

PERTEMUAN 16

TURUNAN ATURAN RANTAI

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn aturan rantai dalam matematika dan kegunaannya

B. URAIAN MATERI

1. Turunan Berantai / Aturan Rantai

Jika $f(x)$ merupakan suatu fungsi maka turunannya didapatkan dengan menurunkan fungsi luar / *outer function* f yang berhubungan dengan g dan fungsi dalam yang berhubungan dengan z dan mengalikan perkalian tersebut.

Sebagai contoh untuk menyelesaikan turunan dari fungsi $y = (2x + 3)^2$, masih dapat dikerjakan dengan cara menguraikan persamaan tersebut hingga dapat menjadi terpisah dan sederhana hingga dapat diturunkan.

Tetapi bagaimana jika fungsinya berbentuk

$$y = \sqrt{(2 + x^2)} \quad \text{atau} \quad y = (8x - 7)^{99/4}$$

Akan sulit untuk jika dilakukan penjabaran fungsi-fungsi tersebut.

Maka untuk mengerjakan soal turunan tersebut dikembangkan teknik yang berhubungan dengan fungsi-fungsi majemuk tersebut. Perlu di memahami konsep konsep aljabar dan aritmetika dalam pelajaran pelajaran sebelumnya.. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat dalam uraian berikut.

Suatu fungsi $y = f \circ g$, sedemikian sehingga $y = f(g(x))$, dimana f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai turunan, maka y juga mempunyai turunan sehingga

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Contoh 1.

$$y = (5x^2 + 3)^{100}$$

Maka $g(x) = (5x^2 + 3) \rightarrow$ fungsi dalam

$$f(g) = g^{100} \quad \rightarrow \text{fungsi luar}$$

$$\frac{df}{dg} = 100g^{99} \quad \text{dan} \quad g'(x) = 10x$$

Sehingga

$$y' = 100(5x^2 + 3)^{99} \cdot 2x$$

$$y' = 200x(5x^2 + 3)^{99}$$

Contoh 2.

Carilah penyelesaian turunan dari fungsi

$$y = (4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{12}$$

Penyelesaian:

Misal:

$$u = 4x^3 + 5x^2 - x + 4 \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^2 + 10x - 1$$

$$y = u^{12}$$

$$y' = \frac{dy}{du} = 12u^{11}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = 12u^{11} \cdot (12x^2 + 10x - 1)$$

$$y' = 12(4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{11}(12x^2 + 10x - 1)$$

$$y' = 12(12x^2 + 10x - 1)(4x^3 + 5x^2 - x + 4)^{11}$$

Contoh

Carilah dy/dz dari persamaan $y = 3x^4 - 7$ dan $x = z^2 + 10$.

Penyelesaian:

$$y = 3x^4 - 7 \rightarrow dy/dx = 12x^3$$

$$x = z^2 + 10 \rightarrow dx/dz = 2z$$

$$dy/dz = (dy/dx) \cdot (dx/dz)$$

$$dy/dz = (12x^3) \cdot (2z)$$

$$dy/dz = 24x^3z$$

Contoh

Fungsi

$$y = (3x^2 + 1)^2$$

Hitunglah turunannya

Jawab : Cara 1 : Menggunakan aturan rantai

$$u = 3x^2 + 1 \quad ; \quad du = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 6x$$

$$= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x$$

$$36x^3 + 12x$$

Cara 2. Bentuk fungsi bisa dijabarkan sehingga

$$y = (3x^2 + 1)^2 = 9x^4 + 6x^2 + 1$$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = 36x^3 + 12x$$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Carilah turunan soal berikut ini:

NIM = digit terakhir NIM dan bukan angka 0

1. $f(x) = \text{NIM}x^2 + \text{NIM}x - \text{NIM}$

2. $f(x) = (2x^3 + 5)^5$

3. $f(x) = (\text{NIM}x + \text{NIM})^4$

4. $f(x) = 5(\text{NIM}x^2 + \text{NIM}x - \text{NIM})^6$

5. $f(x) = (212x + 3)^{2016}$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer