

Introduction au GNSS

Prof. Dr. Sébastien Guillaume

Introduction

GNSS

Global Navigation Satellite Systems

GPS

USA
31 MEO

GLONASS

Russe
24 MEO

GALILEO

Europe
22 MEO

(30) planifié

BEIDOU

Chine
26 MEO
10 IGSO
6 GEO

MEO = middle earth orbit

IGSO = inclined geosynchronous orbit

GEO = geostationary orbit



Introduction

Caractéristiques principales

- Positionnement et navigation temps-réel.
- Global, partout sur Terre et à n'importe quel moment.
- Nombre d'utilisateurs illimité.
- Indépendant de la météo.
- Position en 3D, vitesse et temps en temps-réel.



Introduction

Segments

Un système GNSS est composé de 3 segments:

- 1. Le segment spatial.**
- 2. Le segment terrestre de contrôle.**
- 3. Le segment des utilisateurs.**



Segment spatial

Le segment spatial est composé de l'ensemble des satellites qui orbitent autour de la Terre.



Source: NASA



Source: ESA

Segment spatial

Le segment spatial est composé de l'ensemble des satellites qui orbitent autour de la Terre.

| Characteristic | GPS | GLONASS | Galileo |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|
| Orbital Radius | 26'600 km | 25'500 km | 29'994 km |
| Orbital Period | 11 h 58 min | 11 h 16 min | 14 h 22 min |
| Orbit Inclination | 55 deg | 65 deg | 56 deg |
| No. of Planes | 6 (60 deg) | 3 (120 deg) | 3 (120 deg) |
| No. of Satellites | 32 | 25 | 30 |
| Approximate Mass | 815 kg | 700 kg | 530 kg |

Segment spatial

Période

La période orbitale est donnée par la 3^{ème} loi de Kepler:

$$P = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M_{\text{Terre}}}}$$

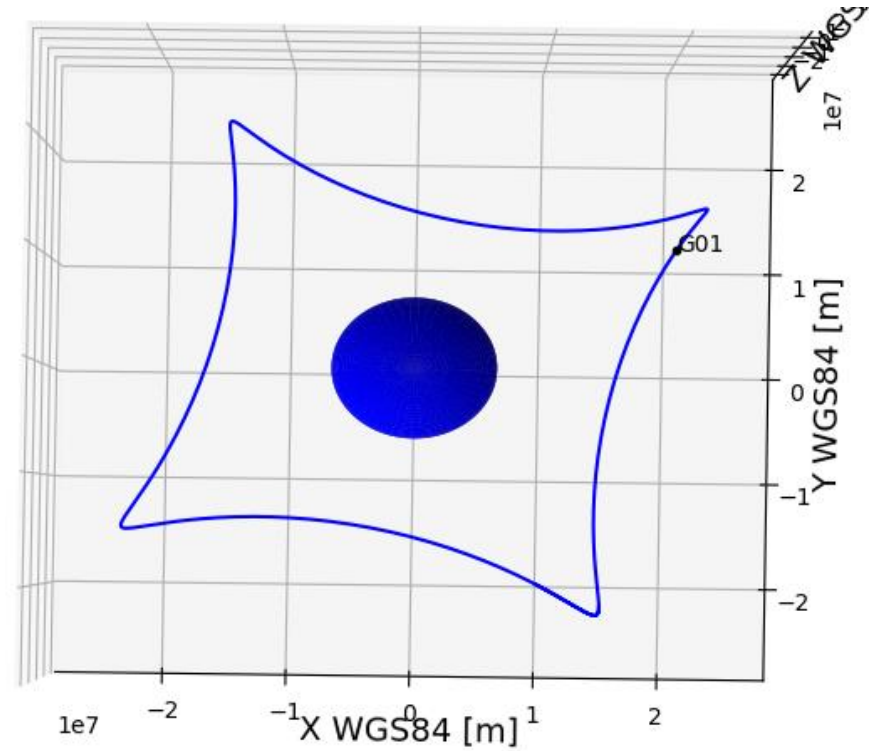
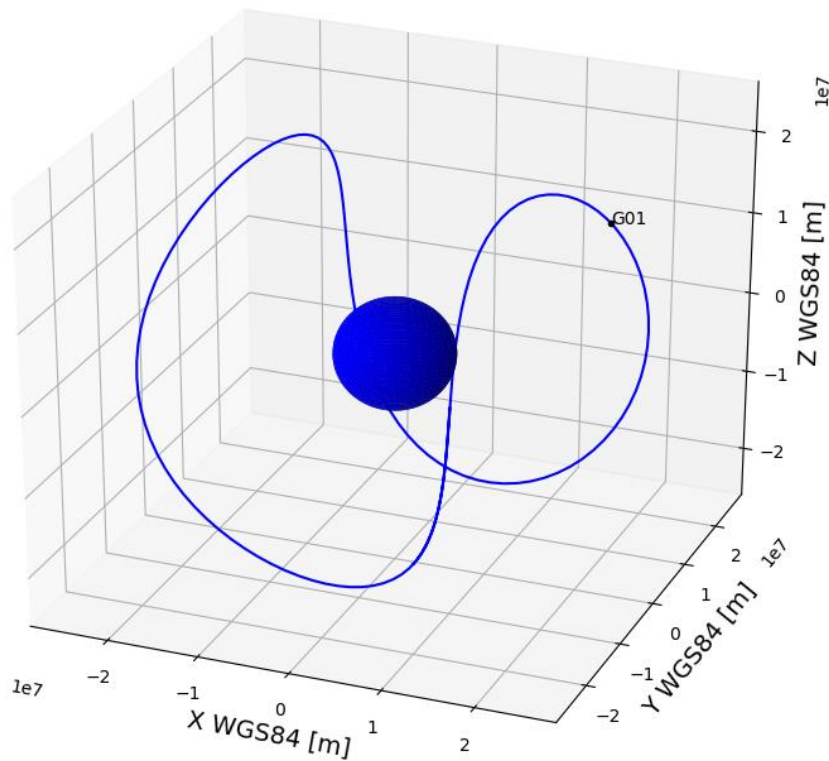
GM_{Terre} = La constante de gravitation multiplié par la masse de la Terre.

a = Le demi-grand axe de l'ellipse.



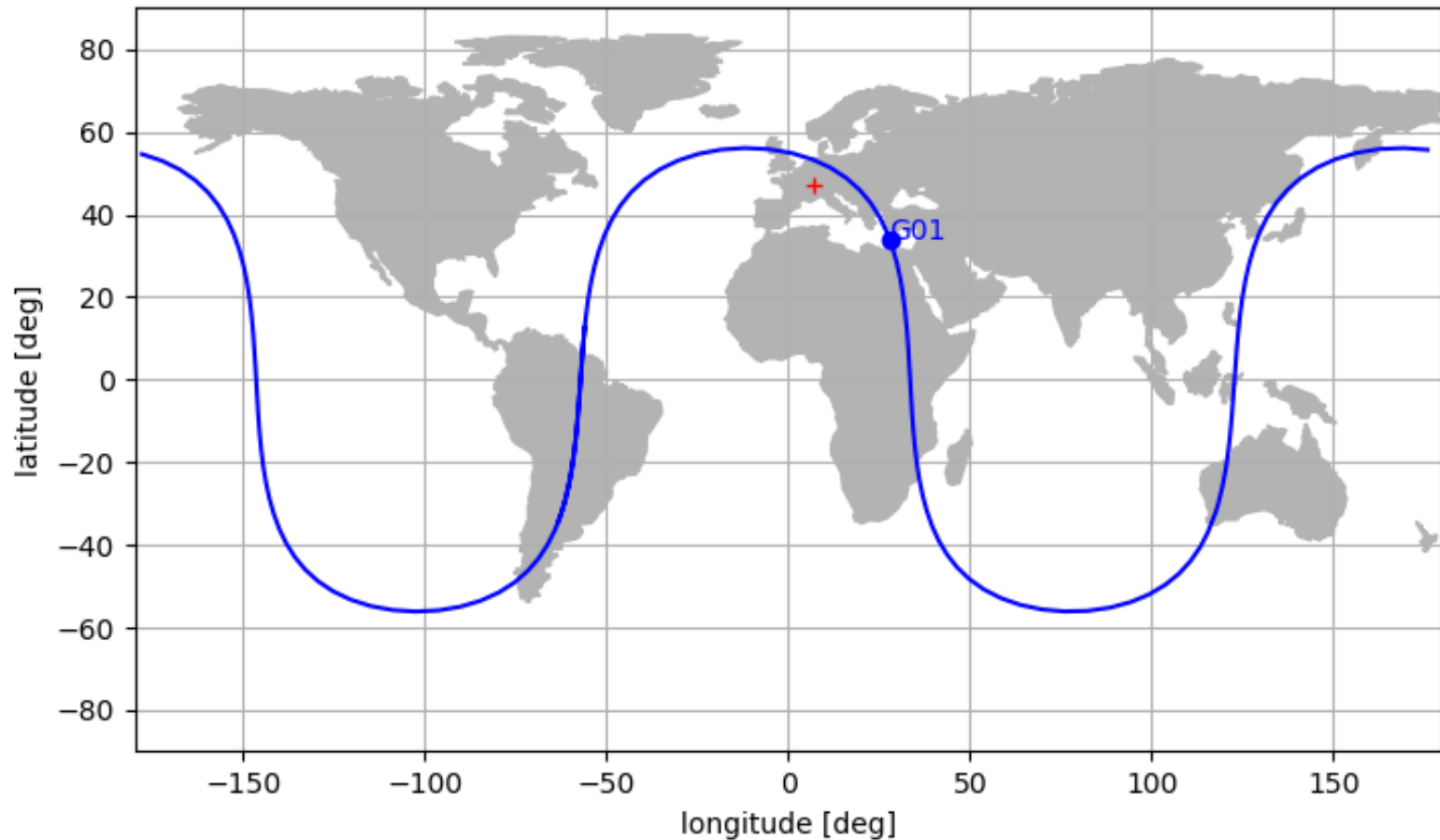
Segment spatial

Orbite en WGS84



Segment spatial

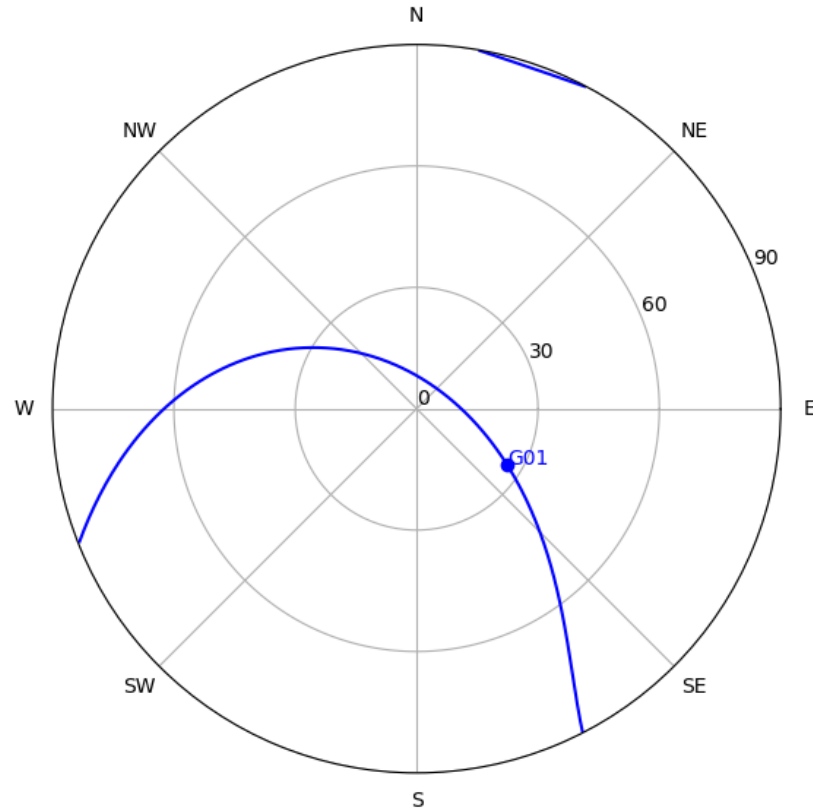
Orbite en projection plate-carrée



Segment spatial

Orbite en skyplot

lon:7.00 [deg], lat:47.00 [deg], h: 500.00 [m], 01.01.2020 05:54:60.000



Segment de contrôle

Missions

1. Observation des orbites et prédiction des orbites.
2. Observation des horloges des satellites et prédiction de leurs drifts.
3. Télétransmission des paramètres d'orbites et d'horloges aux satellites.

Toutes les stations de contrôles réalisent des observations puis transmettent leurs données à la station principale (GPS, Colorado Springs).

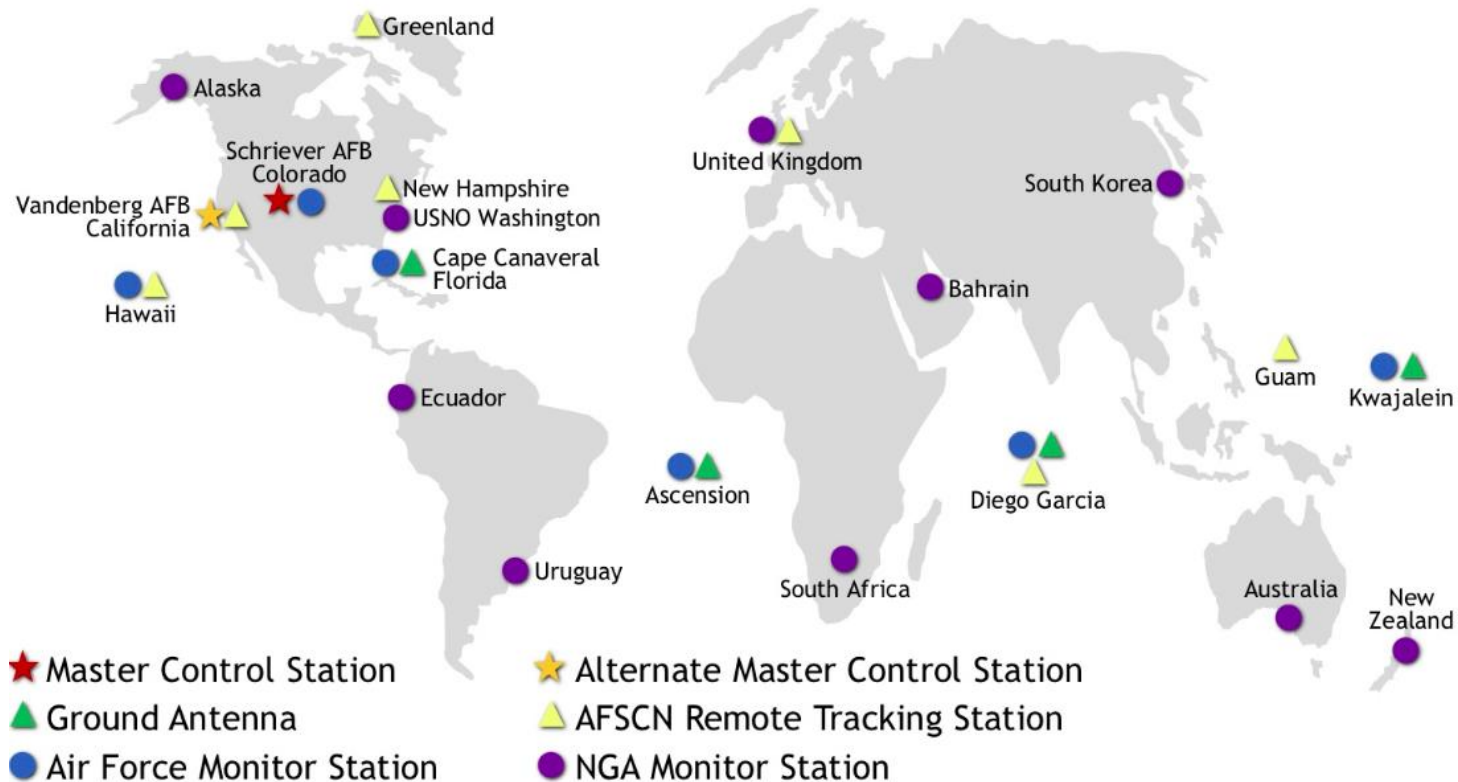
La station principale calcul tous les éléments puis les retransmet aux stations de contrôle, qui ensuite les télétransmettent aux satellites.



