITRS** sont appelés **ITRF** (International Terrestrial Reference Frame). Actuellement il existe 12 réalisations du système **ITRS** :

ITRF89, ITRF90, ITRF91, ITRF92, ITRF93, ITRF94, ITRF96, ITRF97, ITRF2000, ITRF2005, ITRF2008 et ITRF2014

Une réalisation consiste à déterminer la position \mathbf{x}^{ITRF} et la vitesse $\dot{\mathbf{x}}^{\text{ITRF}}$ à une époque de référence t_0 , de points matérialisés à la surface de la Terre. Une réalisation est le résultat de la combinaison des 4 techniques de base de la géodésie spatiale :

1. Very Long Baseline Interferometry (VLBI).
2. Satellite Laser Ranging (SLR).
3. Global Navigation Satelite Systems (GNSS).
4. Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite (DORIS).

Par exemple, le cadre de référence **ITRF2014** contient 1499 points (stations) qui sont répartis sur 975 sites (Figures 8.2 et 8.3), dont environ 10% ont plus de 2 techniques disponibles. Par exemple, la géostation de Zimmerwald dans le canton de Berne, qui fait partie du cadre **ITRF**, dispose de plusieurs antennes GNSS : ZIMM et ZIMM2, ainsi qu'une station de mesure SLR. Un extrait du cadre de référence **ITRF2014** est donné dans la Figure 8.1. Nous pouvons y retrouver la position et la vitesse des différents points de la géostation à Zimmerwald à l'époque $t_0 = 2010.0$, comme par exemple celles de la station GNSS ZIMM :

$$\mathbf{x}_{\text{ZIMM}}^{\text{ITRF2014}}(2010.0) = \begin{pmatrix} 4331296.9927 \\ 567555.9663 \\ 4633133.9907 \end{pmatrix} [\text{m}] \quad \dot{\mathbf{x}}_{\text{ZIMM}}^{\text{ITRF2014}}(2010.0) = \begin{pmatrix} -0.01392 \\ +0.01806 \\ +0.01169 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{année}} \right] \quad (8.12)$$

ITRF2014 STATION POSITIONS AT EPOCH 2010.0 AND VELOCITIES VLBI STATIONS										
DOMES NB.	SITE NAME	TECH. ID.	X/Vx	Y/Vy	Z/Vz	Sigmas				
-----m/m/y-----										
10003M003	Toulouse	VLBI 7608	4627949.8413	119843.9181	4372863.1808	0.0394	0.0353	0.0391		
10003M003			-.01148	0.01934	0.01202	.00198	.00198	.00198		
14001S001	Zimmerwald	SLR 7810	4331283.3113	567549.9584	4633140.2352	0.0007	0.0008	0.0006		
14001S001			-.01392	0.01806	0.01169	.00003	.00004	.00003		
14001M004	Zimmerwald	GNSS ZIMM	4331296.9927	567555.9663	4633133.9907	0.0006	0.0006	0.0005		
14001M004			-.01393	0.01809	0.01169	.00003	.00004	.00003		
14001M006	Zimmerwald	GNSS ZIMJ	4331293.8539	567542.2203	4633135.7774	0.0006	0.0006	0.0006		
14001M006			-.01393	0.01810	0.01168	.00003	.00004	.00003		
14001M008	Zimmerwald	GNSS ZIM2	4331299.8080	567537.4098	4633133.7766	0.0006	0.0006	0.0006		
14001M008			-.01393	0.01810	0.01168	.00003	.00004	.00003		
14014M002	Wabern	GNSS WAB2	4327318.3250	566955.8288	4636425.8268	0.0006	0.0006	0.0005		
14014M002			-.01414	0.01815	0.01112	.00003	.00004	.00003		
97301S006	KOUROU	DORIS KRWB	3855260.4203	-5049735.5530	563056.6395	0.0038	0.0035	0.0023		
97301S006			-.00589	-.00109	0.01443	.00030	.00027	.00020		

Figure 8.1 – Extrait du cadre de référence **ITRF2014**.

Source : <https://itrf.ign.fr/ITRFsolutions/2014/moreITRF2014.php>.

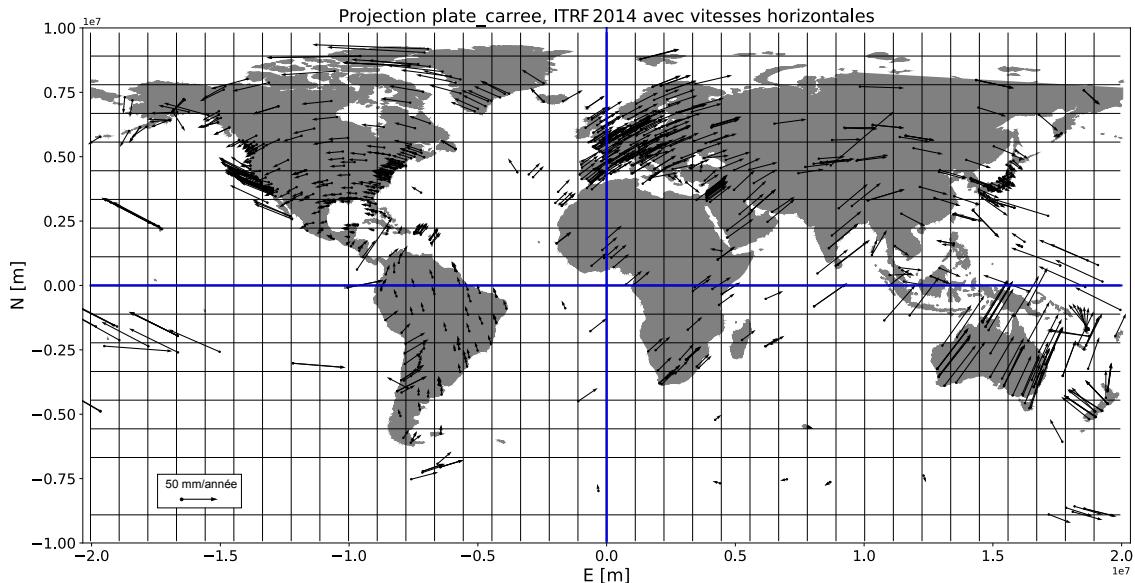


Figure 8.2 – Stations **ITRF2014** et leur vitesse horizontale à l'époque $t_0 = 2010.0$ dans le cadre de référence **ITRF2014**.

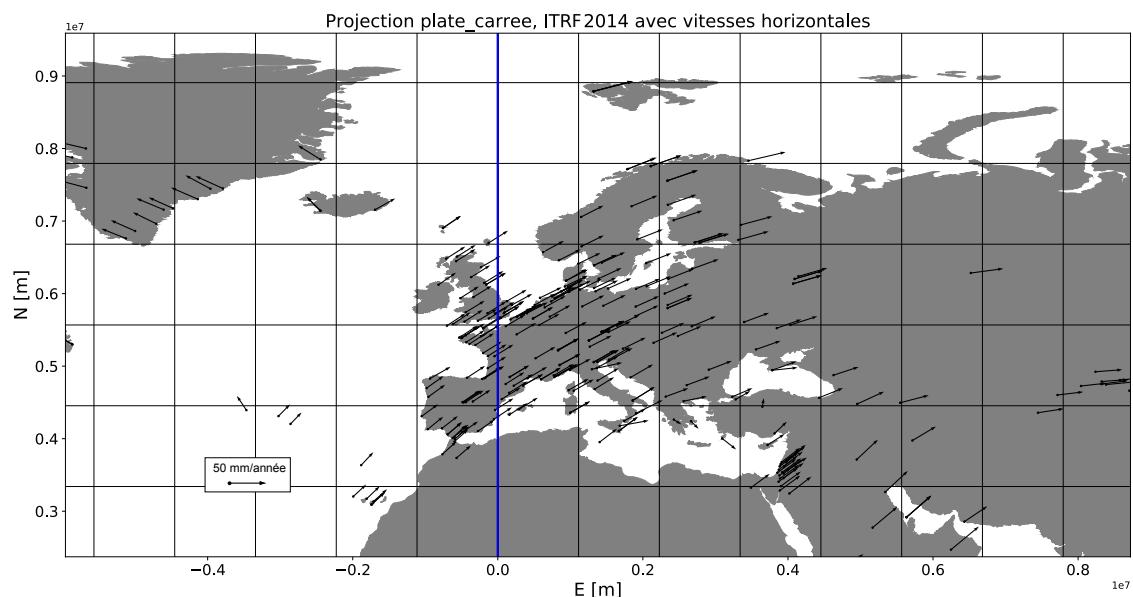


Figure 8.3 – Stations **ITRF2014** et leur vitesse horizontale $t_0 = 2010.0$ dans le cadre de référence **ITRF2014**.

8.4 Le système de référence ETRS89

Le système **ETRS89** (European Terrestrial Reference System) est le système terrestre le plus fondamental utilisé en Europe. C'est un système géocentrique dont les axes sont fixes (en première approximation) par rapport à la surface de la Terre. En simplifiant, $\mathbf{e}_z^{\text{ETRS}}$ est selon l'axe de rotation de la Terre, $\mathbf{e}_x^{\text{ETRS}}$ se trouve dans le plan de l'équateur et dans le méridien de Greenwich, et finalement $\mathbf{e}_y^{\text{ETRS}}$ est dans le plan de l'équateur et perpendiculaire à $\mathbf{e}_x^{\text{ETRS}}$ et $\mathbf{e}_z^{\text{ETRS}}$.

Le système de référence **ETRS89** a été adopté en 1990 par la sous-commission EUREF² de l'IAG³. Le système est défini dans le document de base *EUREF Technical Note 1*. Sa définition est intimement reliée au système **ITRS**. En effet, **ETRS89** est parfaitement aligné (les coordonnées sont identiques, mais pas les vitesses) avec le système **ITRS** à l'époque $t = 1989.0$. De plus, les vecteurs de base sont définis afin que les vitesses des points qui se trouvent sur la partie stable de la plaque eurasienne soient minimales.

8.5 Les cadres de références ETRF

Les cadres de références correspondants aux différentes réalisations du système de référence **ETRS89** sont appelés **ETRF** (European Terrestrial Reference Frame). Actuellement il existe 11 réalisations du système **ETRS89** qui correspondent aux réalisations **ITRF** (sauf pour **ITRF2008**) :

**ETRF89, ETRF90, ETRF91, ETRF92, ETRF93, ETRF94, ETRF96, ETRF97,
ETRF2000, ETRF2005 et ETRF2014**

Ces réalisations sont calculées principalement à partir des stations GNSS considérées comme stables de la plaque eurasienne. Des extraits des cadres de références **ETRF93**, **ETRF2000**, **ETRF2005** et **ETRF2014** pour la géostation de Zimmerwald sont donnés dans la Figure 8.4. Par exemple, le point GNSS ZIMM de la géostation de Zimmerwald, dans le cadre de référence **ETRF93**, à l'époque $t_0 = 1989.0$, est donné par :

$$\mathbf{x}_{\text{ZIMM}}^{\text{ETRF93}}(1989.0) = \begin{pmatrix} 4331297.344 \\ 567555.632 \\ 4633133.707 \end{pmatrix} [\text{m}] \quad \dot{\mathbf{x}}_{\text{ZIMM}}^{\text{ETRF93}}(1989.0) = \begin{pmatrix} -0.0017 \\ +0.0021 \\ -0.0022 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{année}} \right] \quad (8.13)$$

2. Reference Frame Sub-Commission for Europe

3. International Association of Geodesy

ETRF93 STATION POSITIONS AT EPOCH 1989.0 AND VELOCITIES									
DOMES NB.	SITE NAME	TECH. ID.	X/Vx	Y/Vy	Z/Vz	Sigmas			
-----m/m/y-----									
14001M004	Zimmerwald	GNSS ZIMM	4331297.344	567555.632	4633133.707	0.008	0.008	0.009	
14001M004			-0.0017	0.0021	-0.0022	.0019	.0014	.0018	

ETRF2000 STATION POSITIONS AT EPOCH 1989.0 AND VELOCITIES									
DOMES NB.	SITE NAME	TECH. ID.	X/Vx	Y/Vy	Z/Vz	Sigmas			
-----m/m/y-----									
14001M004	Zimmerwald	GNSS ZIMM	4331297.347	567555.633	4633133.717	0.004	0.002	0.004	
14001M004			-0.0007	0.0001	-0.0001	.0004	.0002	.0005	

ETRF2005 STATION POSITIONS AT EPOCH 2000.0 AND VELOCITIES									
DOMES NB.	SITE NAME	TECH. ID.	X/Vx	Y/Vy	Z/Vz	Sigmas			
-----m/m/y-----									
14001M004	Zimmerwald	GNSS ZIMM	4331297.3481	567555.6414	4633133.7268	0.0010	0.0004	0.0010	
14001M004			0.00118	0.00052	0.00195	.00014	.00007	.00015	

ETRF2014 STATION POSITIONS AT EPOCH 2010.0 AND VELOCITIES									
DOMES NB.	SITE NAME	TECH. ID.	X/Vx	Y/Vy	Z/Vz	Sigmas			
-----m/m/y-----									
14001M004	Zimmerwald	GNSS ZIMM	4331297.2877	567555.5866	4633133.7614	0.0006	0.0006	0.0005	
14001M004			0.00012	0.00001	0.00077	.00003	.00004	.00003	

Figure 8.4 – Extraits des cadres de référence ETRF93, ETRF2000, ETRF2005, ETRF2014.
Source : <http://www.euref.eu/eurefegrs.html>.

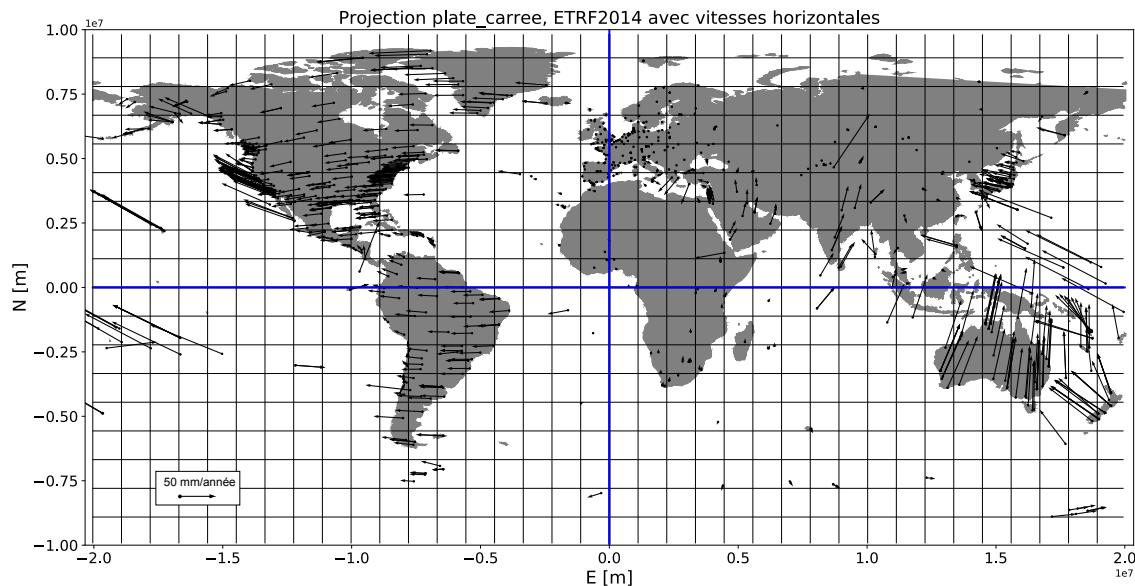


Figure 8.5 – Stations ITRF2014 et leur vitesse horizontale à l'époque $t_0 = 2010.0$ dans le cadre de référence ETRF2014.

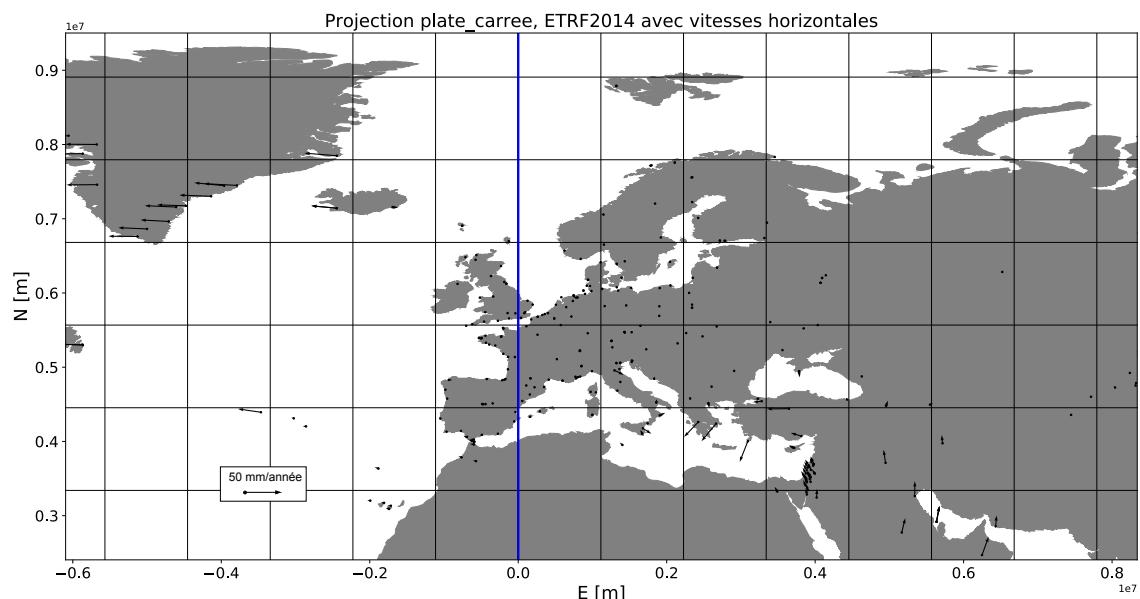


Figure 8.6 – Stations **ITRF2014** et leur vitesse horizontale à l'époque $t_0 = 2010.0$ dans le cadre de référence **ETRF2014**.

8.6 Le système de référence CHTRS95

Le système de référence **CHTRS95** est défini par rapport au système **ETRS89**. Plus rigoureusement, à l'époque $t = 1993.0$, la position **ETRF93** de la cheville au sol, à l'aplomb de la station GNSS ZIMM à Zimmerwald, est identique à la position **CHTRF95** :

$$\mathbf{x}_{\text{ZIMM/CHEV}}^{\text{CHTRF95}}(1993.0) = \mathbf{x}_{\text{ZIMM/CHEV}}^{\text{ETRF93}}(1993.0) = \begin{pmatrix} 4331291.084 \\ 567554.849 \\ 4633127.032 \end{pmatrix} [\text{m}] \quad (8.14)$$

son vecteur vitesse est fixé à **0**

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{ZIMM/CHEV}}^{\text{CHTRF95}}(1993.0) = \begin{pmatrix} +0.000 \\ +0.000 \\ +0.000 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{année}} \right] \quad (8.15)$$

Implicitement, cela signifie aussi que l'origine ainsi que les vecteurs de base des cadres de références **ETRF93** et **CHTRF95** sont identiques à l'époque $t = 1993.0$.

8.7 Le système de référence CH1903+

8.8 Le système de référence CH1903

Chapitre 9

Systèmes de référence locaux

Les systèmes de référence locaux sont liés à la surface de la croûte terrestre et orientés selon la verticale locale. Dans ces systèmes, les observations issues d'instruments de mesures géodésiques peuvent être exprimées facilement en fonction des coordonnées. Nous distinguons principalement deux types de systèmes de référence locaux :

1. Les systèmes topocentriques ellipsoïdaux.
2. Les systèmes topocentriques astronomiques.

9.1 Systèmes topocentriques ellipsoïdaux

Un système topocentrique ellipsoïdal est défini de la façon suivante :

- Son origine \mathbf{o}^{topo} est un point quelconque, en principe c'est un point donné à l'emplacement d'un instrument géodésique centré et horizontalisé.
- Son vecteur de base $\mathbf{e}_z^{\text{topo}}$ est parallèle à la direction normale à l'ellipsoïde en \mathbf{o}^{topo} . Il représente donc une bonne approximation du zénith physique.
- Son vecteur de base $\mathbf{e}_x^{\text{topo}}$ est parallèle au vecteur tangent à l'ellipsoïde en \mathbf{o}^{topo} dans la direction du Nord géographique, c'est à dire dans la direction du méridien local.
- Son vecteur de base $\mathbf{e}_y^{\text{topo}}$ est parallèle au vecteur tangent à l'ellipsoïde en \mathbf{o}^{topo} dans la direction de l'Est géographique, c'est-à-dire dans la direction du parallèle local.

Défini comme ceci, les coordonnées données dans un système topocentrique sont directement reliées aux observations que l'on peut faire localement. Comme par exemple, des observations issues de mesures tachéométriques :

$$\begin{aligned}s^{\text{ell}} &= \sqrt{(x^{\text{topo}})^2 + (y^{\text{topo}})^2 + (z^{\text{topo}})^2} \\ \text{azi}^{\text{ell}} &= \text{atan2}(y^{\text{topo}}, x^{\text{topo}}) \\ \zeta^{\text{ell}} &= \text{atan2}\left(\sqrt{(x^{\text{topo}})^2 + (y^{\text{topo}})^2}, z^{\text{topo}}\right)\end{aligned}\tag{9.1}$$

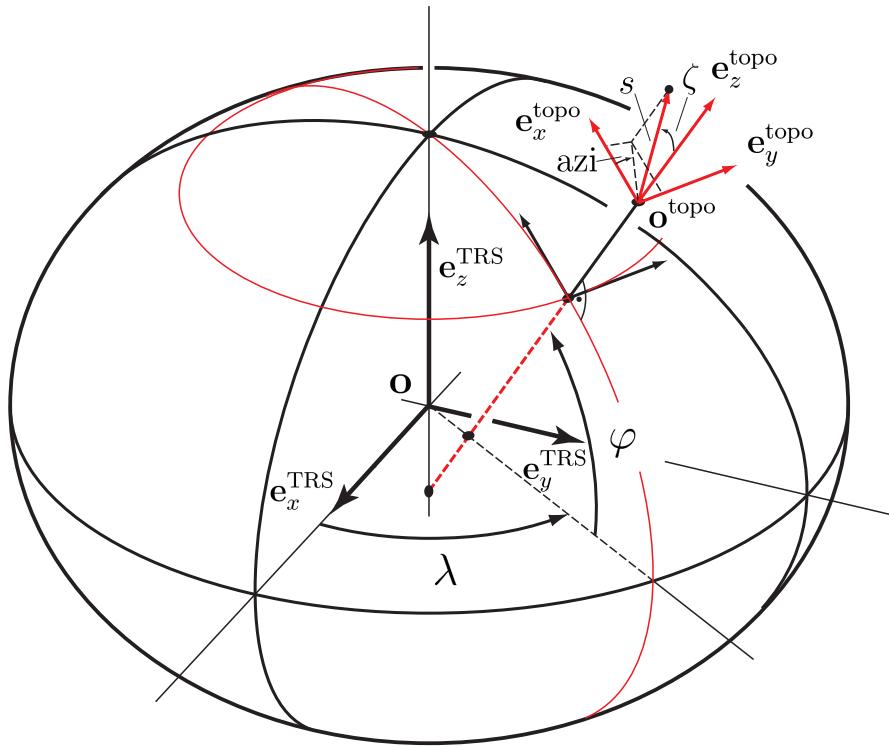


Figure 9.1 – Système de référence terrestre **TRS** et système de référence local topocentrique ellipsoïdal **topo**.

Dès lors, en reliant un système topocentrique **topo** à un système de référence terrestre **TRS**, il est possible de relier des observations faites localement, à des coordonnées données dans un système terrestre global. Il faut néanmoins noter que les systèmes topocentriques ellipsoïdales ne tiennent pas compte du champs de gravité terrestre (de la déviation de la verticale). Ils sont donc moins rigoureux que les systèmes topocentriques astronomiques.

9.1.1 Transformation de coordonnées **TRS** ↔ **topo**

Afin de trouver les formules qui permettent de calculer les coordonnées topocentriques ellipsoïdales à partir des coordonnées données dans le système **TRS**, définissons les vecteurs origine et de base des 2 systèmes. Nous prenons le système **TRS** comme système de coordonnées standards, ce qui définit :

$$\mathbf{o}^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_x^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_y^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_z^{\text{TRS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

et donc :

$$\mathbf{T}^{\text{TRS}} = \left(\mathbf{e}_x^{\text{TRS}} \quad \mathbf{e}_y^{\text{TRS}} \quad \mathbf{e}_z^{\text{TRS}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

Ensuite, nous devons donner les composantes de $(\mathbf{o}^{\text{topo}}, \mathbf{e}_x^{\text{topo}}, \mathbf{e}_y^{\text{topo}}, \mathbf{e}_z^{\text{topo}})$ dans le système **TRS**. Le vecteur de l'origine du système topocentrique, \mathbf{o}^{topo} , est considéré comme étant connu en coordonnée **TRS** avec :

$$\mathbf{o}^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{o}}^{\text{TRS}} \\ y_{\mathbf{o}}^{\text{TRS}} \\ z_{\mathbf{o}}^{\text{TRS}} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Le vecteur $\mathbf{e}_z^{\text{topo}}$ étant défini comme le vecteur normal à l'ellipsoïde au point \mathbf{o}^{topo} , nous avons de l'équation 4.33 :

$$\mathbf{e}_z^{\text{topo}} = \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

les vecteurs $\mathbf{e}_x^{\text{topo}}$ et $\mathbf{e}_y^{\text{topo}}$ sont donnés par les vecteurs tangents à l'ellipsoïde en direction du Nord, et de l'Est géographique. Des équations 5.64 et 5.65 nous avons :

$$\mathbf{e}_x^{\text{topo}} = \frac{\mathbf{t}_\phi}{|\mathbf{t}_\phi|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \varphi \cdot \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

$$\mathbf{e}_y^{\text{topo}} = \frac{\mathbf{t}_\lambda}{|\mathbf{t}_\lambda|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial z(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

et donc :

$$\mathbf{T}^{\text{topo}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x^{\text{topo}} & \mathbf{e}_y^{\text{topo}} & \mathbf{e}_z^{\text{topo}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \varphi \cdot \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Ceci nous permet d'écrire la relation entre les coordonnées des deux systèmes selon l'équation 2.10 :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}^{\text{TRS}})^T \cdot (\mathbf{o}^{\text{topo}} - \mathbf{o}^{\text{TRS}}) + (\mathbf{T}^{\text{TRS}})^T \cdot \mathbf{T}^{\text{topo}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

et donc :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} = \mathbf{o}^{\text{topo}} + \mathbf{T}^{\text{topo}} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

et de façon plus explicite :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathbf{o}}^{\text{TRS}} \\ y_{\mathbf{o}}^{\text{TRS}} \\ z_{\mathbf{o}}^{\text{TRS}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \varphi \cdot \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix}} \quad (9.11)$$

Nous pouvons également exprimer les composantes topocentriques en fonction des composantes géocentriques avec :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & -\sin \varphi \cdot \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cdot \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_o^{\text{TRS}} \\ y_o^{\text{TRS}} \\ z_o^{\text{TRS}} \end{pmatrix} \right] \quad (9.12)$$

9.2 Systèmes topocentriques astronomiques

Un système topocentrique astronomique est défini de la façon suivante :

- Son origine $\mathbf{o}^{\text{topo}^*}$ est un point quelconque, en principe c'est un point donné à l'emplacement d'un instrument géodésique centré et horizontalisé.
- Son vecteur de base $\mathbf{e}_z^{\text{topo}^*}$ est l'opposé du vecteur \mathbf{g} local, en \mathbf{o}^{topo} . Il représente donc le zénith physique.
- Son vecteur de base $\mathbf{e}_x^{\text{topo}^*}$ est parallèle au vecteur tangent à l'équipotentielle en $\mathbf{o}^{\text{topo}^*}$ dans la direction du Nord astronomique, c'est à dire dans la direction du méridien astronomique local.
- Son vecteur de base $\mathbf{e}_y^{\text{topo}^*}$ est parallèle au vecteur tangent à l'équipotentielle en $\mathbf{o}^{\text{topo}^*}$ dans la direction de l'Est astronomique, c'est à dire dans la direction du parallèle astronomique local.

Défini comme ceci, les coordonnées données dans un système topocentrique astronomique sont directement reliées aux observations que l'on peut faire localement. Comme par exemple, des observations issues de mesures tachéométriques :

$$\begin{aligned} s^{\text{astro}} &= \sqrt{(x^{\text{topo}^*})^2 + (y^{\text{topo}^*})^2 + (z^{\text{topo}^*})^2} \\ \text{azi}^{\text{astro}} &= \text{atan2}(y^{\text{topo}^*}, x^{\text{topo}^*}) \\ \zeta^{\text{astro}} &= \text{atan2}\left(\sqrt{(x^{\text{topo}^*})^2 + (y^{\text{topo}^*})^2}, z^{\text{topo}^*}\right) \end{aligned} \quad (9.13)$$

Dès lors, en reliant un système topocentrique topo^* à un système de référence terrestre **TRS**, il est possible de relier des observations faites localement, à des coordonnées données dans un système terrestre global.

9.2.1 Transformation de coordonnées TRS \leftrightarrow topo^{*}

Les formules de transfofrmations sont identiques à celles trouvées pour les systèmes topocentriques, en remplaçant la longitude et la latitude ellipsoïdale (λ, φ), par la longitude et la latitude astronomique (Λ, Φ). Nous avons, dans le système de coordonnées du système

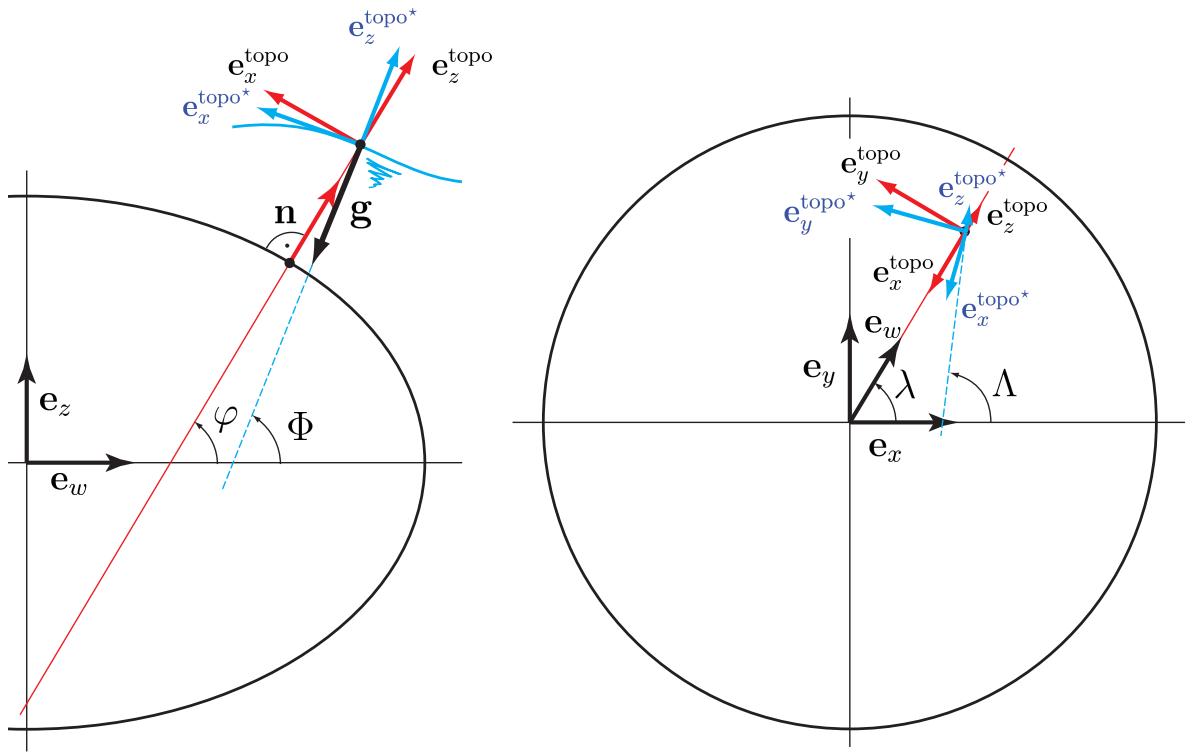


Figure 9.2 – Système de référence terrestre **TRS** et systèmes de référence local topocentrique ellipsoïdal **topo** et astronomique **topo***.

TRS :

$$\mathbf{e}_z^{\text{topo}^*} = -\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} = \begin{pmatrix} \cos \Phi \cdot \cos \Lambda \\ \cos \Phi \cdot \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

les vecteurs $\mathbf{e}_x^{\text{topo}^*}$ et $\mathbf{e}_y^{\text{topo}^*}$ sont donnés par les vecteurs tangents à l'équipotentielle du champs de gravité, passant par le point considéré. Le vecteur tangent $\mathbf{e}_x^{\text{topo}^*}$ pointe en direction du Nord astronomique, et le vecteur tangent $\mathbf{e}_y^{\text{topo}^*}$ pointe vers l'Est astronomique :

$$\mathbf{e}_x^{\text{topo}^*} = \frac{\mathbf{t}_\Phi}{|\mathbf{t}_\Phi|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\Lambda, \Phi)}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y(\Lambda, \Phi)}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial z(\Lambda, \Phi)}{\partial \Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cdot \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \cdot \sin \Lambda \\ \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

$$\mathbf{e}_y^{\text{topo}^*} = \mathbf{e}_x^{\text{topo}^*} \times \mathbf{e}_z^{\text{topo}^*} = \begin{pmatrix} -\sin \Lambda \\ \cos \Lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.16)$$

Ceci nous permet d'écrire la relation entre les coordonnées des deux systèmes selon l'équation 2.10 :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{T}^{\text{TRS}} \right)^T \cdot \left(\mathbf{o}^{\text{topo}^*} - \mathbf{o}^{\text{TRS}} \right) + \left(\mathbf{T}^{\text{TRS}} \right)^T \cdot \mathbf{T}^{\text{topo}^*} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

et donc :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} = \mathbf{o}^{\text{topo}^*} + \mathbf{T}^{\text{topo}^*} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

et de façon plus explicite :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o^{\text{TRS}} \\ y_o^{\text{TRS}} \\ z_o^{\text{TRS}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cdot \cos \Lambda & -\sin \Lambda & \cos \Phi \cdot \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \cdot \sin \Lambda & \cos \Lambda & \cos \Phi \cdot \sin \Lambda \\ \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix}} \quad (9.19)$$

Nous pouvons également exprimer les composantes topocentriques en fonction des composantes géocentriques avec :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cdot \cos \Lambda & -\sin \Phi \cdot \sin \Lambda & \cos \Phi \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ \cos \Phi \cdot \cos \Lambda & \cos \Phi \cdot \sin \Lambda & \sin \Phi \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_o^{\text{TRS}} \\ y_o^{\text{TRS}} \\ z_o^{\text{TRS}} \end{pmatrix} \right]} \quad (9.20)$$

9.2.2 Transformation de coordonnées topo ↔ topo*

En combinant les équations 9.11 et 9.19, il est possible de relier les coordonnées topocentriques ellipsoidales et astronomiques :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\text{topo}^*}(\Lambda, \Phi) \begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}^{\text{topo}}(\lambda, \varphi) \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cdot \cos \Lambda & -\sin \Lambda & \cos \Phi \cdot \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \cdot \sin \Lambda & \cos \Lambda & \cos \Phi \cdot \sin \Lambda \\ \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \varphi \cdot \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.21)$$

et donc les coordonnées topocentriques astronomiques sont reliées aux coordonnées topocentriques ellipsoïdales par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}^{\text{topo}^*}(\Lambda, \Phi)^T \cdot \mathbf{T}^{\text{topo}}(\lambda, \varphi) \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cdot \cos \Lambda & -\sin \Phi \cdot \sin \Lambda & \cos \Phi \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ \cos \Phi \cdot \cos \Lambda & \cos \Phi \cdot \sin \Lambda & \sin \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ -\sin \varphi \cdot \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{T}_{\text{topo}}^{\text{topo}^*}(\lambda, \varphi, \Lambda, \Phi) \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.22)$$

En ne considérant que (Λ, Φ) comme variables, cette relation peut être linéarisée autour de $(\overset{\circ}{\Lambda} = \lambda, \overset{\circ}{\Phi} = \varphi)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{\text{topo}}^{\text{topo}^*}(\Lambda, \Phi) \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_{11}(\Lambda, \Phi) & t_{12}(\Lambda, \Phi) & t_{13}(\Lambda, \Phi) \\ t_{21}(\Lambda, \Phi) & t_{22}(\Lambda, \Phi) & t_{23}(\Lambda, \Phi) \\ t_{31}(\Lambda, \Phi) & t_{32}(\Lambda, \Phi) & t_{33}(\Lambda, \Phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} t_{11}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) & t_{12}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) & t_{13}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) \\ t_{21}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) & t_{22}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) & t_{23}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) \\ t_{31}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) & t_{32}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) & t_{33}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.23)$$

et avec :

$$t_{ij}(\lambda + d\Lambda, \varphi + d\Phi) = t_{ij}(\lambda, \varphi) + \frac{\partial t_{ij}}{\partial \Lambda} \cdot d\Lambda + \frac{\partial t_{ij}}{\partial \Phi} \cdot d\Phi \quad (9.24)$$

ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\sin \varphi \cdot d\Lambda & -d\Phi \\ \sin \varphi \cdot d\Lambda & 1 & -\cos \varphi \cdot d\Lambda \\ d\Phi & \cos \varphi \cdot d\Lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

et en remplaçant $d\Lambda$ par $(\Lambda - \lambda)$ et $d\Phi$ par $(\Phi - \varphi)$, nous trouvons :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -(\Lambda - \lambda) \cdot \sin \varphi & -(\Phi - \varphi) \\ (\Lambda - \lambda) \cdot \sin \varphi & 1 & -(\Lambda - \lambda) \cdot \cos \varphi \\ (\Phi - \varphi) & (\Lambda - \lambda) \cdot \cos \varphi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

dont la matrice correspond à une matrice de rotation de Cardan tridimensionnelle différentielle avec les angles suivants :

$$\begin{aligned} \eta &= (\Lambda - \lambda) \cdot \cos \varphi \\ \xi &= \Phi - \varphi \\ \psi &= (\Lambda - \lambda) \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (9.27)$$

ce qui nous permet finalement d'écrire :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\psi & -\xi \\ \psi & 1 & -\eta \\ \xi & \eta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}} \\ y^{\text{topo}} \\ z^{\text{topo}} \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

Les angles η et ξ sont les composantes Est-Ouest (η) et Sud-Nord (ξ) de la déviation de la verticale. En effet, nous voyons qu'un vecteur vertical dans le système topocentrique ellipsoïdal à les composantes suivantes dans le système topocentrique astronomique :

$$\begin{pmatrix} -\xi \\ -\eta \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{topo}^*} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\psi & -\xi \\ \psi & 1 & -\eta \\ \xi & \eta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{topo}} \quad (9.29)$$

ou inversement, le zenith physique est donné dans le système topocentrique ellipsoïdal par :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{topo}} \approx \begin{pmatrix} 1 & \psi & \xi \\ -\psi & 1 & \eta \\ -\xi & -\eta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{topo}^*} \quad (9.30)$$

9.2.3 Transformation des observations terrestres topo \leftrightarrow topo*

Il est également possible de relier directement les distances, azimuts et angles zénithaux issus des systèmes topocentriques ellipsoïdal et astronomique. Les relations suivantes se trouvent également par un développement limité du premier ordre :

$$\begin{aligned} s^{\text{ell}} &= s^{\text{astro}} \\ \text{azi}^{\text{ell}} &= \text{azi}^{\text{astro}} - \eta \cdot \tan \varphi - (\xi \cdot \sin \text{azi}^{\text{astro}} - \eta \cdot \cos \text{azi}^{\text{astro}}) \cdot \cot \zeta^{\text{astro}} \\ \zeta^{\text{ell}} &= \zeta^{\text{astro}} + (\xi \cdot \cos \text{azi}^{\text{astro}} + \eta \cdot \sin \text{azi}^{\text{astro}}) \end{aligned} \quad (9.31)$$

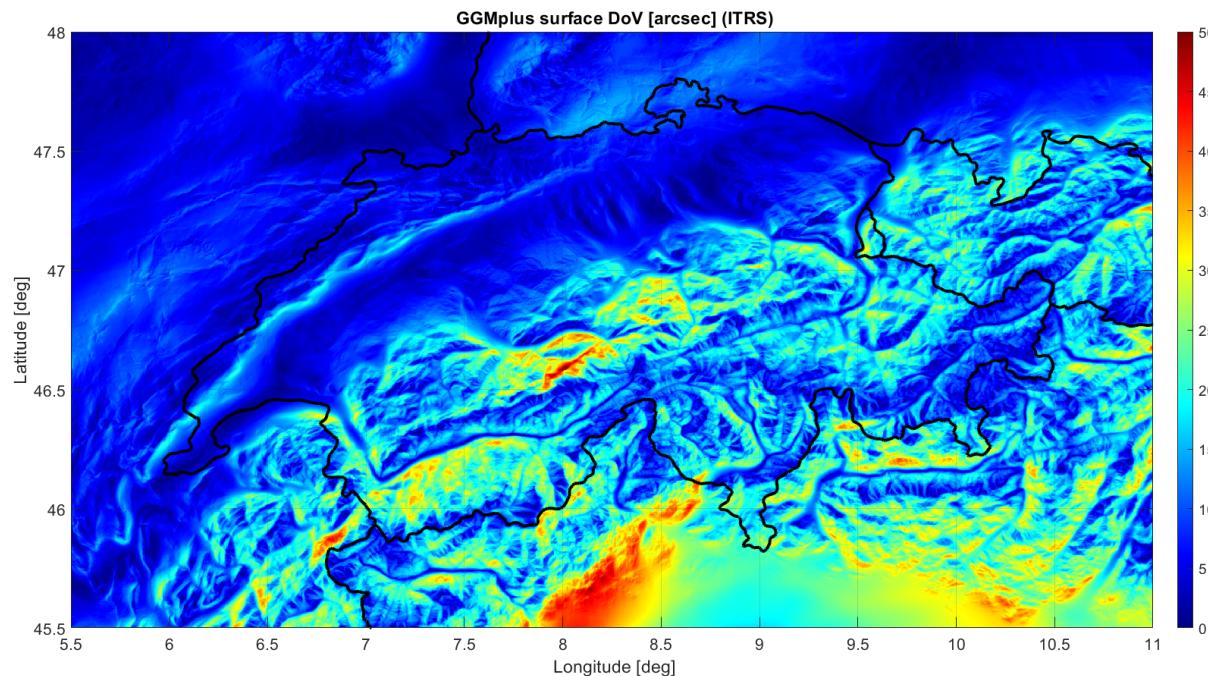


Figure 9.3 – Normes de la déviation de la verticale $\sqrt{\eta^2 + \xi^2}$ calculées à la surface de la topographie. Source des données (GGMplus, Ch. Hirt).

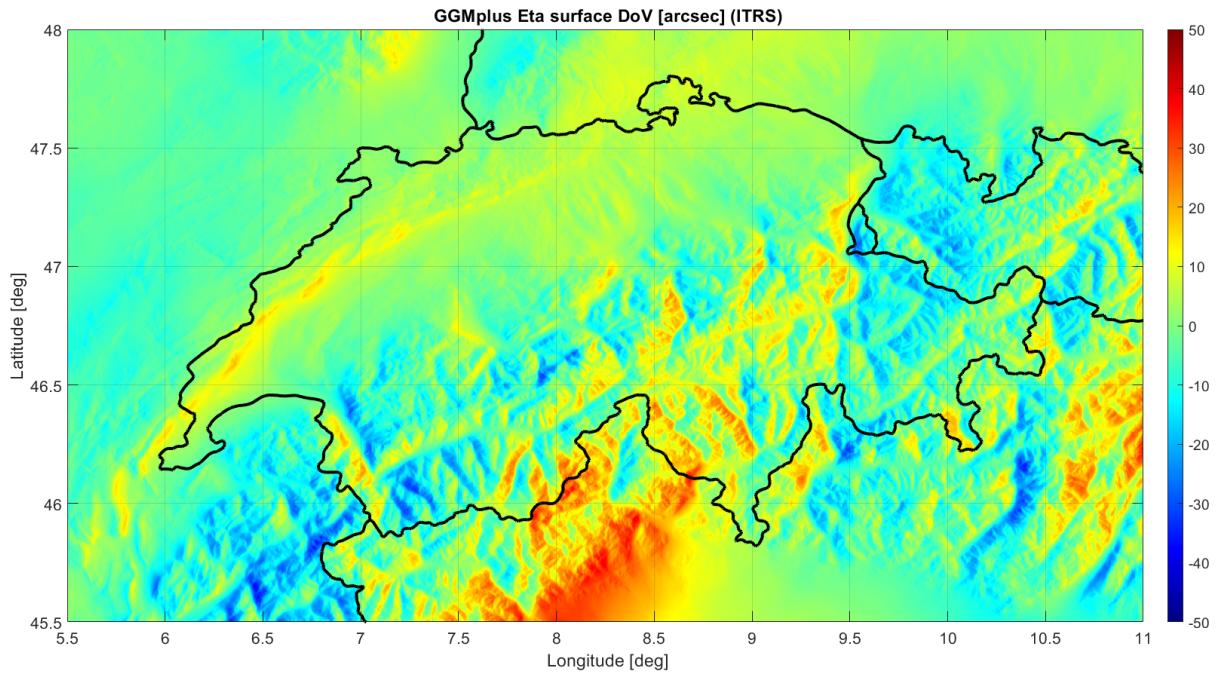


Figure 9.4 – Composantes Est-Ouest de la déviation de la verticale η calculées à la surface de la topographie. Source des données (GGMplus, Ch. Hirt).

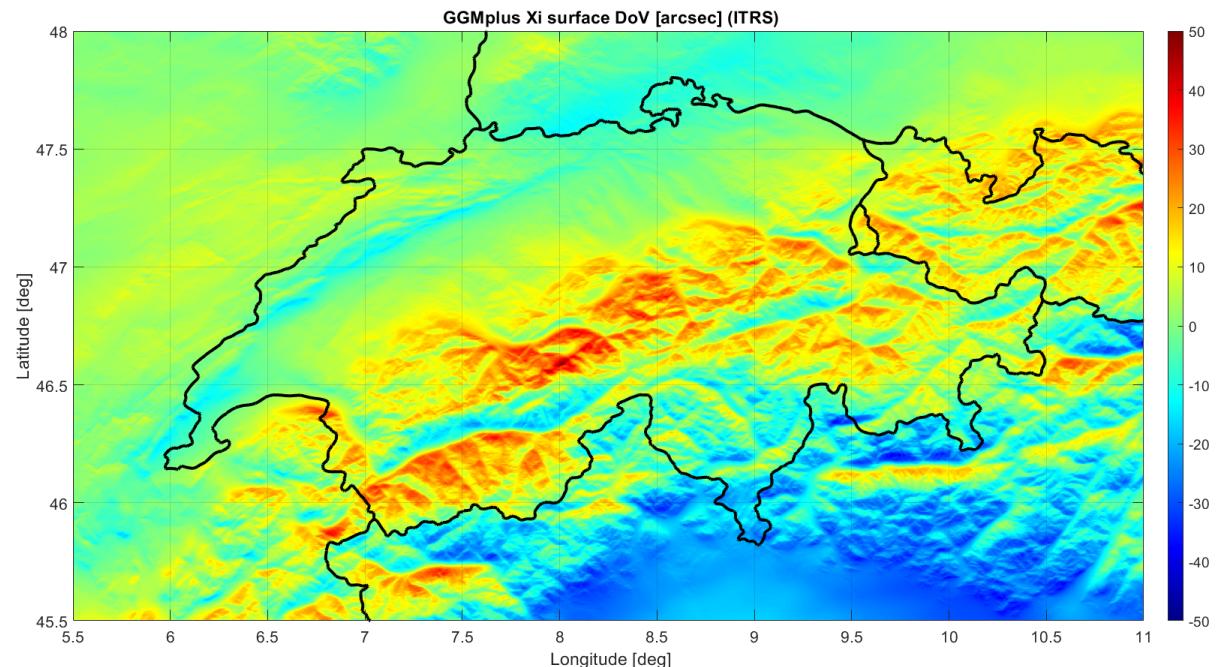


Figure 9.5 – Composantes Sud-Nord de la déviation de la verticale ξ calculées à la surface de la topographie. Source des données (GGMplus, Ch. Hirt).

Troisième partie

Géodésie physique

Chapitre 10

Mécanique classique

10.1 Introduction

Les bases de la géodésie physique prennent leurs racines dans un des livres les plus importants de l'histoire de l'humanité : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*¹, écrit par Isaac Newton et publié en 1687. Ce livre contient les premières formulations mathématiques des célèbres lois de la mécanique classique² ainsi que la loi universelle de la gravitation.

Un premier aspect fondamental des théories de Newton est la définition de l'espace mathématique dans lequel les équations s'écrivent. Le repérage des positions se fait dans un espace Euclidien en trois dimensions. Puis le repérage des événements dans le temps se fait dans l'espace des nombres réels. De plus, la formulation des lois de Newton de base ne sont valables que dans des systèmes de référence bien spécifiques, dynamiquement équivalents, appelés *systèmes de référence inertiels*.

10.2 Lois de Newton dans les systèmes de référence inertiels

10.2.1 Première loi de Newton

La première loi dit que si la résultante des forces extérieures \mathbf{F}_i , en action sur un point matériel, est nulle $\mathbf{0}$, alors la vitesse \mathbf{v} de ce point matériel est constante.

$$\sum_{\forall i} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0} \quad (10.1)$$

En d'autres termes, si la résultante des forces est égale au vecteur nul, alors un point matériel immobile reste immobile. Et si un point matériel est en mouvement, alors son mouvement correspond au mouvement rectiligne uniforme. Cette première loi semble être un cas particulier de la deuxième loi, mais ce n'est pas le cas. En fait, cette loi définit la classe des systèmes dans lequel les lois suivantes sont valables, les systèmes de référence inertiels.

1. en français : les principes mathématiques de la philosophie naturelle.

2. par opposition à la mécanique relativiste.

10.2.2 Deuxième loi de Newton

La version moderne de la deuxième loi de Newton dit que la variation temporelle de la quantité de mouvement \mathbf{p} d'un point matériel, est égale à la somme des forces extérieures \mathbf{F}_i , en action sur ce point matériel.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{\forall i} \mathbf{F}_i \quad (10.2)$$

La quantité de mouvement $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$ est égale au produit de la masse m et de la vitesse \mathbf{v} du point matériel. Souvent, nous utilisons un cas particulier de cette loi, en faisant l'hypothèse que la masse ne varie pas en fonction du temps. Dans ce cas, la deuxième loi se formule de la façon suivante :

$$m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \sum_{\forall i} \mathbf{F}_i \quad (10.3)$$

avec \mathbf{a} qui représente l'accélération et \mathbf{x} le vecteur position du point matériel dans un système de référence inertiel. Nous appelons aussi cette loi : loi du mouvement.

10.2.3 Troisième loi de Newton

La troisième loi dit que, si un objet \mathcal{A} exerce une force $\mathbf{F}_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}$ sur un objet \mathcal{B} , alors \mathcal{B} exerce, de façon simultanée, une force :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}} = -\mathbf{F}_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} \quad (10.4)$$

qui est de même amplitude mais de direction opposée à $\mathbf{F}_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}$. Cela signifie qu'il n'existe que des paires de forces qui agissent de façon simultanées, sur des points matériels ou des objets différents. Nous appelons aussi cette loi : principe d'action-réaction. Elle peut être plus généralement formulée en fonction des quantités de mouvements par :

$$d\mathbf{p}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}} = -d\mathbf{p}_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} \quad (10.5)$$

10.2.4 Transformation entre systèmes de référence inertIELS

Deux systèmes de référence inertIELS i_1 and i_2 ne diffèrent, par définition, que par leurs vecteurs de bases qui varient par une translation rectiligne uniforme. Autrement dit, leur vitesse relative $\mathbf{v}_{i_1}^{i_2}$ est constante. A une époque donnée t , si nous connaissons les coordonnées $\mathbf{x}^{i_1}(t)$ d'un point dans i_1 , alors les coordonnées de ce même point $\mathbf{x}^{i_2}(t)$, dans le système i_2 , si lorsque $t = 0$, les origines des systèmes i_1 et i_2 coïncident, sont données par :

$$\mathbf{x}^{i_2}(t) = \mathbf{x}^{i_1}(t) - \mathbf{v}_{i_1}^{i_2} \cdot t \quad (10.6)$$

De ce cas de figure, il est facile de voir que la deuxième loi de Newton reste invariante pour des translations rectilignes uniformes :

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2\mathbf{x}^{i_2}}{dt^2} &= m \cdot \frac{d}{dt} \left[\dot{\mathbf{x}}^{i_1} - \mathbf{v}_{i_1}^{i_2} \cdot t \right] \\ &\stackrel{\mathbf{v}_{i_1}^{i_2} = \text{cst}}{=} m \cdot \ddot{\mathbf{x}}^{i_1} \\ &= m \cdot \frac{d^2\mathbf{x}^{i_1}}{dt^2} \end{aligned} \quad (10.7)$$

Nous disons aussi que les lois de Newton restent invariantes par transformation de Galilée.

10.3 Deuxième loi de Newton dans les systèmes de référence non-inertiels

Lorsque l'on cherche à appliquer les lois de Newton il serait idéal de les écrire dans un système inertiel, comme le veux la théorie fondamentale. Malheureusement, cela n'est pas toujours simple à faire. Premièrement, comment être certain qu'un système de référence est bien inertiel ? Actuellement, depuis la découverte de la théorie de la relativité générale d'Einstein (1915), nous savons qu'il n'existe conceptuellement pas de systèmes de référence inertIELS globaux, comme les lois de Newton l'exige. Néanmoins, il est possible de trouver des systèmes de référence quasi-inertiels opérationnels, qui apparaissent comme étant inertIELS jusqu'à un certain degré de précision. En fait, le degré d'inertialité d'un système de référence peut se mesurer en observant les forces et les mouvements en action sur des objets, puis en vérifiant que les mouvements correspondent bien aux forces, selon les lois de Newton. Bien évidemment, ce degré d'inertialité sera toujours dépendant de la précision des observations des forces et des mouvements. En géodésie, le système le plus fondamental, qui peut être considéré comme inertiel, du point de vue de la précision des instruments actuels, est le système de référence céleste ICRS (International Celestial Reference System). Ce système de référence céleste est réalisé par des observations sur des galaxies très lointaines, appelées quasars³ grâce à des radio-télescopes et des télescopes spatiaux optiques.

Néanmoins, dans la majorité des cas, nous observons les mouvements et les forces en action sur des objets dans des systèmes de références qui ne sont pas inertIELS. Dès lors, il peut être très utile de reformuler les équations de la dynamique de Newton, surtout la deuxième loi, dans des systèmes non-inertiels. Ceci peut être fait en regardant comment la deuxième loi de Newton se transforme lorsque l'on change passe d'un système de référence inertiel, à un système de référence non-inertiel, appelé aussi système de référence accéléré.

Définissons 2 systèmes de coordonnées cartésiennes :

1. Le système i , inertiel. Qui sera considéré comme le système standard, avec ses vecteurs origine et de base suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}^i &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_x^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \implies \mathbf{T}^i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.8}$$

2. Le système a , accéléré, qui varie dans le temps, avec ses vecteurs origine et de base

3. quasars : quasi-stellar radio source.

dont les composantes sont données dans le système inertiel i :

$$\mathbf{o}^a(t) = \begin{pmatrix} o_x^a(t) \\ o_y^a(t) \\ o_z^a(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_x^a(t) = \begin{pmatrix} e_{xx}^a(t) \\ e_{xy}^a(t) \\ e_{xz}^a(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y^a(t) = \begin{pmatrix} e_{yx}^a(t) \\ e_{yy}^a(t) \\ e_{yz}^a(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z^a(t) = \begin{pmatrix} e_{zx}^a(t) \\ e_{zy}^a(t) \\ e_{zz}^a(t) \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{T}^a(t) = \begin{pmatrix} e_{xx}^a(t) & e_{yx}^a(t) & e_{zx}^a(t) \\ e_{xy}^a(t) & e_{yy}^a(t) & e_{zy}^a(t) \\ e_{xz}^a(t) & e_{yz}^a(t) & e_{zz}^a(t) \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

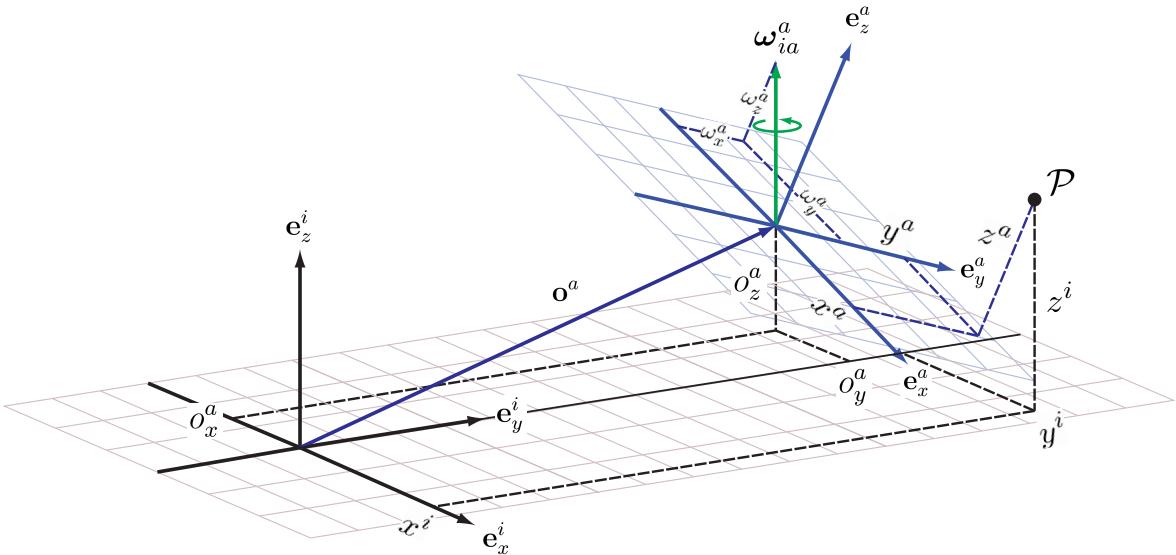


Figure 10.1 – Représentation du système inertiel i et du système accéléré a .

