

Pertemuan 9:

Integral Parsial

A. Tujuan Pembelajaran

Mahasiswa mampu memahami dan menggunakan materi dasar turunan dalam memecahkan permasalahan integral tak tentu dan integral tentu menggunakan teknik integral parsial.

B. Uraian Materi

Tidak semua integral dapat diselesaikan dengan metode substitusi, ada cara lain jika tidak bisa menggunakan metode substitusi, yaitu menggunakan teknik integral parsial. Cara ini lebih mudah digunakan jika ‘teknik substitusi’ **tidak bisa digunakan**. Jadi, secara umum langkah-langkah penyelesaian permasalahan integral (dengan cara manual) ada tiga, yaitu: (1) mengamati soal (permasalahan integral), jika sudah sama dengan **rumus dasarnya** maka bisa langsung diintegrasikan; (2) menggunakan teknik substitusi; (3) jika teknik substitusi tidak bisa, maka menggunakan teknik integral parsial.

Rumus dasar teknik integral parsial yaitu:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Contoh 1: $\int x \cos x \, dx$

Pada kasus integral tersebut, tidak bisa diselesaikan dengan teknik substitusi (Teknik Integral Fungsi Trigonometri Substitusi Aljabar). Oleh karena itu, perlu cara lain untuk menyelesaikannya, misalnya dengan teknik integral parsial.

Penyelesaian:

Sesuai rumus dasar integral parsial, yaitu $\int u dv = uv - \int v du$, maka langkah awal **tentukan** dulu mana **u** dan **dv** . Langkah ini sangat penting, karena salah menentukan mana u dan dv malah bukannya menyelesaikan persoalan integral, tapi bisa memperumitnya.

Misalkan $u = x$ maka $du = dx$ (**du** merupakan **differensial u**)

$dv = \cos x dx$ maka $v = \sin x$ (**v** merupakan **integral dv**)

Setelah itu, kita masukkan nilai u , du , dv , dan v ke dalam rumus dasar integral parsial:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{dx}_{du}$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - (-\cos x) + C$$

Jadi, $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$

Lain halnya jika kita salah menentukan mana u dan dv .

Misal: $u = \cos x$ maka $du = -\sin x dx$

$dv = x dx$ maka $v = \frac{x^2}{2}$

Kita masukkan ke rumus dasar integral parsial

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \underbrace{(\cos x)}_u \underbrace{x dx}_{dv} = \underbrace{(\cos x)}_u \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v \underbrace{(-\sin x dx)}_{du}$$

Cara ini juga benar, tapi malah bisa dibilang mempersulit, karena $\int \frac{x^2}{2} (-\sin x dx)$ juga memerlukan penanganan khusus. Jadi, **pemilihan mana u dan dv yang tepat sangat penting dalam teknik integral parsial.**

Contoh 2: $\int x^5 \sqrt{x^3 + 6} dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^3$ maka $du = 3x^2 dx$ (**du** merupakan **differensial u**)

$dv = x^2 \sqrt{x^3 + 6}$ maka $v = \frac{2}{9}(x^3 + 6)^{\frac{3}{2}}$ (**v** merupakan **integral dv**)

*) untuk **dv** menjadi **v** , menggunakan ‘Teknik Integral Fungsi Aljabar Substitusi Aljabar’.

Setelah itu, kita masukkan nilai u , du , dv , dan v ke dalam rumus dasar integral parsial:

$$\begin{aligned}\int u dv &= uv - \int v du \\ \int x^3 (x^2 \sqrt{x^3 + 6}) &= x^3 \left(\frac{2}{9} (x^3 + 6)^{\frac{3}{2}} \right) - \int \left(\frac{2}{9} (x^3 + 6)^{\frac{3}{2}} \right) (3x^2 dx) \\ \int x^5 \sqrt{x^3 + 6} &= \frac{2}{9} x^3 (x^3 + 6)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} \int (x^3 + 6)^{\frac{3}{2}} (3x^2 dx)\end{aligned}$$

*) untuk menyelesaikan $\int (x^3 + 6)^{\frac{3}{2}} (3x^2 dx)$, menggunakan ‘Teknik Integral Fungsi Aljabar Substitusi Aljabar’.

$$\begin{aligned}\int x^5 \sqrt{x^3 + 6} &= \frac{2}{9} x^3 (x^3 + 6)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} \frac{2}{5} (x^3 + 6)^{\frac{5}{2}} + C \\ \int x^5 \sqrt{x^3 + 6} &= \frac{2}{9} x^3 (x^3 + 6)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{45} (x^3 + 6)^{\frac{5}{2}} + C\end{aligned}$$

Contoh 3: $\int_1^3 \ln x dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \ln x$ maka $du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$ (**du** merupakan **differensial u**)

$dv = dx$ maka $v = x$ (**v** merupakan **integral dv**)

Setelah itu, kita masukkan nilai u , du , dv , dan v ke dalam rumus dasar integral parsial:

$$\begin{aligned}\int u dv &= uv - \int v du \\ \int_1^3 \ln x dx &= [\ln x (x)]_1^3 - \int_1^3 x \left(\frac{1}{x}\right) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \ln x \, dx &= (3 \ln 3 - 1 \ln 1) - \int_1^3 (1) dx \\
 \int_1^3 \ln x \, dx &= (3 \ln 3 - 0) - [x]_1^3 \\
 \int_1^3 \ln x \, dx &= (3 \ln 3) - (3 - 1) \\
 \int_1^3 \ln x \, dx &= 3 \ln 3 - 2 \approx 1,296
 \end{aligned}$$