Segment de contrôle

GPS

GPS Control Segment



<http://www.icaptainapp.com/2019/11/22/gps-control-segment/>

Segment des utilisateurs

Le segment des utilisateurs représente tous les récepteurs GNSS couplés à une antenne réceptrice.

Signaux GPS

- Les signaux émis par les satellites GNSS sont générés par des horloges atomiques à bord des satellites.
- Les ondes porteuses sont des micro-ondes autour de 1.5 [GHz] / 20 [cm]. (Four micro-onde ~2.45 [GHz]).
- Informations principales modulées sur les ondes porteuses:
 - **Code C/A** (Clear Access / Coarse Acquisition). Résolution : 300 [m]. Utilisé pour mesurer les pseudo-distances.
 - **Données de navigation**. Utilisées pour calculer les éléments orbitaux (entre autre).



Signaux GPS

Ondes porteuses

2 ondes porteuses sur tous les satellites:

L1: 1.57542 [GHz], ~19 [cm]

L2: 1.22760 [GHz], ~24 [cm]

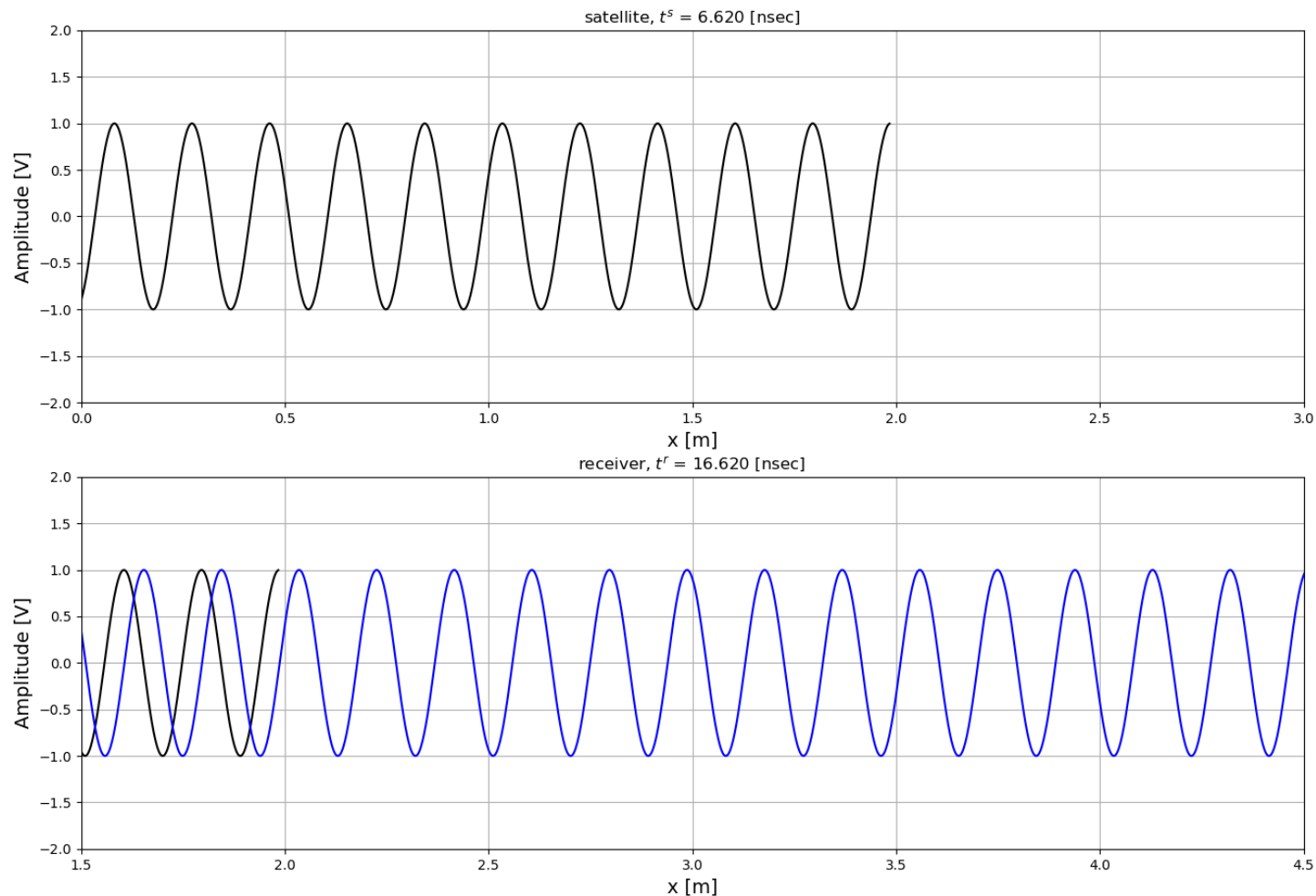
1 onde porteuse supplémentaire sur les satellites les plus récents:

L5: 1.17645 [GHz], ~25 [cm]

Signaux GPS

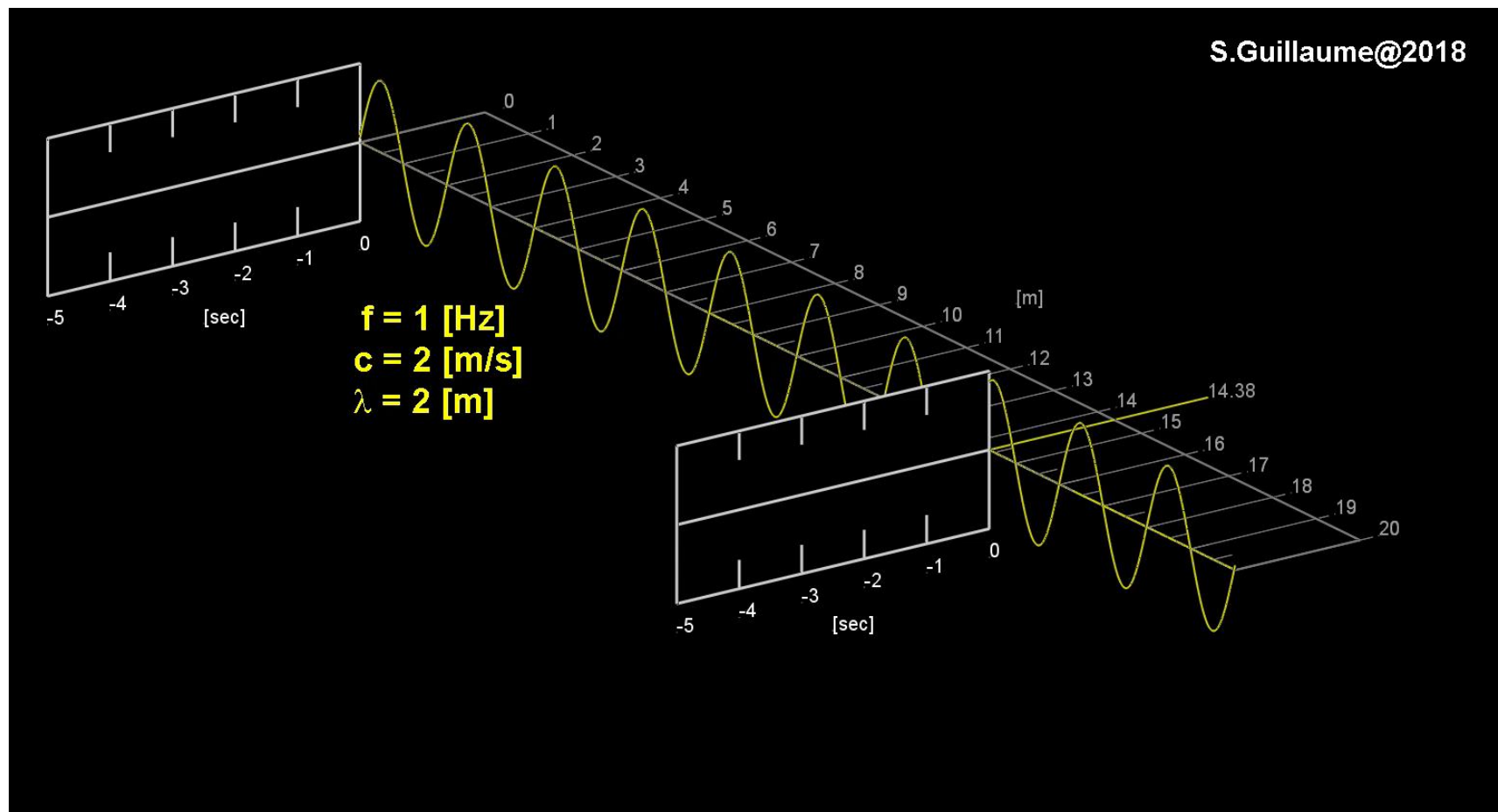
Ondes porteuses

$$A(x, t) = A_0 \cdot \cos \left[2\pi\nu \cdot \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$



Signaux GPS

Mesure de phase



Signaux GPS

Informations modulées

L1: $C/A + P + D$

L2: $P + D$

L2C: $C/A + P + D$ (satellites récents)

L5: $I5 + Q5 + D$

C/A = code pour pseudo-ranging absolu ouvert.

P = code pour pseudo-ranging absolu encrypté.

$I5$ = code pour pseudo-ranging absolu ouvert.

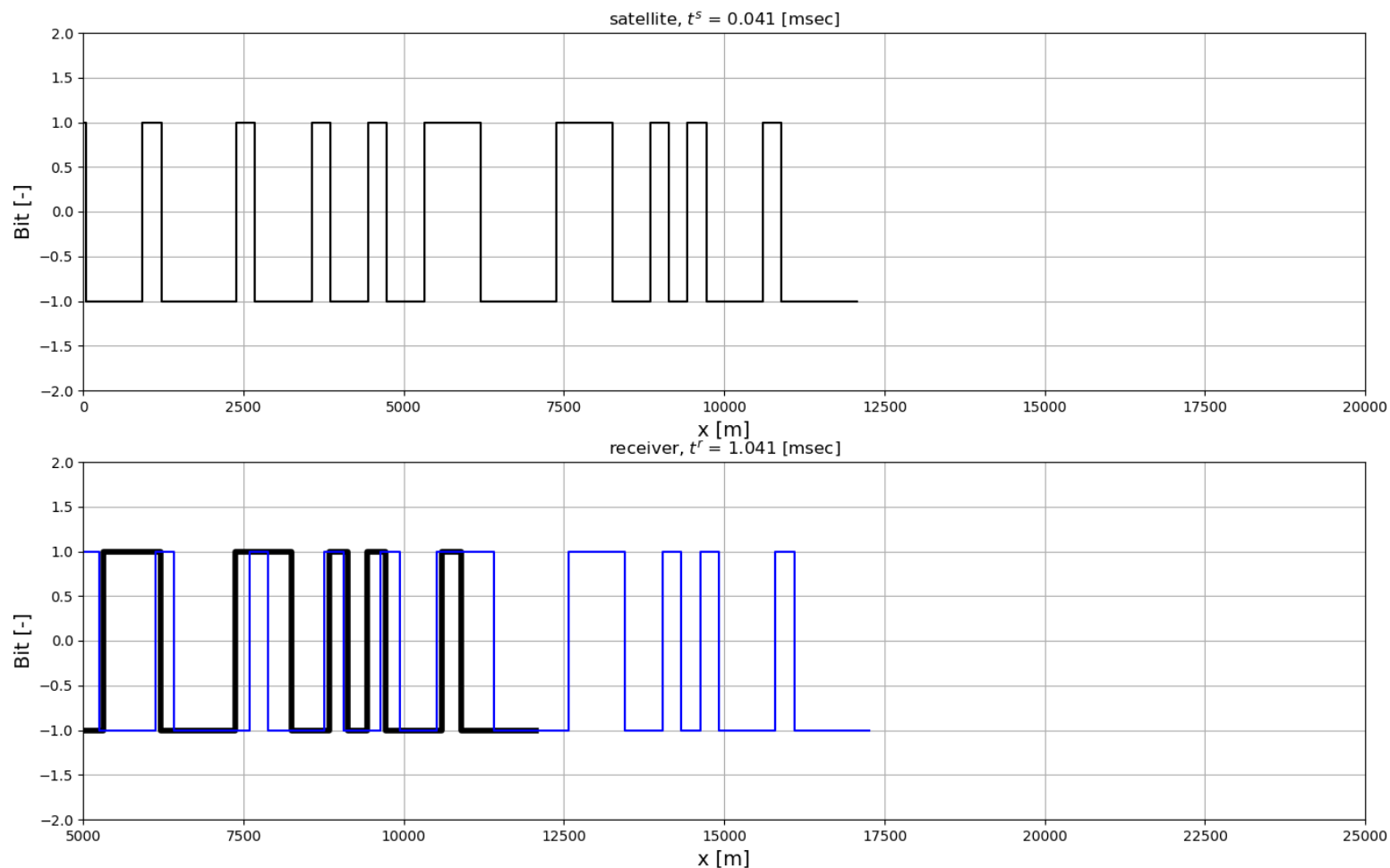
$Q5$ = code pour pseudo-ranging absolu ouvert.

D = code messages de navigation (orbites, horloges sat.).

Toutes les modulations sont des modulations de phase.