Ainsi, un point matériel \mathcal{P} est représenté par son vecteur de composantes de sa position, dans le système inertiel i , par

$$\mathbf{x}^i(t) = \begin{pmatrix} x^i(t) \\ y^i(t) \\ z^i(t) \end{pmatrix} \quad (10.10)$$

De plus, le vecteur des composantes de la position de \mathcal{P} dans le système accéléré a est donné par :

$$\mathbf{x}^a(t) = \begin{pmatrix} x^a(t) \\ y^a(t) \\ z^a(t) \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

Dès lors nous pouvons écrire la relation qui relie les coordonnées de $\mathbf{x}^i(t)$ et $\mathbf{x}^a(t)$, selon l'équation 2.10, qui, dans notre cas de figure, se simplifie :

$$\begin{pmatrix} x^i(t) \\ y^i(t) \\ z^i(t) \end{pmatrix} = \mathbf{o}^a(t) + \mathbf{T}^a(t) \cdot \begin{pmatrix} x^a(t) \\ y^a(t) \\ z^a(t) \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

ou de façon équivalente, avec le vecteur de translation et la matrice de rotation :

$$\mathbf{x}^i(t) = \mathbf{t}_a^i(t) + \mathbf{R}_a^i(t) \cdot \mathbf{x}^a(t) \quad (10.13)$$

avec :

$$\mathbf{t}_a^i(t) = \mathbf{o}^a(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_a^i(t) = \mathbf{T}^a(t) \quad (10.14)$$

Finalement nous allons utiliser la relation suivante :

$$\boxed{\mathbf{x}^i(t) = \mathbf{o}^a(t) + \mathbf{R}_a^i(t) \cdot \mathbf{x}^a(t)} \quad (10.15)$$

qui fait apparaître directement le vecteur origine du système accéléré a (avec les composantes dans le système i), ainsi que la matrice de rotation du système a à i . De façon plus explicite, nous pouvons écrire l'équation 10.15 de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x^i(t) \\ y^i(t) \\ z^i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_x^a(t) \\ o_y^a(t) \\ o_z^a(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{a11}^i(t) & r_{a12}^i(t) & r_{a13}^i(t) \\ r_{a21}^i(t) & r_{a22}^i(t) & r_{a23}^i(t) \\ r_{a31}^i(t) & r_{a32}^i(t) & r_{a33}^i(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^a(t) \\ y^a(t) \\ z^a(t) \end{pmatrix} \quad (10.16)$$

A partir de ces relations, il est possible d'écrire la deuxième loi de Newton dans le système de référence inertiel :

$$m \cdot \ddot{\mathbf{x}}^i = \sum_{\forall n} \mathbf{F}_n^i \quad (10.17)$$

Pour ce faire, il est nécessaire de calculer le vecteur accélération $\ddot{\mathbf{x}}^i$ par double dérivation temporelle. Tout d'abord, le vecteur vitesse $\dot{\mathbf{x}}^i(t)$ peut être trouvé en dérivant l'équation 10.15 par rapport au temps t :

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \dot{\mathbf{o}}^a + \dot{\mathbf{R}}_a^i \cdot \mathbf{x}^a + \mathbf{R}_a^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^a \quad (10.18)$$

et l'accélération se trouve en dérivant l'équation 10.18 par rapport au temps t :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}^i &= \ddot{\mathbf{o}}^a + \ddot{\mathbf{R}}_a^i \cdot \mathbf{x}^a + \dot{\mathbf{R}}_a^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^a + \dot{\mathbf{R}}_a^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^a + \mathbf{R}_a^i \cdot \ddot{\mathbf{x}}^a \\ &= \ddot{\mathbf{o}}^a + \ddot{\mathbf{R}}_a^i \cdot \mathbf{x}^a + 2 \cdot \dot{\mathbf{R}}_a^i \cdot \dot{\mathbf{x}}^a + \mathbf{R}_a^i \cdot \ddot{\mathbf{x}}^a \end{aligned} \quad (10.19)$$

et en introduisant les relations suivantes (équation 2.74) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_a^i &= \mathbf{R}_a^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \\ \ddot{\mathbf{R}}_a^i &= \mathbf{R}_a^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a + \mathbf{R}_a^i \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \end{aligned} \quad (10.20)$$

dans l'équation 10.19, nous trouvons :

$$\ddot{\mathbf{x}}^i = \ddot{\mathbf{o}}^a + \mathbf{R}_a^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + \mathbf{R}_a^i \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + 2 \cdot \mathbf{R}_a^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a + \mathbf{R}_a^i \cdot \ddot{\mathbf{x}}^a \quad (10.21)$$

dont la matrice de vitesse angulaire anti-symétrique :

$$\boldsymbol{\Omega}_{ia}^a = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^a & +\omega_y^a \\ +\omega_z^a & 0 & -\omega_x^a \\ -\omega_y^a & +\omega_x^a & 0 \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

contient les composantes du vecteur de vitesse angulaire instantanée $\boldsymbol{\omega}_{ia}^a$, qui représente le vecteur de vitesse angulaire du référentiel accéléré a par rapport au référentiel inertiel i , avec les composantes données dans le référentiel accéléré a :

$$\boldsymbol{\omega}_{ia}^a = \begin{pmatrix} \omega_x^a \\ \omega_y^a \\ \omega_z^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{ia\,x}^a \\ \omega_{ia\,y}^a \\ \omega_{ia\,z}^a \end{pmatrix} \quad (10.23)$$

Ceci nous permet d'écrire la deuxième loi de Newton de la façon suivante :

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{\mathbf{x}}^i &= \sum \mathbf{F}^i \\ &= m \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a + m \cdot \mathbf{R}_a^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + m \cdot \mathbf{R}_a^i \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + 2m \cdot \mathbf{R}_a^i \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a + m \cdot \mathbf{R}_a^i \cdot \ddot{\mathbf{x}}^a \end{aligned} \quad (10.24)$$

En appliquant la matrice de rotation inverse $\mathbf{R}_i^a = (\mathbf{R}_a^i)^T$ et en multipliant le tout par $\frac{1}{m}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^a \cdot \ddot{\mathbf{x}}^i &= \frac{1}{m} \mathbf{R}_i^a \cdot \sum \mathbf{F}^i = \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}^a \\ &= \mathbf{R}_i^a \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a + \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + 2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a + \ddot{\mathbf{x}}^a \end{aligned} \quad (10.25)$$

qui peut être réarrangée de telle façon à isoler $\ddot{\mathbf{x}}^a$:

$$\boxed{\ddot{\mathbf{x}}^a = \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}^a - \mathbf{R}_i^a \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a - \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a - 2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a} \quad (10.26)$$

Cette équation représente la deuxième loi de Newton dans les systèmes non-inertIELS, ou accélérés. En la regardant de plus près, nous pouvons voir apparaître 6 termes distincts :

1. $\ddot{\mathbf{x}}^a$ représente les composantes, dans le système a , de l'accélération du point matériel \mathcal{P} . Il est important de bien comprendre que ce terme ne représente pas l'accélération qui est ressentie par un senseur ou un observateur fixé sur \mathcal{P} . Ce terme représente simplement l'accélération de \mathcal{P} dans le système a , qui peut être déterminée par double dérivation des composantes de $\mathbf{x}^a(t)$ par rapport au temps t .
2. $\frac{1}{m} \sum \mathbf{F}^a$ est la somme des forces réelles \mathbf{F}^a en action sur \mathcal{P} , divisé par la masse m de \mathcal{P} , dont les composantes sont données dans le système a . Les forces dites réelles sont la somme des forces gravitationnelles, électromagnétiques, nucléaires, ainsi que les forces induites par l'échange de quantité de mouvement avec d'autres points matériels ou d'autres objets qui rentrent en contact avec \mathcal{P} . Ce terme ne représente toujours pas l'accélération qui est ressentie ou mesurée par un observateur fixé sur \mathcal{P} . L'accélération ressentie ou observée en \mathcal{P} est appelée *la force spécifique* — ou encore *l'accélération propre*. Ce terme n'apparaît pas explicitement dans l'équation 10.26. En fait, l'accélération propre, notée $\mathbf{a}_{\text{obs}}^a$, est la somme de toutes les forces

non-gravitationnelles, divisée par la masse m . Elle peut aussi être interprétée comme étant l'accélération relative à la chute libre. Formellement elle peut s'écrire, dans le système inertiel :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{obs}}^i &= \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}^i - \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^i \\ &= \ddot{\mathbf{x}}^i - \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^i\end{aligned}\quad (10.27)$$

ou dans le système accéléré :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{obs}}^a &= \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}^a - \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^a \\ &= \mathbf{R}_i^a \cdot \mathbf{a}_{\text{obs}}^i\end{aligned}\quad (10.28)$$

et en combinant les équations et 10.26 et 10.28 nous obtenons une relation qui nous permet de calculer l'accélération propre, ressentie en \mathcal{P} , dans le système de coordonnées a , à partir des vecteurs connus dans a :

$$\boxed{\mathbf{a}_{\text{obs}}^a = \ddot{\mathbf{x}}^a - \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^a + \mathbf{R}_i^a \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a + \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + 2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a} \quad (10.29)$$

3. $-\mathbf{R}_i^a \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a$ représente les composantes de l'origine du système a , dont les composantes sont tournées parallèlement au système a . Cette accélération ne dépend pas de la position ou de la vitesse de \mathcal{P} , mais seulement de l'accélération relative de l'origine du système a par rapport au système i .
4. $-\boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a$ représente *l'accélération centrifuge*. Ce terme est non-nul si le système a est en rotation par rapport au système i , et si \mathcal{P} n'est pas situé sur l'axe de rotation défini par le vecteur de vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{ia}^a$.
5. $-\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a$ représente *l'accélération d'Euler*. Ce terme est non-nul si le vecteur de rotation angulaire entre les systèmes a et i varie avec le temps.
6. $-2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a$ représente *l'accélération de Coriolis*. Ce terme est non-nul si le système a est en rotation par rapport au système i , et si le point matériel \mathcal{P} est en mouvement par rapport au système a .

Chapitre 11

Loi de la gravitation universelle de Newton

La découverte de la loi de la gravitation universelle est un des événements les plus importants de l'histoire des sciences. Pour la première fois, elle pu unifier la description de phénomènes observés sur Terre et dans l'univers. Grâce à son génie, Newton, fût capable d'identifier le principe fondamental qui permet d'expliquer, par la même théorie, la chute des corps sur Terre, la révolution de la Terre autour du Soleil, la révolution de la Lune autour de la Terre ou le phénomène des marées. Ce phénomène unificateur est la force gravitationnelle qui agit sur toutes les particules massives. Si l'on considère deux particules

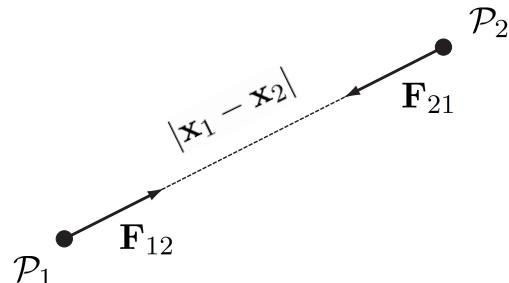


Figure 11.1 – Loi de la gravitation universelle de Newton.

\mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , de masse m_1 et m_2 ; alors la force gravitationnelle \mathbf{F}_{12} , est la force en action sur \mathcal{P}_1 générée par son interaction gravitationnelle avec \mathcal{P}_2 . Elle est proportionnelle aux produits des masses m_1 et m_2 et inversément proportionnelle au carré de la distance entre \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Le facteur de proportionnalité est la *constante de gravitation*, notée G . Formellement, la loi s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_{12} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \quad (11.1)$$

avec \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 qui représentent les positions des particules \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . De façon équivalente, la force gravitationnelle en action sur \mathcal{P}_2 générée par son interaction avec \mathcal{P}_1 , est donnée par :

$$\mathbf{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \quad (11.2)$$

ceci implique que :

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (11.3)$$

Cette loi est universelle et s'exprime de la même façon dans tous les systèmes de référence, inertiels et non-inertiels. En d'autres termes, tous les observateurs observent les mêmes forces gravitationnelles.

11.1 Le principe de superposition

Le principe de superposition du champ de force généré par la force gravitationnelle est une propriété très importante. Ce principe signifie que la force gravitationnelle \mathbf{F}_{1S} causé

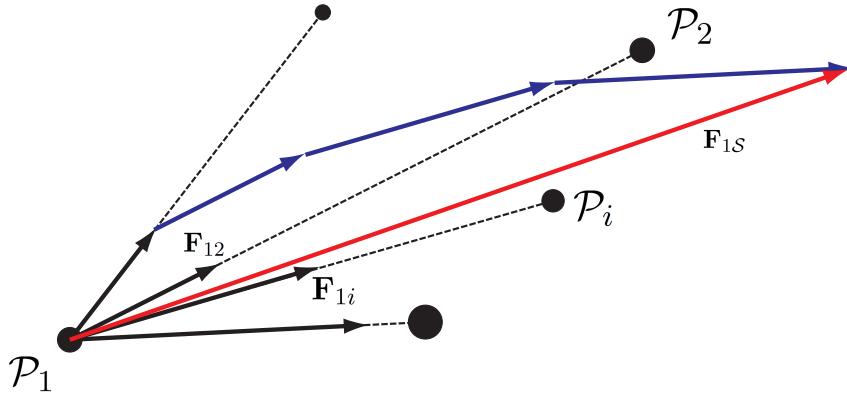


Figure 11.2 – Loi de la gravitation universelle de Newton.

par un ensemble $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_i, \dots, \mathcal{P}_{N+1}\}$, de N particules individuelles, en action sur une particule \mathcal{P}_1 , est simplement la somme des forces gravitationnelles individuelles des particules \mathcal{P}_i sur \mathcal{P}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1S} &= \sum_{i=2}^{N+1} \mathbf{F}_{1i} \\ &= \sum_{i=2}^{N+1} G \cdot \frac{m_1 \cdot m_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1|} \\ &= G \cdot m_1 \cdot \sum_{i=2}^{N+1} \frac{m_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1|} \end{aligned} \quad (11.4)$$

Ce principe peut se généraliser aux objets ou au corps continu \mathcal{B} , d'enveloppe extérieure $\partial\mathcal{B}$, qui contient un nombre de particule qui tend vers l'infini, $N \rightarrow \infty$, et dont leur masse tend vers zéro $m_i \rightarrow 0$. Lorsque l'on passe à la limite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1B} &= G \cdot m_1 \cdot \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ m_i \rightarrow 0}} \left\{ \sum_{i=2}^{N+1} \frac{m_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1|} \right\} \\ &= G \cdot m_1 \cdot \iiint_{\mathcal{B}} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1|} \cdot dm(\mathbf{x}') \\ &= G \cdot m_1 \cdot \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1|^3} \cdot dm(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (11.5)$$

et en introduisant le champ de masse volumique $\rho(\mathbf{x}')$, relié à l'élément différentiel de masse dm par :

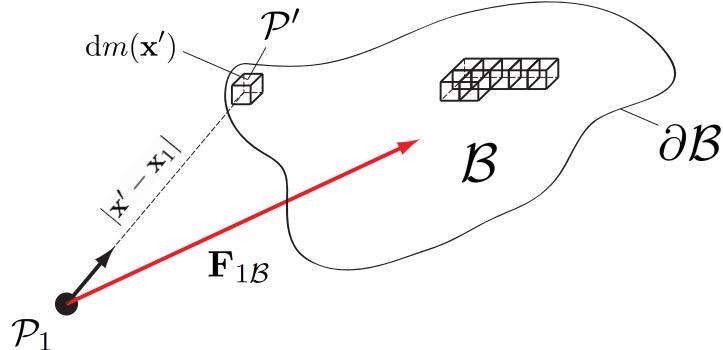


Figure 11.3 – Loi de la gravitation universelle de Newton.

$$dm(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \quad (11.6)$$

avec dV l'élément différentiel de volume, nous obtenons finalement :

$$\mathbf{F}_{1\mathcal{B}} = G \cdot m_1 \cdot \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_1|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \quad (11.7)$$

avec :

$\mathbf{F}_{1\mathcal{B}}$	$\left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right]$	=	force gravitationnelle en action sur P_1 , causé par le corps \mathcal{B} .
G	$\left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right]$	=	la constante de gravitation universelle ($= 6.67408 \cdot 10^{-11}$).
m_1	[kg]	=	masse de la particule P_1 .
$\rho(\mathbf{x}')$	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	=	masse volumique à la position \mathbf{x}' .
dV	$[\text{m}^3]$	=	élément différentiel de volume.
\mathbf{x}_1	[m]	=	position de la particule P_1 .
\mathbf{x}'	[m]	=	position de P' .

11.2 Le champ gravitationnel

Le champ gravitationnel généré par un corps \mathcal{B} est défini comme étant le champ vectoriel des forces de gravitation générées par \mathcal{B} sur une particule de masse unitaire en tous points \mathbf{x} . De l'équation 11.7, avec $m_1 = 1$, et $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}$, nous obtenons :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = G \cdot \iiint_{\mathcal{B}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \quad (11.8)$$

11.3 Théorème de Gauss pour les champs gravitationnels

Un théorème remarquable qui découle directement de l'équation 11.8 nous permet de déterminer facilement le champ gravitationnel généré par des corps simples. Il s'écrit :

$$\iint_S \mathbf{F}_B(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM_{\text{interieur}} \quad (11.9)$$

avec \mathcal{S} une surface fermée quelconque, $d\mathbf{S}$ le vecteur normal (qui pointe vers l'extérieur) à la surface \mathcal{S} et normé par l'élément différentiel de surface, et $M_{\text{interieur}}$ la masse totale à l'intérieur de \mathcal{S} .

11.4 Champ gravitationnel généré par une boule homogène

A partir du théorème de Gauss, il est facile de trouver le champ gravitationnel généré par une boule homogène B de rayon R et de masse M .

11.4.1 Champ gravitationnel à l'extérieur de la boule

De par la symétrie sphérique du problème, nous pouvons admettre que le champ varie uniquement selon la distance r du point considéré au centre de la sphère. Nous pouvons donc définir la surface \mathcal{S} comme une sphère, centrée au centre de la boule de rayon $r \geq R$. Nous pouvons donc écrire le théorème de Gauss de la façon suivante :

$$\iint_S \mathbf{F}_B(r) \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM_{\text{interieur}} \quad (11.10)$$

Le champ $\mathbf{F}_B(r)$ et le vecteur $d\mathbf{S}$ étant parallèle en tous points sur la surface \mathcal{S} , il est possible d'écrire :

$$\iint_S F_B(r) \cdot dS = -4\pi GM_{\text{interieur}} \quad (11.11)$$

De plus, comme $F_B(r)$ ne dépend que de r , alors ce terme est constant sur toute la surface \mathcal{S} , nous avons donc :

$$F_B(r) \cdot \iint_S dS = -4\pi GM_{\text{interieur}} \quad (11.12)$$

Puis en introduisant la surface de la surface \mathcal{S} , nous avons :

$$F_B(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi GM_{\text{interieur}} \quad (11.13)$$

Et en isolant la variable du champ gravitationnel :

$$\begin{aligned} F_B(r) &= \frac{-4\pi GM_{\text{interieur}}}{4\pi r^2} \\ &= -\frac{GM_{\text{interieur}}}{r^2} \end{aligned} \quad (11.14)$$

et puisque nous considérons que des surface \mathcal{S} extérieurs à la boule, alors la masse totale à l'intérieur de \mathcal{S} est toujours la masse totale de la boule :

$$\begin{aligned} F_B(r) &= \frac{-4\pi GM_{\text{interieur}}}{4\pi r^2} \\ &= -\frac{GM}{r^2} \end{aligned} \quad (11.15)$$

le signe (-) signifie que $\mathbf{F}_B(r)$ est dans le sens opposé de $d\mathbf{S}$. Donc $\mathbf{F}_B(r)$ pointe bien en direction du centre de la boule. Nous remarquons aussi que le champ est identique au champ généré par une masse ponctuelle de masse M , positionnée au centre de la boule. Finalement, le champ vectoriel à l'extérieur de la boule s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_B(\mathbf{x}) &= -\frac{GM}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B|^2} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_B}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B|} \\ &= +\frac{GM}{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}_B - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}|}\end{aligned}\quad (11.16)$$

avec \mathbf{x}_B la vecteur position du centre de la boule.

11.4.2 Champ gravitationnel à l'intérieur de la boule

En utilisant la même démarche, il est possible de déterminer le champ gravitationnel pour des points situés à l'intérieur de la boule homogène. Pour cela, nous pouvons repartir de l'équation 11.14, et considérer le cas de figure lorsque $r < R$:

$$F_B(r) = -\frac{GM_{\text{intérieur}}}{r^2} \quad (11.17)$$

Dans ce cas, la masse à l'intérieur de la boule n'est plus la masse totale de la boule, mais la masse de la boule à l'intérieur de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}F_B(r) &= -\frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_B \\ &= -G\frac{4}{3}\pi\rho_B \cdot r\end{aligned}\quad (11.18)$$

avec ρ_B , la masse volumique de la boule. Finalement, le champ vectoriel à l'intérieur de la boule s'écrit :

$$\mathbf{F}_B(\mathbf{x}) = -G\frac{4}{3}\pi\rho_B \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \quad (11.19)$$

avec \mathbf{x}_B la vecteur position du centre de la boule.

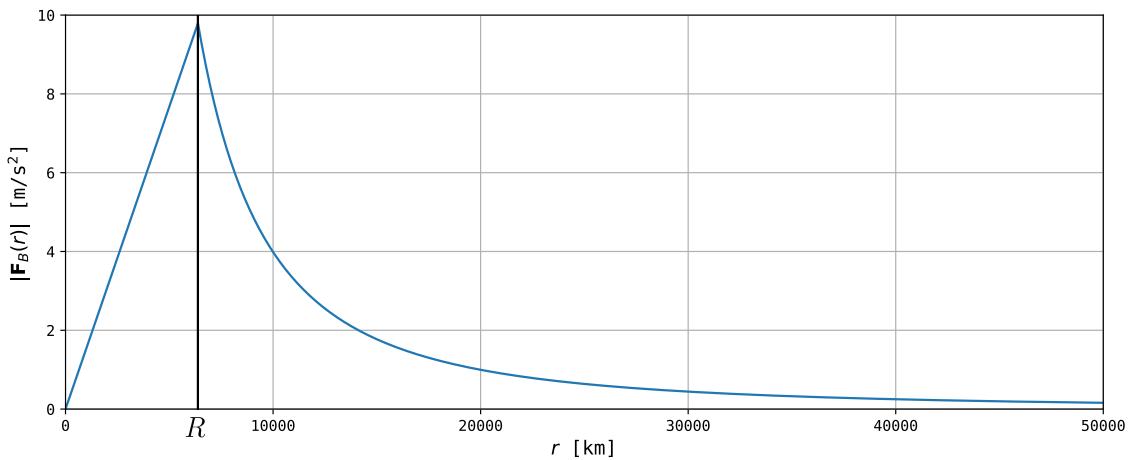


Figure 11.4 – Champ gravitationnel d'une boule homogène $|\mathbf{F}_B(\mathbf{r})|$ de rayon $R = 6370$ [km], de masse totale $M_B = 5.972 \cdot 10^{24}$ [kg].

Chapitre 12

Le champ de gravité

En combinant la deuxième loi de Newton dans les référentiels non-inertiels ainsi que la loi de la gravitation universelle, il est possible de prédire la force spécifique que subit un point matériel attaché sur Terre. Cette force spécifique est également la quantité qui est directement mesurée par un accéléromètre, un gravimètre, une caméra zénithale, ou encore la quantité qui définit l'horizon, c'est à dire la surface d'équilibre d'un liquide au repos. Comme nous le verrons, ce que nous appelons la gravité est en fait l'opposé de la force spécifique¹, si la force spécifique est l'action, alors la gravité est la réaction.

12.1 Système Terre-Soleil-Lune - \mathcal{P} fixe sur la Terre

Nous allons faire les hypothèses suivantes :

1. L'univers ne contient que la Terre \oplus , le Soleil \odot et la Lune $\oplus\!\!\!\odot$.
2. Le système de coordonnées inertiel est centré au centre de masse du système Terre-Soleil-Lune.
3. Le système de coordonnées inertiel à ces axes fixes par rapport aux étoiles lointaines. Son axe \mathbf{e}_z^i est confondu avec l'axe de rotation de la Terre, qui est fixe par rapport aux étoiles.
4. Le système de coordonnées inertiel à ses axes fixes par rapport aux étoiles lointaines.
5. Le système de coordonnées accéléré à son origine au centre de masse de la Terre.
6. L'axe \mathbf{e}_z^a du système de coordonnées accéléré est identique à l'axe \mathbf{e}_z^i du système inertiel. C'est l'axe de rotation de la Terre.
7. Les axes \mathbf{e}_x^a et \mathbf{e}_y^a du système de coordonnées accéléré tournent avec la Terre.
8. La vitesse angulaire de rotation de la Terre ω_\oplus est constante. L'axe de rotation est confondu avec les axes \mathbf{e}_z^a et \mathbf{e}_z^i .
9. Nous analysons l'accélération spécifique $\mathbf{a}_{\text{obs}}^a$, observée au point \mathcal{P} , dont la position \mathbf{x}^a est considérée comme fixe par rapport au système terrestre.

En reprenant l'équation générale de la force spécifique² 10.29 :

$$\mathbf{a}_{\text{obs}}^a = \ddot{\mathbf{x}}^a - \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^a + \mathbf{R}_i^a \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a + \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + 2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a \quad (12.1)$$

-
1. dans le cas particulier d'un point fixe par rapport à la Terre.
 2. qui devrait plutôt être appelée *accélération spécifique*.

