PERTEMUAN 8

HUBUNGAN METODE DUAL SIMPLEKS DAN PRIMAL DUAL

A. Tujuan Pembelajaran

Di dalam pertemuan ini akan menjelaskan hubungan metode dual simpleks dengan metode primal dual dan anda akan mampu:

1. Menjelaskan dan menjabarkan hubungan Metode Dual Simpleks dan Primal Dual
2. Bisa mengubah persamaan primal ke dual serta bisa menetapkan nilai maksimum model dual

B. Uraian Materi

1. Uraian Materi Dual Simpleks dan Primal Dual

Pada pemograman linier ada dua bentuk, yaitu model primal dan model dual. Model primal sendiri didefinisikan sebagai bentuk asli dari sebuah model program liner, sedangkan model dual ialah bentuk alternatif lain yang dikembangkannya dari model primal.

Adapun hubungan khusus antara keduanya yaitu dual dan primal adalah sebegai berikut:

a. Variable A_1, A_2, A_3 ada hubungannya memiliki batasan model primal. Dan di setiap batasan di primal akan ada satu variable dual. Contohnya terdapat pada kasus tersebut model primal yang memiliki tiga batasan. Untuk itu dualnya akan mempunya tiga variabel keputusan.
b. Koefisien fungsi dari tujuan primal, ialah nilai kuantitasnya di sisi kanan pertidaksamaan di model dual
c. Koefisien batasan model primal adalah koefisien variable dari keputusan dual.
d. Nilai dari kuantitas di sisi kanan pertidaksamaan di model primal adalah koefisien fungsi dari tujuan dual.
e. Di dalam bentuk standarnya, model maksimisasi primal mempunyai batasan.

Ciri-ciri Metode Simpleks Primal adalah variabel yang masuk ialah variable non-basis yang masuk ke himpunan variable dasar di iterasi selanjutnya, serta variable yang keluar ialah variabel basis yang keluar melalui solusi basis di iterasi selanjutnya. Adapun dua keadaan simpleks primal sebagai berikut:

a. Keadaan layak yaitu keadaan dimana variable keluar merupakan variable basis yang memiliki titik potong paling kecil.
b. Kondisi optimal yaitu kondisi dimana variable masuk dalam maksimisasi dan minimalisasi variable non basisnya memiliki koefisien paling negative atau positif pada persamaan fungsi tujuan (Z).

Adapun langkah-langkah dalam iteraksi simpleks primal adalah sebagai berikut:

a. Dari bentuk dasar, tentukan dulu solusi dasar awal yang layak.
b. Pilihlah variable masuk antara variable non-basis mempergunakan keadaan optimal.
c. Pilihlah variable keluar dari variable basis mempergunakan keadaan layak.
d. Lalu tentukanlah nilai variable basis yang baru dengan cara menyusun variable masuk itu menjadi variable basis serta variable keluar menjadi variable non-basis.
e. Kembali ke Langkah awal.

Contoh soal:

Sebuah pengerajin kayu membuat bangku serta meja memakai kayu, waktu produksi, serta papan. Masing-masing bangku memerlukan lima buah papan, dua buah kayu, serta empat jam pengerjaan. Masing-masing meja memerlukan dua buah papan, tiga buah kayu, serta dua jam waktu produksi. Perusahaan bisa memperoleh keuntungan $12 untuk bangku serta $8 untuk meja. Ada 150 unit papan, 100 unit Kayu, serta 80 jam pengerjaan. Berapakah banyak produk supaya keuntungan optimal ?

Jawab:

- Variabel Keputusan : X_1 = bangku, dan X_2 = meja
- Fungsi Tujuan : Maks. $Z = 12 X_1 + 8 X_2$
- Kendala : papan, kayu, dan waktu

Formulasi Model:

Maks. $Z = 12 X_1 + 8 X_2$

Kendala:

$5X_1 + 2X_2 \leq 150$

$2X_1 + 3X_2 \leq 100$

$4X_1 + 2X_2 \leq 80$

$X_1, X_2 \geq 0$

Bentuk standar

Maks. $Z = 12X_1 + 8X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3$

Kendala:

$5X_1 + 2X_2 + S_1 = 150$

$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 100$

$4X_1 + 2X_2 + S_3 = 80$

$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Tabel Simpleks:

Non basis

Basis (Dasar)	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solusi	
Z	1	-12	-8	0	0	0	0	→ Pers Z
S_1	0	5	2	1	0	0	150	→ Pers S_1
S_2	0	2	3	0	1	0	100	→ Pers S_2
S_3	0	4	2	0	0	1	80	→ Pers S_3

Var masuk ↓

Basis (Dasar)	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solusi	Rasio
Z	1	***-12***	-8	0	0	0	0	
S_1	0	5	2	1	0	0	150	150/5 = 30
S_2	0	2	3	0	1	0	100	100/2 =50
S_3	0	4	2	0	0	1	80	80/4 = 20

Ivot (Var Keluar) Elemen vivot

Aturan metode Gauss Jordan:

a. Pers. Pivot

Pers. Pivot baru = pers. pivot lama: elemen pivot

b. Pers. Lain

Pers. Baru = pers. lama – (koef kolom var masuk x pers.pPivot baru). Maka:

$S_3 \longrightarrow X_1$ = (0 4 2 0 0 1 80) / 4

= (0 1 ½ 0 0 ¼ 20)

S_2 baru = (0 2 3 0 1 0 100) - 2 (0 1 ½ 0 0 ¼ 20)

= (0 2 3 0 1 0 100) - (0 2 1 0 0 ½ 40)

= (0 0 2 0 1 -½ 60)

S_1 baru = (0 5 2 1 0 0 150) - 5 (0 1 ½ 0 0 ¼ 20)

= (0 5 2 1 0 0 150) - (0 5 $^5/_2$ 0 0 $^5/_4$ 100)

= (0 0 -½ 1 0 -$^5/_4$ 50)

Z baru = (1 -12 -8 0 0 0 0) - (-12) (0 1 ½ 0 0 ¼ 20)

= (1 -12 -8 0 0 0 0) - (0 -12 6 0 0 -3 -240)

= (1 0 -2 0 0 3 240)

Var Masuk

Basis (Dasar)	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solusi	Rasio
Z	1	0	**-2**	0	0	3	240	
S_1	0	0	-½	1	0	$-^5/_4$	50	50/(-½) = -100
S_2	0	0	2	0	1	-½	60	60/2 = 30
X_1	0	1	½	0	0	¼	20	20/(½) = 40

Pers Pivot (Var Keluar) elemen pivot

S_2 X_2 = (0 0 2 0 1 -½ 60) / 2

= (0 0 1 0 ½ -¼ 30)

X_1 baru = (0 1 ½ 0 0 ¼ 200) - ½ (0 0 1 0 ½ -¼ 30)

= (0 1 ½ 0 0 ¼ 200) - (0 0 ½ 0 ¼ $-^1/_8$ 15)

= (0 1 0 0 -¼ $^3/_8$ 5)

S_1 baru = (0 0 -½ 1 0 $-^5/_4$ 50) - (-½)(0 0 1 0 ½ -¼ 30)

= (0 0 -½ 1 0 $-^5/_4$ 50) - (0 0 -½ 0 -¼ $^1/_8$ -15)

= (0 0 0 1 ¼ $-^{11}/_8$ 65)

Z baru = (1 0 -2 0 0 3 240) - (-2)(0 0 1 0 ½ -¼ 30)

= (1 0 -2 0 0 3 240) - (0 0 -2 0 -1 ½ -60)

= (1 0 0 0 1 $^5/_2$ 300)

Tabel Akhir

Basis (Dasar)	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solusi
Z	1	0	0	0	1	2-May	300
S_1	0	0	0	1	¼	-1.375	65
X_2	0	0	1	0	½	-¼	30
X_1	0	1	0	0	¼	8-Mar	5

Kesimpulan : $X_1 = 5$ (banyak bangku)

$X_2 = 30$ (banyak meja)

$S_1 = 65$ (unit papan / pers. Kendala 1 yg berlebih)

$Z = 300$ (keuntungan maks)

Bukti

- Fungsi tujuan $\longrightarrow$ $Z = 12\ X_1 + 8\ X_2$

  $= 12\ (5) + 8\ (30)$

  $= 60 + 240$

  $= 300$

- Papan $\longrightarrow$ $5\ X_1 + 2\ X_2 \leq 150$

  $5\ (5) + 2\ (30) = 25 + 60 = 85 \longrightarrow 150 - 85 = 65$ (sisa)

- Kayu $\longrightarrow$ $2\ X_1 + 3\ X_2 \leq 100$

  $2\ (5) + 3\ (30) = 10 + 90 = 100$

- Waktu $\longrightarrow$ $4\ X_1 + 2\ X_2 \leq 80$

3 $(5) + 2\ (30) = 20 + 60 = 80$

Ciri-ciri metode simpleks dual adalah sebagai berikut:

a. Menyelesaikan masalah LP yang tidak mempunyai penyelesaian dasar layak dan tidak ada variable buatan.
b. Keadaan kelayakan: variable keluar ialah variable basis yang mempunyai nilai paling negatif di kolom solusi (bila seluruh variable basisnya positif, maka selesai).
c. Keadaan optimalitas: Variable masuk ialah variable non basis yang mempunyai rasio paling kecil (positif) antara persamaan 2 dengan koefisien negatif melalui persamaan variable keluar 0 ataupun positif.

Contoh

Min $Z = 3X_1 + 2X_2$

Kendala $3X_1 + X_2 \geq 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2X_2 \leq 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

Menjadi

Min $Z = 3X_1 + 2X_2$

$-3X_1 - X_2 + X_3 = -3$

$-4X_1 - 3X_2 + X_4 = -6$

$X_1 + 2X_2 + X_5 = 3$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Solusi dasar awal

$X_3 = -3$, $X_4 = -6$ $X_5 = 3$ } tdk layak

Non basis

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Solusi
Z	-3	-2	0	0	0	0
X_3	-3	-1	1	0	0	-3
X_4	-4	-3	0	1	0	-6
X_5	1	1	0	0	1	3

Var keluar X_4 Solusi paling negatif = -6

(basis)

Var masuk $\rightarrow$ X_2 $\rightarrow$ Rasio positif terkecil = $^{-2}/_{-3}$ = $^{2}/_{3}$(non basis)

Elemen Pivot = -3

Persamaan pivot baru (X_2 menggantikan X_4):

$\rightarrow$ (-4 -3 0 1 0 -6) / -3

$\rightarrow$ ($^{4}/_{3}$ 1 0 $^{1}/_{3}$ 0 2)

Iterasi 1

Non basis

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Solusi
Z	-1/3	0	0	-2/3	0	4
X_3	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_4	4/3	1	0	-1/3	0	2

X_5	1/3	0	0	1/3	1	1

Rasio $^1/_5$ $\rightarrow$ $(-^1/_3)$ / $(-^5/_3)$

Maka : X_1 = Var masuk

X_3 = Var keluar

Elemen pivot = $-^5/_3$

Persamaan pivot baru (X_1 menggantikan X_3):

$\rightarrow$ ($-^5/_3$ 0 1 $-^1/_3$ 0 -1) / $(-^5/_3)$

$\rightarrow$ (1 0 $-^3/_5$ $^1/_5$ 0 $^3/_5$)

Iterasi 2 (tabel optimal)

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Solusi
Z	0	0	-1/5	-3/5	0	$^{21}/_5$
X_3	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X_4	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
X_5	0	0	-1/5	2/5	1	6/5

Solusi : $X_1 = {}^3/_5$ $X_2 = {}^6/_5$ $Z = {}^{21}/_5$

2. Mengubah Persamaan Primal Menjadi Dual dan Menentukan Nilai Optimal Dual

Di dalam semua masalah persoalan pada program linier akan selalu ada dua macam alalisis, yakni analisis dual dan analisis primal yang pada umumnya disebut analisis primal-dual. Guna mengetahui lebih jelas hubungan antara primal dan dual, maka hendak dibahas menggunakan contoh berikut:

PT. Tamaboga ialah perusahaan yang memproduksi 2 macam barang produk, yakni A serta B. masing-masing produk A memberi keuntungan sebanyak Rp.40,- serta setiap produk B menghasilkan Rp.60,-. Lalu produk A dan B harus di produksi memalui2 tahapan proses yakni proses pertama serta kedua. Waktu dan kapasitas proses untuk kedua produk seperti dibawah ini:

Proses	Waktu proses		Kapasitas per bulan (jam)
	A	B	
I	3	2	2
II	1	2	1

Dari tabel di atas model matematikanya adalah:

Fungsi Tujuan:

Memaksimumkan: $Z = 40A + 60B$

Fungsi Kendala:

1. $3A + 2B \leq 2000$
2. $A + 2B \leq 1000$,
3. $A, B \geq 0$

Model matematika pada contoh di atas adalah model yang biasa disebut primal. Dual pada dasarnya ialah tentang cara menentukan harga yakni harga dari bahan sumber yang akan di gunakan guna membuat produksi dengan maksimal, dan harga itu adalah nilai minimum kmudian bisa di pergunakan untuk bahan pertimbangan mengurangi maupun menambah sumber yang ada dengan tepat.

Contoh kasus dimisalkan C serta D adalah biaya sewa per jam yang harus di bayar pada proses I serta II. Dikarenakan jumlah pada kapasitas yang tersedia guna proses I ialah 2000 jam serta proses II 1000 jam, total biaya sewa guna kedua proses di atas yaitu: $F = 2000C + 1000D$ dan F adalah jumlah dari biaya sewa kedua proses itu maka PT. Tamaboga berupaya guna meminimalkan, umpamakan bila model primal menjadi pihak penjual yang hendak mmaksimumkan profit atau keuntungan, di lain sisi umpamakan model dual menjadi pihak pembeli yang menghendaki harga yang rendah. Di masing-masing unit produk A membutuhkan waktu sebanyak 3 jam untuk melakukan proses I serta memerlukan 1 jam di proses II, kemudian biaya yang di perlukan guna membuat masing-masing unit produk A yakni 3C+1D.

Jika dilihat melalui pihak pembeli tentulah harga itu tidak boleh lebih rendah daripada sumbangan profit yang akan diberikan dari produk A kepada penjualan yakni sejumlah Rp. 40,- (jika apabila penjual memperoleh profit Rp.40,- bagi masing-masing produk A yang terjual, tentulah pembeli menginginkannya supaya harga yang dia bayarkan guna setiap biaya pemrosesan produk A itu paling kecil atau sama dengan profit yang di dapatkan oleh penjual yakni sejumlah Rp.40,-). Dan biaya guna memproses tiap unit produk A ialah: $3C + 1D \geq 40$.

Menggunakan cara yang demikian sama biaya guna memproses tiap unit dari produk B ialah, $2C + 2D \geq 60$ lalu kemudian sebab harganya tidak mungkin negative $C \geq 0$ serta $D \geq 0$.

Asumsi dasarnya adalah guna bisa membuat sebuah permasalahan primal program linier kedalam bentuk dual, terlebih dahulu di rumuskan kedalam bentuk kanonik sebagai berikut:

- Bagi permasalahan maksimasi, seluruh rumusan fungsi kendala .
- Memiliki tanda (≤).
- Bagi permasalahan minimasi maka tnada fungsi syarat ikatan harus lebih besar / sama dengan (≥).

Bila ada sebuah permasalahan di rumusan program linier memiliki fungsi kendala kesamaan, maka fungsi kendalanya bisa diganti menggunakan 2 fungsi yang lain. Pertama, memiliki tanda “lebih kecil dari pada / sama dengan (≤)”. Kedua, memiliki tanda “lebih besar dari-pada / sama dengan (≥)”. Salah satu fungsi kendala itu, selanjutnya dipilih, serta dikali (−1) guna memperoleh fungsi kendala yang selaras pada peraturan yang diminta oleh bentuk kanonik itu.