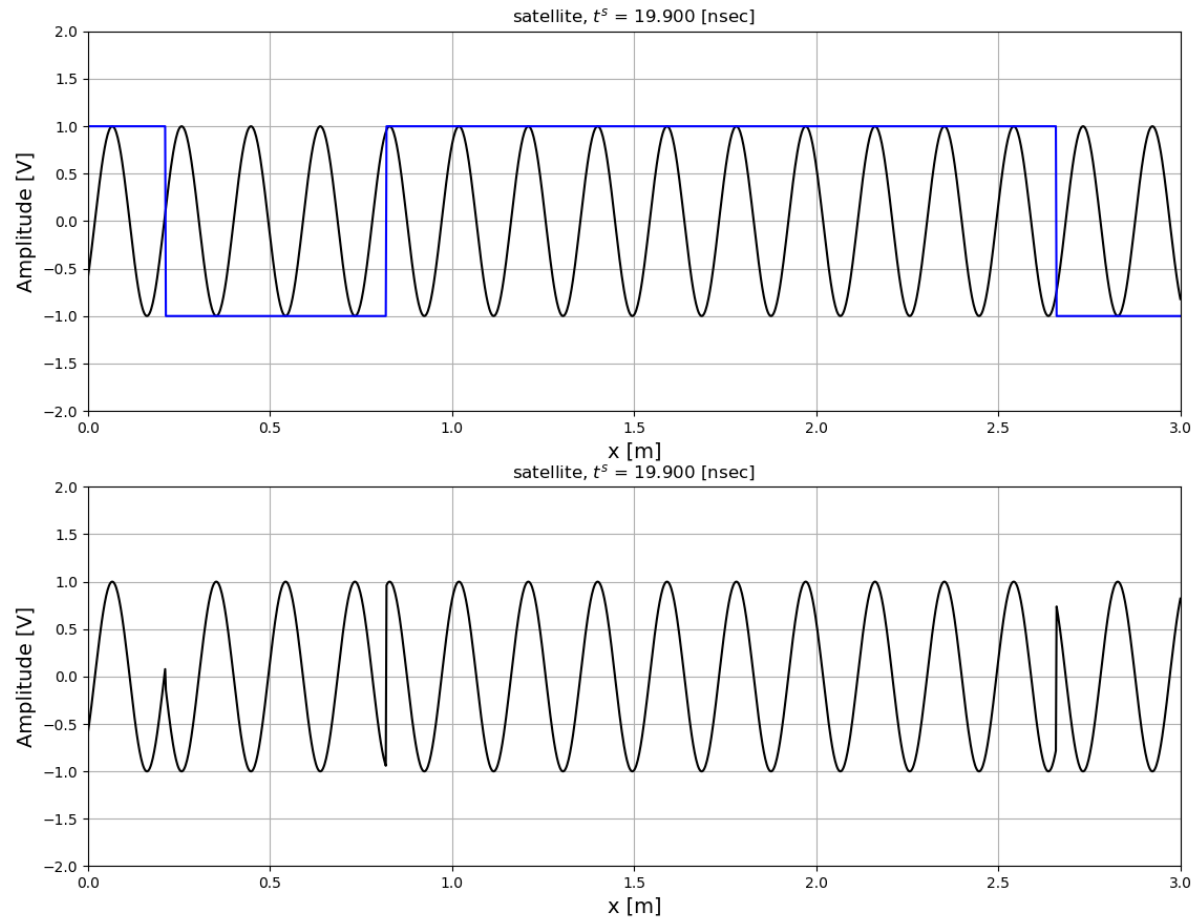
Signaux GPS

Codes

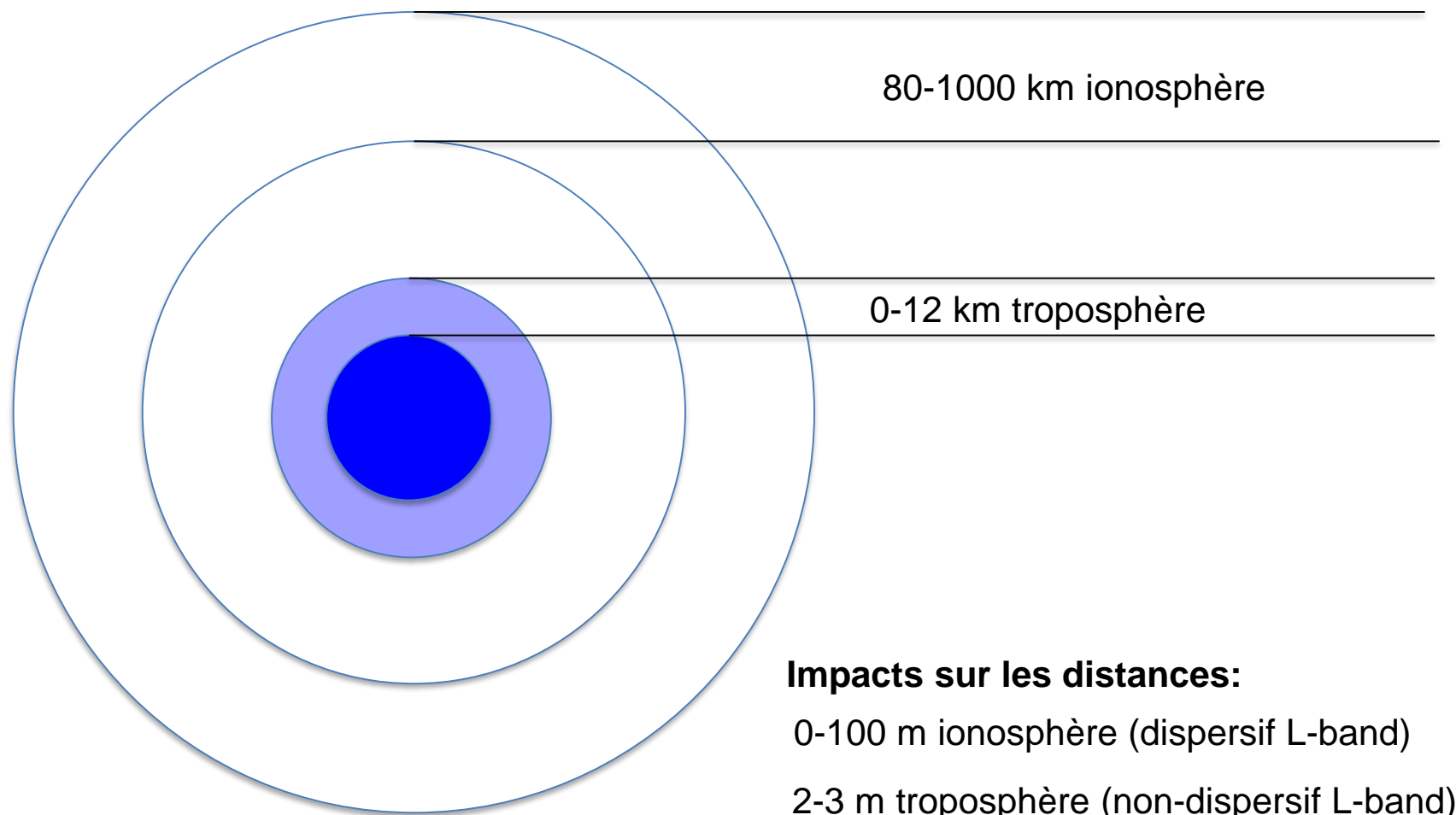


Signaux GPS

Codes modulés sur l'onde porteuse



Retards atmosphériques



Méthodes de positionnement

ABSOLU en post-traitement

| | | |
|--------------------------------------|----------------|--------------|
| SPP Single Point Positioning | = Code | ~2-3 m |
| PPP Precise Point Positioning | = Code + Phase | ~0.02-0.10 m |

RELATIF (DIFFERENTIEL) en post-traitement

| | | |
|---------------------------|---------|-------------------|
| Code différentiel | = Code | ~0.5-1.00 m |
| Phase différentiel | = Phase | ~0.002 m + 0.5ppm |

valeurs indicatives générales



Méthodes de positionnement

ABSOLU en temps réel

| | | |
|--------------------------------------|----------------|--------------|
| SPP Single Point Positioning | = Code | ~5-10 m |
| PPP Precise Point Positioning | = Code + Phase | ~0.05-0.20 m |

RELATIF (DIFFERENTIEL) en temps réel

| | | |
|---------------------------------|---------|----------------|
| Code différentiel | = Code | ~0.5-1.00 m |
| Phase différentiel (RTK) | = Phase | ~0.02 m + 2ppm |

valeurs indicatives générales



Méthodes de positionnement

ABSOLU

SPP Single Point Positioning (code)

(~5-10 m)



Positionnement absolu (pseudo-distances)

Relation entre les horloges et le temps GPS

Relation temps GPS / temps satellite

$$t^{\text{GPS}} = t^{\text{sat}_i} - \delta t^{\text{sat}_i}$$

Relation temps GPS / temps satellite

$$t^{\text{GPS}} = t^{\text{rec}_A} - \delta t^{\text{rec}_A}$$



Positionnement absolu (pseudo-distances)

Temps de vol d'une pulse

Temps de vol d'une pulse en temps GPS: (pour un récepteur A et un satellite i)

$$\begin{aligned} t_{\text{rec}}^{\text{GPS}} &= t_{\text{em}}^{\text{GPS}} + \frac{\rho_A^i}{c} + \delta t_{A,\text{trop}}^i + \delta t_{A,\text{iono}}^i \\ &= t_{\text{em}}^{\text{GPS}} + \frac{\rho_A^i}{c} + \frac{\delta \rho_{A,\text{trop}}^i}{c} + \frac{\delta \rho_{A,\text{iono}}^i}{c} \end{aligned}$$

Mesure du temps de vol:

$$t_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - \delta t_{\text{rec}}^{\text{rec}A} = t_{\text{em}}^{\text{sat}i} - \delta t_{\text{em}}^{\text{sat}i} + \frac{\rho_A^i}{c} + \frac{\delta \rho_{A,\text{trop}}^i}{c} + \frac{\delta \rho_{A,\text{iono}}^i}{c}$$

Mesure de pseudo-distance:

$$c \cdot (t_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - t_{\text{em}}^{\text{sat}i}) = \rho_A^i + c \cdot \delta t_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat}i} + \delta \rho_{A,\text{trop}}^i + \delta \rho_{A,\text{iono}}^i$$



Positionnement absolu (pseudo-distances)

Equation d'observation d'une pseudo-distance

Mesure de pseudo-distance: (pour un récepteur A et un satellite i)

$$\begin{aligned}
 P_A^i &= \rho_A^i + c \cdot \delta t_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat}_i} + \delta \rho_{A,\text{trop}}^i + \delta \rho_{A,\text{iono}}^i \\
 &= |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}^i| + c \cdot \delta t_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat}_i} + \delta \rho_{A,\text{trop}}^i + \delta \rho_{A,\text{iono}}^i
 \end{aligned}$$

Equation d'observation: (pour un récepteur A et un satellite i)

$$P_A^i + \hat{v}_{P_A^i} = |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i| + c \cdot \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat}_i} + \delta \rho_{A,\text{trop}}^i + \delta \rho_{A,\text{iono}}^i$$



Positionnement absolu (pseudo-distances)

Equation d'observation d'une pseudo-distance

Equation d'observation: (pour un récepteur A et un satellite i)

$$P_A^i + \hat{v}_{P_A^i} = |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i| + c \cdot \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec } A} - c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat } i} + \delta \rho_{A,\text{trop}}^i + \delta \rho_{A,\text{iono}}^i$$

Diagram illustrating the components of the observation equation for absolute positioning (pseudo-distances):

- P_A^i : mesuré (measured)
- $\hat{v}_{P_A^i}$: estimé (3 inc.) (estimated, 3 degrees of freedom)
- $|\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i|$: calculé avec les éphémérides (calculated with ephemerides)
- $c \cdot \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec } A}$: estimé (1 inc.) (estimated, 1 degree of freedom)
- $- c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat } i}$: calculé avec les éphémérides (calculated with ephemerides)
- $\delta \rho_{A,\text{trop}}^i$: calculé avec un modèle (Saastomonien)* (calculated with a model (Saastomonien)*)
- $\delta \rho_{A,\text{iono}}^i$: calculé avec un modèle (Klobuchar)** (calculated with a model (Klobuchar)**)

⇒ Nécessite au moins 4 satellites pour un positionnement temps-réel.

* ou parfois estimé en mode statique. Ne peut pas être éliminé en utilisant plusieurs fréquence.

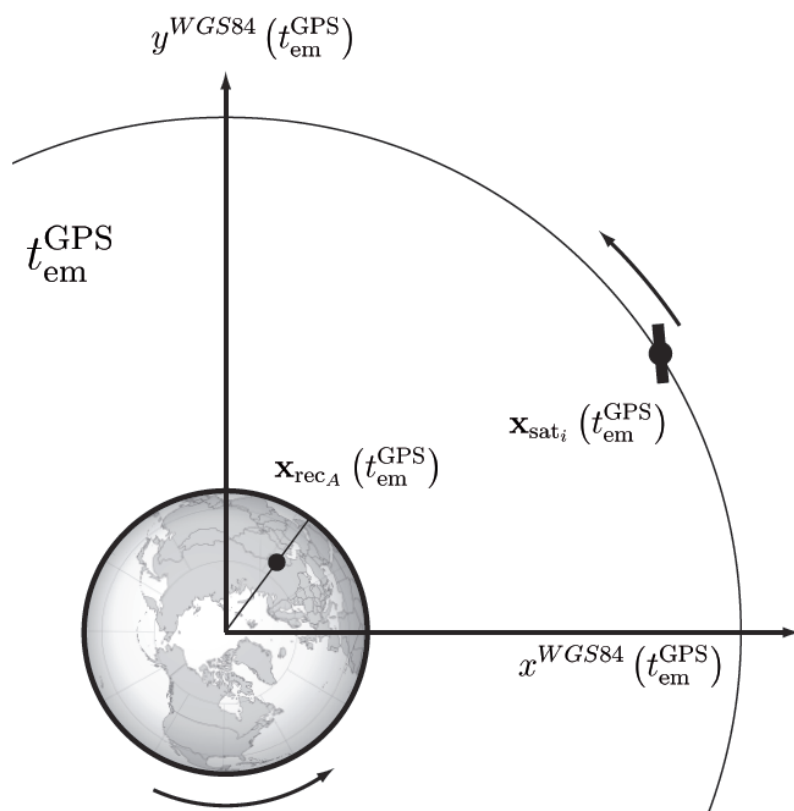
** ou éliminé en utilisant la combinaison linéaire iono-free L3 (nécessite de mesurer L1+L2)



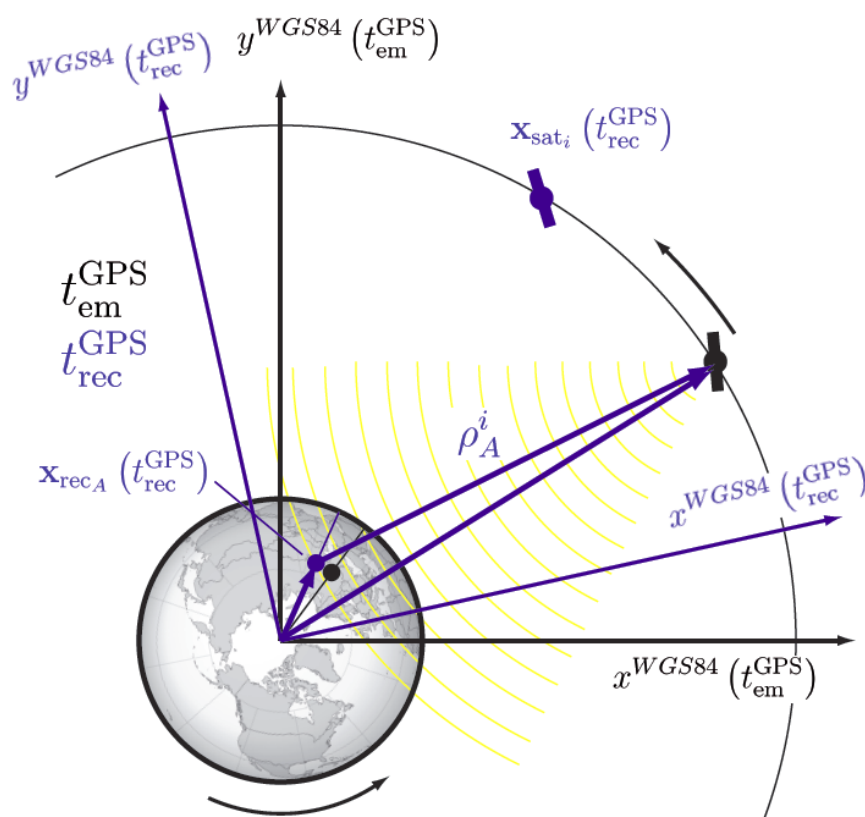
Positionnement absolu (pseudo-distances)

Système de référence et positions à l'émission et réception

Emission



Réception



Méthodes de positionnement

RELATIF (DIFFERENTIEL)

Code différentiel

(~0.5-1.0 m)

Positionnement relatif (pseudo-distances)

Observations de pseudo-distances (zero-difference)

Equation d'observation: (pour un récepteur A et un satellite i)

$$P_A^i + \hat{v}_{P_A^i} = |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i| + c \cdot \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec } A} - c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat } i} + \delta \rho_{A,\text{trop}}^i + \delta \rho_{A,\text{iono}}^i$$