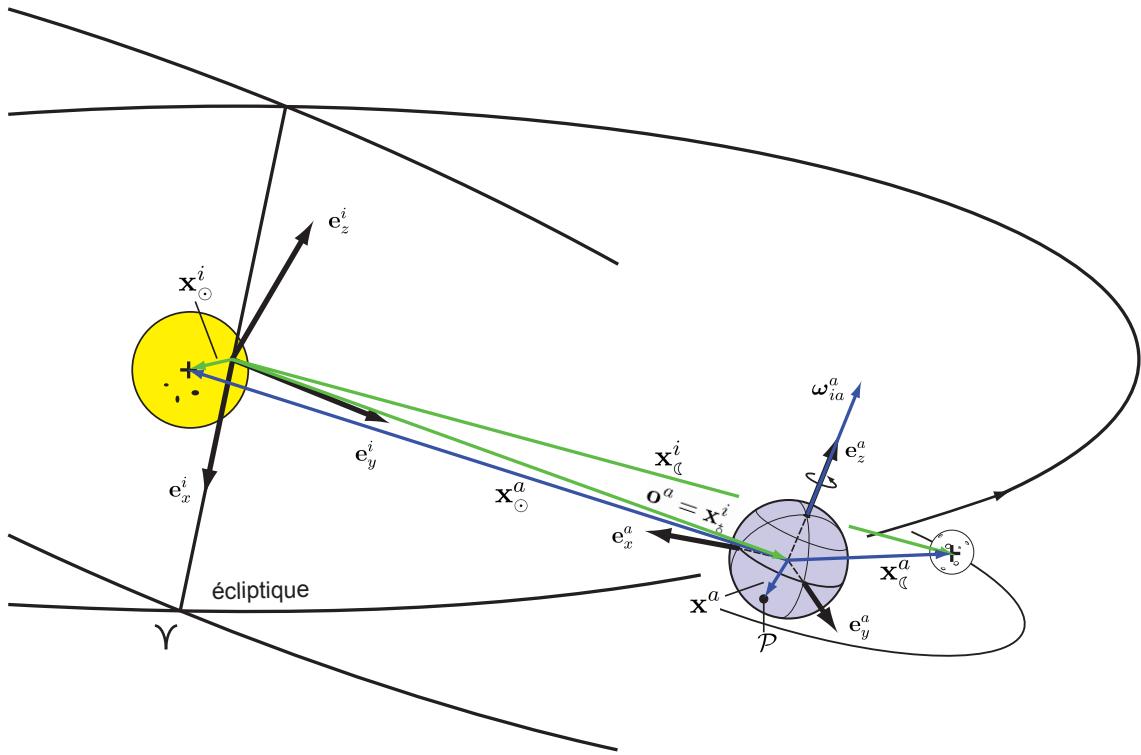


Figure 12.1 – Système inertiel et accéléré du système Terre-Soleil-Lune.

nous pouvons essayer de définir tous les termes de cette équation en fonction des hypothèses que nous venons de faire. Afin d'alléger la notation, si le système de référence n'est pas indiqué en exposant, alors il est supposé être le système accéléré a :

— Nous n'analysons que les points fixes dans le système terrestre, donc :

$$\ddot{\mathbf{x}}^a = \mathbf{0} \quad (12.2)$$

— Nous avons les 3 corps (Terre, Soleil et Lune) qui agissent gravitationnellement sur notre point :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^a &= G \cdot \iiint_{\delta} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \\ &\quad + G \cdot \iiint_{\odot} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \\ &\quad + G \cdot \iiint_{\mathbb{M}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \end{aligned} \quad (12.3)$$

et pour simplifier, nous pouvons considérer le Soleil et la Lune comme étant des boules homogènes de masse M_{\odot} et $M_{\mathbb{M}}$, centrée en \mathbf{x}_{\odot} et $\mathbf{x}_{\mathbb{M}}$. Ce qui simplifie

l'équation 12.3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^a &= G \cdot \iiint_{\delta} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \\ &+ GM_{\odot} \frac{\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}|^3} \\ &+ GM_{\mathbb{C}} \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{C}} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\mathbb{C}} - \mathbf{x}|^3} \end{aligned} \quad (12.4)$$

- L'origine du système accéléré \mathbf{o}^a représente la trajectoire du centre de masse de la Terre dans le système inertiel \mathbf{x}_{δ}^i :

$$\mathbf{o}^a = \dot{\mathbf{x}}_{\delta}^i \quad (12.5)$$

C'est à dire, la révolution de la Terre autour du centre du système inertiel. Et nous savons que cette trajectoire est déterminée par la deuxième équation de Newton dans le système inertiel :

$$\begin{aligned} M_{\delta} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{\delta}^i &= \sum \mathbf{F}^i \\ &= GM_{\delta}M_{\odot} \frac{\mathbf{x}_{\odot}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i}{|\mathbf{x}_{\odot}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i|^3} + GM_{\delta}M_{\mathbb{C}} \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{C}}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i}{|\mathbf{x}_{\mathbb{C}}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i|^3} \end{aligned} \quad (12.6)$$

et donc que :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{o}}^a &= \ddot{\mathbf{x}}_{\delta}^i \\ &= GM_{\odot} \frac{\mathbf{x}_{\odot}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i}{|\mathbf{x}_{\odot}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i|^3} + GM_{\mathbb{C}} \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{C}}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i}{|\mathbf{x}_{\mathbb{C}}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i|^3} \end{aligned} \quad (12.7)$$

et en remarquant que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\odot}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i &= \mathbf{x}_{\delta}^i + \mathbf{R}_a^i \cdot \mathbf{x}_{\odot}^a - \mathbf{x}_{\delta}^i & \text{et} & \mathbf{x}_{\mathbb{C}}^i - \mathbf{x}_{\delta}^i = \mathbf{x}_{\delta}^i + \mathbf{R}_a^i \cdot \mathbf{x}_{\mathbb{C}}^a - \mathbf{x}_{\delta}^i \\ &= \mathbf{R}_a^i \cdot \mathbf{x}_{\odot}^a & &= \mathbf{R}_a^i \cdot \mathbf{x}_{\mathbb{C}}^a \end{aligned} \quad (12.8)$$

nous avons finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a^i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{\delta}^i &= \mathbf{R}_a^i \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a \\ &= GM_{\odot} \frac{\mathbf{x}_{\odot}^a}{|\mathbf{x}_{\odot}^a|^3} + GM_{\mathbb{C}} \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{C}}^a}{|\mathbf{x}_{\mathbb{C}}^a|^3} \end{aligned} \quad (12.9)$$

- Le vecteur de vitesse angulaire est constant et de la forme :

$$\boldsymbol{\omega}_{ia}^a = \begin{pmatrix} \omega_x^a \\ \omega_y^a \\ \omega_z^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{\delta} \end{pmatrix} \quad (12.10)$$

et donc le terme centrifuge devient :

$$\boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a = -\omega_{\delta}^2 \cdot \begin{pmatrix} x^a \\ y^a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.11)$$

- Puisque le vecteur de rotation angulaire est constant, sa dérivée est nulle et nous avons le terme d'Euler qui devient :

$$\dot{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a = \mathbf{0} \quad (12.12)$$

- Nous ne considérons que des points fixes dans le système terrestre, donc la vitesse est toujours nulle dans ce système, ainsi le terme de Coriolis devient :

$$2 \cdot \Omega_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a = \mathbf{0} \quad (12.13)$$

Finalement, nous pouvons écrire la force spécifique observée en un point attaché à la Terre à partir de l'équation 12.1 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{obs}}^a = & \underbrace{-G \cdot \iiint_{\delta} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV - GM_{\odot} \frac{\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}|^3} - GM_{\mathbb{C}} \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{C}} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\mathbb{C}} - \mathbf{x}|^3}}_{\text{forces gravitationnelles}} \\ & + \underbrace{GM_{\odot} \frac{\mathbf{x}_{\odot}}{|\mathbf{x}_{\odot}|^3} + GM_{\mathbb{C}} \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{C}}}{|\mathbf{x}_{\mathbb{C}}|^3}}_{\text{origine du système accéléré } a} \\ & - \underbrace{\omega_{\delta}^2 \cdot \begin{pmatrix} x^a \\ y^a \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{force centrifuge}} \end{aligned} \quad (12.14)$$

et en réorganisant les différents termes, nous trouvons finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{obs}}^a = & \underbrace{-G \cdot \iiint_{\delta} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV}_{\text{forces gravitationnelles de la Terre}} \\ & - \underbrace{\omega_{\delta}^2 \cdot \begin{pmatrix} x^a \\ y^a \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{force centrifuge}} \\ & - \underbrace{GM_{\odot} \left\{ \frac{\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{\odot}}{|\mathbf{x}_{\odot}|^3} \right\} - GM_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{C}} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\mathbb{C}} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{C}}}{|\mathbf{x}_{\mathbb{C}}|^3} \right\}}_{\text{forces de marée}} \\ = & \mathbf{a}_{\text{grav}}^a + \mathbf{a}_{\text{cent}}^a + \mathbf{a}_{\text{marée}}^a \end{aligned} \quad (12.15)$$

avec :

- $\mathbf{a}_{\text{obs}}^a$: l'accélération spécifique observée par \mathcal{P} .

- $\mathbf{a}_{\text{grav}}^a$: l'accélération due aux forces gravitationnelles générées par toutes les masses de la Terre.
- $\mathbf{a}_{\text{cent}}^a$: l'accélération centrifuge due à la rotation de la Terre par rapport au système inertiel.
- $\mathbf{a}_{\text{marée}}^a$: l'accélération due aux forces de marée.

12.2 Cas particulier de la Terre considérée comme une boule homogène

En prenant le cas particulier d'une boule homogène, nous voyons mieux comment les forces apparaissent. En considérant la Terre comme étant une boule homogène de masse M_δ , de rayon R_δ , centrée en $\mathbf{x}_B = \mathbf{0}$, nous pouvons remplacer le terme gravitationnelle par celui trouvé en 11.16. De plus, afin de pouvoir calculer le terme du aux marées, nous allons considérer les positions du Soleil et de la Lune dans le plan de l'équateur et dans le méridien de Greenwich à des distances de respectivement R_\odot et $R_\mathbb{L}$ de l'origine du système a . Nous pouvons donc définir les vecteurs suivants :

$$\mathbf{x}_\odot = \begin{pmatrix} R_\odot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_\mathbb{L} = \begin{pmatrix} R_\mathbb{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.16)$$

En reprenant l'équation 12.25, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{obs}} &= \frac{GM_\delta}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \\ &\quad - \omega_\delta^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - GM_\odot \left\{ \frac{\mathbf{x}_\odot - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_\odot - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_\odot}{|\mathbf{x}_\odot|^3} \right\} - GM_\mathbb{L} \left\{ \frac{\mathbf{x}_\mathbb{L} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_\mathbb{L} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_\mathbb{L}}{|\mathbf{x}_\mathbb{L}|^3} \right\} \end{aligned} \quad (12.17)$$

En prenant les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} G &= 6.6743 \cdot 10^{-11} \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right] \\ M_\delta &= 5.972 \cdot 10^{24} \quad [\text{kg}] \\ M_\odot &= 1.989 \cdot 10^{30} \quad [\text{kg}] \\ M_\mathbb{L} &= 7.360 \cdot 10^{22} \quad [\text{kg}] \\ \omega_\delta &= 7.292115 \cdot 10^{-5} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \\ R_\delta &= 6'378'000 \quad [\text{m}] \\ R_\odot &= 149'597'870'700 \quad [\text{m}] \\ R_\mathbb{L} &= 384'400'000 \quad [\text{m}] \end{aligned} \quad (12.18)$$

Prenons les cas particuliers suivants (Figure 12.6) :

1. \mathcal{P} à l'équateur et dans le méridien de Greenwich :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} R_\phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.19)$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{obs}} &= + \begin{pmatrix} 9.7984 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3.39 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} + \begin{pmatrix} -1.637 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \\ &= + \begin{pmatrix} 9.76451335 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (12.20)$$

2. \mathcal{P} au pôle nord :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_\phi \end{pmatrix} \quad (12.21)$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{obs}} &= + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.7984 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.014 \\ 0 \\ 0.804 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \\ &= + \begin{pmatrix} 0.00000001 \\ 0 \\ 9.79843077 \end{pmatrix} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (12.22)$$

3. \mathcal{P} sur le méridien de Greenwich $\lambda = 0^\circ$, à une latitude sphérique de $\phi = 45^\circ$:

$$\mathbf{x} = R_\phi \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4'509'927.050 \\ 0 \\ 4'509'927.050 \end{pmatrix} \quad [\text{m}] \quad (12.23)$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{\text{obs}} &= + \begin{pmatrix} 6.929 \\ 0 \\ 6.929 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} + \begin{pmatrix} -1.144 \\ 0 \\ 0.582 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \\
 &= + \begin{pmatrix} 6.9045 \\ 0 \\ 6.9045 \end{pmatrix} = +9.78148678 \cdot \begin{pmatrix} 0.7059 \\ 0 \\ 0.7083 \end{pmatrix} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]
 \end{aligned} \tag{12.24}$$

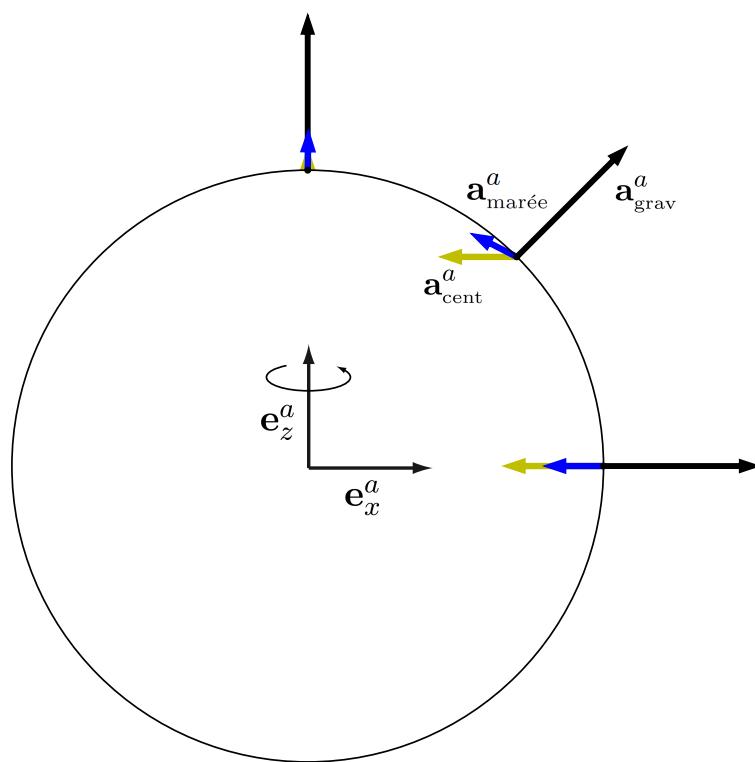


Figure 12.2 – Accélérations observées à la surface de la Terre. En noir, l'accélération gravitationnelle de la Terre. En jaune, l'accélération centrifuge. En bleu, l'accélération de marées. Le Soleil et la Lune sont sur l'équateur et dans le méridien de Greenwich. Les échelles sont différentes pour chaque effet.

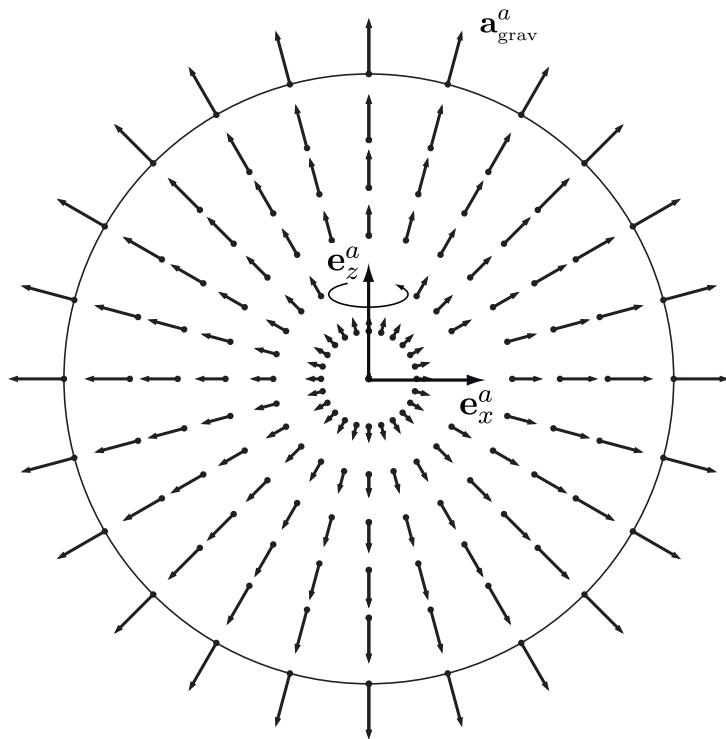


Figure 12.3 – Accélérations gravitationnelles de la Terre observées à la surface et à l'intérieur de la Terre.

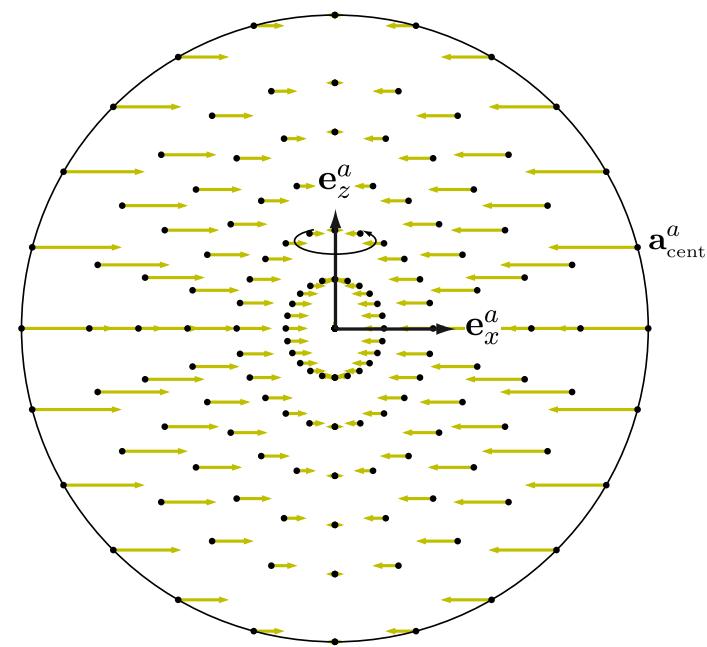


Figure 12.4 – Accélérations centrifuges observées à la surface et à l'intérieur de la Terre.

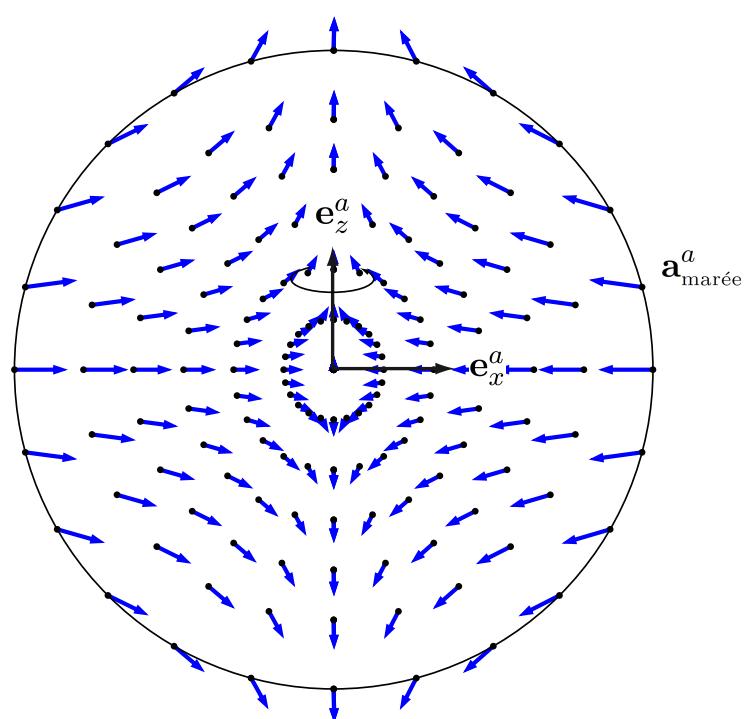


Figure 12.5 – Accélérations de marées observées à la surface et à l'intérieur de la Terre. Le Soleil et la Lune sont sur l'équateur et dans le méridien de Greenwich.

12.3 Système Terre-Soleil-Lune - \mathcal{P} en chute libre sur la Terre

Les hypothèses que nous allons faire ici sont identiques à celles évoquées dans la section 12.1. La seule différence est faite sur le point \mathcal{P} . Il n'est ici pas relié fixement en permanence à la Terre. Nous allons le considérer à l'instant où il n'est plus fixé à la Terre. Cela peut correspondre à la situation réelle suivante, lorsque \mathcal{P} est un objet dans la main d'une personne fixée sur Terre (ceci correspond à la situation décrite dans la section 12.1). Puis, dans cette section, nous considérons \mathcal{P} à l'instant précis où cette personne lâche l'objet.

En reprenant l'équation générale de la force spécifique : 10.29 :

$$\mathbf{a}_{\text{obs}}^a = \ddot{\mathbf{x}}^a - \frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^a + \mathbf{R}_i^a \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a + \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a + 2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a \quad (12.25)$$

nous pouvons essayer de définir tous les termes de cette équation en fonction des hypothèses que nous venons de faire. Comme précédemment, afin d'alléger la notation, si le système de référence n'est pas indiqué en exposant, alors il est supposé être le système accéléré a . Dans notre cas de Figure, nous sommes dans la situation de chute libre, ainsi, la force spécifique mesurée (ou ressentie) en \mathcal{P} sera nulle :

$$\mathbf{a}_{\text{obs}}^a = \mathbf{0} \quad (12.26)$$

et l'équation 12.25 peut se réécrire de la façon suivante :

$$\ddot{\mathbf{x}}^a = +\frac{1}{m} \sum \mathbf{F}_{\text{grav}}^a - \mathbf{R}_i^a \cdot \ddot{\mathbf{o}}^a - \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ia}^a \cdot \mathbf{x}^a - 2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ia}^a \cdot \dot{\mathbf{x}}^a \quad (12.27)$$

Cette équation est en fait l'équation du mouvement de \mathcal{P} en chute libre. Elle nous dit comment sa position \mathbf{x}^a varie dans le temps³. En reprenant les résultats trouvés dans la section précédente, nous pouvons écrire l'équation 12.27 dans notre cas particulier du système Terre-Soleil-Lune de la façon suivante :

$$\ddot{\mathbf{x}}^a = \underbrace{+G \cdot \iiint_{\text{Terre}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV}_{\text{forces gravitationnelles de la Terre}}$$

$$+ \underbrace{\omega_{\delta}^2 \cdot \begin{pmatrix} x^a \\ y^a \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{force centrifuge}}$$

$$+ \underbrace{GM_{\odot} \left\{ \frac{\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{\odot}}{|\mathbf{x}_{\odot}|^3} \right\} + GM_{\mathbb{E}} \left\{ \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{E}} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\mathbb{E}} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{\mathbb{E}}}{|\mathbf{x}_{\mathbb{E}}|^3} \right\}}_{\text{forces de marée}}$$

$$= \mathbf{g}_{\text{grav}}^a + \mathbf{g}_{\text{cent}}^a + \mathbf{g}_{\text{marée}}^a$$

(12.28)

avec :

³. Il faut noter que l'équation 12.27 n'est valable que lorsque $\mathbf{a}_{\text{obs}}^a = \mathbf{0}$, c'est à dire qu'aucune force spécifique n'est mesurée en \mathcal{P} . Cette équation est donc uniquement valable tout au long de la chute si les forces de frottement sont nulles (dans le vide) et qu'aucune autre force n'agit sur \mathcal{P} (par ex. les forces électromagnétiques). L'équation 12.25 est quand à elle générale.

- $\ddot{\mathbf{x}}^a$: l'accélération de \mathcal{P} en chute libre.

$$\mathbf{g}_{\text{grav}}^a = +G \cdot \iiint_{\mathbb{D}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \quad (12.29)$$

L'accélération due aux forces gravitationnelles générées par toutes les masses de la Terre. Ce terme ne dépend que de la répartition des masses, ou de façon équivalente du champ de densité $\rho(\mathbf{x}')$, par rapport au point \mathcal{P} . Dans l'absolu, pour un point fixe sur Terre, ce terme ne varie que lorsque le champ de densité varie. Néanmoins, dans la majorité des cas, nous considérons un champs de densité invariable dans le temps.

$$\mathbf{g}_{\text{cent}}^a = +\omega_{\delta}^2 \cdot \begin{pmatrix} x^a \\ y^a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.30)$$

L'accélération centrifuge due à la rotation de la Terre par rapport au système inertiel. Lorsque le vecteur de vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{ia}^a$ est constant et parallèle au vecteur de base \mathbf{e}_z^a , ce terme est toujours parallèle au plan de l'équateur, est maximal à l'équateur, et nul aux pôles. En réalité, ces hypothèses ne sont pas vérifiées, la direction ainsi que la magnitude du vecteur de rotation angulaire varie dans le temps. Par conséquent, l'accélération centrifuge varie également dans le temps. Néanmoins, dans la plupart des calculs géodésiques, ces variations temporelles sont négligées.

$$\mathbf{g}_{\text{marée}}^a = +GM_{\odot} \left\{ \frac{\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\odot} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{\odot}}{|\mathbf{x}_{\odot}|^3} \right\} + GM_{\mathfrak{C}} \left\{ \frac{\mathbf{x}_{\mathfrak{C}} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{\mathfrak{C}} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{\mathfrak{C}}}{|\mathbf{x}_{\mathfrak{C}}|^3} \right\} \quad (12.31)$$

L'accélération due aux forces de marée. Elles sont générées par les forces gravitationnelles générées par le Soleil et la Lune ainsi qu'à la trajectoire de la Terre dans le système inertiel. Nous voyons que cette accélération dépend de la position du Soleil et de la Lune dans le système a , qui tourne avec la Terre, avec son origine au centre des masses de la Terre. Nous voyons également que cette accélération est analogue à la différence des accélérations dues aux forces gravitationnelles des corps célestes calculées en \mathcal{P} , et au centre des masses de la Terre. Dès lors, pour des points en chute libre proches de la Terre, cette accélération varie rapidement dans le temps, ceci à cause des variations des positions du Soleil et de la Lune dans le système terrestre a .

12.4 Cas particulier de la Terre considérée comme une boule homogène

En reprenant le cas particulier d'une boule homogène, nous voyons mieux comment les éléments de l'équation 12.28 apparaissent :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} = & -\frac{GM_\delta}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \\ & + \omega_\delta^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + GM_\odot \left\{ \frac{\mathbf{x}_\odot - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_\odot - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_\odot}{|\mathbf{x}_\odot|^3} \right\} + GM_\mathbb{C} \left\{ \frac{\mathbf{x}_\mathbb{C} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_\mathbb{C} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_\mathbb{C}}{|\mathbf{x}_\mathbb{C}|^3} \right\}\end{aligned}\quad (12.32)$$

En reprenant les valeurs numériques données en 12.18, nous pouvons recalculer les cas particuliers suivants :

1. \mathcal{P} à l'équateur et dans le méridien de Greenwich :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} R_\delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.33)$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} = & + \begin{pmatrix} -9.7984 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.39 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} + \begin{pmatrix} 1.637 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \\ = & + \begin{pmatrix} -9.76451335 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]\end{aligned}\quad (12.34)$$

2. \mathcal{P} au pôle nord :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_\delta \end{pmatrix} \quad (12.35)$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} &= + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.7984 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.014 \\ 0 \\ -0.804 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \\ &= + \begin{pmatrix} -0.00000001 \\ 0 \\ -9.79843077 \end{pmatrix} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]\end{aligned}\tag{12.36}$$

3. \mathcal{P} sur le méridien de Greenwich $\lambda = 0^\circ$, à une latitude sphérique de $\phi = 45^\circ$:

$$\mathbf{x} = R_\phi \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot \cos \lambda \\ \cos \phi \cdot \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4'509'927.050 \\ 0 \\ 4'509'927.050 \end{pmatrix} \quad [\text{m}]\tag{12.37}$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} &= + \begin{pmatrix} -6.929 \\ 0 \\ -6.929 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} + \begin{pmatrix} 1.144 \\ 0 \\ -0.582 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \\ &= + \begin{pmatrix} -6.9045 \\ 0 \\ -6.9045 \end{pmatrix} = +9.78148678 \cdot \begin{pmatrix} -0.7059 \\ 0 \\ -0.7083 \end{pmatrix} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]\end{aligned}\tag{12.38}$$

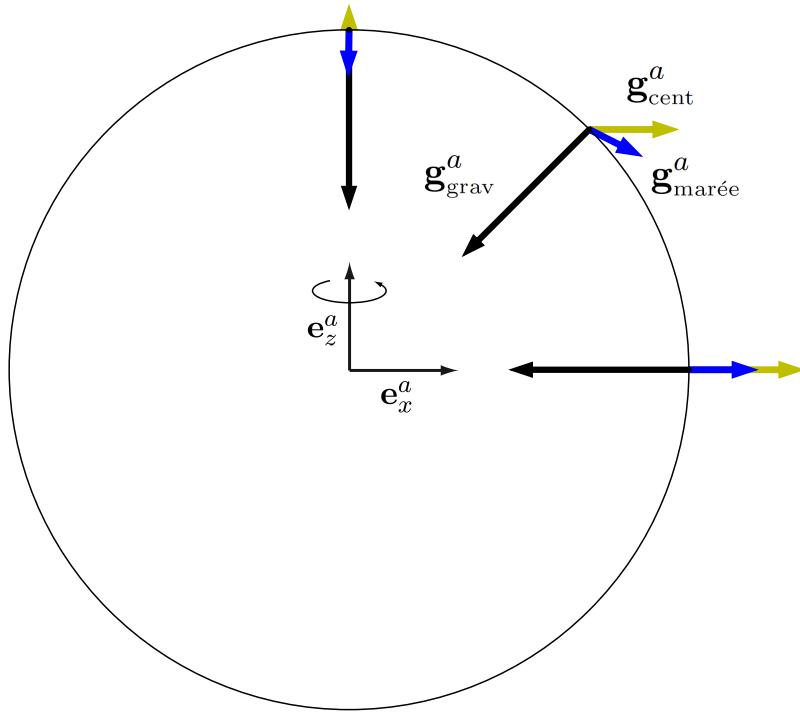


Figure 12.6 – Accélérations observées à la surface de la Terre pour des points en chute libre. En noir, l'accélération gravitationnelle de la Terre. En jaune, l'accélération centrifuge. En bleu, l'accélération de marées. Le Soleil et la Lune sont sur l'équateur et dans le méridien de Greenwich. Les échelles sont différentes pour chaque effet.

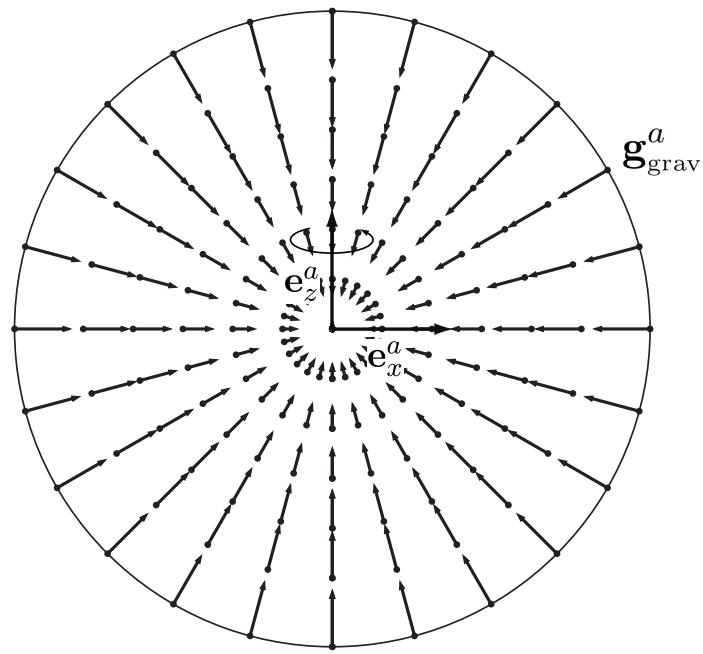


Figure 12.7 – Accélérations gravitationnelles de la Terre observées à la surface et à l'intérieur de la Terre pour des points en chute libre.