Model Umum Persoalan Primal – Dual:

Bentuk Primal

Maksimuman: $$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

Syarat ikatan: Untuk I = 1, 2,3,.. m

serta Xj ≥ 0, j = 1, 2,… ,n

Jika hendak dinyatakan menjadi Bentuk Dual:

Minimumkan: $F = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$

Syarat Ikatan: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \geq C_j$ untuk j = 1,2,3,…n

Dimana: $Z_{opt} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j^*$ adalah sama dengan $F_{opt} = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i^*$

Adapun aturan umum pada rumusan permasalahan Program Linier bentuk Primal serta Dual sebagai berikut:

a. Memaksimalkan fungsi tujuan.
b. Koefisien fungsi tujuan (Cj).
c. NSK fungsi kendala primal-primal (bi).
d. Koefisien peubah ke-j.
e. Koefisien kendala ke-i.
f. Peubah ke-j yang positif (≥ 0).
g. Peubah ke-j tanda tidak dibatasi.
h. Kendala ke-i yang memiliki tanda sama dengan.
i. Kendala ke-i yang memiliki tanda ketidaksamaan (≤).

Bentuk Dual:

a. Meminimumkan fungsi tujuan, serta sebaliknya.
b. Nilai Sebelah Kanan (NSK) fungsi kendala
c. Koefisien fungsi tujuan
d. Koefisien kendala ke-j
e. Koefisien peubah ke-i

f. Kendala ke-j memiliki tanda ketidaksamaan “lebih besar daripada / sama dengan “ (≥).
g. Kendala ke-j yang memiliki tanda sama dengan
h. Peubah ke-i tandanya tidak dibatasi
i. Peubah ke-i yang positif (≥)

Contoh Soal:

Andai saja ada sebuah permasalahan Program Linier yaitu:

Memaksimumkan: $Z = 10X_1 + 6X_2$ .... (1),

Syarat ikatan:

$2X_1 + 3X_2 \leq 90$ .... (2)

$4X_1 + 2X_2 \leq 80$ .... (3)

$X_2 \geq 15$ .... (4)

$5X_1 + X_2 = 25$ .... (5)

dan X_1 , $X_2 \geq 0$

Ubah ke bentuk dualnya !

Penyelesaian:

Langkah 1

Transfomasikan ke bentuk kanonik primal (sebab fungsi bertujuan guna mengoptimalkan maka tanda ketidaksamaan dibuat ≤). Manipulasi dilaksanakan di rumus (4) serta (5) yaitu:

a. Kalikan rumus (4) dengan (−1) diperoleh: $-X_2 \leq -15$
b. Gantilah rumus (5) menjadi ketidaksamaan:
   $5X_1 + X_2 \leq 25$ (5a) dan $5X_1 + X_2 \geq 25$ (5b) serta rumus (5b) dikali (-1) diperoleh: $-5X_1 - X_2 \leq -25$
   Sehingga didapatkan bentuk kanonik primal menjadi:
   Memaksimumkan: $Z = 10X_1 + 6X_2$

   Syarat ikatan:

$2X_1 + 3X_2 \leq 90$

$4X_1 + 2X_2 \leq 80$

$-X_2 \leq -15$

$5X_1 + X_2 \leq 25$

$-5X_1 - X_2 \leq -25$ dan $X_1, X_2 \geq 0$

Langkah 2

Rumuskankanlah bentuk kanonik dari persoalan primal ke bentuk dual, serta didapatkan:

Meminimumkan: $F = 90Y_1 + 80Y_2 - 15Y_3 + 25Y_4 - 25Y_5$

Syarat Ikatan:

$2Y_1 + 4Y_2 - 0Y_3 + 5Y_4 - 5Y_5 \geq 10$

$3Y_1 + 2Y_2 - Y_3 + Y_4 - Y_5 \geq 6$

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0$ atau $Y_i \geq 0$, untuk $i = 1, 2, \ldots, 5$

C. Soal Latihan/Tugas

1. Carilah sebuah persamaan lalu ubahlah ke dalam primal-dual!

D. Referensi

Frederich S. Hiller, G. J. (1990). *Introduction to operations research.* New York: McGraw-Hill.

Gunawan. (2014, 11 04). Bentuk Dual Simpleks. Retrieved 05 20, 2021, from Academia: ttps://www.academia.edu/30920881/BENTUK_DUAL_SIMPLEKS

Irawan, F. (2018). Konsep Primal Dual. Retrieved 05 20, 2021, from Docplayer: https://docplayer.info/29559832-Konsep-primal-dual.html

Taha, H. A. (2006). *Operations Research: An Introduction .* Prentice Hall.