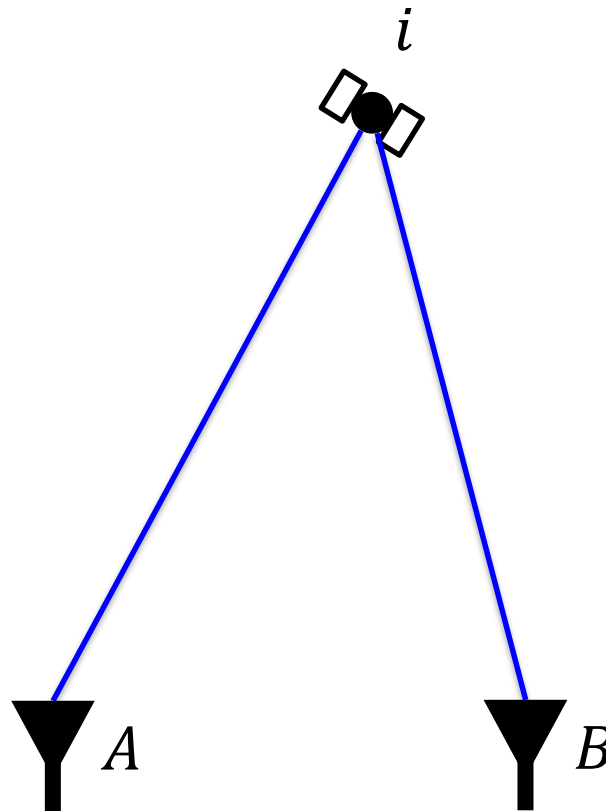
Equation d'observation: (pour un récepteur B et un satellite i)

$$P_B^i + \hat{v}_{P_B^i} = |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^i| + c \cdot \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec } B} - c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat } i} + \delta \rho_{B,\text{trop}}^i + \delta \rho_{B,\text{iono}}^i$$



Positionnement relatif (pseudo-distances)

Simple différence entre récepteurs



Positionnement relatif (pseudo-distances)

Simple différence entre récepteurs

Simple différence entre les récepteurs (pour 2 récepteurs A, B et un satellite i)

$$\begin{aligned}
 P_A^i - P_B^i + \hat{v}_{P_A^i} - \hat{v}_{P_B^i} &= |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i| - |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^i| \\
 &+ c \cdot (\hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}B}) \\
 &- c \cdot (\delta t_{\text{em}}^{\text{sat}i} - \delta t_{\text{em}}^{\text{sat}i}) = 0 \\
 &+ \delta \rho_{A,\text{trop}}^i - \delta \rho_{B,\text{trop}}^i \Rightarrow 0 \text{ si petite ligne de base} \\
 &+ \delta \rho_{A,\text{iono}}^i - \delta \rho_{B,\text{iono}}^i \Rightarrow 0 \text{ si petite ligne de base}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla P_{AB}^i + \hat{v}_{\nabla P_{AB}^i} &= |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i| - |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^i| \\
 &+ c \cdot (\hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}B})
 \end{aligned}$$



Positionnement relatif (pseudo-distances)

Double différence entre récepteurs et satellites

Equation d'observation simple diff. : (pour 2 récepteurs A, B et un satellite i)

$$\nabla P_{AB}^i + \hat{v}_{\nabla P_{AB}^i} = |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i| - |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^i| \\ + c \cdot (\hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}B})$$

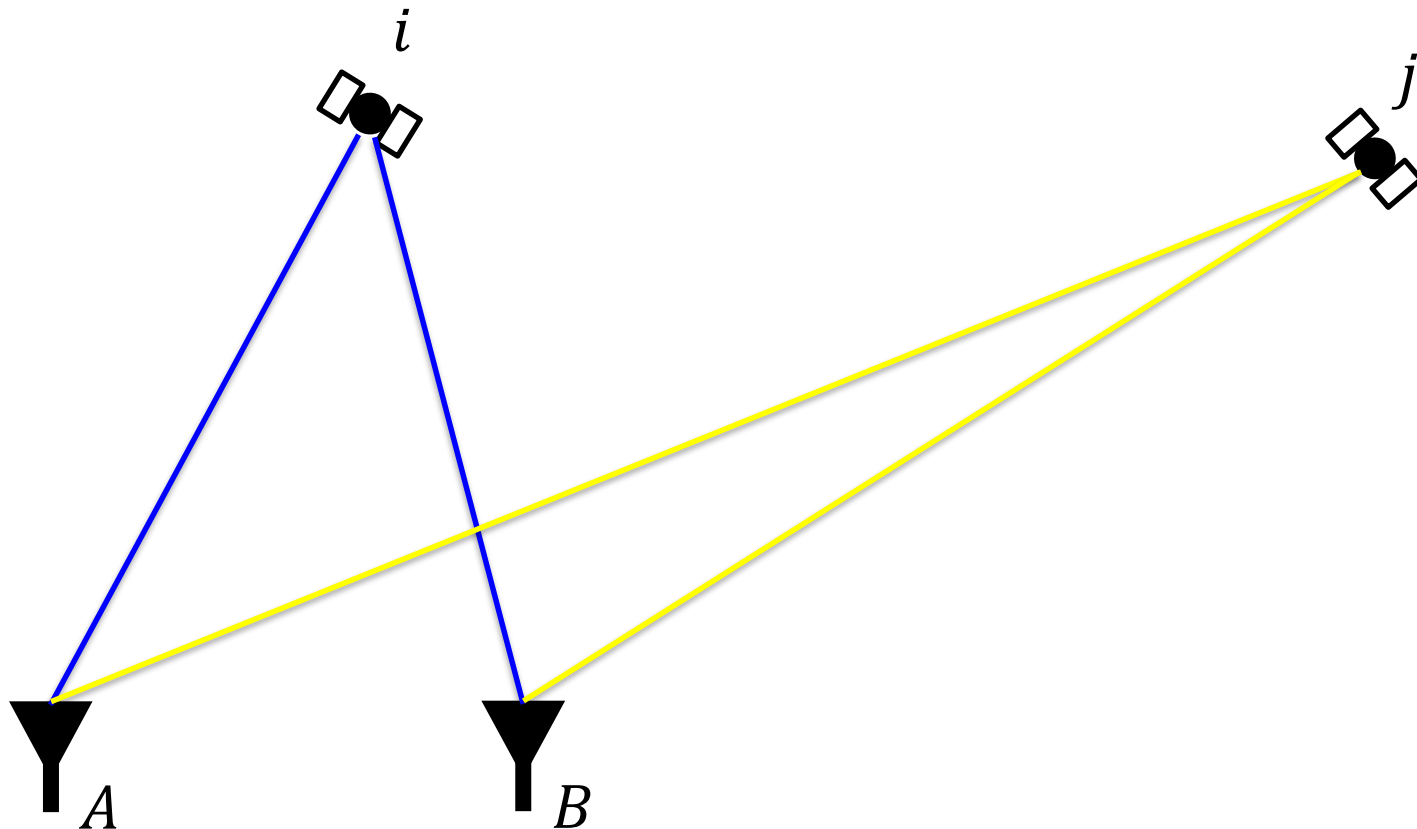
Equation d'observation simple diff. : (pour 2 récepteurs A, B et un satellite j)

$$\nabla P_{AB}^j + \hat{v}_{\nabla P_{AB}^j} = |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^j| - |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^j| \\ + c \cdot (\hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - \hat{\delta t}_{\text{rec}}^{\text{rec}B})$$



Positionnement relatif (pseudo-distances)

Double différence entre récepteurs et satellites



Positionnement relatif (pseudo-distances)

Equation d'observation de double différence

Double différence entre récepteurs et satellites (pour 2 récepteurs A, B et 2 satellites i, j)

$$\Delta\nabla P_{AB}^{ij} + \hat{v}_{\Delta\nabla P_{AB}^{ij}} = |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i| - |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^i| - |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^j| + |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^j|$$

Avec plusieurs observations de double différence, il est possible d'estimer les coordonnées du récepteur A si nous fixons les coordonnées du récepteur B (et vis versa).

Avec 2 récepteurs et N satellites, nous pouvons former $N-1$ double différences linéairement indépendantes. Ex. avec $N=5$ satellites et 2 récepteurs:

$$\Delta\nabla P_{AB}^{12}, \Delta\nabla P_{AB}^{13}, \Delta\nabla P_{AB}^{14}, \Delta\nabla P_{AB}^{15} \quad \text{ou} \quad \Delta\nabla P_{AB}^{12}, \Delta\nabla P_{AB}^{23}, \Delta\nabla P_{AB}^{34}, \Delta\nabla P_{AB}^{45}$$



Positionnement relatif (pseudo-distances)

Equation d'observation de double différence

$$\Delta\nabla P_{AB}^{ij} + \hat{v}_{\Delta\nabla P_{AB}^{ij}} = |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^i| - |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^i| - |\hat{\mathbf{x}}_A - \mathbf{x}^j| + |\hat{\mathbf{x}}_B - \mathbf{x}^j|$$

Diagram illustrating the double difference observation equation with annotations:

- calculé avec les éphémérides**: Points to the satellite position vectors \mathbf{x}^i and \mathbf{x}^j in the equation.
- mesuré**: Points to the measured double difference term $\Delta\nabla P_{AB}^{ij}$.
- fixé (point connu)**: Points to the estimated receiver position $\hat{\mathbf{x}}_A$.
- estimé (3 inc.)**: Points to the estimated receiver position $\hat{\mathbf{x}}_B$.

⇒ Nécessite au moins 4 satellites pour un positionnement temps-réel.

Méthodes de positionnement

RELATIF (DIFFERENTIEL)

Phase différentiel

(~0.002 m + 0.5ppm)

Positionnement relatif (phase)

Equation d'observation de zero-difference

$$\lambda \cdot \Phi_A^i = |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}^i| - \lambda \cdot N_A^i + c \cdot \delta t_{\text{rec}}^{\text{rec}A} - c \cdot \delta t_{\text{em}}^{\text{sat}_i} + \delta \rho_{A,\text{trop}}^i + \delta \rho_{A,\text{iono}}^i$$

Diagram illustrating the components of the zero-difference observation equation:

- λ : longueur d'onde [m]
- Φ_A^i : mesure de phase [cycle]
- N_A^i : ambiguïté de zero-différence [cycle]

Positionnement relatif (phase)

Equation d'observation de double différence

$$\lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij} = |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}^i| - |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}^i| - |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}^j| + |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}^j| - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij}$$

↑
↑
Double
différence de
phase [cycle]
↑
longueur
d'onde [m]

↑
ambiguïté de
double différence
integer [cycle]

Avec plusieurs observations de double différence, sur plusieurs époques, il est possible d'estimer les coordonnées du récepteur A , ainsi que les ambiguïtés de double différence, si nous fixons les coordonnées du récepteur B (et vis versa). Pour une précision et une fiabilité optimale, il est indispensable que les ambiguïtés de double différence soient **fixées à des nombres entiers**.



Positionnement relatif (phase)

Equation d'observation de double différence

calculé avec les éphémérides

$$\lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij} = |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}^i| - |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}^i| - |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}^j| + |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}^j| - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij}$$

Diagram illustrating the components of the double difference observation equation:

- $\lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij}$: mesuré (measured)
- \mathbf{x}_A : fixé (point connu) (fixed (known point))
- \mathbf{x}_B : fixé (point connu) (fixed (known point))
- \mathbf{x}^i : estimé (3 inc.) (estimated (3 ambiguities))
- \mathbf{x}^j : estimé (3 inc.) (estimated (3 ambiguities))
- $\lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij}$: estimé (N-1 inc.) (estimated (N-1 ambiguities))

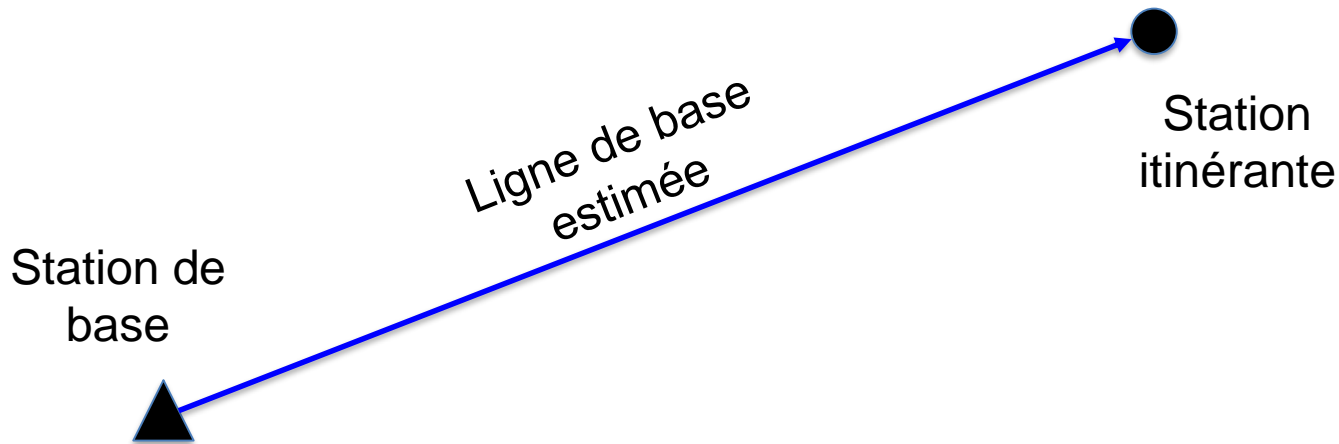
Arrows indicate the flow of information: "calculé avec les éphémérides" points to the satellite position terms (\mathbf{x}^i and \mathbf{x}^j). The labels below point to their respective terms in the equation.

- ⇒ Nécessite au moins 4 satellites sur au moins 2 époques pour estimé toutes les inconnues.
- ⇒ Si les ambiguïtés sont fixées => au moins 4 satellites pour positionnement en temps-réel.



Positionnement relatif (phase)

Ligne de base



Les coordonnées de la station de base ne doivent pas nécessairement être connues avec précision pour obtenir une ligne de base précise. Dans ce cas, les coordonnées absolues de la station itinérante seront affectées de la même incertitude que les coordonnées de la station de base. Par opposition, les différences de coordonnées (ou le vecteur) entre la station de base et la station itinérante auront une précision de l'ordre des précisions issues des mesures de phase. Pour des mesures statiques (~ 2 [mm] + 0.5 [ppm])

Positionnement relatif (phase)

Triples différences / Sauts de cycles

Equation d'observation double diff. : (pour 2 récepteurs A, B et 2 satellites i, j)

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij} &= |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}^i| - |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}^i| - |\mathbf{x}_A - \mathbf{x}^j| + |\mathbf{x}_B - \mathbf{x}^j| - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij} \\ &= \Delta \nabla \mathbf{x}_{AB}^{ij} - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij}\end{aligned}$$

Equation d'observation double diff. : (pour 2 époques successives)

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij}(t) &= \Delta \nabla \mathbf{x}_{AB}^{ij}(t) - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij} \\ \lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij}(t+1) &= \Delta \nabla \mathbf{x}_{AB}^{ij}(t+1) - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij}\end{aligned}$$



Positionnement relatif (phase)

Triples différences / Sauts de cycles

Equation d'observation double diff. : (pour 2 époques successives)

$$\lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij}(t) = \Delta \nabla \mathbf{x}_{AB}^{ij}(t) - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij}$$

$$\lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij}(t+1) = \Delta \nabla \mathbf{x}_{AB}^{ij}(t+1) - \lambda \cdot \Delta \nabla N_{AB}^{ij}$$

Equation d'observation triple diff. :

(pour 2 récepteurs A, B et 2 satellites i, j , 2 époques successives)

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \delta \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij}(t) &= \lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij}(t+1) - \lambda \cdot \Delta \nabla \Phi_{AB}^{ij}(t) \\ &= \Delta \nabla \mathbf{x}_{AB}^{ij}(t+1) - \Delta \nabla \mathbf{x}_{AB}^{ij}(t) \end{aligned}$$

⇒ Si l'ambiguïté de double différence ne change pas entre les deux époques, la triple différence ne varie que très peu dans le temps. Donc la série temporelle de triple différence peut être utilisée pour la détection des sauts de cycles. Pour ceci, regarder les résidus des triples diff. detrendées.



Positionnement relatif (phase)

Triples différences / Sauts de cycles

Origines possibles des sauts de cycles:

- Coupure de visibilité entre le satellite et l'antenne réceptrice.
- Accélération de l'antenne réceptrice trop élevée.
- Rapport signal/bruit trop faible.
- Multi-trajets.
- Activité ionosphérique trop élevée (scintillation).
- Interférences avec d'autres signaux radiofréquences.
- ...

