수치해석 Summary

1. 수학적 모델링과 공학문제의 해결

• 미분방정식 → 차분 방정식

: 연속 시간계에서의 미분방정식을 이산 시간계에서의 차분 방정식으로 근사화함.

ex) $$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{c}{m}v(t) = g \Longrightarrow \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} + \frac{c}{m}v(t_i) = g$$

2. 프로그래밍과 소프트웨어

• EXCEL, MATLAB, OCTAVE → 수업에서 주로 사용

• 프로그래밍의 기본 = 구조화 (Structure)
- sequence (순차적 진행)
- selection (선택)
- repetition (반복)

3. 근사값과 반올림오차

• 유효숫자 : 측정이나 연산에 관련하여 그 측정 결과나 연산결과의 정밀도를 주기 위한 숫자

ex) 48.5 : 3자리　　1.905×10^{-3} : 4자리

48.500 : 5자리　　$\pi = 3.141592\cdots = 3.14$: 3자리

0.001905 : 4자리

• 정확도 : 계산값이나 측정값이 참값에 가까운 정도

• 정밀도 : 계산값이나 측정값들 간의 서로 가까운 정도

• 오차 (E_t) : 참값 - 근사값 ($E_t = x - \hat{x}$) → 추정치

• 참상대오차 (ε_t) = $\varepsilon_t = \dfrac{x - \hat{x}}{x}$

• 근사백분율 상대오차
- 반복 (iteration)에 사용
- $\dfrac{\text{현재의 근사값} - \text{이전의 근사값}}{\text{현재의 근사값}} \times 100$ $\left(\varepsilon_{a,\%} = \dfrac{\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}}{\hat{x}_i} \times 100\right)$
- 반복의 종료 기준 : $\varepsilon_{a,\%} < \varepsilon_s$
- ε_s : 백분율 오차의 허용값, 적어도 n개의 유효숫자 내에서 그 결과가 정확하다

$$\varepsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n} \%$$

• 테일러 급수 : $x=a$ 근처 임의의 x에 대한 함수값을 추정하는 식

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

• 맥클로린 급수 : $a=0$ 일때의 테일러 급수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

4. 절단오차와 테일러 급수

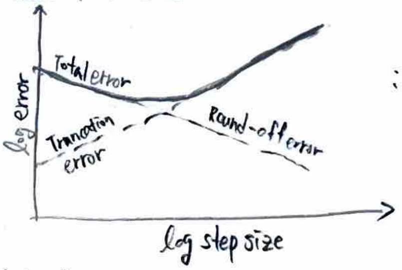
• 테일러 급수 : 알고있는 $f(x_i)$로부터 $f(x_{i+1})$의 값을 추정하는 도구

• $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{(n+1)}$

• 유한제차분
- 전향차분 근사화 : $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$
- 후향차분 근사화 : $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$
- 중심차분 근사화 : $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$

• 전체 수치오차

: 절단오차 + 반올림오차



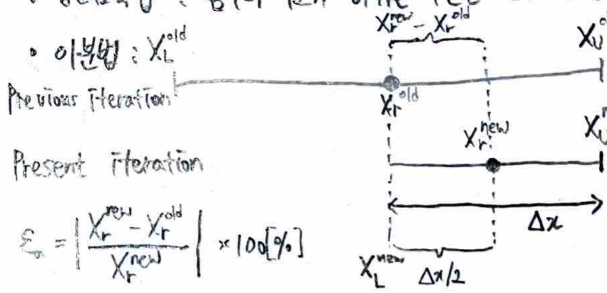
: 이득의 축소점 (point of diminishing return) 찾는 것이 중요한 문제

구간간격 ↑ [절단오차 ↑ / 반올림오차 ↓]

5. 구간법

• 증분탐색법 : 함수의 부호가 바뀌는 구간을 찾는 방법

• 이분법 :



$$\varepsilon_a = \left|\frac{X_r^{new} - X_r^{old}}{X_r^{new}}\right| \times 100 [\%]$$

$$= \left|\frac{X_U^{new} - X_L^{new}}{X_U^{new} + X_L^{new}}\right| \times 100 [\%]$$

n번 반복 후 절대오차 : $E_n = \dfrac{\Delta x}{2^n}$

• 가위치법 = 선형 보간법

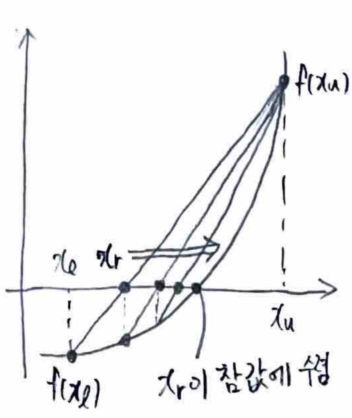
두 점 $(x_l, f(x_l))$과 $(x_u, f(x_u))$를 지나는 1차 함수

$$f(x) = f(x_l)\frac{x - x_u}{x_l - x_u} + f(x_u)\frac{x - x_l}{x_u - x_l}$$ 이 0 이 되는

x_r을 구한다　　$x = \dfrac{f(x_l)x_u - f(x_u)x_l}{f(x_l) - f(x_u)}$

$$x = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

$$x = x_l - \frac{f(x_l)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$



6. 개구간법

- 고정점 반복법 (Gauss-Seidel Method)

- $x = g(x)$의 형태로 변형 → $\boxed{x_{i+1} = g(x_i)}$

- 고정점 반복법의 수렴조건

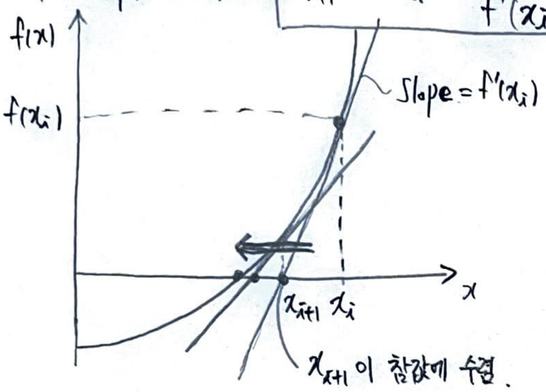
$g(x)$의 기울기 크기가 $f(x)=x$의 기울기보다 작아야함.

$$\boxed{|g'(x)| < 1}$$

- Newton-Raphson Method

- 근을 구하는 가장 대중적인 방법

- Newton-Raphson 공식 : $\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$



- 오차추정 (2차 수렴)

해가 x_r에 수렴한다고 가정하면,

$$E_{t,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

즉, 오차는 그 이전 오차의 제곱에 비례한다.

- 할선법 (Secant Method)

- Newton-Raphson 공식의 도함수를 후향 차분으로 근사화

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}}$$

- 수정된 할선법

- x_i에 변동량(δ)을 감안하며 한개의 초기값을 계산하는 방법

$$x_{i+1} - x_i = \delta x_i$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}}$$