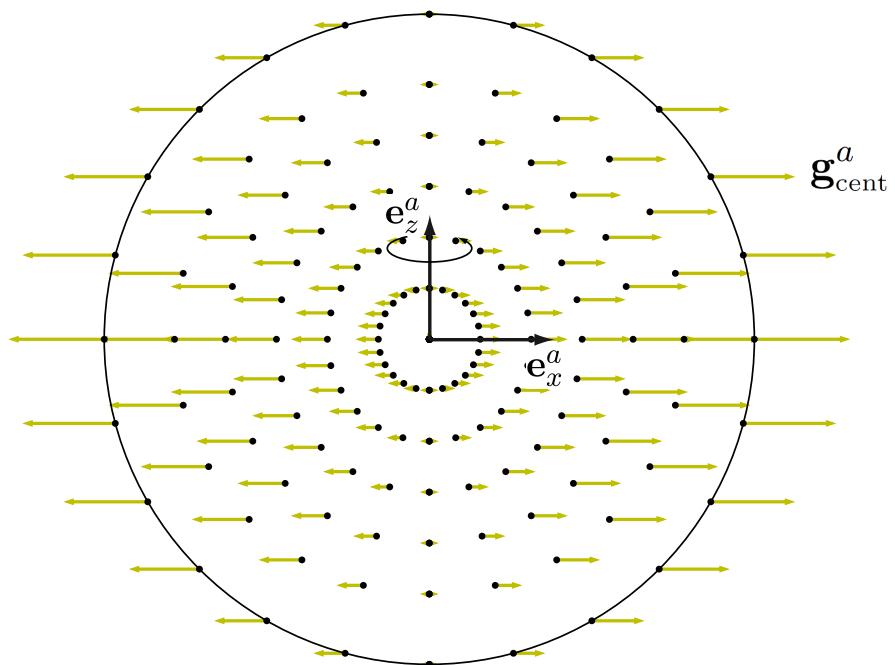


Figure 12.8 – Accélérations centrifuges observées à la surface et à l'intérieur de la Terre pour des points en chute libre.

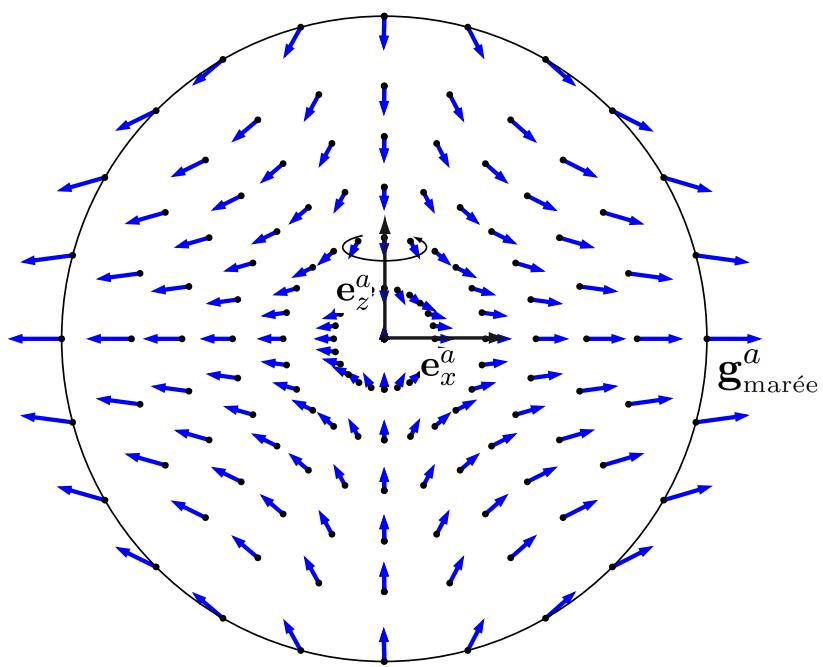


Figure 12.9 – Accélérations de marées observées à la surface et à l'intérieur de la Terre pour des points en chute libre. Le Soleil et la Lune sont sur l'équateur et dans le méridien de Greenwich.

12.5 Gravité en géodésie physique

En géodésie physique, définissons le vecteur de gravité \mathbf{g} comme étant la somme de l'accélération gravitationnelle \mathbf{g}_{grav} et l'accélération centrifuge \mathbf{g}_{cent} :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x}) \\ &= G \cdot \underbrace{\iiint_{\mathbb{D}} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV}_{\text{l'accélération gravitationnelle}} + \omega_{\delta}^2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{l'accélération centrifuge}} \end{aligned} \quad (12.39)$$

avec :

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$	= la gravité à la position \mathbf{x} .
$\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$	= l'accélération due au champ de gravitationnel généré par toutes les masses de la Terre \mathbb{D} .
$\mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x})$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$	= l'accélération centrifuge générée par la rotation de la Terre.
G	$\left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right]$	= la constante de gravitation universelle ($= 6.67408 \cdot 10^{-11}$).
$\rho(\mathbf{x}')$	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	= masse volumique à la position \mathbf{x}' .
dV	$\left[\text{m}^3 \right]$	= élément différentiel de volume.
ω_{δ}	$\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$	= vitesse angulaire de rotation de la Terre ($= 7.292115 \cdot 10^{-5}$).

L'accélération due aux marées $\mathbf{g}_{\text{marée}}$ est supposée être réduite de toutes les observations ainsi que de tous les modèles. Ceci, pour deux raisons principales. La première, est dû au fait que les signaux de marées peuvent être prédits très précisément. La seconde, est dû au fait que les signaux de marée sont variables rapidement dans le temps, contrairement au signaux gravitationnel et centrifuge. Ceci, nous permet donc de définir un champs de gravité qui en très bonne approximation est stationnaire, c'est à dire invariant dans le temps.

Chapitre 13

Théorie du potentiel

En mathématique et en physique, le concept de potentiel est central mais pas très intuitif. Comme nous le verrons, il est intimement lié à la définition de la loi de la conservation de l'énergie. Depuis la publication des lois de Newton en 1687, il fallu attendre près de 130 ans pour que Coriolis, en 1829, définisse correctement le travail d'une force, l'énergie potentielle, ainsi que l'énergie cinétique d'un point matériel. Ces nouveaux concepts ne mettent absolument pas en cause les équations de la dynamique de Newton. Bien au contraire. En fait, ces concepts se cachent dans les équations de Newton. Ils permettent d'interpréter les principes de la mécanique de Newton sous un angle plus global.

13.1 Travail d'une force

Dans un référentiel inertiel, le travail \mathcal{W} que génère une force quelconque \mathbf{F} , sur un point matériel \mathcal{P} , lorsqu'il suit une trajectoire $\mathcal{S} \equiv \mathbf{x}(t)$ entre 2 points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 est défini de façon générale de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathcal{S}) &= \int_{\mathbf{x}_1, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \right] \cdot [\text{m}] = [\text{Joules}]\end{aligned}\tag{13.1}$$

ou de façon équivalente, en fonction du temps :

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \mathcal{S}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}} \cdot dt\tag{13.2}$$

En s'appuyant sur la deuxième loi de Newton :

$$m \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\tag{13.3}$$

l'équation 13.2 s'écrit :

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \mathcal{S}) = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \cdot dt\tag{13.4}$$

dont le terme de droite peut se réécrire de la façon suivante :

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \mathcal{S}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \cdot \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right] \cdot dt\tag{13.5}$$

ou de façon équivalente, après intégration, s'écrit :

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \mathcal{S}) = \frac{1}{2}m \cdot \dot{\mathbf{x}}(t_2) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t_2) - \frac{1}{2}m \cdot \dot{\mathbf{x}}(t_1) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t_1) \quad (13.6)$$

dans laquelle nous voyons apparaître les termes d'énergie cinétique aux points $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ et $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$:

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \mathcal{S}) = \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_2) - \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_1) \quad (13.7)$$

avec :

$$\mathcal{E}_c(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m \cdot \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (13.8)$$

13.2 Théorème de l'énergie cinétique

Nous avons donc une relation générale liant le travail d'une force \mathbf{F} à la variation d'énergie cinétique qu'elle provoque :

$$\int_{\mathbf{x}_1, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_2) - \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_1) \quad (13.9)$$

Nous appellons cette équation : *le théorème de l'énergie cinétique*. Si plusieurs forces sont en action sur le point \mathcal{P} , alors nous pouvons écrire :

$$\sum_{\forall i} \int_{\mathbf{x}_1, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}_i(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_2) - \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_1) \quad (13.10)$$

13.3 Forces conservatives

En reprenant l'équation 13.1 qui définit de façon générale le travail d'une force \mathbf{F} , nous voyons que de façon générale, le travail \mathcal{W} généré entre les deux points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 est dépendant de la trajectoire \mathcal{S} , suivie par le point matériel \mathcal{P} . Par exemple, il est facilement imaginable que le travail d'une force de frottement ne sera pas le même pour deux trajectoires différentes.

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathcal{S}) = \int_{\mathbf{x}_1, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (13.11)$$

Il existe néanmoins des forces \mathbf{F} qui bénéficient d'une propriété très particulière. Certaines forces génèrent un travail \mathcal{W} entre les deux points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 qui ne dépend pas de la trajectoire \mathcal{S} . C'est à dire que le travail \mathcal{W} de ces forces, dites *conservatives*, reste le même, et ceci, peu importe la trajectoire qui est suivie entre les points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 .

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \forall \mathcal{S}) = \int_{\mathbf{x}_1, \forall \mathcal{S}}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (13.12)$$

Mathématiquement, cela se traduit par le fait que nous pouvons calculer le travail généré par une force conservative, entre les points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , sans devoir parcourir toute la trajectoire. Il devrait donc exister une fonction scalaire Φ qui nous donne la valeur de \mathcal{W} uniquement en fonction de la position de \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 .

$$\mathcal{W}(\mathbf{F}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \forall \mathcal{S}) = \Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1) \quad (13.13)$$

Et bien cette fonction Φ à une propriété mathématique bien particulière, lorsque nous prenons son gradient, nous obtenons la force :

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (13.14)$$

avec :

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{pmatrix} \quad (13.15)$$

13.3.1 Exemple : la force gravitationnelle

La force gravitationnelle est conservative. En effet, il existe une fonction Φ_{grav} dont le gradient est la force gravitationnelle \mathbf{F}_{grav} . Prenons la force gravitationnelle générée par un point de masse M , centré à l'origine du système de coordonnées, qui agit sur un point de masse m , positionné en \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) &= -\frac{GMm}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \\ &= -\frac{GMm}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.16)$$

La fonction Φ_{grav} correspondante s'écrit :

$$\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \frac{GMm}{|\mathbf{x}|} \quad (13.17)$$

En effet, nous pouvons prouver que :

$$\nabla\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) \quad (13.18)$$

Pour la première composante nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{GMm}{|\mathbf{x}|} \right) \\ &= GMm \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \\ &= GMm \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= GMm \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= GMm \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \\ &= GMm \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot x \\ &= \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \cdot x \\ &= \frac{GMm}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot x \end{aligned} \quad (13.19)$$

13.4 Energie potentielle et mécanique

En ne considérant que les forces conservatives, nous voyons que le travail entre deux points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 peut s'obtenir de deux façons différentes. D'une part par le théorème de l'énergie cinétique 13.9, et par la fonction scalaire 13.13 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_1, \forall S}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_2) - \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_1) \\ &= \Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (13.20)$$

Ainsi en réarrangeant les termes de l'équation 13.20 de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_c(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_2) = \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_1) - \Phi(\mathbf{x}_1) \quad (13.21)$$

nous voyons que la quantité $\mathcal{E}_c(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x})$ est constante, ou conservée, pour n'importe quelle point sur n'importe quelle trajectoire ! Bien évidemment, ceci n'est valable que lorsque toutes les forces qui génèrent les trajectoires sont conservatives.

En définissant $\mathcal{E}_p(\mathbf{x}) = -\Phi(\mathbf{x})$, nous pouvons réécrire l'équation 13.21 de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_c(\mathbf{x}_2) + \mathcal{E}_p(\mathbf{x}_2) = \mathcal{E}_c(\mathbf{x}_1) + \mathcal{E}_p(\mathbf{x}_1) \quad (13.22)$$

dont $\mathcal{E}_p(\mathbf{x})$ est appelée l'énergie potentielle, et $\mathcal{E}_c(\mathbf{x}) + \mathcal{E}_p(\mathbf{x})$ l'énergie mécanique.

13.4.1 Exemple : énergie potentielle gravitationnelle

L'énergie potentielle gravitationnelle générée par un point de masse M , centré à l'origine du système de coordonnées, qui agit sur un point de masse m , positionné en \mathbf{x} , est donnée par :

$$\mathcal{E}_{p,\text{grav}}(\mathbf{x}) = -\Phi_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = -\frac{GMm}{|\mathbf{x}|} \quad (13.23)$$

De façon plus générale, l'énergie potentielle générée par plusieurs points est simplement la somme des énergies potentielles individuelles. Ainsi, l'énergie potentielle générée par un corps \mathcal{B} , dont la densité $\rho(\mathbf{x}')$ peut varier en chaque point \mathbf{x}' , est donnée par :

$$\mathcal{E}_{p,\text{grav}}(\mathbf{x}) = -mG \iiint_{\mathcal{B}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \quad [\text{Joules}] \quad (13.24)$$

13.4.2 Exemple : énergie potentielle gravitationnelle proche de la surface de la Terre

En prenant une Terre sphérique et homogène, de masse M et de rayon R , la différence d'énergie potentielle entre un point à l'altitude h et un point sur la surface de la Terre est

donnée par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{p,\text{grav}}(R+h) - \mathcal{E}_{p,\text{grav}}(R) &= -\frac{GMm}{R+h} + \frac{GMm}{R} \\
 &= -\frac{GMm \cdot R}{R(R+h)} + \frac{GMm \cdot (R+h)}{R(R+h)} \\
 &= \frac{GMm \cdot (-R+R+h)}{R(R+h)} \\
 &= \frac{GMm \cdot h}{R^2 + R \cdot h} \\
 &\stackrel{h \ll R}{\approx} m \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot h \\
 &= m \cdot g \cdot h \quad [\text{Joules}]
 \end{aligned} \tag{13.25}$$

13.5 Potentiels en géodésie

En géodésie, nous ne travaillons pas directement avec les forces, mais plutôt avec les accélérations de la gravité, gravitationnelle et centrifuge. Ainsi, nous définissons les potentiels qui correspondent aux accélérations de l'équation 12.39.

13.5.1 Potentiel gravitationnel général de la Terre

Il y a tout d'abord le potentiel gravitationnel $V(\mathbf{x})$, qui est défini afin de satisfaire :

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \tag{13.26}$$

avec :

$$V(\mathbf{x}) = G \iiint_{\mathbb{B}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \tag{13.27}$$

13.5.2 Potentiel gravitationnel d'une boule homogène

Le potentiel gravitationnel d'une boule homogène \mathcal{B} de rayon $R_{\mathcal{B}}$, de masse volumique $\rho_{\mathcal{B}}$ et centrée à la position $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ est donné par :

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} +G \frac{4}{3} \pi R_{\mathcal{B}}^3 \rho_{\mathcal{B}} \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}|} & \text{si } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}| > R_{\mathcal{B}} \\ +2\pi G \rho_{\mathcal{B}} \cdot \left(R_{\mathcal{B}}^2 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}|^2}{3} \right) & \text{si } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}| \leq R_{\mathcal{B}} \end{cases} \tag{13.28}$$

qui correspond au champ gravitationnel suivant :

$$\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} -G \frac{4}{3} \pi R_{\mathcal{B}}^3 \rho_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x - x_{\mathcal{B}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}|^3} \\ \frac{y - y_{\mathcal{B}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}|^3} \\ \frac{z - z_{\mathcal{B}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}|^3} \end{pmatrix} & \text{si } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}| > R_{\mathcal{B}} \\ -G \frac{4}{3} \pi \rho_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} x - x_{\mathcal{B}} \\ y - y_{\mathcal{B}} \\ z - z_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} & \text{si } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}}| \leq R_{\mathcal{B}} \end{cases} \tag{13.29}$$

13.5.3 Exemple

Par exemple, pour une boule homogène de rayon $R_B = 6'380'000$ [m], et de masse volumique $\rho_B = 5.51 \cdot 10^3$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$. Les points \mathbf{x} qui se situent sur la surface de la boule ($|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B| = R_B$) ont un potentiel gravitationnel de :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= +G \frac{4}{3} \pi R_B^3 \rho_B \cdot \frac{1}{R_B} \\ &= 62'702'851.186 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (13.30)$$

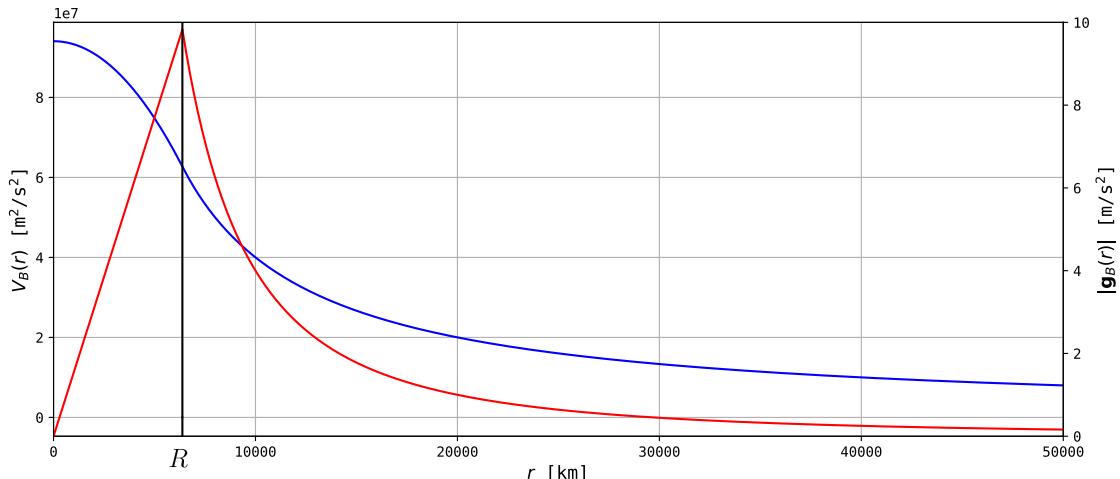


Figure 13.1 – Potentiel $V_{\text{grav}}(\mathbf{x})$ et accélération gravitationnel $|\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})|$ d'une boule homogène de rayon $R_B = 6380$ [km], de masse totale $M_B = 5.994 \cdot 10^{24}$ [kg], ou de façon équivalente, de masse volumique $\rho_B = 5.51 \cdot 10^3$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$.

13.5.4 Potentiel centrifuge

Puis le potentiel centrifuge $Z(\mathbf{x})$, qui est défini afin de satisfaire :

$$\nabla Z(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x}) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (13.31)$$

avec :

$$Z(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \omega_{\odot}^2 \cdot (x^2 + y^2) \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (13.32)$$

13.5.5 Exemple

Par exemple, le potentiel centrifuge des points sur l'équateur d'une boule de rayon $R_B = 6'380'000 \text{ [m]}$, qui tourne avec une vitesse angulaire $\omega_\delta = 7.292115 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ vaut :

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \cdot \omega_\delta^2 \cdot (x^2 + y^2) \\ Z(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \cdot \omega_\delta^2 \cdot R_B^2 \\ &= 108'222.703 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (13.33)$$

Tandis que le potentiel centrifuge des points aux pôles d'une boule de rayon $R_B = 6'380'000 \text{ [m]}$, qui tourne autour de l'axe z avec une vitesse angulaire $\omega_\delta = 7.292115 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ vaut :

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \cdot \omega_\delta^2 \cdot (x^2 + y^2) \\ Z(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \cdot \omega_\delta^2 \cdot 0^2 \\ &= 0.000 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (13.34)$$

13.5.6 Potentiel de gravité

Puis le potentiel total $W(\mathbf{x})$, qui est observé sur Terre, est le potentiel de gravité $W(\mathbf{x})$, qui est défini afin de satisfaire :

$$\begin{aligned} \nabla W(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{\text{cent}}(\mathbf{x}) \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (13.35)$$

avec :

$$W(\mathbf{x}) = G \iiint_{\mathbb{B}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \rho(\mathbf{x}') \cdot dV + \frac{1}{2} \cdot \omega_\delta^2 \cdot (x^2 + y^2) \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (13.36)$$

13.5.7 Exemple

Par exemple, pour une boule homogène de rayon $R_B = 6'380'000 \text{ [m]}$, et de masse volumique $\rho_B = 5.51 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$, et qui tourne autour de l'axe z avec une vitesse angulaire $\omega_\delta = 7.292115 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$. Les points \mathbf{x} qui se situent sur la surface de la boule ($|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B| = R_B$), à l'équateur, ont un potentiel de gravité de :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}) \\ &= 62'702'851.186 + 108'222.703 = 62'811'073.889 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (13.37)$$

tandis qu'aux pôles :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}) \\ &= 62'702'851.186 + 0.000 = 62'702'851.186 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (13.38)$$

13.5.8 Différentiel de potentiel de gravité

La différence de potentiel de gravité entre deux points très proches, séparés d'un interval $d\mathbf{x}$ se calcule par :

$$\begin{aligned} dW(\mathbf{x}) &= W(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}) \\ &= W(\mathbf{x}) + \nabla W(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - W(\mathbf{x}) \\ &= \nabla W(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (13.39)$$

13.5.9 Différentiel de potentiel de gravité le long de la verticale

La différence de potentiel de gravité entre deux points très proches, séparés d'un interval $d\mathbf{x} = d\mathbf{n}$, le long de la verticale en \mathbf{x} , se calcule par :

$$\begin{aligned} dW(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{n} \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot -\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{|\mathbf{g}(\mathbf{x})|} \cdot dn \\ &= -\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})}{|\mathbf{g}(\mathbf{x})|} \cdot dn \\ &= -\frac{|\mathbf{g}(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{g}(\mathbf{x})|} \cdot dn \\ &= -|\mathbf{g}(\mathbf{x})| \cdot dn \\ &= -g(\mathbf{x}) \cdot dn \end{aligned} \quad (13.40)$$

avec :

$$\begin{aligned} d\mathbf{n} &= -\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{|\mathbf{g}(\mathbf{x})|} \cdot dn \\ g(\mathbf{x}) &= |\mathbf{g}(\mathbf{x})| \end{aligned} \quad (13.41)$$

13.5.10 Différence de potentiel de gravité entre deux points

La différence de potentiel de gravité entre deux points \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 se calcule de façon générale par :

$$W(\mathbf{x}_2) - W(\mathbf{x}_1) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (13.42)$$

ou en fonction de petit déplacements différentiels selon la verticale du lieu :

$$W(\mathbf{x}_2) - W(\mathbf{x}_1) = - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} g(\mathbf{x}) \cdot dn \quad (13.43)$$

13.5.11 Lien avec les énergies potentielles

Par définition, nous avons les relations suivantes qui relient les potentiels utilisés en géodésie, avec les énergies potentielles d'un point matériel de masse m :

$$\mathcal{E}_{p,\text{grav}} = -m \cdot V(\mathbf{x}) \quad (13.44)$$

$$\mathcal{E}_{p,\text{cent}} = -m \cdot Z(\mathbf{x}) \quad (13.45)$$

$$\mathcal{E}_{p,\text{totale}} = -m \cdot W(\mathbf{x}) \quad (13.46)$$

Chapitre 14

Géométrie du champ de gravité

14.1 Surfaces de niveau

Les surfaces de niveau sont les surfaces équipotentielles du potentiel de gravité. Elles correspondent aux surfaces d'équilibre des fluides qui ne sont soumis qu'au seul champ de gravité \mathbf{g} :

$$W(\mathbf{x}) = \text{constant} \quad (14.1)$$

Il y a donc une infinité de surfaces de niveau.

14.1.1 Exemple (1) : boule homogène

Les surfaces équipotentielles d'un champ de gravité d'une boule homogène, à l'extérieur de la boule, dont on néglige le potentiel centrifuge $Z(\mathbf{x})$ s'écrivent formellement :

$$W(\mathbf{x}) = +G\frac{4}{3}\pi R_B^3\rho_B \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_B|} = \text{constant} \quad (14.2)$$

ce qui revient à chercher les surfaces avec :

$$W(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_B| = \text{constant} \quad (14.3)$$

qui sont des sphères concentriques centrées en \mathbf{x}_B (Figure 14.1).

14.1.2 Exemple (2) : 1 boule homogène + 2 anomalies (boules homogènes)

Les surfaces équipotentielles d'un champ de gravité d'une boule homogène et de 2 anomalies, dont on néglige le potentiel centrifuge $Z(\mathbf{x})$ s'écrivent formellement :

$$W(\mathbf{x}) = V_B(\mathbf{x}) + V_{B1}(\mathbf{x}) + V_{B2}(\mathbf{x}) = \text{constant} \quad (14.4)$$

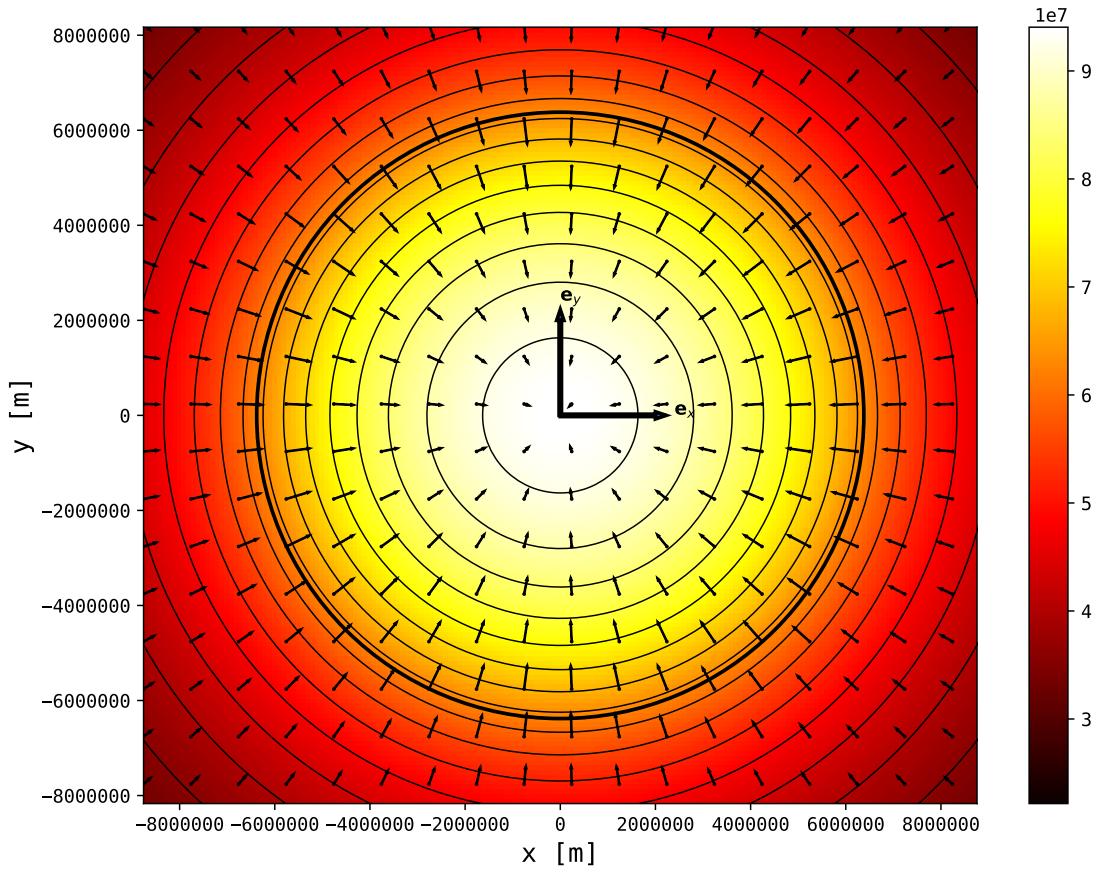


Figure 14.1 – Potentiel et équipotentielle $W(\mathbf{x})$ et accélération gravitationnel $\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})$ d'une boule homogène de rayon $R_B = 6380$ [km], de masse totale $M_B = 5.994 \cdot 10^{24}$ [kg], ou de façon équivalente, de masse volumique $\rho_B = 5.51 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$.

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}^T \text{ [km]}, \quad R_B = 6380 \text{ [km]}, \quad \rho_B = 5.51 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \\ \mathbf{x}_{B1} &= \begin{pmatrix} 0.0 & 5.5 \cdot 10^3 & 0.0 \end{pmatrix}^T \text{ [km]}, \quad R_{B1} = 800 \text{ [km]}, \quad \rho_{B1} = 50.0 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \\ \mathbf{x}_{B2} &= \begin{pmatrix} -3.8 \cdot 10^3 & 2.2 \cdot 10^3 & 0.0 \end{pmatrix}^T \text{ [km]}, \quad R_{B1} = 1500 \text{ [km]}, \quad \rho_{B2} = -5.51 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \end{aligned} \quad (14.5)$$

La représentation graphique de ce champ de gravité ainsi que certaines équipotentialles sont données en Figure 14.2.