Traitements des sauts de cycles après détection:

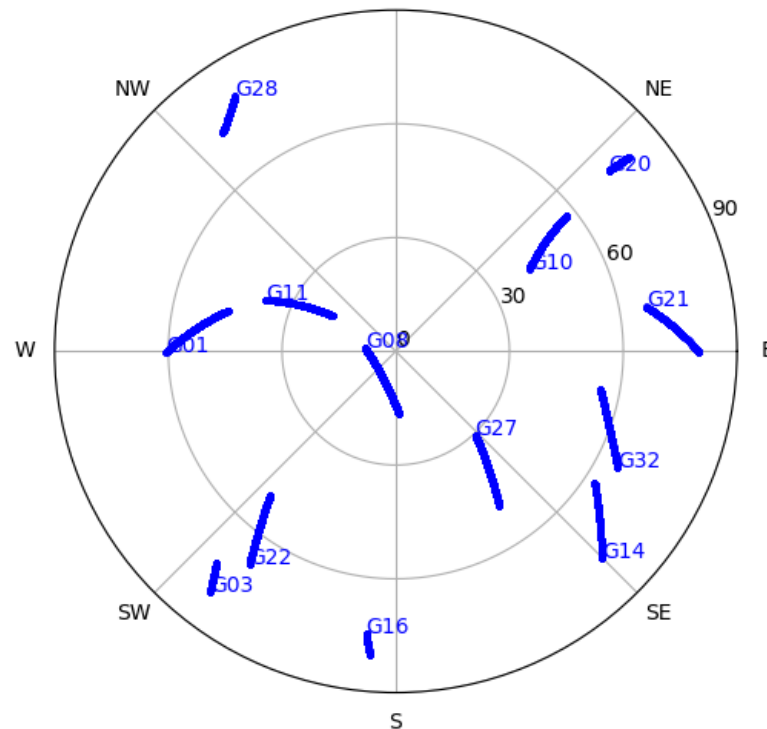
- Si possible, détermination d'une nouvelle ambiguïté de double diff.
- Elimination des observations à partir du saut de cycle.
- ...



Positionnement relatif (phase)

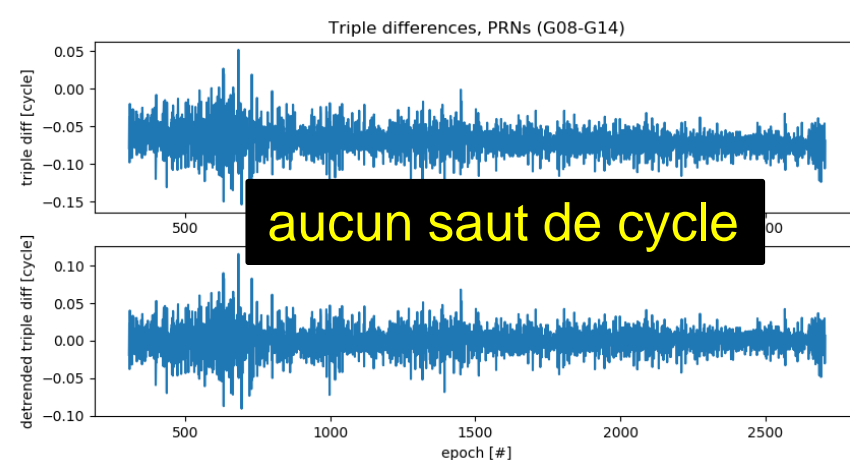
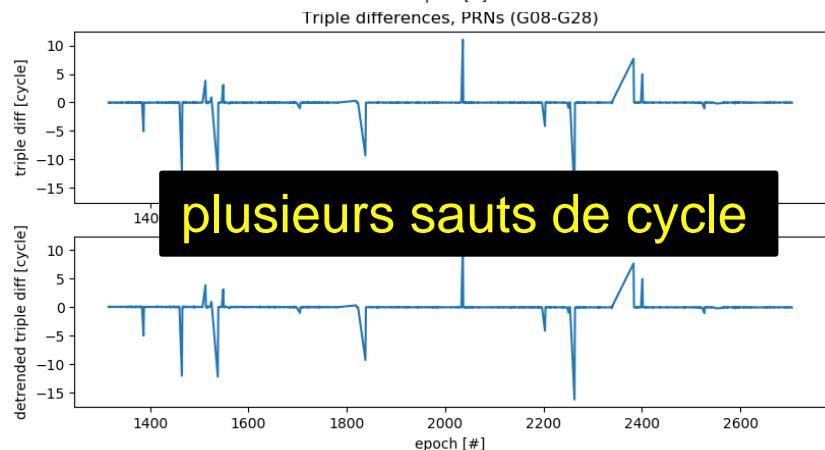
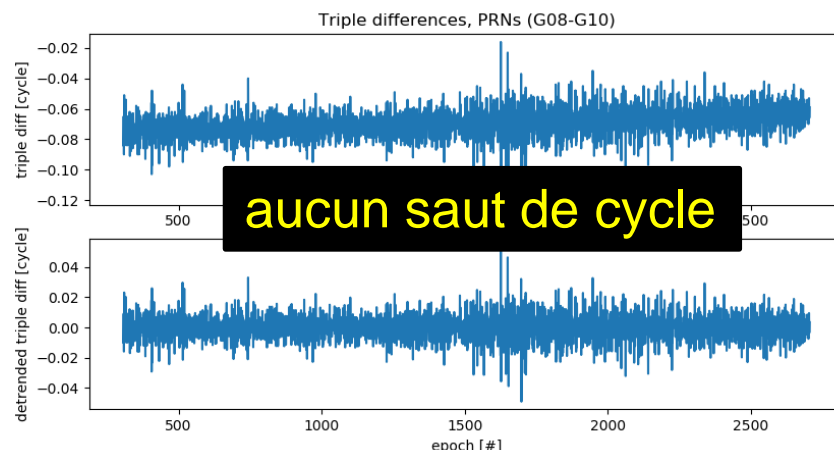
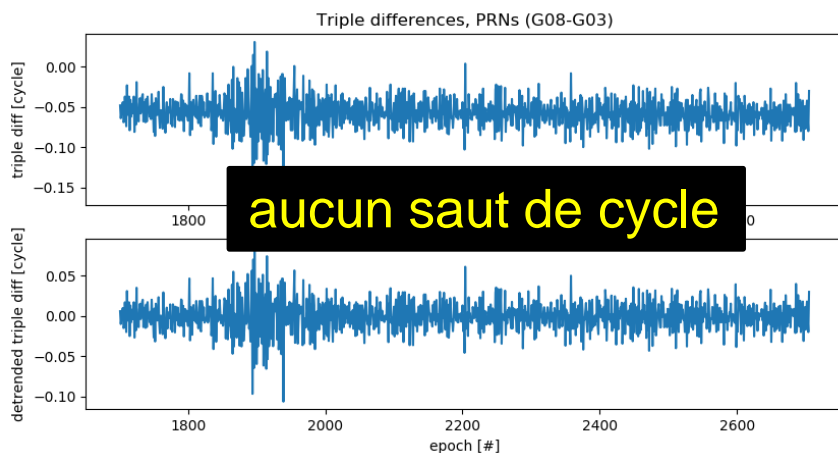
Triples différences / Sauts de cycles

lon:6.66 [deg], lat:46.78 [deg], h: 503.12 [m], 24.06.2020 15:09:59.000
N



Positionnement relatif (phase)

Triples différences / Sauts de cycles



Positionnement relatif (phase)

Résolution des ambiguïtés de double différence

Ligne de base < 10 km, temps de mesure > 15 min:

1. Calcul de l'estimation avec les ambiguïtés inconnues (flottantes).
2. Calcul de l'estimation avec les ambiguïtés comme nombres entiers constants (fixes). Ceci peut se faire en arrondissant les ambiguïtés inconnues (si leur écart-type le permet).

Ligne de base < 10 km, temps de mesure < 15 min:

1. Calcul de l'estimation avec les ambiguïtés inconnues (flottantes).
2. Calcul de l'estimation avec les ambiguïtés comme nombres entiers constants (fixes). Ceci ne peut plus se faire en arrondissant les ambiguïtés inconnues car en principe leurs écarts-types sont trop grands. Le risque de fixer une ambiguïté sur le mauvais nombre entier est trop grand. Il faut donc utiliser un algorithme de recherche des ambiguïtés entières. Le plus célèbre est l'algorithme **lambda**.



Positionnement relatif (phase)

Résolution des ambiguïtés de double différence

Ligne de base > 10 km:

De façon générale, la procédure est identique. Néanmoins, il est souvent indispensable d'avoir un récepteur capable de mesurer L1 et L2 afin de pouvoir former la combinaison linéaire L3 iono-free et de s'affranchir des erreurs dues à la ionosphère.

Utilité d'un récepteur GNSS multi-fréquence (L1 + L2 + ...)

De façon générale, il est également intéressant de mesurer les signaux L1, L2, etc, même lorsque nous avons de petites lignes de base. Ceci, car la recherche des ambiguïtés entières est bien plus efficaces en utilisant L1+L2 qu'en utilisant uniquement les mesures sur L1.

Positionnement relatif (phase)

Résolution des ambiguïtés de double différence

Utilité d'un temps de mesure élevé:

De façon générale, un temps de mesure sans interruption élevé est très profitable pour la résolution des ambiguïtés ainsi que pour la précision de la détermination de la ligne de base. Les raisons principales de ce fait sont :

- Plus d'observations => meilleures précisions (ceci n'est vrai que si les observations ne sont pas corrélées). Il faut que deux mesures GNSS soient espacées de 15 min pour les considérer comme presque non-corrélées.
- Les positions apparentes des satellites varient beaucoup. Ceci permet une meilleure estimation des ambiguïtés et de la ligne de base.
- Les erreurs dues aux multi-trajets sont réduites car elles se moyennent.
- Il est éventuellement possible d'estimer les délais troposphériques.



Méthodes de positionnement

RELATIF (DIFFERENTIEL)

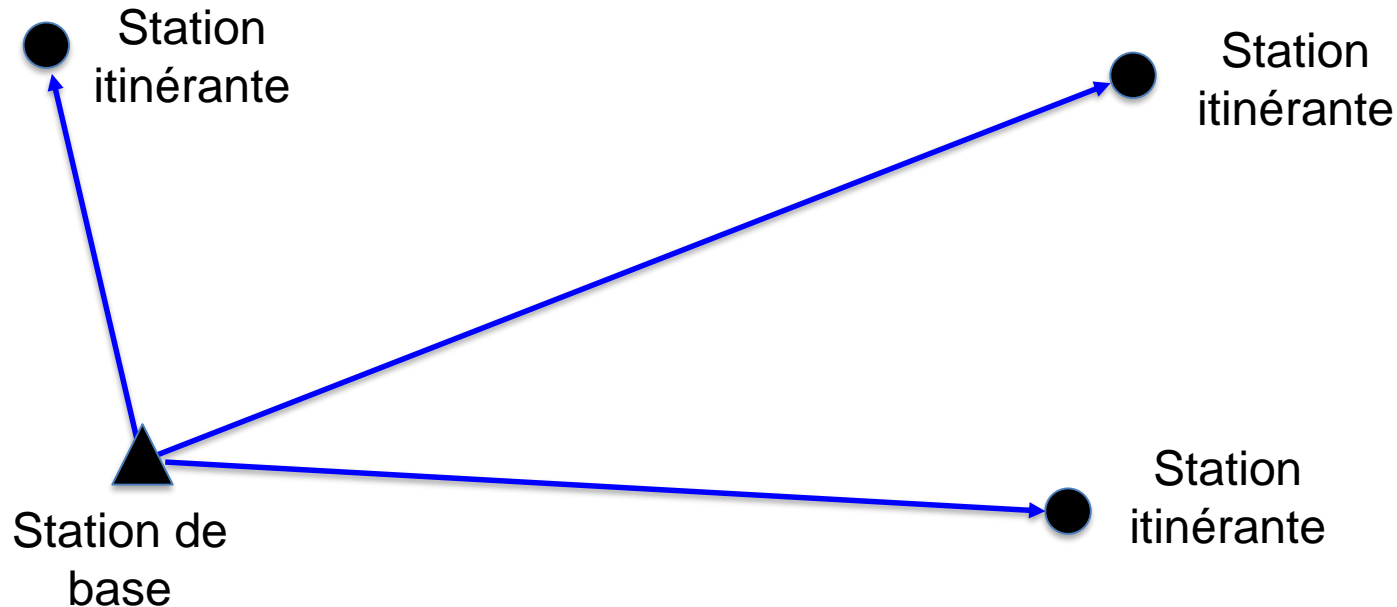
Sessions GNSS

(~0.002 m + 0.5ppm)



Positionnement relatif (phase)

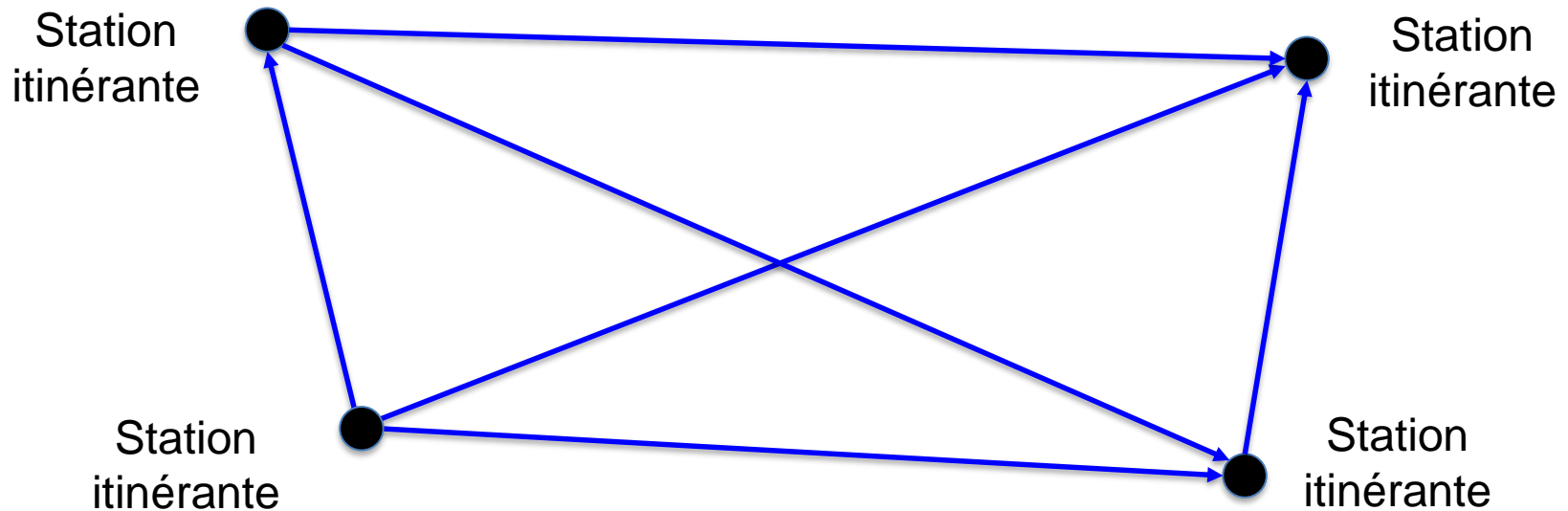
Sessions GNSS



Lorsque nous mesurons sur plus de 2 points en même temps, à l'aide de plusieurs récepteurs GNSS, nous mesurons une **session GNSS**. Son traitement peut se faire de différentes façons. La plus simple consiste à définir une station de base, et de calculer toutes les lignes de base sur tous les autres points par rapport à cette même stations de base. Ainsi, les coordonnées obtenues forment un bloc homogène en précision.

Positionnement relatif (phase)

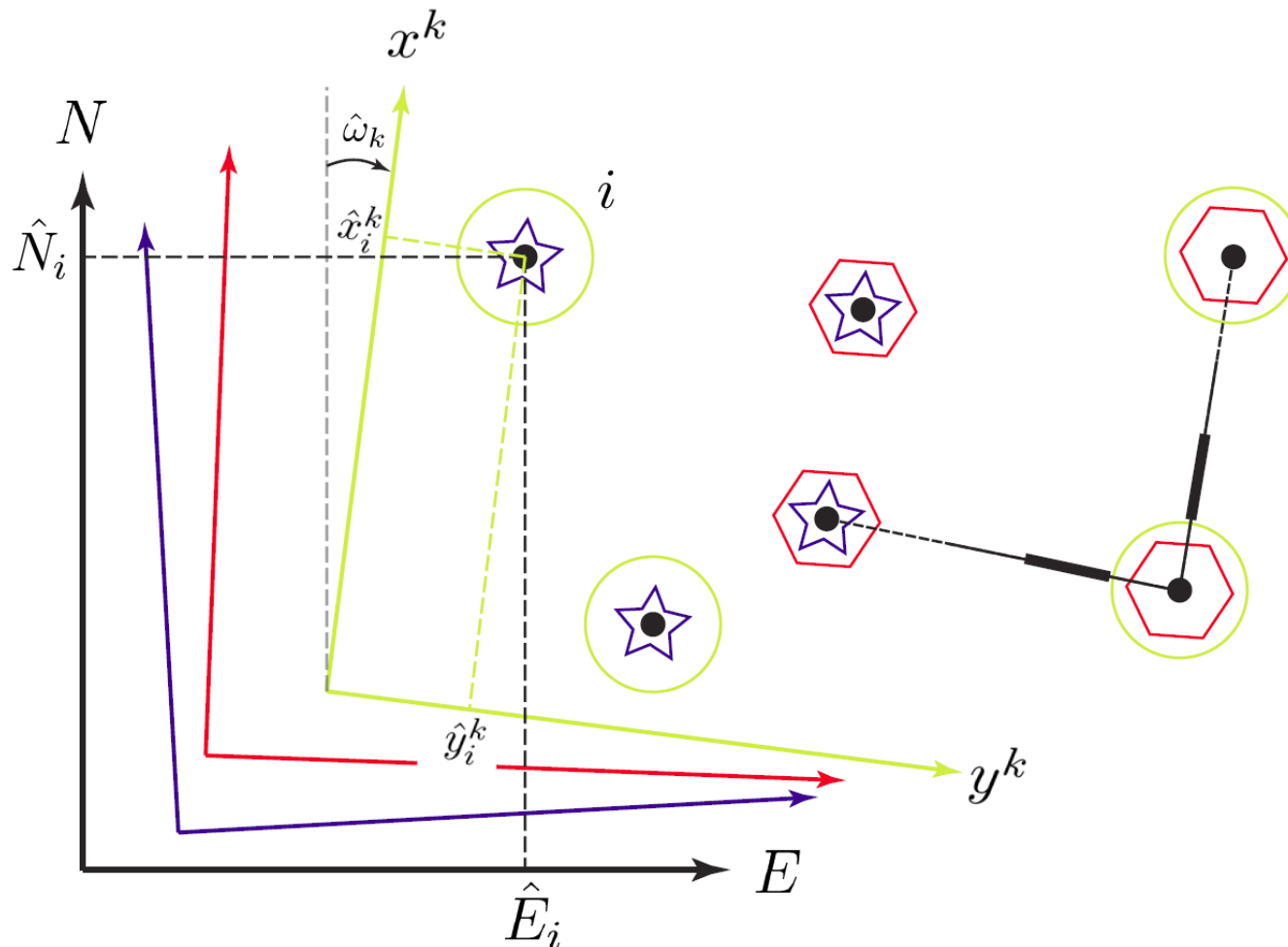
Sessions GNSS



D'autres stratégies sont souvent envisagées pour calculer une **session GNSS**. Par exemple, un ensemble de ligne de base est choisi afin d'optimiser la qualité des coordonnées des points de la session. Dans ce cas, il en résulte également un bloc de coordonnées très homogène du point de vue de la précision relative des points de la session.

Positionnement relatif (phase)

Ajustement de sessions GNSS



Positionnement relatif (phase)

Ajustement de sessions GNSS

$$l = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ x_1^1 \\ y_2^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ y_i^k \\ x_n^k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

coordonnées issues de la session GNSS 1

coordonnées issues de la session GNSS k

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{N}_1 \\ \hat{E}_1 \\ \hat{N}_2 \\ \vdots \\ \hat{t}_y^1 \\ \hat{t}_x^1 \\ \hat{m}_1 \\ \hat{\omega}_1 \\ \hat{t}_y^2 \\ \hat{t}_x^2 \\ \hat{m}_2 \\ \hat{\omega}_2 \\ \vdots \\ \hat{t}_y^k \\ \hat{t}_x^k \\ \hat{m}_k \\ \hat{\omega}_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

coordonnées inconnues des points du réseau

Paramètres de la session GNSS 1

Paramètres de la session GNSS 2

Paramètres de la session GNSS k

Positionnement relatif (phase)

Ajustement de sessions GNSS

Equations d'observation pour un point i de la session k :

$$\begin{pmatrix} y_i^k \\ x_i^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{y_i^k} \\ v_{x_i^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{t}_y^k \\ \hat{t}_x^k \end{pmatrix} + \hat{m}_k \cdot \begin{pmatrix} \cos \hat{\omega}_k & -\sin \hat{\omega}_k \\ \sin \hat{\omega}_k & \cos \hat{\omega}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{E}_i \\ \hat{N}_i \end{pmatrix}$$

Equations d'observation pour un point i de la session k :

$$y_i^k + v_{y_i^k} = \hat{t}_y^k + \hat{m}_k \cdot \cos \hat{\omega}_k \cdot \hat{E}_i - \hat{m}_k \cdot \sin \hat{\omega}_k \cdot \hat{N}_i$$

$$x_i^k + v_{x_i^k} = \hat{t}_x^k + \hat{m}_k \cdot \sin \hat{\omega}_k \cdot \hat{E}_i + \hat{m}_k \cdot \cos \hat{\omega}_k \cdot \hat{N}_i$$



Méthodes de positionnement

RELATIF (DIFFERENTIEL)

Temps réel

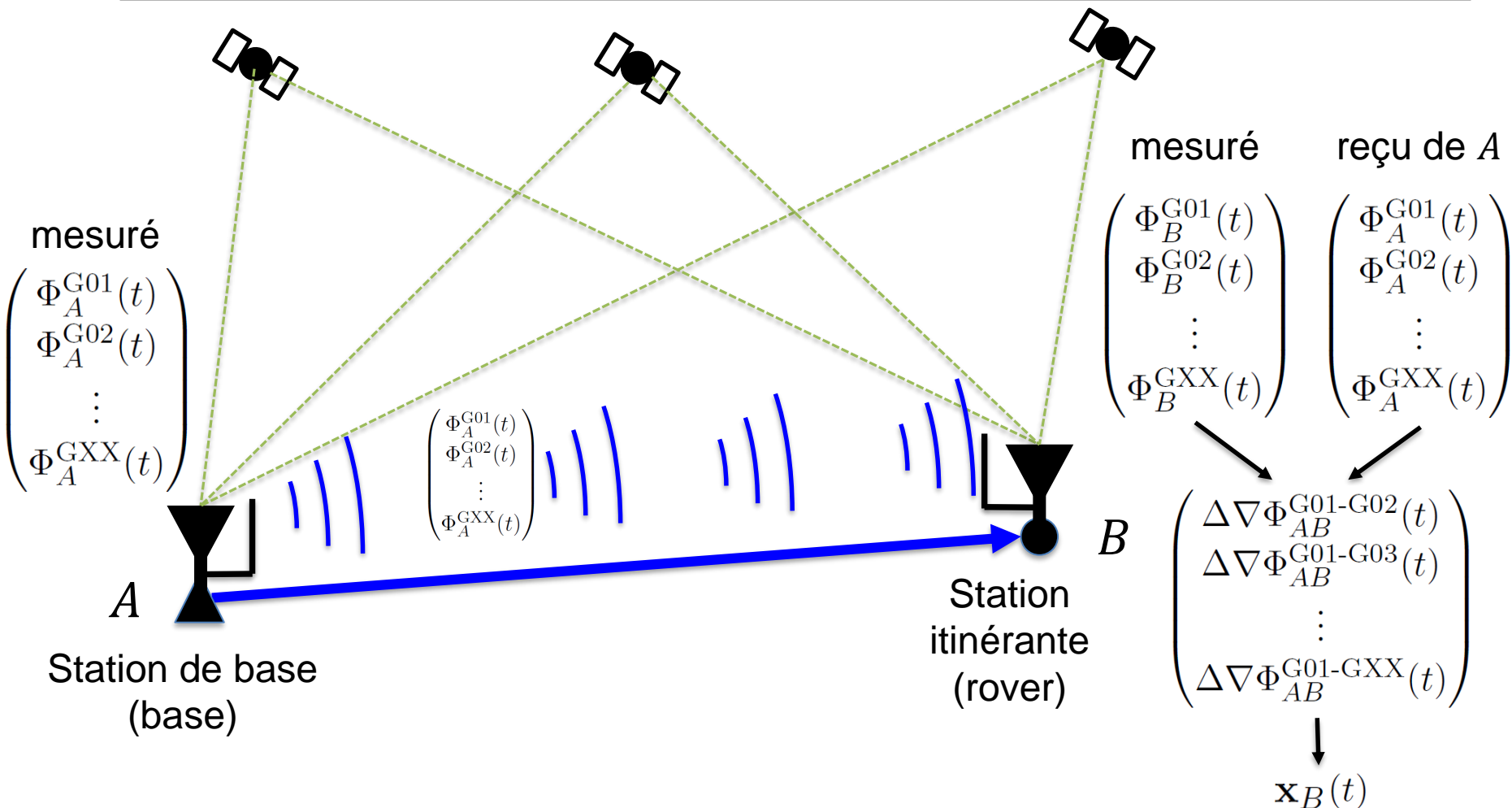
(RTK Real-Time Kinematic)

(~0.02 m + 2ppm)



Positionnement relatif (phase-RTK)

Principes de base



Positionnement relatif (phase-RTK)

Principes de base

Station de base (base)

- La station de base peut être une antenne+récepteur GNSS réelle, ou une station de base dite virtuelle (par ex. système swipos VRS Virtual Reference Station).
- Elle doit pouvoir transmettre, en temps-réel, à la station itinérante, **toutes ses mesures brutes**. => télémétrie.

Station itinérante (rover)

- La station itinérante doit pouvoir recevoir toutes les **toutes les mesures brutes de la station de base**. => télémétrie
- Elle est munie d'un ordinateur qui exécute l'estimation de la ligne de base en temps-réel. Résolution et fixation des ambiguïtés, position etc.
- Elle doit connaître les coordonnées WGS84 de la station de base.

Positionnement relatif (phase-RTK)

Télémétrie

Transmission des données

- Radio (UHF)
- Réseau de téléphonie mobile (GSM)
- Réseau internet (communication IP)

Protocoles de transmission des données

- Série RS232
- TCP/IP
- NTRIP (Networked Transport of RTCM via Internet Protocol)

Format des données

- RTCM 2/3 (Radio Technical Commission for Maritime Services)
- BINEX (Binary EXchange format)
- Formats de constructeurs (u-blox, Leica, Trimble, Novatel, ...)
- NMEA-0183 (National Marine Electronics Association). Les données des observations brutes ne peuvent pas être envoyées dans ce format.



Positionnement relatif (phase-RTK)

NTRIP Networked Transport of RTCM via Internet Protocol

Caractéristiques principales

- Open-source.
- Basé sur les standards HTTP => échange de données avec authentification.
- Permet de diffuser les données GNSS de plusieurs stations de base à plusieurs utilisateurs.
- Conçu à la base pour transmettre les données en format RTCM, mais peut aussi transmettre les données dans d'autres formats.

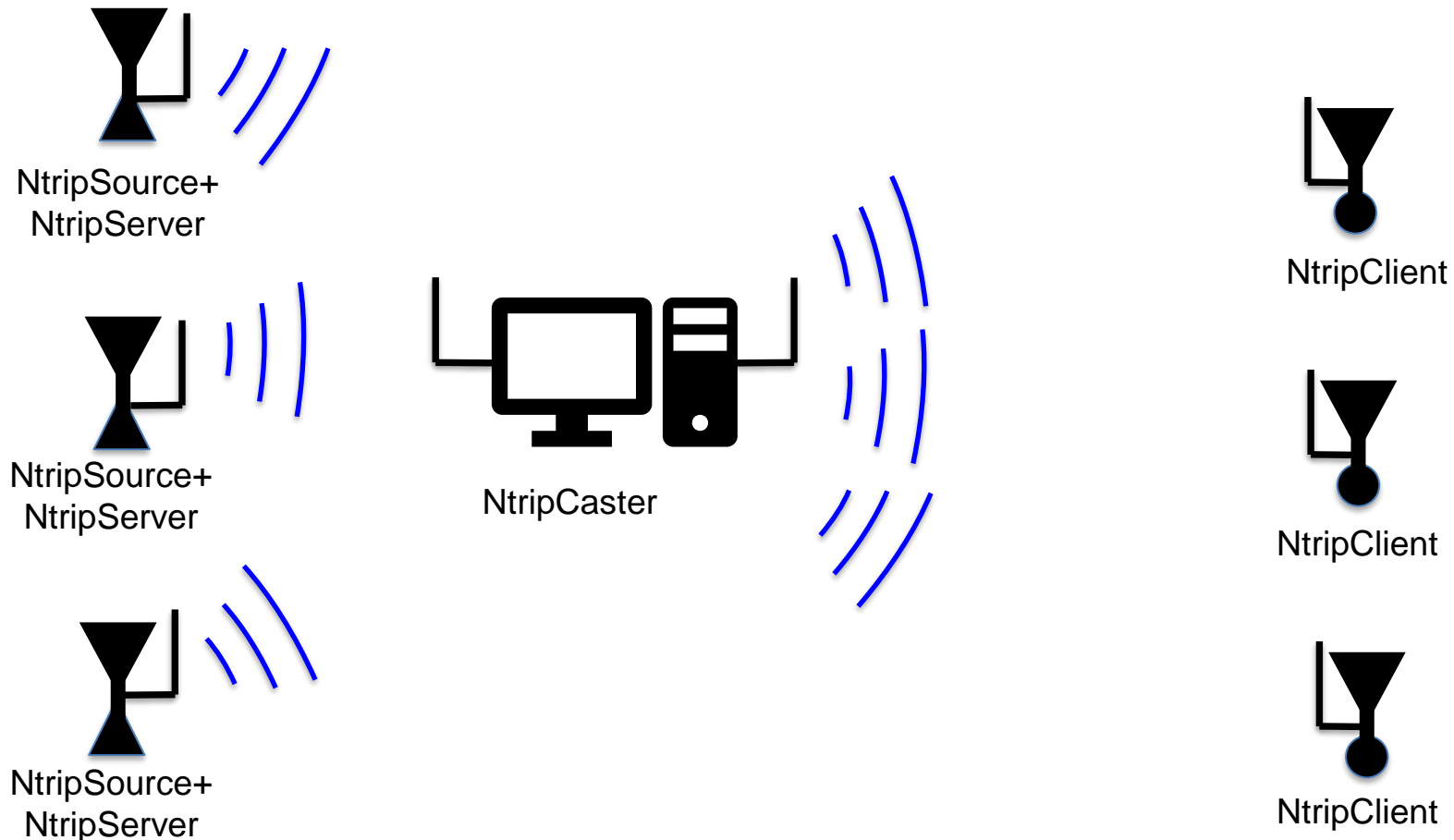
Éléments logiciels principaux (3)

- NtripServer. Client HTTP. Envoie les données d'un récepteur GNSS d'une station de base (NtripSource) à un NtripCaster. C'est un software qui est exécuté sur le récepteur d'une station de base.
- NtripCaster. Server HTTP. Il regroupe les données GNSS des stations de base (NtripServer) puis les diffuse aux utilisateurs (NtripClient). C'est un software qui est exécuté soit sur une station de base, soit sur un ordinateur.
- NtripClient. Client HTTP. Il reçoit les données d'une station de base via un NtripCaster. C'est un software qui est exécuté sur les rovers.