14.2 Le géoïde

La surface de niveau qui passe par le niveau moyen des mers et des océans et appelée **géoïde**.

$$W(\mathbf{x}) = W_0 \quad (14.6)$$

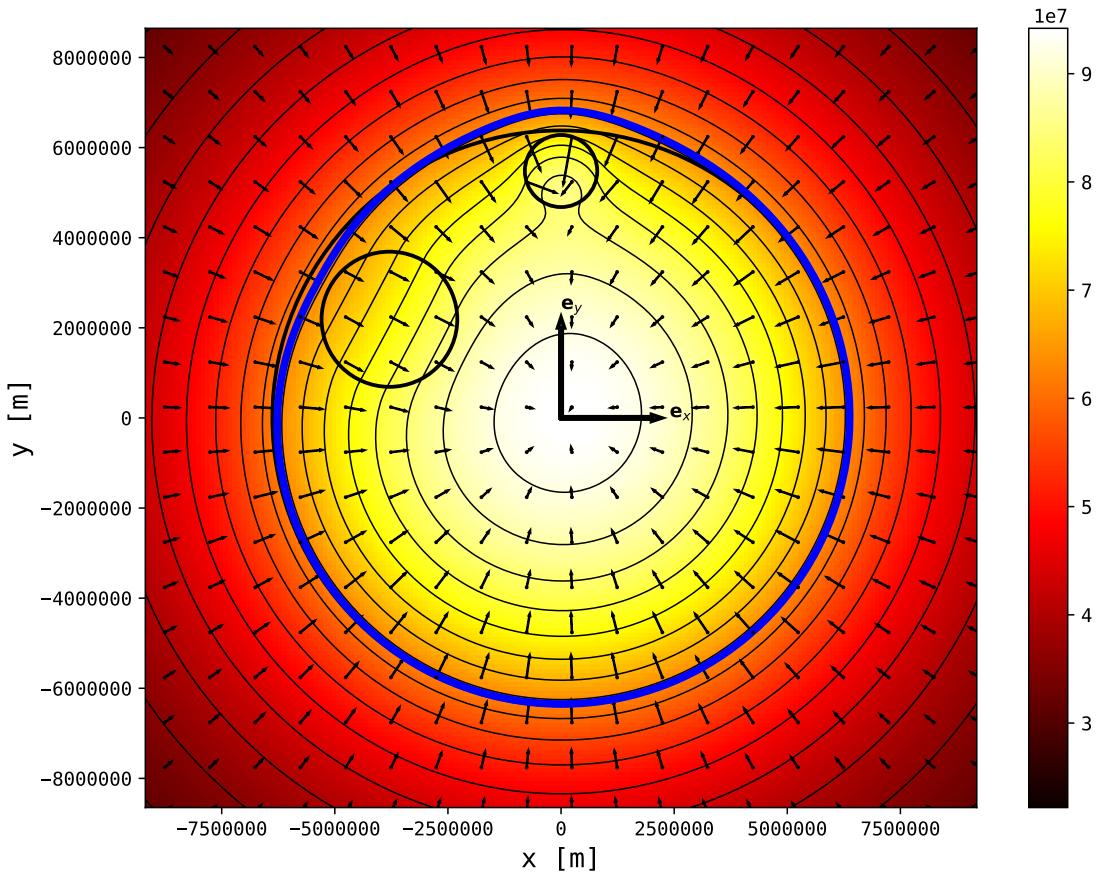


Figure 14.2 – Potentiel et équipotentielles $W(\mathbf{x})$ et accélération gravitationnel $\mathbf{g}_{\text{grav}}(\mathbf{x})$ d'une boule homogène de rayon $R_B = 6380$ [km], de masse totale $M_B = 5.994 \cdot 10^{24}$ [kg], ou de façon équivalente, de masse volumique $\rho_B = 5.51 \cdot 10^3$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$, et de 2 anomalies de masse volumique $\rho_{B1} = +50 \cdot 10^3$, et $\rho_{B2} = -5.51 \cdot 10^3$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$.

avec W_0 , la valeur du potentiel au niveau moyen des mers et des océans. Aujourd'hui, cette valeur est fixée de façon conventionnelle par les conventions de l'IERS à :

$$W_0^{\text{IERS}} = 62'636'853.400 \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (14.7)$$

Le géoïde est donc la surface formée par tous les points \mathbf{x}_{W_0} , qui ont un potentiel de gravité W_0 . Formellement, ils satisfont l'équation suivante :

$$W(\mathbf{x}_{W_0}) = W_0 \quad (14.8)$$

14.3 La ligne d'aplomb

La ligne d'aplomb d'un point \mathbf{x} est la ligne qui suit, de proche en proche, la direction perpendiculaire à la surface de niveau qui passe en \mathbf{x} . Mathématiquement, cela veut dire que la direction de l'aplomb, en \mathbf{x} , correspond à :

$$\nabla W(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (14.9)$$

De façon générale, ces lignes d'aplomb sont courbes. Ceci signifie que, pour un point donné sur la surface de la topographie, la déviation de la verticale sur le géoïde est différente de la déviation de la verticale à la surface de la topographie.

14.4 La cote du géoïde

La cote du géoïde, aussi appelée ondulation du géoïde, représente la distance séparant une surface de référence à la surface équipotentielle de potentiel $W(\mathbf{x}) = W_0$. Cette distance est obtenue selon la normale à cette surface de référence. En pratique, la surface de référence est un ellipsoïde de révolution de référence. Néanmoins pour commencer, sans perdre en généralité, prenons une surface de référence plus simple, une sphère de rayon R_B . Ainsi, pour un point \mathbf{x}_B donné sur la sphère de référence, la cote du géoïde N sera simplement :

$$N(\lambda, \phi) = |\mathbf{x}_{W_0}(\lambda, \phi)| - |\mathbf{x}_B(\lambda, \phi)| \quad (14.10)$$

Le vecteur $\mathbf{x}_{W_0}(\lambda, \phi)$ représente le point de longitude et latitude sphérique λ et ϕ , qui est sur l'équipotentielle $W(\mathbf{x}) = W_0$. Le vecteur $\mathbf{x}_B(\lambda, \phi)$ représente le point de longitude et latitude sphérique λ et ϕ , qui est sur la sphère de rayon R_B .

14.4.1 Détermination géométrique de N

Ainsi, nous voyons que la détermination de la côte du géoïde $N(\lambda, \phi)$, peut se faire géométriquement. Pour cela, il faut être capable de déterminer $\mathbf{x}_{W_0}(\lambda, \phi)$. Ceci peut se faire facilement par des mesures GNSS lorsque l'on peut accéder physiquement à la surface équipotentielle de potentiel W_0 , comme sur les océans et les mers. En pratique, lorsque nous prenons un ellipsoïde de révolution \mathcal{E} comme surface de référence, alors la côte du géoïde correspond directement à la hauteur ellipsoïdale du point \mathbf{x}_{W_0} :

$$N(\lambda, \varphi) = h_{W_0}(\lambda, \varphi) \quad (14.11)$$

14.4.2 Modélisation physique de N

Si le potentiel de gravité réel de la Terre $W(\mathbf{x})$ était parfaitement connu, alors il serait théoriquement possible de déterminer parfaitement la côte du géoïde de façon physique. Dans ce cas, pour un point donné sur la surface de référence (λ, φ) , il suffirait d'explorer le potentiel $W(\mathbf{x})$, le long de la normale à l'ellipsoïde, avec $\mathbf{x}(\lambda, \varphi, h)$, afin de trouver la hauteur ellipsoïdale h_{W_0} qui correspond au potentiel W_0 . Et comme dans la détermination géométrique de N , nous avons directement :

$$N(\lambda, \varphi) = h_{W_0}(\lambda, \varphi) \quad (14.12)$$

Bien que cette méthode soit tout à fait générale et valable, les calculs numériques du champ de gravité total $W(\mathbf{x})$ ainsi que l'exploration de toutes les altitudes peuvent ne pas s'avérer très efficace. Ainsi, le calcul numérique de la côte du géoïde peut se faire plus simplement, en linéarisant le champ de gravité réel $W(\mathbf{x})$.

Pour faire ceci, il est nécessaire d'introduire un nouveau champ de potentiel de gravité, que l'on appelle $U(\mathbf{x})$. Ce champ de potentiel de gravité *normal* représente le champ de potentiel généré par la surface (ou le modèle de masse) de référence. C'est le potentiel

de gravité généré par un modèle de la Terre très simple, comme une boule homogène, ou comme un ellipsoïde de révolution homogène. Par exemple, si l'on prend comme surface de référence une boule de rayon R_B , alors le potentiel de gravité généré par cette boule est la somme de son effet gravitationnel $V_B(\mathbf{x})$ et du potentiel centrifuge $Z(\mathbf{x})$:

$$U(\mathbf{x}) = V_B(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x}) \quad (14.13)$$

Dans ce cas, pour être capable de calculer V_B , il est encore nécessaire de définir la masse volumique de la boule ρ_B . Et bien nous fixons la valeur ρ_B afin que le potentiel sur la surface de la sphère soit égale à W_0 :

$$U(\mathbf{x}_B) = W_0 = W(\mathbf{x}_{W_0}) \quad (14.14)$$

Dès lors, nous pouvons introduire un nouveau champs de potentiel $T(\mathbf{x})$, appelé potentiel *perturbateur*, qui est simplement la différence entre le potentiel de gravité réel $W(\mathbf{x})$ et le potentiel de gravité normal $U(\mathbf{x})$:

$$T(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \quad (14.15)$$

De façon équivalente, nous pouvons aussi écrire que le potentiel réel est la somme du potentiel normal et perturbateur :

$$W(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}) \quad (14.16)$$

Ce potentiel perturbateur $T(\mathbf{x})$ est le potentiel gravitationnel généré par toutes les masses de la Terre qui ne sont pas modélisées par la surface (ou le modèle de masse) de référence.

En prenant un point de vue différent, nous allons pouvoir faire apparaître la cote du géoïde. En effet, si nous linéarisons le potentiel réel autour de la surface de référence (ici une boule), et selon la normale $d\mathbf{n}$ à la surface de référence, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}_B + d\mathbf{n}) &= W(\mathbf{x}_B) + \nabla W(\mathbf{x}_B) \cdot d\mathbf{n} \\ &= W(\mathbf{x}_B) - g(\mathbf{x}_B) \cdot dn \end{aligned} \quad (14.17)$$

De plus, si nous considérons le point $\mathbf{x}_B + d\mathbf{n}$ comme étant le point au potentiel W_0 du champ de potentiel réel $W(\mathbf{x})$, alors nous pouvons introduire la cote du géoïde N :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}_{W_0}) &= W(\mathbf{x}_B) + \nabla W(\mathbf{x}_B) \cdot d\mathbf{n} \\ &= W(\mathbf{x}_B) - g(\mathbf{x}_B) \cdot N \end{aligned} \quad (14.18)$$

Nous savons aussi que par définition (équation 14.14) :

$$W(\mathbf{x}_{W_0}) = U(\mathbf{x}_B) \quad (14.19)$$

Et donc l'équation 14.18 s'écrit aussi :

$$U(\mathbf{x}_B) = W(\mathbf{x}_B) - g(\mathbf{x}_B) \cdot N \quad (14.20)$$

ou en réarrangeant les termes :

$$0 = W(\mathbf{x}_B) - U(\mathbf{x}_B) - g(\mathbf{x}_B) \cdot N \quad (14.21)$$

puis avec l'équation 14.15 :

$$0 = T(\mathbf{x}_B) - g(\mathbf{x}_B) \cdot N \quad (14.22)$$

et finalement :

$$N(\mathbf{x}_B) = \frac{T(\mathbf{x}_B)}{g(\mathbf{x}_B)} \quad (14.23)$$

qui est connue comme étant la formule du *Brun*. Cette formule est très simple et très utile car elle nous permet de prédire la cote du géoïde N , en n'importe quel point sur la surface de référence \mathbf{x}_B , à partir de la valeur du potentiel perturbatif T et de l'accélération de la pesanteur g au point \mathbf{x}_B . Cette formule est aussi valable lorsque la surface de référence est un ellipsoïde de référence \mathcal{E} :

$$N(\mathbf{x}_{\mathcal{E}}) = \frac{T(\mathbf{x}_{\mathcal{E}})}{g(\mathbf{x}_{\mathcal{E}})} \quad (14.24)$$

14.4.3 Exemple

Par exemple, si nous voulons déterminer la variation de la cote du géoïde générée par une personne de masse $m = 100$ [kg] au bord de la mer, alors il nous suffit de calculer le potentiel perturbatif $T(\mathbf{x}_{\mathcal{E}})$ sur la surface de référence. Pour faire ceci, modélisons la personne comme un point matériel $h = 1$ [m] au dessus du niveau de la mer. Ainsi, le potentiel gravitationnel d'un point situé sur la surface de référence, à la coordonnée horizontale x sera :

$$T(x) = \frac{G \cdot m}{\sqrt{x^2 + h^2}} \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (14.25)$$

Et la cote du géoïde peut se calculer avec une accélération de pesanteur $g \approx 9.81$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$:

$$N(x) = \frac{T(x)}{9.81} \quad [\text{m}] \quad (14.26)$$

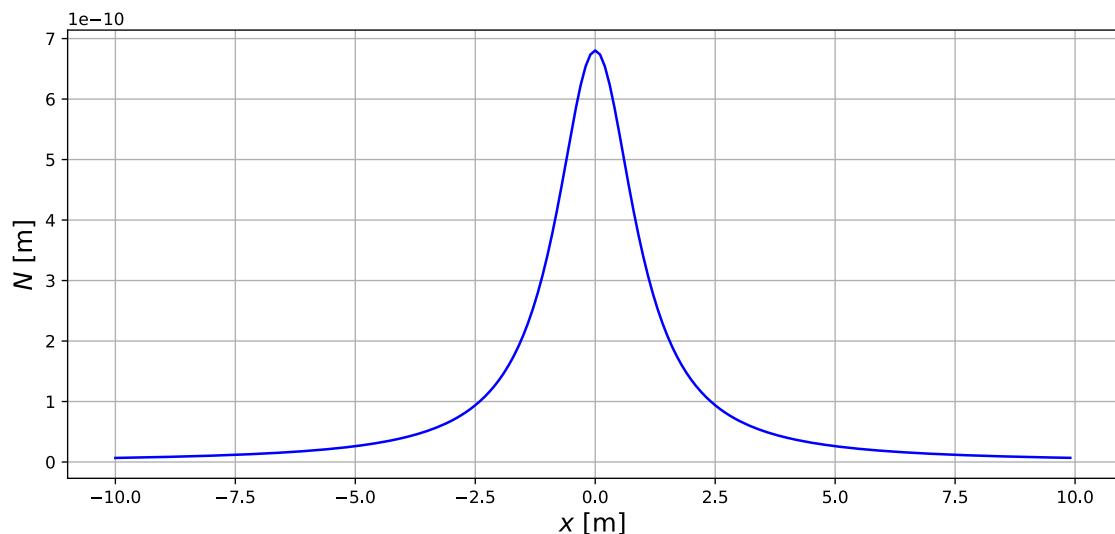


Figure 14.3 – Variation de la cote du géoïde générée par une personne de masse $m = 100$ [kg] au bord de la mer.

14.5 Le géoïde Suisse CHGeo2004

Le calcul du géoïde Suisse est réalisé par le service de géodésie de swisstopo (Dr. Urs Marti). La version officielle la plus récente est appelée CHGeo2004. Elle se base sur 2 piliers principaux :

1. Des mesures liées au champ de gravité (Figure 14.4). Il y a des mesures de GNSS/Nivellement, de déviations de la verticale, de gravimétrie ainsi que des valeurs de cotes du géoïde issus de modèles globaux.
2. Des modèles de masse (Figure 14.5). Ces modèles, dont la géométrie est connue, sont de masses volumiques différentes. Ils modélisent les effets gravitationnels de la topographie (MNT), des lacs, des principaux glaciers, des différents bassins sédimentaires et du corps d'Ivrea, de plus grande masse volumique.

Modèle de masse	masse volumique ρ
	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
Topographie	2'670
Eau des lacs	1'000
Glace des glaciers	900
Sédiments issus de l'ère quaternaire	2'000
Sédiments de la plaine du Po	1'900
Corps d'Ivrea	3'100

La combinaison de ces deux sources de données nous permet de pouvoir prédire la cote du géoïde sur l'ensemble de la Suisse avec une précision d'environ 1 [cm] en plaine, et de 3 à 5 [cm] dans les régions montagneuses.

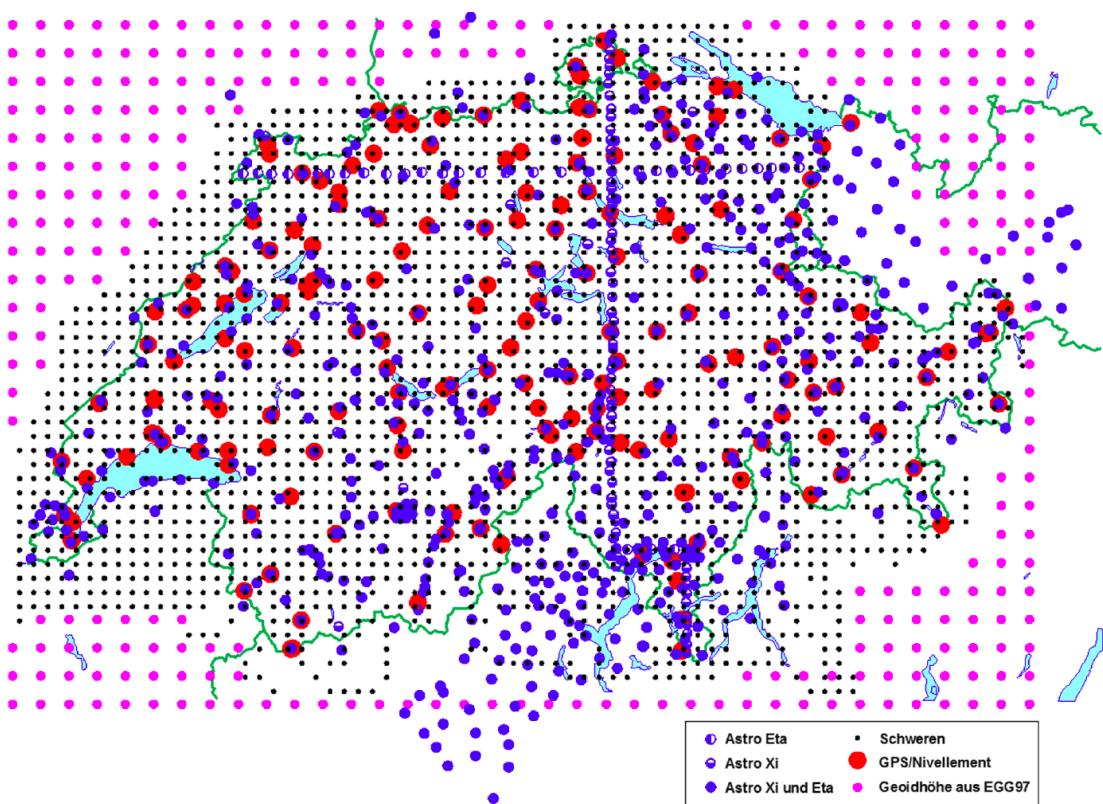


Figure 14.4 – Données utilisées pour le calcul du géoïde CHGeo2004. Source : CHGeo2004 Urs Marti, swisstopo.

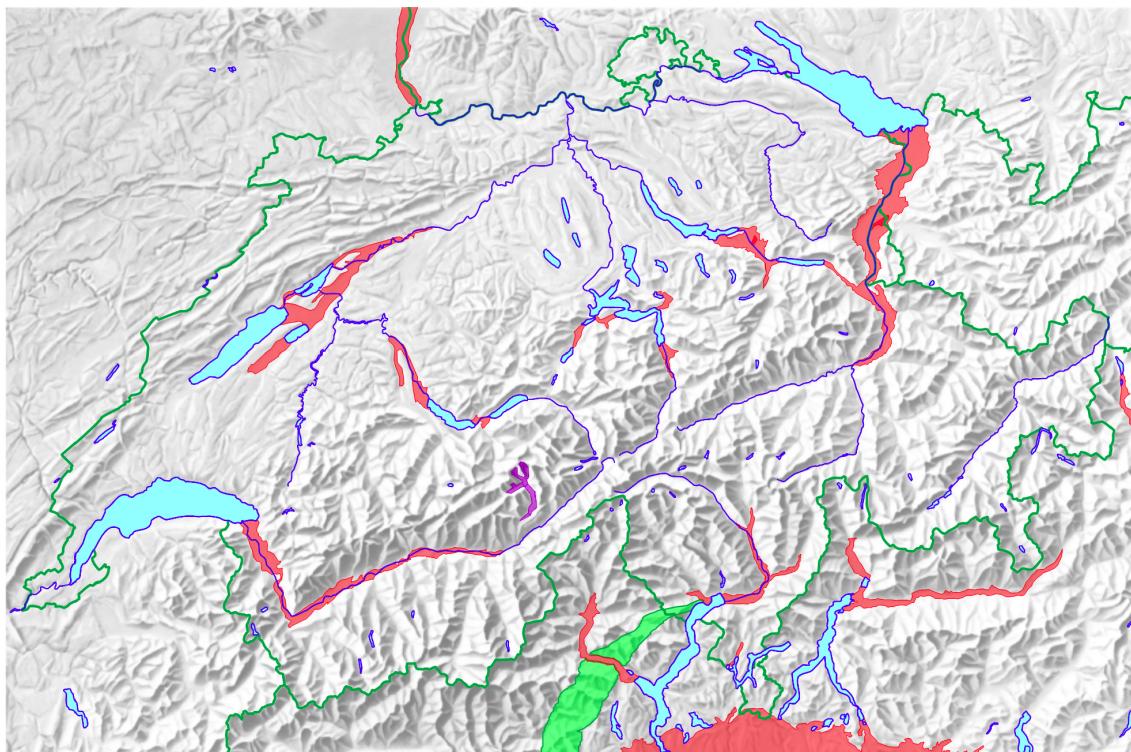


Figure 14.5 – Modèles de masse utilisés pour le calcul du géoïde CHGeo2004 dans le système de référence CH1903+. Source : CHGeo2004 Urs Marti, swisstopo.

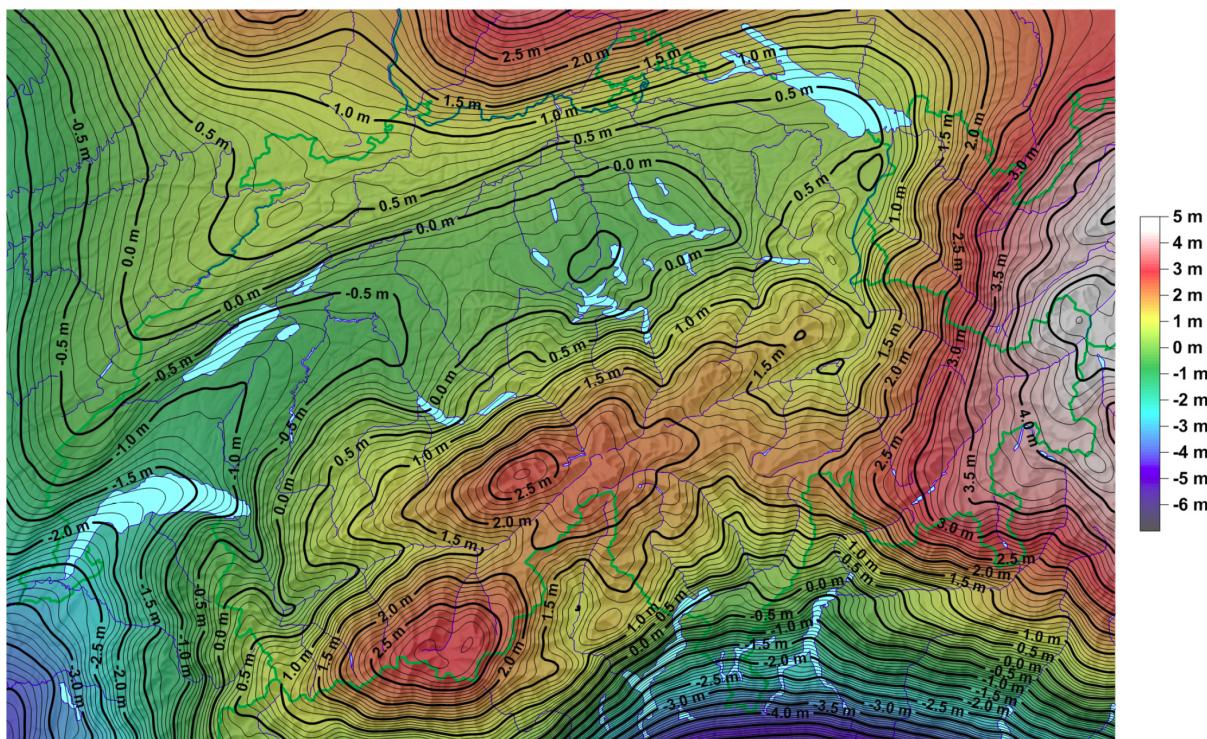


Figure 14.6 – Cote du géoïde du modèle CHGeo2004 dans le système de référence CH1903+. Source : CHGeo2004 Urs Marti, swisstopo.

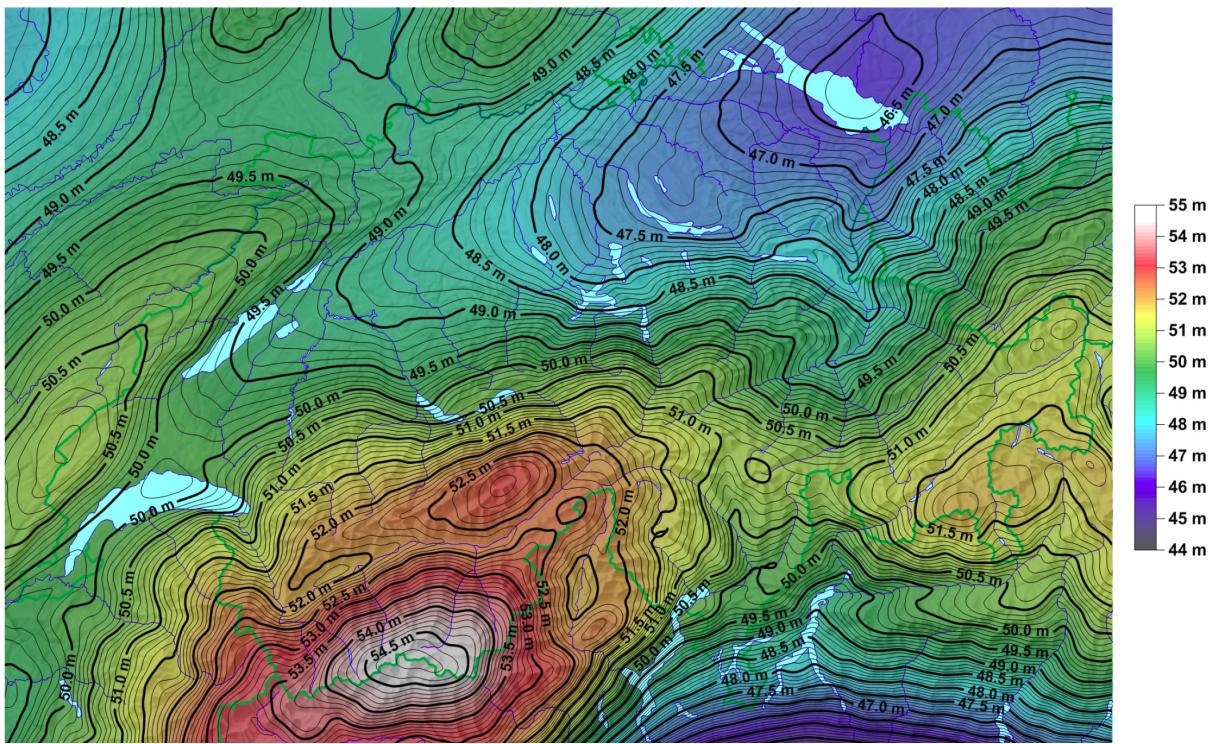


Figure 14.7 – Anomalie de hauteur (quasi-géoïde) du modèle CHGeo2004 dans le système de référence CHTRS95. Source : CHGeo2004 Urs Marti, swisstopo.

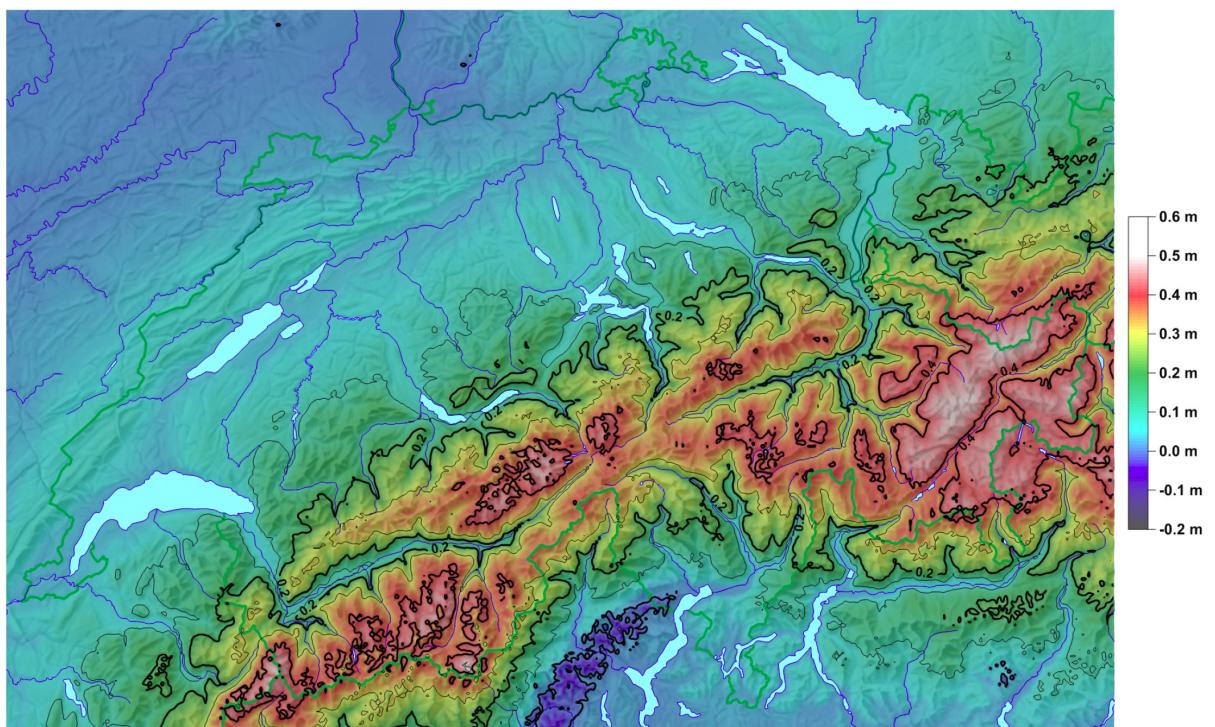


Figure 14.8 – Quasi-géoïde - géoïde du modèle CHGeo2004 dans le système de référence CHTRS95.