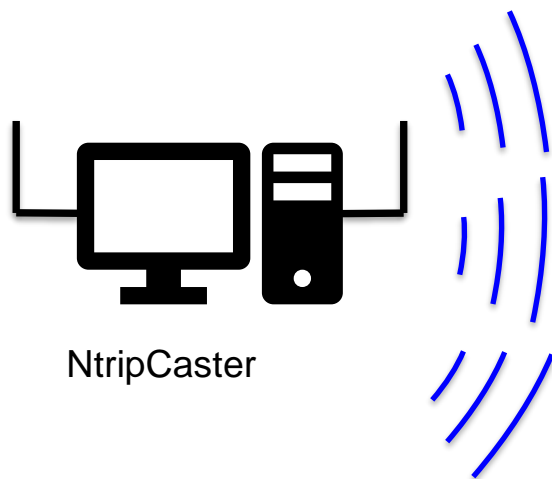
Positionnement relatif (phase-RTK)

NTRIP Networked Transport of RTCM via Internet Protocol



Positionnement relatif (phase-RTK)

NTRIP Networked Transport of RTCM via Internet Protocol



HEIG-VD (Observations brutes)

Adresse IP : 193.134.218.96
Port : 5001
Nom du point de montage : YVD2_MSM
Nom de client : user1
Password : *****

swipos (Observations brutes VRS)

Adresse IP : www.swipos.ch
Port : 2101
Nom du point de montage : MSM_GIS_GEO_LV95LHN95 / ...
Nom de client : HS-HEIG-VD/365A1 (pour l'heig-vd)
Password : *****

EUREF/IGS (Observations / éphémérides)

Adresse IP : www.euref-ip.net / www.products.igs-ip.net
Port : 2101
Nom du point de montage : ZIM200CHE0 ... / BCEP00BKG0 ...
Nom de client : heig01 (pour l'heig-vd)
Password : *****

Positionnement relatif (phase-RTK)

RTCM Radio Technical Commission for Maritime Services

Caractéristiques principales

- Le format RTCM est développé par l'organisation internationale RTCM.
- Format binaire.
- Plusieurs versions : la dernière, RTCM 3.2.
- Format basé sur des messages fixes identifiés par leur numéro.

Messages RTCM

- Un message commence toujours par la suite de bits : 11010011000000
- Les messages sont identifiés par un numéro:
 - 1004 = Observations brutes GPS L1+L2. (Ancien message).
 - 1012 = Observations brutes GLONASS L1+L2. (Ancien message).
 - 1077 = Observations brutes GPS tous les signaux.
 - 1087 = Observations brutes GLONASS tous les signaux.
 - 1097 = Observations brutes GALILEO tous les signaux.
 - 1127 = Observations brutes BEIDU tous les signaux.
 - 1006 = Cordonnées WGS84 de l'ARP de la station.
 - 1019 = Ephémérides GPS.



Positionnement relatif (phase-RTK)

RTCM Radio Technical Commission for Maritime Services

Messages from 193.134.218.96:5001/YVD2_MSM

| Type | Time of Last Message | Size | Satellites | Station | Count |
|------|----------------------|------|------------|---------|-------|
| 1077 | Di 15:12:04.935 | 418 | 14 | 2 | 598 |

| Satellite | L1 Code | L1 Phase Range | L1 Phase | L1 Doppler | L1 Lock Time | L1 SNR | L2 Code | L2 Phase Range | L2 Phase | L2 Doppler | L2 Lock Time | L2 SNR | Lx Code |
|-----------|---------|----------------|---------------|------------|--------------|--------|---------|----------------|---------------|------------|--------------|--------|---------|
| G02 | L1C | 25029095.071 | 131528823.522 | -2929.154 | >3h38m27s | 38.50 | L2W | 25029089.653 | 102489989.011 | -2282.458 | >3h38m27s | 37.25 | None |
| G04 | L1C | 25141334.982 | 132118599.120 | +1032.371 | >15m01s | 40.75 | L2W | 25141333.386 | 102949551.602 | +804.445 | >15m01s | 37.25 | L5Q |
| G05 | L1C | 24696529.327 | 129781154.352 | +2213.267 | >14m28s | 41.75 | L2W | 24696527.378 | 101128162.012 | +1724.624 | >14m28s | 42.00 | None |
| G12 | L1C | 24464320.214 | 128560936.286 | -3280.881 | >03m04s | 43.75 | L2W | 24464319.608 | 100177313.040 | -2556.530 | >03m04s | 43.00 | None |
| G18 | L1C | 22925748.269 | 120475653.662 | +3525.655 | >38m13s | 44.00 | L2W | 22925746.344 | 93877148.563 | +2747.267 | >38m13s | 41.50 | L5Q |
| G25 | L1C | 21124035.495 | 111007570.159 | -2099.516 | >4h48m21s | 48.00 | L2W | 21124034.180 | 86499419.100 | -1635.988 | >4h48m21s | 48.00 | L5Q |
| G26 | L1C | 22852110.889 | 120088674.766 | +2920.602 | >1h04m26s | 46.00 | L2W | 22852110.610 | 93575594.733 | +2275.794 | >1h04m26s | 41.00 | L5Q |
| G29 | L1C | 20300646.311 | 106680678.299 | -417.587 | >3h16m36s | 49.75 | L2W | 20300642.382 | 83127828.390 | -325.392 | >3h16m36s | 49.75 | None |
| G31 | L1C | 21024592.747 | 110485011.162 | +129.918 | >2h28m32s | 49.50 | L2W | 21024588.017 | 86092203.716 | +101.235 | >2h28m32s | 46.50 | None |
| G32 | L1C | 25590509.957 | 134478962.490 | -3092.432 | >4h39m37s | 37.75 | L2W | 25590512.790 | 104788785.632 | -2409.695 | >4h39m37s | 37.50 | L5Q |

| Type | Time of Last Message | Size | Satellites | Station | Count |
|------|----------------------|------|------------|---------|-------|
| 1087 | Di 15:12:04.938 | 307 | 8 | 2 | 598 |

| Satellite | L1 Code | L1 Phase Range | L1 Phase | L1 Doppler | L1 Lock Time | L1 SNR | L2 Code | L2 Phase Range | L2 Phase | L2 Doppler | L2 Lock Time | L2 SNR | |
|-----------|---------|----------------|---------------|------------|--------------|--------|---------|----------------|---------------|------------|--------------|--------|--|
| R07 | L1C | 23966917.851 | 128296792.574 | -1201.993 | >1h06m37s | 42.75 | L2P | 23966915.468 | 99786384.880 | -934.883 | >1h06m37s | 41.00 | |
| R08 | L1C | 24305506.252 | 130154892.455 | +1523.705 | >04m22s | 38.25 | L2P | 24305503.441 | 101231567.570 | +1185.103 | >04m22s | 39.25 | |
| R14 | L1C | 22193536.601 | 118304032.966 | -3669.615 | >5h32m02s | 42.25 | L2P | 22193536.605 | 92014259.663 | -2854.142 | >5h32m02s | 44.00 | |
| R15 | L1C | 19218174.511 | 102696127.414 | -666.247 | >3h25m20s | 49.50 | L2P | 19218171.704 | 79874780.086 | -518.193 | >3h25m20s | 47.25 | |
| R16 | L1C | 20989354.453 | 112121380.859 | +3193.425 | >1h14m16s | 45.50 | L2P | 20989351.621 | 87205528.043 | +2483.776 | >1h14m16s | 42.25 | |
| R17 | L1C | 19115989.717 | 102293594.855 | -620.641 | >2h37m17s | 50.00 | L2P | 19115985.985 | 79561713.599 | -482.721 | >2h37m17s | 47.25 | |
| R18 | L1C | 20600195.418 | 109965324.715 | +3166.634 | >1h18m38s | 48.25 | L2P | 20600194.433 | 85528618.708 | +2462.940 | >1h18m38s | 46.75 | |
| R24 | L1C | 22156141.892 | 118478898.683 | -3838.632 | >3h47m11s | 44.25 | L2P | 22156139.046 | 92150269.915 | -2985.603 | >3h47m11s | 43.25 | |

| Type | Time of Last Message | Size | Satellites | Station | Count |
|------|----------------------|------|------------|---------|-------|
| 1097 | Di 15:12:04.942 | 208 | 4 | 2 | 598 |

| Satellite | L1 Code | L1 Phase Range | L1 Phase | L1 Doppler | L1 Lock Time | L1 SNR | L2 Code | L2 Phase Range | L2 Phase | L2 Doppler | L2 Lock Time | L2 SNR | Lx Code |
|-----------|---------|----------------|---------------|------------|--------------|--------|---------|----------------|---------------|------------|--------------|--------|---------|
| E01 | L1C | 23576535.912 | 123895545.290 | +247.614 | >2h46m01s | 51.75 | L7Q | 23576538.527 | 94932965.361 | +189.754 | >2h46m01s | 52.00 | L5Q |
| E13 | L1C | 25080575.836 | 131799331.995 | -1823.082 | >2h32m54s | 49.50 | L7Q | 25080577.355 | 100989112.091 | -1396.836 | >2h32m54s | 49.50 | L5Q |
| E21 | L1C | 25270713.676 | 132798493.583 | -2009.573 | >5h32m02s | 50.25 | L7Q | 25270717.123 | 101754704.485 | -1539.797 | >5h32m02s | 50.00 | L5Q |
| E26 | L1C | 23162198.663 | 121718204.874 | +1174.412 | >1h33m56s | 52.00 | L7Q | 23162202.766 | 93264618.085 | +899.917 | >1h33m56s | 51.50 | L5Q |



Positionnement relatif (phase-RTK)

RTCM Radio Technical Commission for Maritime Services

Messages RTCM 3.2 du service swipos-GIS/GEO

url: www.swipos.ch / port: 2101 / mount : MSM_GISGEO_LV95LHN95

- 1005 = Cordonnées WGS84 de l'ARP de la station virtuelle VRS.
- 1007 = Type d'antenne (VRS => ADVNULLANTENNA).
- 1030 = *Résidus du réseau GPS. Indicateur qualité du réseau AGNES*
- 1031 = *Résidus du réseau GLONASS. Indicateur qualité du réseau AGNES*
- 1032 = *Cordonnées WGS84 de l'ARP des stations réelles.*
- 1074 = Observations brutes GPS tous les signaux de la VRS.
- 1084 = Observations brutes GLONASS tous les signaux de la VRS.
- 1094 = Observations brutes GALILEO tous les signaux de la VRS.
- 1124 = Observations brutes BEIDU tous les signaux de la VRS.

Messages en italique = pas obligatoires pour un positionnement différentiel.



Positionnement relatif (phase-RTK)

NMEA-0183 National Marine Electronics Association

Caractéristiques principales

- Le format NMEA est un format ASCII avec séparateur de virgules, avec le caractère \$ au début d'un message et les caractères CR/LF en fin de message.
- Ce format n'est pas utilisé pour transmettre les données des observations brutes mais pour transmettre des positions, des indicateurs de qualité, etc.
- Un message est identifié par un préfixe (2 char) et un identifiant (3 char):

ex: \$GPGGA,123519,4807.038,N,01131.324,E,1,08,0.9,545.4,M,46.9,M, , *42 [CR] [LF]

| | |
|--------------|---|
| GP | = Préfixe => GPS |
| GGA | = Identifiant => GPS Fix Data |
| 123519 | = Acquisition du FIX à 12:35:19 UTC |
| 4807.038,N | = Latitude 48 deg 07.038' N |
| 01131.324,E | = Longitude 11 deg 31.324' E |
| 1 | = Fix qualification : (0 = non valide, 1 = Fix GPS, 2 = Fix DGPS) |
| 08 | = Nombre de satellites en poursuite. |
| 0.9 | = DOP (Horizontal dilution of position) Dilution horizontale. |
| 545.4,M | = Altitude, en Mètres, au dessus du MSL (mean sea level). |
| 46.9,M | = Correction de la hauteur de la géoïde en Mètres par rapport à l'ellipsoïde WGS84 (MSL). |
| (Champ vide) | = Nombre de secondes écoulées depuis la dernière mise à jour DGPS. |
| (Champ vide) | = Identification de la station DGPS. |
| *42 | = Checksum |



Positionnement relatif (phase-RTK)

NMEA-0183 National Marine Electronics Association

Préfixes principaux

| | |
|-----|--|
| GP | = GPS |
| GL | = GLONASS |
| GA | = Galileo |
| BD | = Beidu |
| GN | = GNSS (tous les systèmes combinés) |
| PF | = FLARM (système de détection de collision en vol) |
| RA | = RADAR |
| ... | |

Identifiants principaux

| | |
|-----|--|
| GGA | = position GPS Fix (résultats d'un positionnement différentiel) |
| GNS | = position GNSS Fix (résultats d'un positionnement différentiel) |
| GMP | = position GNSS Fix en coordonnées projetées (résultats d'un positionnement différentiel) |
| GSA | = GPS DOP et satellites utilisés |
| GSV | = Satellites visibles |
| ... | |



Méthodes de positionnement

RELATIF (DIFFERENTIEL)

Temps réel

(RTK Real-Time Kinematic)

(~0.02 m + 2ppm)

SERVICE SWIPOS

Positionnement relatif (phase-RTK)

Service SWIPOS

4 services

swipos-NAV

- service DGNSS (mesures sur le code)
- 1 station de référence (Lucerne)
- précision ~ 1m
- diffusion des données via NTRIP

swipos-GIS-GEO

- service RTK (mesures sur la phase)
- 1 station de référence virtuelle (VRS) calculée avec les stations permanentes **AGNES** (30 sta.)
- précision ~ 0.02 m
- diffusion des données via NTRIP

Positionnement relatif (phase-RTK)

Service SWIPOS

4 services

swipos-INFRA

- service RTK (mesures sur la phase)
- données des stations individuelles **AGNES**
- diffusion des données via NTRIP
- applications spéciales de surveillance.

swipos-PP

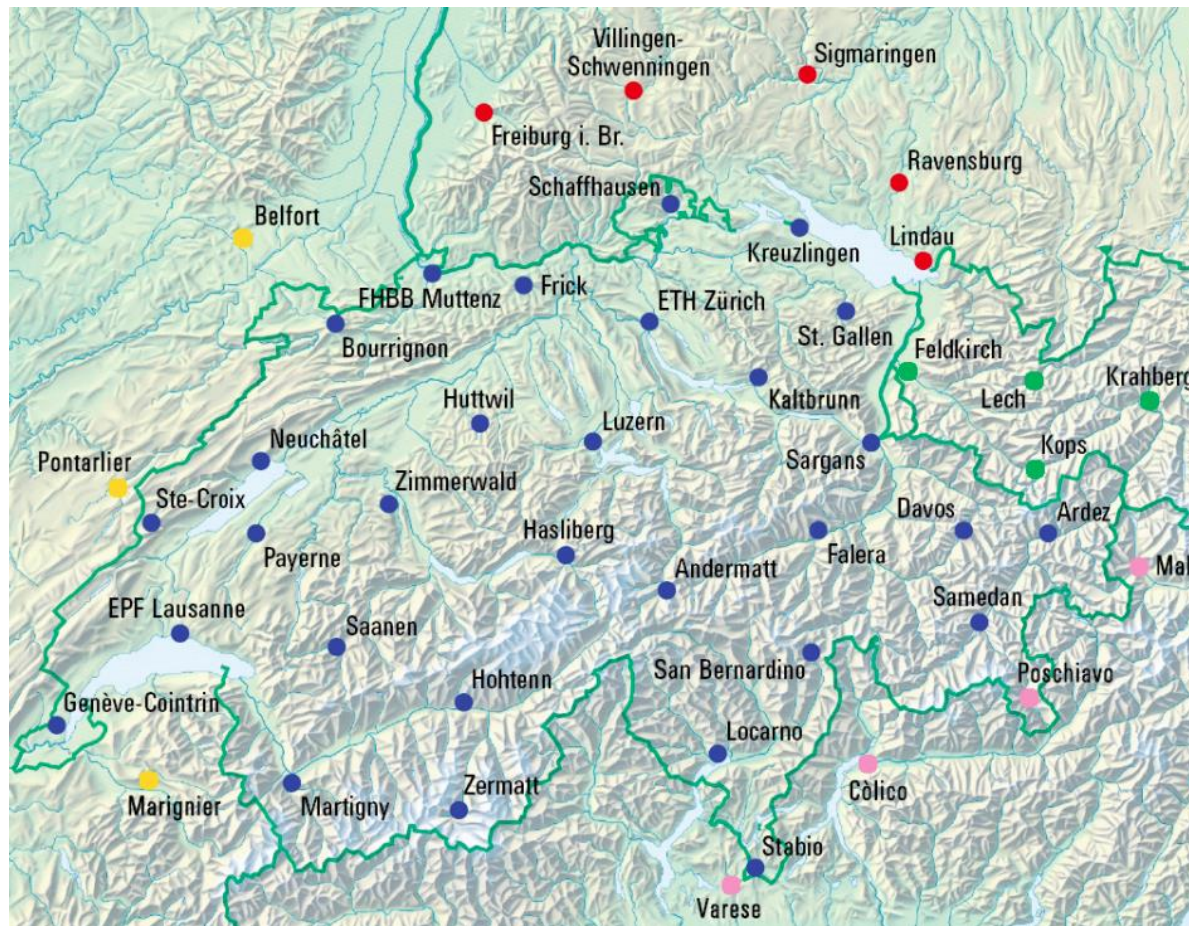
- service pour post-traitement
- données brutes des stations individuelles **AGNES** ou **VRS** en format RINEX
- diffusion des données via fichiers



Positionnement relatif (phase-RTK)

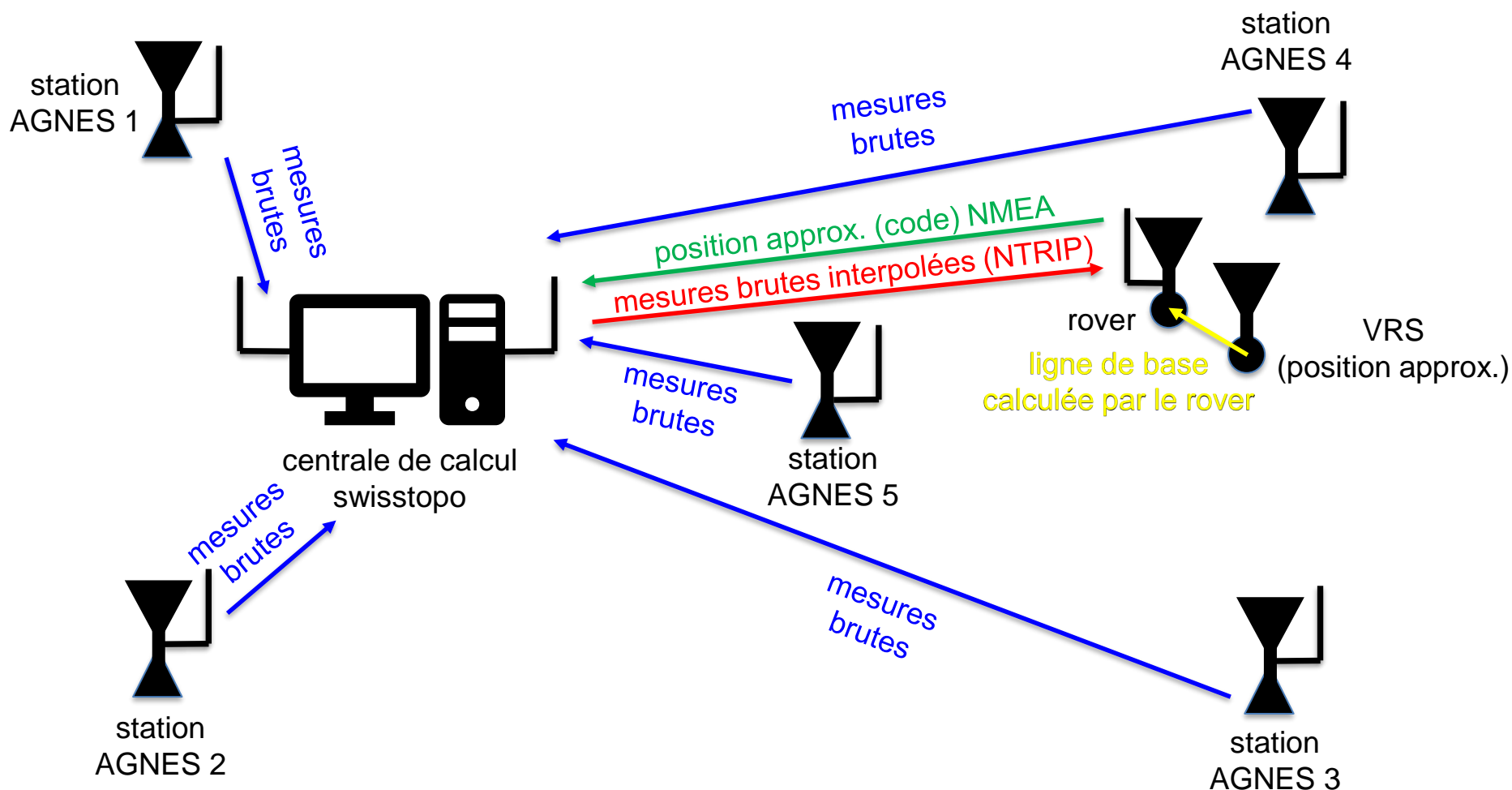
Service SWIPOS

Stations AGNES

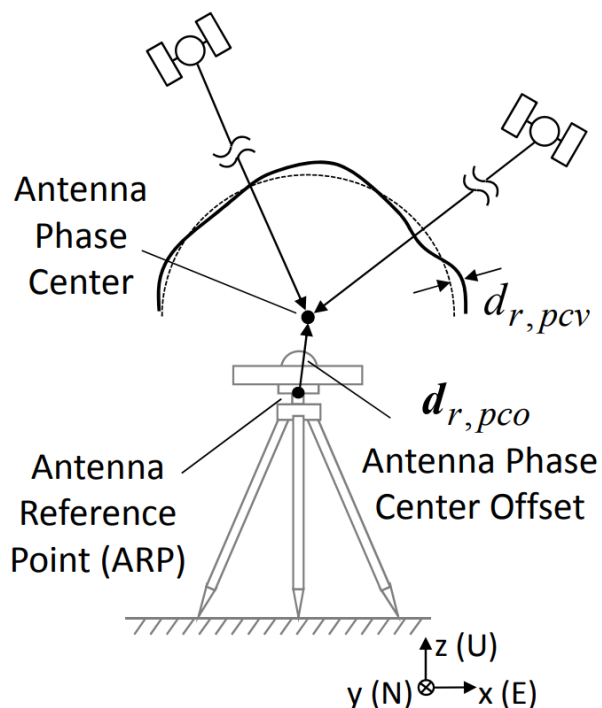


Positionnement relatif (phase-RTK)

Principe de la station virtuelle (VRS)

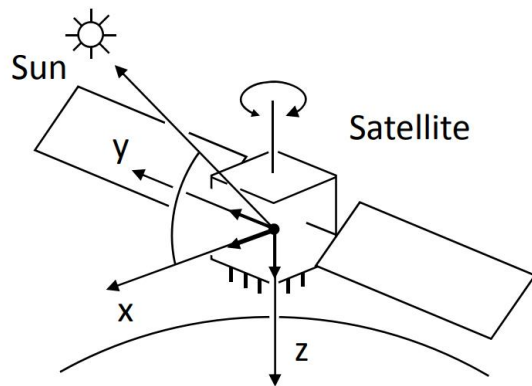
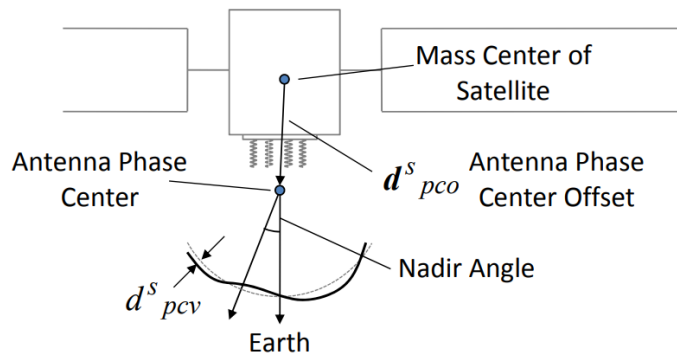


Modèles d'antenne GNSS (récepteurs)



- Modèles d'antennes disponibles dans les fichiers standards ANTEX (ex. igs14.atx).
- Indispensable pour du positionnement absolu PPP.
- Très conseillé pour du positionnement relatif de haute précision (surtout si les antennes sont de types différents).
- Centres de phases (PCO) et corrections selon la direction des satellites (PCV) différents pour chaque constellation et chaque fréquence.

Modèles d'antenne GNSS (satellites)



- Modèles d'antennes disponibles dans les fichiers standards ANTEX (ex. igs14.atx).
- Indispensable pour du positionnement absolu PPP.
- Conseillé pour du positionnement relatif de haute précision si les lignes de bases sont très longues > 100 km.
- Centres de phases (PCO) et corrections selon la direction des satellites (PCV) différents pour chaque constellation et chaque fréquence.

Modèles d'antenne GNSS

Extrait fichier ANTEX (antenne Leica AR10)

```

LEIAR10      NONE
ROBOT        Geo++ GmbH      24    29-JAN-17  TYPE / SERIAL NO
5.0          0.0  90.0  5.0    METH / BY / # / DATE
4            DAZI
IGS14_2148    ZEN1 / ZEN2 / DZEN
# Number of Calibrated Antennas GPS: 024  # OF FREQUENCIES
# Number of Individual Calibrations GPS: 059 SINEX CODE
# Number of Calibrated Antennas GLO: 024 COMMENT
# Number of Individual Calibrations GLO: 059 COMMENT
# GLONASS PCV (metric) COMMENT
# derived from Delta PCV per 25.0 MHz COMMENT
# for frequency channel number k=0 COMMENT
G01          START OF FREQUENCY
+1.42      -0.25  +88.04      NORTH / EAST / UP
NOAZI      +0.00 +0.03 +0.10 +0.15 +0.10 -0.08 -0.36 -0.67 -0.91 -1.02 -0.98 -0.83 -0.66 -0.54 -0.44 -0.25 +0.24 +1.21 +2.74
0.0         +0.00 +0.01 +0.11 +0.23 +0.29 +0.24 +0.09 -0.13 -0.31 -0.37 -0.29 -0.08 +0.20 +0.50 +0.85 +1.34 +2.21 +3.72 +6.09
5.0         +0.00 +0.01 +0.10 +0.22 +0.28 +0.24 +0.10 -0.09 -0.24 -0.28 -0.19 +0.02 +0.29 +0.58 +0.90 +1.36 +2.16 +3.54 +5.75
10.0        +0.00 +0.00 +0.09 +0.20 +0.27 +0.23 +0.10 -0.06 -0.18 -0.21 -0.11 +0.09 +0.33 +0.58 +0.85 +1.23 +1.91 +3.10 +5.03
15.0        +0.00 +0.00 +0.08 +0.19 +0.24 +0.21 +0.10 -0.04 -0.15 -0.15 -0.06 +0.12 +0.31 +0.50 +0.69 +0.97 +1.48 +2.42 +4.01
20.0        +0.00 +0.00 +0.07 +0.17 +0.21 +0.18 +0.07 -0.05 -0.13 -0.13 -0.04 +0.10 +0.24 +0.35 +0.44 +0.58 +0.91 +1.58 +2.79
25.0        +0.00 -0.01 +0.06 +0.14 +0.18 +0.14 +0.04 -0.08 -0.15 -0.14 -0.06 +0.04 +0.12 +0.14 +0.12 +0.12 +0.26 +0.67 +1.50
30.0        +0.00 -0.01 +0.05 +0.12 +0.14 +0.09 -0.02 -0.13 -0.19 -0.17 -0.11 -0.04 -0.03 -0.11 -0.24 -0.37 -0.41 -0.24 +0.28
35.0        +0.00 -0.01 +0.04 +0.09 +0.09 +0.02 -0.09 -0.20 -0.26 -0.24 -0.19 -0.15 -0.20 -0.36 -0.60 -0.85 -1.02 -1.02 -0.75
40.0        +0.00 -0.01 +0.02 +0.06 +0.04 -0.05 -0.18 -0.30 -0.35 -0.34 -0.29 -0.28 -0.37 -0.60 -0.91 -1.25 -1.51 -1.62 -1.47
45.0        +0.00 -0.02 +0.01 +0.03 -0.01 -0.13 -0.28 -0.41 -0.47 -0.45 -0.41 -0.53 -0.79 -1.16 -1.54 -1.83 -1.95 -1.83
50.0        +0.00 -0.02 +0.00 +0.00 -0.06 -0.21 -0.39 -0.54 -0.61 -0.59 -0.54 -0.66 -0.93 -1.31 -1.68 -1.94 -1.99 -1.78
55.0        +0.00 -0.02 -0.01 -0.02 -0.12 -0.29 -0.50 -0.68 -0.76 -0.74 -0.68 -0.66 -0.76 -1.01 -1.35 -1.67 -1.83 -1.73 -1.34
60.0        +0.00 -0.02 -0.02 -0.05 -0.16 -0.37 -0.61 -0.81 -0.92 -0.90 -0.82 -0.77 -0.83 -1.02 -1.28 -1.50 -1.51 -1.21 -0.57
65.0        +0.00 -0.02 -0.02 -0.07 -0.20 -0.43 -0.71 -0.94 -1.07 -1.06 -0.97 -0.88 -0.87 -0.97 -1.12 -1.19 -1.02 -0.48 +0.44
70.0        +0.00 -0.02 -0.03 -0.08 -0.24 -0.49 -0.80 -1.06 -1.21 -1.21 -0.97 -0.88 -0.88 -0.90 -0.80 -0.43 +0.37 +1.59
75.0        +0.00 -0.02 -0.03 -0.09 -0.26 -0.53 -0.87 -1.16 -1.34 -1.35 -1.23 -1.05 -0.88 -0.76 -0.64 -0.37 +0.21 +1.24 +2.74
80.0        +0.00 -0.02 -0.03 -0.10 -0.27 -0.56 -0.92 -1.24 -1.45 -1.48 -1.35 -1.13 -0.88 -0.65 -0.38 +0.04 +0.81 +2.04 +3.76
85.0        +0.00 -0.02 -0.03 -0.10 -0.28 -0.58 -0.95 -1.30 -1.53 -1.58 -1.45 -1.20 -0.89 -0.56 -0.17 +0.39 +1.30 +2.69 +4.55
90.0        +0.00 -0.01 -0.02 -0.09 -0.27 -0.57 -0.96 -1.33 -1.59 -1.66 -1.54 -1.27 -0.91 -0.50 -0.03 +0.63 +1.63 +3.10 +5.03
95.0        +0.00 -0.01 -0.01 -0.08 -0.25 -0.56 -0.95 -1.34 -1.62 -1.72 -1.61 -1.33 -0.95 -0.50 +0.02 +0.72 +1.75 +3.24 +5.15
100.0       +0.00 +0.00 +0.00 -0.06 -0.23 -0.53 -0.93 -1.33 -1.63 -1.75 -1.67 -1.40 -1.01 -0.56 -0.03 +0.67 +1.67 +3.10 +4.92
105.0       +0.00 +0.00 +0.01 -0.04 -0.20 -0.50 -0.89 -1.30 -1.62 -1.76 -1.70 -1.46 -1.10 -0.67 -0.17 +0.47 +1.40 +2.71 +4.37

```