Chapitre 15

Systèmes d'altitudes

En géodésie, nous distinguons deux grandes classes d'altitudes :

1. **Les systèmes d'altitude géométriques.** Ces systèmes sont tous basés sur les altitudes ellipsoïdales, souvent appelées hauteurs ellipsoïdales. Ils sont dits géométriques car il n'y a aucun lien direct entre le champ de gravité et les altitudes ellipsoïdales h . Elles sont définies uniquement par le système de référence et la géométrie de l'ellipsoïde de révolution de référence.
2. **Les systèmes d'altitude physiques.** Ces systèmes ont un lien directe avec le champ de gravité. Ils ont pour but de définir des altitudes qui nous permettent de savoir sur quelle surface de niveau un point se trouve. En gros, de savoir si de l'eau peut couler gravitairement entre deux points donnés, de définir des surfaces horizontales. Comme nous le verrons, le fait de vouloir absolument définir une altitude métrique assimilable à une distance, nous sommes obligés de faire quelques concessions sur les objectifs sus-mentionnés. Voici les principales altitudes qui sont classées dans les altitudes physiques :
 - Les altitudes usuelles H^u .
 - Les altitudes dynamiques H^{dyn} .
 - Les altitudes orthométriques H^{orth} .
 - Les altitudes normales H^{norm} .

Un système d'altitude moderne doit remplir la condition principale suivante :

L'altitude d'un point doit être définie de façon univoque

Cette condition est bien évidemment remplie concernant les systèmes d'altitudes géométriques. Nous savons également que pour un point donné \mathbf{x} , il est possible de définir de façon univoque la différence de potentiel de gravité qui le sépare du potentiel de référence $W_0 = W(\mathbf{x}_{W_0})$. Ainsi en se basant sur l'équation 13.39, nous avons, de façon générale :

$$W(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}_{W_0}) = \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (15.1)$$

Ou plus particulièrement, si nous nous obligeons à choisir des chemins qui suivent les équipotentielles ou les normales aux équipotentielles (dn), nous avons, selon l'équation 13.40 :

$$W(\mathbf{x}) - W(\mathbf{x}_{W_0}) = - \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \cdot dn \quad (15.2)$$

avec \mathcal{S} un chemin quelconque qui, puisque nous calculons une différence de potentiel, n'a pas d'influence sur le résultat.

15.1 La hauteur ellipsoïdale

La hauteur ellipsoïdale peut se mesurer de différente manière. La plus naturelle et la plus directe consiste à la mesurer par GNSS. Elle peut également être obtenue à partir de mesures terrestres qui se réfèrent au champ de gravité local, mais à condition de connaître la géométrie du champs de gravité (côte du géoïde et/ou déviation de la verticale).

15.1.1 Détermination par GNSS

De nos jours, la méthode la plus naturelle de détermination de la hauteur ellipsoïdale h d'un point \mathbf{x} consiste à déterminer ses coordonnées géocentriques ($x^{\text{TRF}}, y^{\text{TRF}}, z^{\text{TRF}}$) dans un cadre de référence donné, souvent par GNSS, puis en introduisant un ellipsoïde de révolution (a, e), de calculer l'altitude ellipsoïdale en utilisant l'équation 4.43. En notant :

$$x = x^{\text{TRF}}, \quad y = y^{\text{TRF}}, \quad z = z^{\text{TRF}} \quad (15.3)$$

nos avons :

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \varphi(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_N}{R_N + h} \cdot e^2}\right) \\ h(x, y, z) &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - R_N \end{aligned} \quad (15.4)$$

avec :

$$R_N(a, e, \varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$$

dont le calcul se fait par itérations successives, jusqu'à convergence.

15.1.2 Détermination à partir de l'altitude orthométrique

La hauteur ellipsoïdale h peut se calculer à partir de l'altitude orthométrique H^{orth} et de la côte du géoïde N de la façon suivante :

$$h(\mathbf{x}) = H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) + N(\mathbf{x}) \quad (15.5)$$

15.1.3 Détermination par niveling trigonométrique

Il est également possible de déterminer des hauteurs ellipsoïdales par niveling trigonométriques. En fait, pour être plus précis, il est seulement possible de déterminer des différences de hauteurs ellipsoïdales. Mais ceci, à condition de connaître les composantes (η, ξ) de la déviation de la verticale, par rapport à l'ellipsoïde de révolution concerné, au point de station. Voici les étapes qui permettent la détermination d'une altitude ellipsoïdale de façon rigoureuse (sans tenir compte de la réfraction atmosphérique), à partir :

- Des coordonnées géocentriques $(x_o^{\text{TRS}}, y_o^{\text{TRS}}, z_o^{\text{TRS}})$ de la station.
 - De l'azimut astronomique $\text{azi}^{\text{astro}}$ du point visé.
 - De l'angle zénithal mesuré ζ^{astro} du point visé.
 - De la distance inclinée mesurée s^{astro} du point visé.
1. La première étape consiste à déterminer, à l'aide des observations, les coordonnées topocentriques astronomiques du point visé :

$$\begin{aligned} x^{\text{topo}^*} &= s^{\text{astro}} \cdot \sin \zeta^{\text{astro}} \cdot \cos \text{azi}^{\text{astro}} \\ y^{\text{topo}^*} &= s^{\text{astro}} \cdot \sin \zeta^{\text{astro}} \cdot \sin \text{azi}^{\text{astro}} \\ z^{\text{topo}^*} &= s^{\text{astro}} \cdot \cos \zeta^{\text{astro}} \end{aligned} \quad (15.6)$$

2. Puis de calculer les coordonnées géocentriques du point visé à partir de l'équation 9.19 :

$$\begin{pmatrix} x^{\text{TRS}} \\ y^{\text{TRS}} \\ z^{\text{TRS}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o^{\text{TRS}} \\ y_o^{\text{TRS}} \\ z_o^{\text{TRS}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cdot \cos \Lambda & -\sin \Lambda & \cos \Phi \cdot \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \cdot \sin \Lambda & \cos \Lambda & \cos \Phi \cdot \sin \Lambda \\ \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{\text{topo}^*} \\ y^{\text{topo}^*} \\ z^{\text{topo}^*} \end{pmatrix} \quad (15.7)$$

avec la longitude astronomique Λ et la latitude astronomique Φ du point de station qui se calculent à partir des longitude λ et latitude φ ellipsoïdales, ainsi que des déviations de la verticale (η, ξ) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda + \frac{\eta}{\cos \varphi} \\ \Phi &= \varphi + \xi \end{aligned} \quad (15.8)$$

3. Et finalement, l'altitude ellipsoïdale se calcule à partir des coordonnées géocentriques avec l'équation 15.4.

15.1.4 Détermination par niveling géométrique

La détermination de la hauteur ellipsoïdale par niveling géométrique peut se faire indirectement, en passant par l'altitude orthométrique $H^{\text{orth}}(\mathbf{x})$, et la côte du géoïde $N(\mathbf{x})$, selon l'équation 15.5. L'altitude orthométrique $H^{\text{orth}}(\mathbf{x})$ peut être déterminée par des mesures de niveling géométrique dn et de gravité $g(\mathbf{x})$, de façon rigoureuse, en passant par la côte géopotentielle $C(\mathbf{x})$ selon l'équation 15.9.

15.2 La cote géopotentielle

Comme nous pouvons le voir avec l'équation 15.2, la différence de potentiel entre un point \mathbf{x} et un point sur la surface du géoïde \mathbf{x}_{W_0} est négative lorsque l'altitude de \mathbf{x} est positive. Pour cette raison, nous introduisons la cote géopotentielle de la façon suivante :

$$C(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}_{W_0}) - W(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \cdot dn \quad (15.9)$$

La cote géopotentielle a d'une part l'avantage de croître avec l'altitude, et d'autre part l'avantage d'être lié intimement à l'énergie potentielle de gravité. C'est à dire que les points de même cote géopotentielle, sont sur une même surface de niveau. L'unité de la cote géopotentielle est identique à celle d'un potentiel. Néanmoins, en géodésie, la cote géopotentielle est également dans une unité spéciale, en *unité géopotentiel [gpu]*¹, qui est définie de la façon suivante :

$$1 \cdot [\text{gpu}] = \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \quad (15.10)$$

L'intérêt principal de cette unité, est que les cotes géopotentielles prennent des valeurs qui sont assez proches des altitudes. Elles sont inférieures d'environ $2\% = 1 - \frac{9.81}{10}$.

15.2.1 Détermination par nivelllement géométrique

La détermination de la côte géopotentielle par nivelllement géométrique et mesures gravimétriques peut se faire en appliquant l'équation 15.9. En pratique, il n'est pas question de réaliser un cheminement depuis un point sur la surface de référence \mathbf{x}_{W_0} . Par contre, en connaissant la côte géopotentielle d'un point de référence \mathbf{x}_A , il est possible de déterminer la côte géopotentielle au point \mathbf{x}_B de la façon suivante :

$$C(\mathbf{x}_B) = C(\mathbf{x}_A) + \int_{\mathbf{x}_A, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}_B} g(\mathbf{x}) \cdot dn \quad (15.11)$$

De cette équation, nous pouvons voir qu'il est nécessaire de mesurer la gravité tout au long du cheminement \mathcal{S} . En pratique, la gravité est mesurée tous les 500 [m], ou lorsque la différence d'altitude dépasse 30 [m], puis est interpolée avant d'être appliquée aux dénivélées du nivelllement géométrique dn .

15.2.2 Détermination par GNSS

Il est possible de déterminer la côte géopotentielle par GNSS au point \mathbf{x} si l'on connaît la côte du géoïde $N(\mathbf{x})$ ainsi que la gravité moyenne $\bar{g}(\mathbf{x})$ selon la ligne d'aplomb en \mathbf{x} . En effet, par GNSS nous mesurons la hauteur ellipsoïdale $h(\mathbf{x})$, puis avec la côte du géoïde nous pouvons calculer l'altitude orthométrique $H^{\text{orth}}(\mathbf{x})$:

$$H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - N(\mathbf{x}) \quad (15.12)$$

Puis la côte géopotentielle se calcule finalement par :

$$C(\mathbf{x}) = H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) \cdot \bar{g}(\mathbf{x}) \quad (15.13)$$

1. [gpu] geopotential unit

15.3 L'altitude usuelle

L'« altitude » usuelle H^u d'un point \mathbf{x} est obtenue par niveling géométrique ou trigonométrique brute, en additionnement des dénivelées successives depuis un point de référence \mathbf{x}_{W_0} , sur le géoïde, jusqu'au point \mathbf{x} , en suivant le chemin \mathcal{S} :

$$H^u(\mathbf{x}, \mathcal{S}) = \int_{\mathbf{x}_{W_0, \mathcal{S}}}^{\mathbf{x}} dn \quad (15.14)$$

Comme nous le verrons ultérieurement, pour un point \mathbf{x} donné, l'altitude usuelle dépend du chemin \mathcal{S} par lequel les dénivelées sont mesurées. Cette dépendance au chemin est problématique car cela signifie que pour un point \mathbf{x} donné, il existe, théoriquement, une infinité d'altitudes possibles. Autrement dit, l'altitude usuelle n'est pas univoque. Ainsi, les altitudes usuelles ne peuvent pas constituer un système d'altitude moderne. En Suisse, les altitudes officielles de la mensuration officielle sont des altitudes usuelles. Elles constituent le « système d'altitude » NF02².

15.4 L'altitude dynamique

L'altitude dynamique H^{dyn} d'un point \mathbf{x} est définie par :

$$H^{\text{dyn}}(\mathbf{x}) = \frac{C(\mathbf{x})}{\gamma_0} \quad (15.15)$$

avec $\gamma_0 = 9.806199203 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ (GRS80) la gravité normale à la latitude $\varphi = 45^\circ$. L'avantage de l'altitude dynamique est que les points qui ont la même altitude dynamique sont sur la même surface de niveau, c'est à dire sur une même équipotentielle de gravité. De par cette propriété, nous pourrions penser que les altitudes dynamiques constituent les altitudes idéales. Hélas, en pratique, elles ne sont pas si idéales. En effet, la différence entre l'altitude dynamique et la distance verticale au géoïde est significative. Ceci pose un problème pratique important lorsque nous voulons intégrer des mesures de niveling géométrique. En effet, même pour de petit cheminement, il faudrait passer par les cotes géopotentielles.

A partir des équations 15.9, 15.14 et 15.15, il est possible de trouver une relation qui permet de calculer l'altitude dynamique en fonction de l'altitude usuelle :

$$\begin{aligned} H^{\text{dyn}}(\mathbf{x}) &= \frac{C(\mathbf{x})}{\gamma_0} \\ &= \frac{1}{\gamma_0} \cdot \int_{\mathbf{x}_{W_0, \mathcal{S}}}^{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \cdot dn \end{aligned} \quad (15.16)$$

2. NF02, Niveling Fédéral 1902

et afin de pouvoir isoler la formule de l'altitude usuelle 15.14, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 H^{\text{dyn}}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{g(\mathbf{x})}{\gamma_0} \cdot dn + \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{\gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn - \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{\gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \\
 &= \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn + \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{\gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \\
 &= \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn + \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} dn \\
 &= \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} dn + \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \\
 &= H^u(\mathbf{x}) + \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \\
 &= H^u(\mathbf{x}) + E^{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{W_0}, \mathbf{x}, \mathcal{S})
 \end{aligned} \tag{15.17}$$

avec la *correction dynamique* :

$$E^{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{W_0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) = \int_{\mathbf{x}_{W_0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \tag{15.18}$$

Ainsi nous voyons qu'il est possible d'obtenir l'altitude dynamique à partir de l'altitude usuelle, en appliquant la correction dynamique 15.18, qui nécessite une intégration le long du même chemin \mathcal{S} que celui suivi par le nivelllement qui a produit l'altitude usuelle H^u . Comme nous pouvons le voir, le calcul de la correction dynamique E^{dyn} nécessite la connaissance de la gravité g ainsi que du profil altimétrique dn du chemin \mathcal{S} . Toutes ces quantités sont mesurables.

15.5 L'altitude orthométrique

L'altitude orthométrique d'un point \mathbf{x} est définie comme étant la distance, le long de la ligne d'aplomb de \mathbf{x} , de la surface du géoïde \mathbf{x}_{W_0} au point \mathbf{x} :

$$H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_{W_0}}^{\mathbf{x}} dh \tag{15.19}$$

Ainsi, l'altitude orthométrique est définie de façon univoque. De plus, contrairement à l'altitude ellipsoïdale, sa surface de référence est le géoïde. Il est facile de la relier à la cote géopotentielle en reprenant l'équation 15.9, et en choisissant un chemin \mathcal{S} particulier, le long de la ligne d'aplomb :

$$\begin{aligned}
 C(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{x}_{W_0}}^{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \cdot dh \\
 &= H^{\text{orth}} \cdot \frac{1}{H^{\text{orth}}} \int_0^{H^{\text{orth}}} g(\mathbf{x}) \cdot dh \\
 &= H^{\text{orth}} \cdot \bar{g}(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{15.20}$$

et donc l'altitude orthométrique est également définie par :

$$H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) = \frac{C(\mathbf{x})}{\bar{g}(\mathbf{x})} \quad (15.21)$$

avec, selon le théorème de la moyenne :

$$\bar{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{H^{\text{orth}}} \int_0^{H^{\text{orth}}} g(\mathbf{x}) \cdot dh \quad (15.22)$$

qui représente la valeur de la gravité moyenne entre le géoïde \mathbf{x}_{W0} et \mathbf{x} , le long de la ligne d'aplomb. Cette valeur n'est en principe pas directement observable car elle nécessite la mesure de la gravité tout le long de la ligne d'aplomb depuis le géoïde. En pratique, \bar{g} est déterminé par la combinaison de mesures gravimétriques à la surface et d'un modèle de masse qui se base sur un champ de densité hypothétique. La nécessité de faire des hypothèses sur le champ de densité entre le géoïde et la topographie représente le principal point faible des systèmes d'altitudes orthométriques.

15.5.1 Correction orthométrique

Nous pouvons également calculer une correction dite *correction orthométrique*, qui nous permet de relier l'altitude usuelle avec l'altitude orthométrique. Pour faire ceci, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) &= H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) + H^{\text{dyn}}(\mathbf{x}) - H^{\text{dyn}}(\mathbf{x}) \\ &= H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) + H^u(\mathbf{x}, \mathcal{S}) + E^{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) - H^{\text{dyn}}(\mathbf{x}) \\ &= H^u(\mathbf{x}, \mathcal{S}) + E^{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) + H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) - H^{\text{dyn}}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (15.23)$$

avec l'équation 15.21, nous avons l'altitude dynamique qui peut s'exprimer en fonction de l'altitude orthométrique et de la gravité moyenne :

$$\begin{aligned} H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) &= H^u(\mathbf{x}, \mathcal{S}) + E^{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) + H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}) \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x})}{\gamma_0} \\ &= H^u(\mathbf{x}, \mathcal{S}) + E^{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) + \frac{\gamma_0 \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x})}{\gamma_0} - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}) \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x})}{\gamma_0} \\ &= H^u(\mathbf{x}, \mathcal{S}) + E^{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) \\ &= H^u(\mathbf{x}, \mathcal{S}) + E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) \end{aligned} \quad (15.24)$$

avec la correction orthométrique :

$$\begin{aligned} E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) &= E^{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}, \mathcal{S}) - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbf{x}_{W0}, \mathcal{S}}^{\mathbf{x}} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (15.25)$$

Ainsi nous voyons qu'il est possible d'obtenir l'altitude orthométrique à partir de l'altitude usuelle, en appliquant la correction orthométrique 15.25, qui nécessite une intégration le long du même chemin \mathcal{S} que celui suivi par le niveling qui a produit l'altitude usuelle

H^u . Comme nous pouvons le voir, le calcul de la correction orthométrique E^{orth} nécessite la connaissance de la gravité g ainsi que du profil altimétrique dn du chemin \mathcal{S} , et la gravité moyenne \bar{g} le long de la ligne d'aplomb au point \mathbf{x} . Mise à part \bar{g} , toutes ces quantités sont mesurables. Nous voyons également que l'altitude orthométrique H^{orth} intervient dans le calcul de la correction orthométrique. Néanmoins, sa valeur ne doit pas être connue avec une grande précision, car elle n'intervient que comme facteur du terme qui contient la gravité moyenne. Ainsi, si l'altitude orthométrique n'est connue qu'à une précision relative de 1%, alors la correction concernée ne sera affectée que de 1%.

15.5.2 Les différences d'altitudes orthométriques

En géodésie et plus généralement en géomatique, il est principalement question de traitement de différence d'altitudes entre deux points. Prenons deux points \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B , dont les altitudes orthométriques sont $H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A)$ et $H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B)$, respectivement. Ainsi, leur différence d'altitude orthométrique s'écrit :

$$\begin{aligned} H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B) - H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A) &= H^u(\mathbf{x}_B, \mathcal{S}_B) + E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_B) \\ &\quad - \left[H^u(\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_A) + E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}_A, \mathcal{S}_A) \right] \end{aligned} \quad (15.26)$$

Ce qui, en réarrangeant les termes, donne, de façon générale :

$$\begin{aligned} H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B) - H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A) &= H^u(\mathbf{x}_B, \mathcal{S}_B) - H^u(\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_A) \\ &\quad + E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}_B, \mathcal{S}_B) - E^{\text{orth}}(\mathbf{x}_{W0}, \mathbf{x}_A, \mathcal{S}_A) \end{aligned} \quad (15.27)$$

ou de façon plus explicite :

$$\begin{aligned} H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B) - H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A) &= H^u(\mathbf{x}_B, \mathcal{S}_B) - H^u(\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_A) \\ &\quad + \int_{\mathbf{x}_{W0}, \mathcal{S}_B}^{\mathbf{x}_B} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn - \int_{\mathbf{x}_{W0}, \mathcal{S}_A}^{\mathbf{x}_A} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot dn \\ &\quad + \frac{\bar{g}(\mathbf{x}_A) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A) - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}_B) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B) \end{aligned} \quad (15.28)$$

La formule 15.28 est générale et peut s'appliquer dans tous les cas de figure. Comme nous pouvons le voir, pour calculer la correction à appliquer à la différence d'altitude usuelle, il est nécessaire de calculer 2 intégrales depuis le point d'origine sur le géoïde, jusqu'aux points \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B . Ceci est nécessaire si les chemins \mathcal{S}_A et \mathcal{S}_B sont différents sur toute leur longueur. En Suisse, cette situation correspondrait à une situation où l'on voudrait transformer une différence d'altitude usuelle en différence d'altitude orthométrique entre un point \mathbf{x}_A déterminé par un cheminement depuis la mer Méditerranée, et un point \mathbf{x}_B déterminé par un cheminement depuis la mer Baltique (Figure 15.1, droite).

Cas particulier

Il existe un cas particulier pour lequel l'équation 15.28 se simplifie. En effet, lorsque nous avons les chemins qui sont de la forme $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_{AB}$ (Figure 15.2), alors nous pouvons écrire :

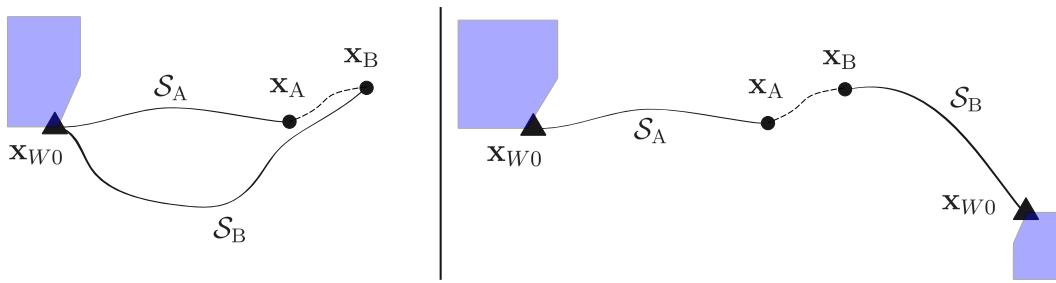


Figure 15.1 – Différence d'altitude orthométrique entre deux points issus de cheminements différents.

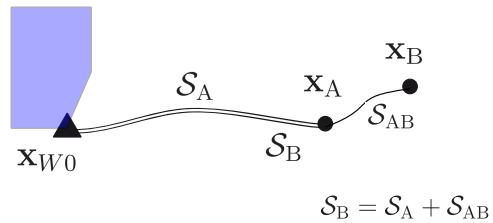


Figure 15.2 – Différence d'altitude orthométrique entre deux points issus de cheminements qui se recouvrent.

$$\begin{aligned}
 H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B) - H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A) &= H^u(\mathbf{x}_B, \mathcal{S}_B) - H^u(\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_A) \\
 &\quad + \int_{\mathbf{x}_A, \mathcal{S}_{AB}}^{\mathbf{x}_B} \frac{g(\mathbf{x}) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot d\mathbf{n} \\
 &\quad + \frac{\bar{g}(\mathbf{x}_A) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_A) - \frac{\bar{g}(\mathbf{x}_B) - \gamma_0}{\gamma_0} \cdot H^{\text{orth}}(\mathbf{x}_B)
 \end{aligned} \tag{15.29}$$

Nous voyons que dans ce cas, il est seulement nécessaire de calculer une intégrale entre \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B sur le chemin \mathcal{S}_{AB} . En pratique, ce cas de figure correspond à un nivelllement géométrique entre \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B .

15.6 L'altitude normale

Nous avons vu que l'une des difficultés majeures de la détermination de l'altitude orthométrique à partir de la côte géopotentielle se trouve dans la détermination de la gravité moyenne le long de la ligne d'aplomb au point considéré (équation 15.21). En effet, il n'est pas possible d'obtenir cette quantité sans faire d'hypothèse sur la densité des masses entre le géoïde et la surface de la topographie. Pour cette raison, le géodésien russe Mikhaïl Molodenskiy a bâti une théorie dans laquelle les altitudes, appelées altitudes normales, qui sont obtenues à partir des cotes géopotentielles, sont de la forme suivante :

$$H^{\text{norm}}(\mathbf{x}) = \frac{C(\mathbf{x})}{\bar{\gamma}(\mathbf{x})} \tag{15.30}$$

avec, selon le théorème de la moyenne :

$$\bar{\gamma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{H^{\text{norm}}} \int_0^{H^{\text{norm}}} \gamma(\mathbf{x}) \cdot dh \tag{15.31}$$

qui représente la valeur de la gravité normale moyenne entre le quasi-géoïde et \mathbf{x} , le long de la ligne d'aplomb. Cette valeur est obtenue sans aucune incertitude, à partir du champ de gravité théorique généré par l'ellipsoïde de référence.

15.7 Le système d'altitude Suisse NF02

Le système d'altitude NF02 (niveling fédéral 1902) est, encore aujourd'hui, le système altimétrique officiel en Suisse. La première inscription officielle dans une loi fédérale remonte à l'année 1910. C'est un système d'altitudes usuelles, dont le réseau principal est basé sur des mesures de niveling géométrique uniquement (sans corrections dues à la gravité). Les premières mesures ont été réalisées entre 1865 et 1933. A l'époque, le réseau est divisé en 18 boucles qui ont des longueurs entre 150 et 300 [km] (voir Figure 15.3). La précision du niveling géométrique de précision était déjà d'environ $0.5 \frac{[\text{mm}]}{\sqrt{[\text{km}]}}$. L'écart de fermeture maximal des boucles de niveling était d'environ 6 [cm] (boucle XIII).

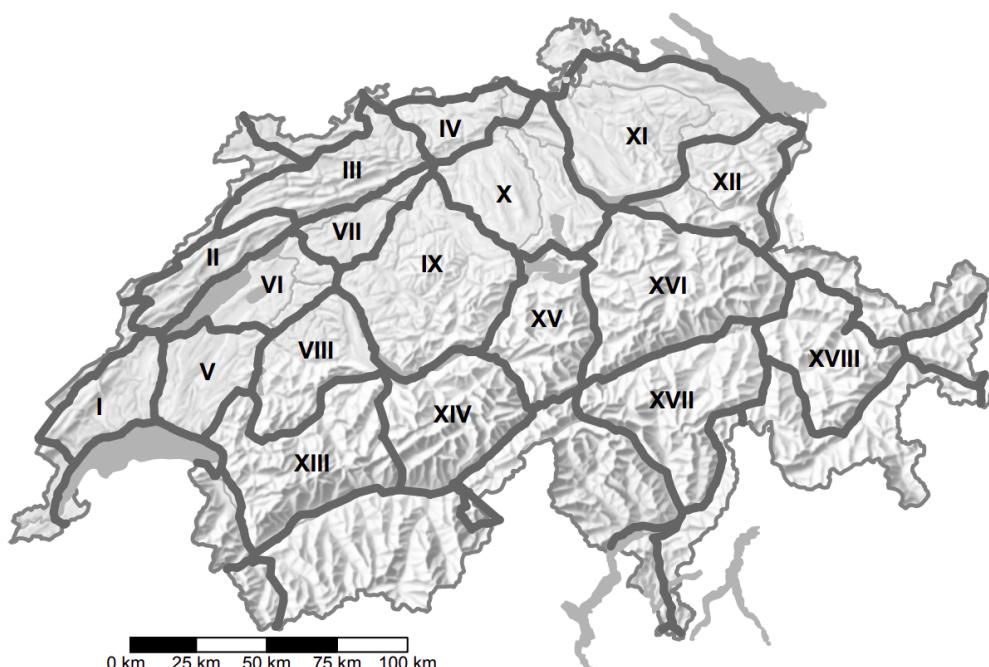


Figure 15.3 – Boucles de niveling fédéral originales 1902-1933. Source : Das neue Landeshöhennetz der Schweiz LHN95 Andreas Schlatter. ISBN 978-3-908440-16-1. Diss ETH Zürich.

Les altitudes NF02 sont référencées sur un point unique, le Repère Pierre du Niton, dans la rade de Genève, dont l'altitude est fixée à 373.600 m. Cette altitude de référence a été déterminée grâce à différents rattachements à la mer Méditerranée ainsi qu'à la mer Baltique (voir Figure 15.4)³. Les rattachements se sont faits indirectement grâce à des cheminement de niveling géométrique sur des points des réseaux altimétriques des pays voisins de la Suisse. Par exemple, la rattachelement au marégraphe de Marseille s'est

3. Lors de la détermination de l'altitude du RPN, des corrections dites sphéroïdales ont été appliquées aux cheminements étrangers depuis les marégraphes. Elles correspondent à des corrections orthométriques calculées selon un champs de gravité théorique normal.

fait indirectement par un niveling géométrique de 6 [km] entre le Repère Pierre du Niton et un point du réseau altimétrique français à l'Est de Genève, Moillesulaz.

	Nach Anschluss mit	Höhe über Mittelwasser	Gewicht
1.	Frankreich	in Marseille.....373,633 m	2,8
2.	Italien	der ital. Meere..... 373,760 m	1,0
3.	Oesterreich	in Triest.....373,724 m	0,7
4.	Deutschland	in Swinemünde.....373,427 m	2,6
Höhe der Bronzeplatte auf Pierre du Niton über dem Mittelwasser der Meere			
373,585 m $\pm 0,074$ m.			

Figure 15.4 – Détermination de l'altitude du Repère de la Pierre du Niton. Source : Hilfiker J. (1902) : Untersuchung der Höhenverhältnisse in der Schweiz im Anschluss an den Meereshorizont. Verlag der Abteilung für Landestopographie, Bern..

Aujourd'hui, le réseau se compose de près de 8000 chevilles, réparties sur 18 boucles quasiment identiques aux originales (voir Figure 15.3), le long des principaux axes routiers. La précision relative des altitudes usuelles des points NF02 du réseau de base est d'environ $1.0 \frac{[mm]}{\sqrt{[km]}}$ lorsqu'ils sont sur la même boucle. Par contre, lorsque les points ne sont pas situés sur la même boucle de niveling, ou qu'ils sont éloignés de plusieurs dixaines de kilomètres, des imprécisions de l'ordre de 50 cm peuvent être envisagées.

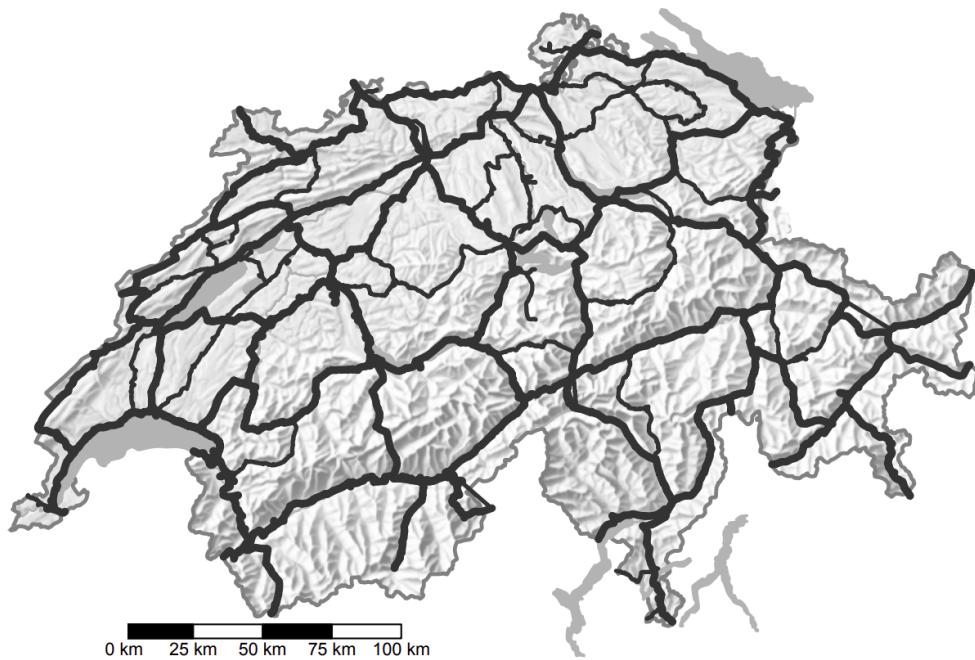


Figure 15.5 – Ligne de niveling fédéral actuelles. Source : Das neue Landeshoehennetz der Schweiz LHN95 Andreas Schlatter. ISBN 978-3-908440-16-1. Diss ETH Zürich.

Ces imprécisions sont dues aux imprécisions de mesures du réseau original, aux inconsistances intrinsèques inhérentes aux altitudes usuelles et à la déformation de la croûte

terrestre, négligée dans le système NF02. En effet, grâce à la répétition des mesures de nivellation de précision du réseau NF02 depuis un siècle, il est possible de mesurer une élévation des zones alpines de près de 1.5 [mm] par année, par rapport aux zones de plaines.

Ce phénomène est bien illustré en Figure 15.6, lorsque l'on compare les altitudes de points situés sur un cheminement entre le Repère Pierre du Niton et Brig, entre différentes époques de mesures, de 1865 à 1998. Comme nous pouvons le voir, si un géomètre décide, en 2021, de déterminer l'altitude d'un point situé près de Brig dans le système NF02, par nivellation géométrique depuis le RPN, il trouvera une altitude de près de 15 [cm] plus élevée que s'il décide de faire une détermination altimétrique qui se base sur un point fixe altimétrique officiel NF02 près de Brig. En pratique, ce cas de figure n'apparaît pas directement sous cette forme, mais illustre que le système NF02 est un système qui ne peut être utilisé que de façon locale. Ainsi, lorsque les applications sont locales et que les instruments de mesures se réfèrent également de façon locale (nivellation, station totale, GNSS différentiel à courte ligne de base), alors les inconsistances du système NF02 ne sont en principes pas trop limitantes. Par contre, si un projet plus étendu doit pouvoir bénéficier d'altitudes précises et homogènes, ou lorsque l'instrumentation utilisée se réfère à un système global (GNSS PPP), alors le système NF02 n'est plus approprié.

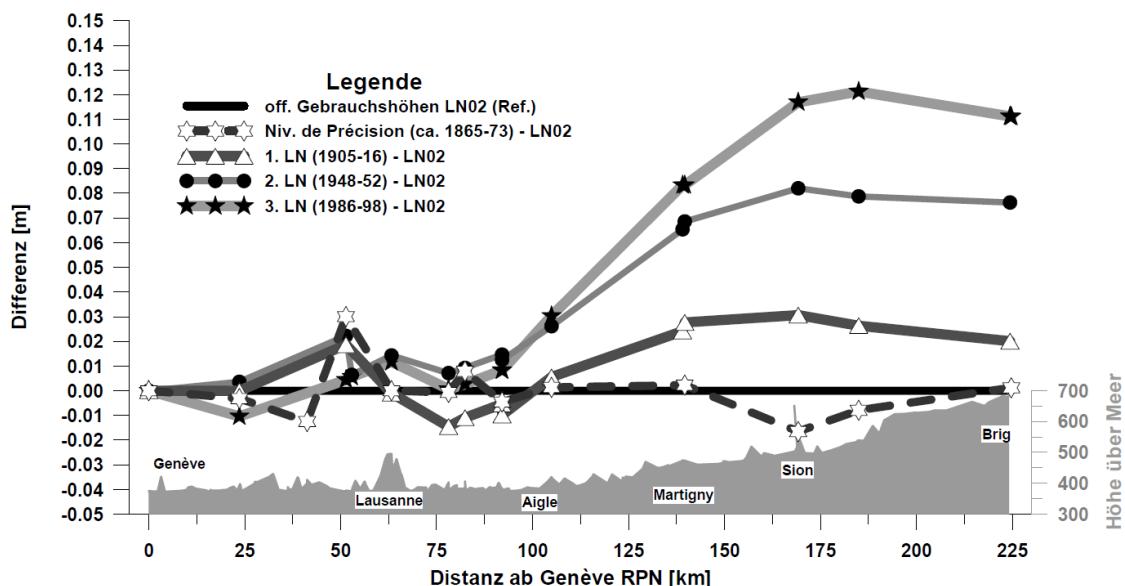


Figure 15.6 – Cheminement de nivellation entre le Repère Pierre du Niton et Brig entre 1865 et 1998. Source : Das neue Landeshöhennetz der Schweiz LHN95 Andreas Schlatter. ISBN 978-3-908440-16-1. Diss ETH Zürich.

En d'autres mots, nous pouvons également dire que les altitudes NF02 des points du réseau altimétrique officiel Suisse, représentent, à peu de choses près, les altitudes usuelles de ces points à l'époque $t = 1902$.

15.8 Le système d'altitude Suisse RAN95

Les système d'altitude RAN95 (Réseau altimétrique national 95) est un système d'altitude orthométrique défini selon les standards modernes. Aujourd'hui, le système RAN95

n'est pas le système officiel en Suisse. Il est surtout utilisé lors de projets de constructions de grande envergure, comme Alptransit, pour les besoins de la mensuration nationale, ou lorsque la détermination des altitudes d'un réseau de haute précision se fait en utilisant des mesures terrestres et GNSS. Comme nous pouvons le voir sur la Figure 15.8, sur l'ensemble du territoire de la Suisse, les différences entre les altitudes RAN95 et NF02 varient de environ -20 à +50 [cm]. Ces différences sont principalement dues à 3 raisons :

- Les incertitudes des mesures des cheminements de nivellation géométrique originaux. L'ordre de grandeur de ces incertitudes est d'environ $1.0 \frac{[\text{mm}]}{\sqrt{[\text{km}]}}$, ce qui pour un cheminement de 300 [km], représente une incertitude d'environ 20 [cm].
- L'influence des mouvements verticaux de la croûte terrestre. En effet, comme nous pouvons le voir sur la Figure 15.6, le massif alpin ne cesse de s'élever par rapport à la plaine. Les altitudes NF02 des points fixes altimétriques représente l'altitude à l'époque $t = 1902$, tandis que les altitudes RAN95 de ces mêmes points sont données à l'époque $t = 1993$. De ce fait, si l'on considère une élévation maximale d'environ 1.5 [mm] par année dans les alpes, alors, en près de 100 ans, une différence d'altitude de près de 15 cm peut être envisagée.
- Contrairement aux altitudes usuelles NF02, la gravité le long des cheminements de nivellation géométrique est prise en compte de façon rigoureuse lors de la détermination des altitudes RAN95.

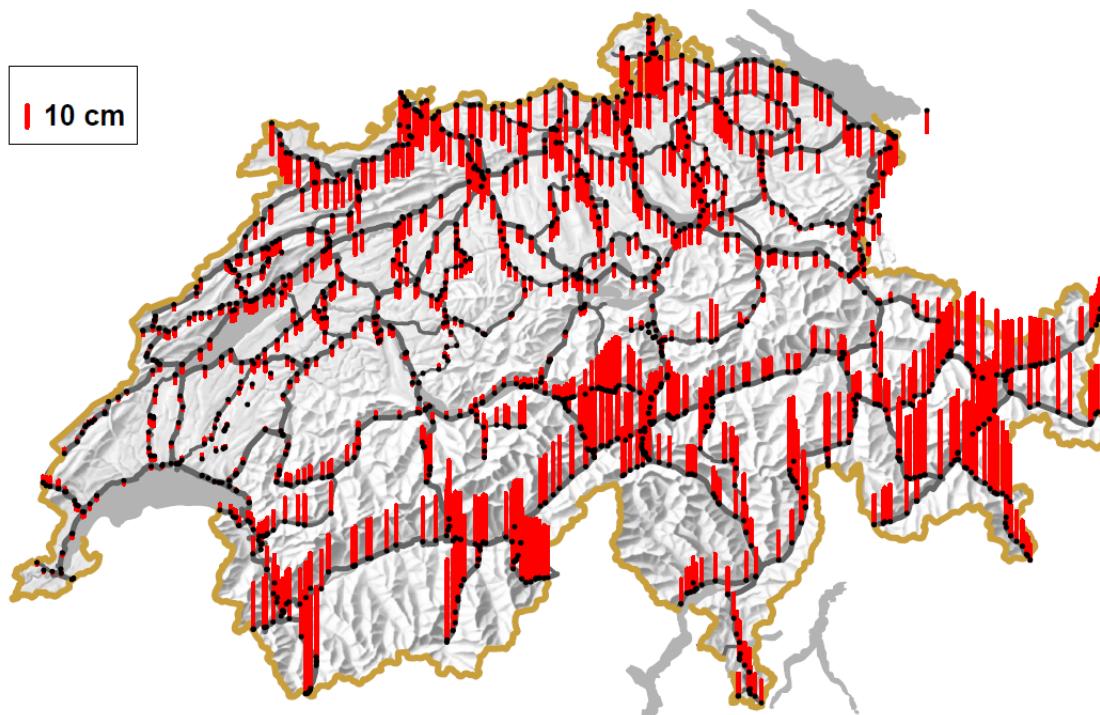


Figure 15.7 – RAN95 - NF02. Source : CHGeo2004 Urs Marti, swisstopo.

Peu de temps après son élaboration, il a été question de savoir s'il était opportun de

définir le système RAN95 comme nouveau cadre de référence altimétrique officiel. Finalement en 2002, le centre de compétence chargé du changement des cadres de références pris la décision de maintenir le système NF02 comme système officiel. Les raisons principales suivantes ont été alors évoquées (en 2002) :

- Le risque de confusion (entre RAN95 et NF02) et donc le risque de commettre des erreurs aux conséquences financières lourdes est très élevé, les différences entre NF02 et RAN95 étant à peine perceptibles.
- Une grande partie des données altimétriques numériques n'est pas encore prête pour la transformation, les coordonnées planimétriques associées faisant défaut.
- Bon nombre de cotes altimétriques sont utilisées au sein de séries temporelles, le changement de cadre créerait donc une discontinuité.
- A l'heure actuelle, les normes relatives à l'introduction d'un système altimétrique européen reposent sur des bases trop peu sûres et insuffisamment acceptées pour que des adaptations ultérieures puissent être exclues.
- Le débat et les préparatifs concernant la planimétrie (introduction de MN95) en sont à un stade bien plus avancé que dans le domaine altimétrique. Une association de la planimétrie et de l'altimétrie pourrait avoir des conséquences néfastes sur la mise en oeuvre déjà décidée en planimétrie.

15.8.1 La transformation RAN95-NF02 (HTRANS)



Figure 15.8 – RAN95 - NF02 interpolé. Source : CHGeo2004 Urs Marti, swisstopo.

Annexe A

Algèbre linéaire

A.1 Notations

\mathbf{A}	matrice
a_{ij}	élément de \mathbf{A} à la ligne i et à la colonne j
\mathbf{A}^T	transposée de \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	inverse de \mathbf{A}
$\det \{\mathbf{A}\}$	déterminant de \mathbf{A}
$\text{rang } \{\mathbf{A}\}$	rang de \mathbf{A}
$\text{trace } \{\mathbf{A}\}$	trace de \mathbf{A}
$\text{eig } \{\mathbf{A}\}$	valeurs propres de \mathbf{A}
$\text{eig } \{\mathbf{A}\}$	vecteurs propres de \mathbf{A}
\mathbf{v}	vecteur colonne
v_i	élément de \mathbf{v} à la ligne i

A.2 Types de matrices réelles

Matrice réelle

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (\text{A.1})$$

Matrice carrée

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.2})$$

Matrice réelle symétrique

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (\text{A.3})$$

avec les propriétés suivantes :

$$\text{eig } \{\mathbf{A}\} \text{ sont toutes réelles} \quad (\text{A.4})$$

$$\text{eig } \{\mathbf{A}\} \text{ sont tous orthogonaux entre eux} \quad (\text{A.5})$$

Matrice anti-symétrique

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad (\text{A.6})$$

Matrice orthonormée

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad (\text{A.7})$$

A.3 Algèbre matricielle de base

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (\text{A.8})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{A.9})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (\text{A.10})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.12})$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (\text{A.13})$$

A.4 Décomposition en valeurs et vecteurs propres

Pour une matrice carrée \mathbf{A} , si la matrice diagonale Λ contient les valeurs propres $\text{eig}\{\mathbf{A}\}$ de \mathbf{A} , et que la matrice \mathbf{U} contient les vecteurs propres $\text{eig}\{\mathbf{A}\}$ de \mathbf{A} , alors nous avons :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad (\text{A.14})$$

et :

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad (\text{A.15})$$

Si \mathbf{A} est une matrice réelle symétrique, alors :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^T \quad (\text{A.16})$$

et :

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \quad (\text{A.17})$$

A.4.1 Matrice réelle 2×2

La décomposition d'une matrice \mathbf{A} , réelle, 2×2 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

en valeurs et vecteurs propres :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

peut se calculer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{T^2}{4} - D} \\ \lambda_2 &= \frac{T}{2} - \sqrt{\frac{T^2}{4} - D} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} T &= \mathbf{trace}\{\mathbf{A}\} = a_{11} + a_{22} \\ D &= \mathbf{det}\{\mathbf{A}\} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\text{si } a_{21} \neq 0 : \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - a_{22}}{\sqrt{a_{21}^2 + (\lambda_1 - a_{22})^2}} \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{21}^2 + (\lambda_1 - a_{22})^2}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 - a_{22}}{\sqrt{a_{21}^2 + (\lambda_2 - a_{22})^2}} \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{21}^2 + (\lambda_2 - a_{22})^2}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{si } a_{12} \neq 0 : \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}} \\ \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_1 - a_{11})^2}} \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_2 - a_{11})^2}} \\ \frac{\lambda_2 - a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda_2 - a_{11})^2}} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

$$\text{si } a_{12} = 0 \text{ et } a_{21} = 0 : \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Annexe B

Analyse

B.1 Projection de Mercator sphérique

La projection de Mercator sphérique consiste à trouver une projection du type :

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= R \cdot \lambda \\ N(\lambda, \phi) &= R \cdot f(\phi) \end{aligned} \tag{B.1}$$

avec comme condition :

$$\frac{df(\phi)}{d\phi} = \frac{1}{\cos \phi} \tag{B.2}$$

et donc la fonction $f(\phi)$ se trouve par intégration :

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \int \frac{1}{\cos \phi} \cdot d\phi \\ &= \int \frac{\cos \phi}{\cos^2 \phi} \cdot d\phi \\ &= \int \frac{\cos \phi}{1 - \sin^2 \phi} \cdot d\phi \\ &= \int \frac{\cos \phi}{(1 + \sin \phi) \cdot (1 - \sin \phi)} \cdot d\phi \end{aligned} \tag{B.3}$$

En procédant au changement de variable suivant :

$$u = \sin \phi \quad \text{et donc :} \quad du = \cos \phi \cdot d\phi \tag{B.4}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} f(u) &= \int \frac{1}{(1 + u) \cdot (1 - u)} \cdot du \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - u} \right] \cdot du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1 + u} \cdot du + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1 - u} \cdot du \end{aligned} \tag{B.5}$$

Puis en procédant aux changements de variables suivantes :

$$\begin{aligned} v &= 1 + u \quad \text{et donc :} \quad dv = du \\ w &= 1 - u \quad \text{et donc :} \quad dw = -du \end{aligned} \tag{B.6}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(v, w) &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{v} \cdot dv - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{w} \cdot dw \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln|v| - \frac{1}{2} \cdot \ln|w| + C \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

et donc :

$$\begin{aligned} f(\phi) &= \frac{1}{2} \cdot \ln|1 + \sin \phi| - \frac{1}{2} \cdot \ln|1 - \sin \phi| + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| + C \\ &= \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| + C \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

et avec la condition :

$$N(\lambda, \phi = 0) = 0 \quad (\text{B.9})$$

la constante d'intégration vaut $C = 0$, et nous avons finalement :

$$f(\phi) = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| \quad (\text{B.10})$$

de plus, si nous considérons $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} E(\lambda, \phi) &= R \cdot \lambda \\ N(\lambda, \phi) &= R \cdot \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Annexe C

Géométrie différentielle des surfaces

C.1 Surfaces dans \mathbb{R}^3

De façon générale, dans un espace euclidien \mathbb{R}^3 , une surface est définie par son vecteur position $\mathbf{x}(u, v)$ qui dépend de 2 paramètres (u, v) :

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

C.2 Vecteurs tangents

Deux vecteurs tangents à la surface peuvent être définis, en faisant varier u et v , respectivement :

$$\mathbf{t}_u(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}_v(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

le vecteur de variation de position $d\mathbf{x}(u, v)$ peut s'écrire :

$$d\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{t}_u(u, v) \cdot du + \mathbf{t}_v(u, v) \cdot dv \quad (\text{C.3})$$

C.3 Première forme fondamentale = tenseur métrique

La première forme fondamentale de la surface est définie par la matrice :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_u \cdot \mathbf{t}_u & \mathbf{t}_u \cdot \mathbf{t}_v \\ \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_u & \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{uu} & t_{uv} \\ t_{vu} & t_{vv} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

et que l'on note plus traditionnellement :

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_u \cdot \mathbf{t}_u & \mathbf{t}_u \cdot \mathbf{t}_v \\ \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_u & \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{t}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

La première forme fondamentale permet de calculer les éléments de distances infinitésimaux ds par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{u} \\ &= d\mathbf{u}^T \cdot \mathcal{F}_I \cdot d\mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

avec :

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

C.4 Seconde forme fondamentale

La seconde forme fondamentale \mathcal{F}_{II} est définie de la façon suivante :

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{uu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{t}_{uv} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{t}_{vu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{t}_{vv} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

avec le vecteur normal \mathbf{n} à la surface :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v|} \quad (\text{C.9})$$

ainsi que des vecteurs de variation des vecteurs tangents selon u et v , respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{uu} &= \frac{d\mathbf{t}_u}{du} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 y(u,v)}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 z(u,v)}{\partial u^2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{t}_{uv} &= \frac{d\mathbf{t}_u}{dv} = \mathbf{t}_{vu} = \frac{d\mathbf{t}_v}{du} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 y(u,v)}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 z(u,v)}{\partial u \partial v} \end{pmatrix} \\ \mathbf{t}_{vv} &= \frac{d\mathbf{t}_v}{dv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 y(u,v)}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z(u,v)}{\partial v^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

C.5 Opérateur de forme (Gauss-Weingarten)

L'opérateur de forme \mathcal{W} se calcule à partir des première et seconde formes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \mathcal{F}_I^{-1} \cdot \mathcal{F}_{II} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

C.6 Courbures

C.6.1 Courbures principales

Les courbures principales κ_1 et κ_2 ainsi que leur directions correspondantes \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont données par les valeurs et vecteurs propres de l'opérateur de forme \mathcal{W} :

$$\mathcal{W} = \mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad (\text{C.12})$$

avec la matrice diagonale des valeurs propres κ_1 et κ_2 :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

et avec la matrice des vecteurs propres \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

La courbure κ_θ dans une direction θ (angle depuis la direction principale \mathbf{u}_1) se calcule, selon le théorème d'Euler, par :

$$\kappa_\theta = \kappa_1 \cdot \cos^2 \theta + \kappa_2 \cdot \sin^2 \theta \quad (\text{C.15})$$

C.6.2 Courbure moyenne

La courbure moyenne H peut se calculer à l'aide des courbures principales :

$$H = \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2) \quad (\text{C.16})$$

ou directement à partir de l'opérateur de forme :

$$H = \frac{1}{2} \cdot \text{trace} \{\mathcal{W}\} \quad (\text{C.17})$$

Elle représente une quantité dite *extrinsèque*, c'est à dire une quantité qui décrit la courbure apparente de la surface représentée dans \mathbb{R}^3 .

C.6.3 Courbure de Gauss

La courbure de Gauss K peut se calculer à l'aide des courbures principales :

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad (\text{C.18})$$

ou directement à partir de l'opérateur de forme :

$$K = \det \{\mathcal{W}\} \quad (\text{C.19})$$

Elle représente une quantité dite *intrinsèque*, c'est à dire une quantité qui décrit la courbure de la surface lorsque elle est explorée depuis sa surface uniquement.

C.6.4 Theorema egregium de Gauss

Le theorema egregium de Gauss¹ montre que la courbure de Gauss K d'une surface est une quantité intrinsèque qui est conservée lorsque l'on déforme la surface sans l'étirer. De façon équivalente, il démontre que les points de deux surfaces peuvent être superposés sans étirements locaux, si leur courbure de Gauss K sont identiques en tous points. Dans ce cas, nous disons que les deux surfaces sont *localement isométriques*.

C.7 Trajectoire sur une surface

Soit une surface \mathcal{S} paramétrique donnée par :

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

C.7.1 Vecteur de position

Une trajectoire \mathcal{T} sur cette surface est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

avec le paramètre t qui représente le temps.

C.7.2 Vecteur de vitesse instantanée

Le vecteur de vitesse instantanée $\mathbf{v}(t)$ s'écrit :

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(u(t), v(t)) \\ \dot{y}(u(t), v(t)) \\ \dot{z}(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

C.7.3 Longueur de la trajectoire

La longueur $s(t)$ de la trajectoire \mathcal{T} après un temps t se calcule :

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(t')| \cdot dt' \quad (\text{C.23})$$

1. Théorème remarquable, en latin

C.8 Courbe sur une surface

Soit une surface \mathcal{S} paramétrique donnée par :

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (\text{C.24})$$

C.8.1 Vecteur de position

Une courbe \mathcal{C} sur cette surface est donnée par :

$$\mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} x(u(s), v(s)) \\ y(u(s), v(s)) \\ z(u(s), v(s)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

avec le paramètre s qui représente la coordonnée curviligne le long de la courbe (longueur le long de la courbe).

C.8.2 Vecteur tangent

Le vecteur tangent s'écrit :

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx(u(s), v(s))}{ds} \\ \frac{dy(u(s), v(s))}{ds} \\ \frac{dz(u(s), v(s))}{ds} \end{pmatrix} \quad (\text{C.26})$$

dont le module vaut, par définition, $|\mathbf{t}(s)| = 1$

C.8.3 Vecteur de courbure

Le vecteur de courbure de la courbe \mathcal{C} s'écrit :

$$\mathbf{c}(s) = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x(u(s), v(s))}{ds^2} \\ \frac{d^2y(u(s), v(s))}{ds^2} \\ \frac{d^2z(u(s), v(s))}{ds^2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.27})$$

Ce vecteur pointe vers le centre du cercle osculateur. Sa longueur est l'inverse du rayon de courbure .

C.8.4 Courbure

La courbure k de la courbe \mathcal{C} s'écrit :

$$k(s) = |\mathbf{c}(s)| \quad (\text{C.28})$$

C.8.5 Courbure normale

La courbure normale k_n de la courbe \mathcal{C} s'écrit :

$$k_n(s) = \mathbf{c}(s) \cdot \mathbf{n}(s) \quad (\text{C.29})$$

et représente la courbure de \mathcal{C} dans le plan défini par la normale à la surface \mathcal{S} et le vecteur tangent $\mathbf{t}(s)$.

C.8.6 Courbure géodésique

La courbure normale k_g de la courbe \mathcal{C} s'écrit :

$$k_g(s) = \mathbf{c}(s) \cdot [\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s)] \quad (\text{C.30})$$

et représente la courbure de \mathcal{C} dans le plan tangent à la surface \mathcal{S} .

C.8.7 Reparamétrisation d'une trajectoire \mathcal{T} en courbe \mathcal{C}

Il est possible de reparamétriser une trajectoire $\mathbf{x}(t)$ en une courbe $\mathbf{x}(s)$ en procédant au changement de variable suivant :

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s^{-1}(t)) \quad (\text{C.31})$$

avec :

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{t}(t')| \cdot dt' \quad (\text{C.32})$$

C.9 Géodésique

Une courbe $\mathbf{x}(s)$ sur une surface \mathcal{S} , entre deux points A et B , est appelée géodésique lorsque sa longueur totale S est localement minimale. En d'autres termes, c'est la courbe qui minimise localement la distance entre A et B :

$$\int_A^B ds \rightarrow \min \quad (\text{C.33})$$

De façon équivalente, une géodésique est une courbe dont la courbure géodésique k_g est nulle en tous points. En d'autres termes, c'est la courbe qui évolue en ligne droite dans le plan tangent à la surface \mathcal{S} . L'équation d'une géodésique s'écrit donc :

$$k_g = \mathbf{c}(s) \cdot [\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s)] = 0 \quad (\text{C.34})$$

C.10 Théorème de Gauss-Bonnet local

Le théorème de Gauss-Bonnet local est un résultat fondamental et profond de géométrie différentielle. Pour une région donnée \mathcal{R} , sur une surface \mathcal{S} , ce théorème met en relation la courbure de Gauss K dans cette région \mathcal{R} , et les angles que l'on mesure lorsque l'on suit le bord $\partial\mathcal{R}$ de cette région \mathcal{R} . De façon générale il s'écrit :

$$\iint_{\mathcal{R}} K \cdot dA = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i - \int_{\partial\mathcal{R}} k_g \cdot ds \quad (\text{C.35})$$

avec :

\mathcal{S}	=	la surface.
\mathcal{R}	=	une région sur la surface \mathcal{S} .
$\partial\mathcal{R}$	=	le bord de la région \mathcal{R} .
K	$[\frac{1}{m^2}]$	la courbure de Gauss.
dA	$[m^2]$	l'élément différentiel de surface, sur la surface \mathcal{S} .
α_i	[rad]	l'angle externe du sommet i .
k_g	$[\frac{1}{m}]$	la courbure géodésique du bord $\partial\mathcal{R}$.
ds	[m]	l'élément différentiel de distance, sur le bord $\partial\mathcal{R}$.