Contoh 4: $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \ln x$ maka $du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$ (**du** merupakan **differensial u**)

$dv = x^2 dx$ maka $v = \frac{1}{3} x^3$ (**v** merupakan **integral dv**)

Setelah itu, kita masukkan nilai u , du , dv , dan v ke dalam rumus dasar integral parsial:

$$\begin{aligned}
 \int u \, dv &= uv - \int v \, du \\
 \int_1^2 x^2 \ln x \, dx &= \left[\ln x \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} x^3 \left(\frac{1}{x} \right) dx \\
 \int_1^2 x^2 \ln x \, dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx \\
 \int_1^2 x^2 \ln x \, dx &= \left(\frac{1}{3} 2^3 \ln 2 - \frac{1}{3} 1^3 \ln 1 \right) - \left[\frac{1}{3} \frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 \\
 \int_1^2 x^2 \ln x \, dx &= \left(\frac{8}{3} \ln 2 - 0 \right) - \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_1^2 \\
 \int_1^2 x^2 \ln x \, dx &= \left(\frac{8}{3} \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{9} 2^3 - \frac{1}{9} 1^3 \right)
 \end{aligned}$$

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left(\frac{8}{3} \ln 2 \right) - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9} \right)$$

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left(\frac{8}{3} \ln 2 \right) - \left(\frac{7}{9} \right)$$

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} \approx 1,071$$

Contoh 5: $\int x^2 \sin x \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2$ maka $du = 2x \, dx$ (**du** merupakan **differensial u**)

$dv = \sin x \, dx$ maka $v = -\cos x$ (**v** merupakan **integral dv**)

Setelah itu, kita masukkan nilai u , du , dv , dan v ke dalam rumus dasar integral parsial:

$$\begin{aligned} \int u \, dv &= uv - \int v \, du \\ \int x^2 \sin x \, dx &= x^2(-\cos x) - \int -\cos x (2x \, dx) \\ \int x^2 \sin x \, dx &= x^2(-\cos x) + 2 \int x \cos x \, dx \end{aligned}$$

Ada kalanya dalam integral parsial tidak langsung ketemu jawabannya, tapi perlu melakukan integral parsial lagi.

$$\int x \cos x \, dx$$

Misalkan $u = x$ maka $du = dx$

$dv = \cos x \, dx$ maka $v = \sin x$

Sehingga $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ \int x \cos x \, dx &= x \sin x - (-\cos x) + C \end{aligned}$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= x^2(-\cos x) + 2 \int x \cos x \, dx \\ \int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C) \\ \int x^2 \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K\end{aligned}$$

Contoh 6: $\int e^x \sin x \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = e^x$ maka $du = e^x \, dx$ (**du** merupakan **differensial u**)
 $dv = \sin x \, dx$ maka $v = -\cos x$ (**v** merupakan **integral dv**)

Setelah itu, kita masukkan nilai u , du , dv , dan v ke dalam rumus dasar integral parsial:

$$\begin{aligned}\int u \, dv &= uv - \int v \, du \\ \int e^x \sin x \, dx &= e^x(-\cos x) - \int -\cos x (e^x \, dx) \\ \int e^x \sin x \, dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx\end{aligned}$$

Ada kalanya dalam integral parsial tidak langsung ketemu jawabannya, tapi perlu melakukan integral parsial lagi.

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Misalkan $u = e^x$ maka $du = e^x \, dx$
 $dv = \cos x \, dx$ maka $v = \sin x$

Sehingga $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \int \sin x (e^x \, dx) \\ \int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx\end{aligned}$$

Untuk kasus ini, didapat hasil $\int e^x \sin x \, dx$ dan jika ini diintegrasikan secara parsial lagi maka akan didapatkan hasil seperti sebelumnya dan begitu seterusnya. Jadi, kita perlu mensubstitusikannya, yaitu:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \, dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \\ \int e^x \sin x \, dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\ \int e^x \sin x \, dx + \int e^x \sin x \, dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x \\ 2 \int e^x \sin x \, dx &= e^x (\sin x - \cos x) + C \\ \int e^x \sin x \, dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C\end{aligned}$$

Contoh 7: $\int \sin^n x \, dx$

Penyelesaian:

Misalkan $u = \sin^{n-1} x$ maka $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx$
 $dv = \sin x \, dx$ maka $v = -\cos x$ (v merupakan **integral dv**)

Setelah itu, kita masukkan nilai u , du , dv , dan v ke dalam rumus dasar integral parsial:

$$\begin{aligned}\int u \, dv &= uv - \int v \, du \\ \int \sin^{n-1} x (\sin x \, dx) &= \sin^{n-1} x (-\cos x) - \int -\cos x \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \cos x \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx\end{aligned}$$

Karena $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, maka

$$\begin{aligned}\int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x - \sin^n x \, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx \\
\int \sin^n x \, dx + (n-1) \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx \\
\int \sin^n x \, dx + n \int \sin^n x \, dx - \int \sin^n x \, dx & \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx \\
n \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx \\
\int \sin^n x \, dx &= \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx
\end{aligned}$$

Jadi kita dapatkan rumus:

$$\boxed{\int \sin^n x \, dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx}$$

Rumus ini berlaku jika $n \geq 2$.

Contoh 8: $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx$

Penyelesaian:

Dengan cara yang relatif sama dengan contoh 7, kita peroleh bahwa

$$\int \sin^n x \, dx = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\text{Jadi, } \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \left[\frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} \right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \left(\frac{-\sin^{n-1} \pi/2 \cos \pi/2}{n} - \frac{-\sin^{n-1} 0 \cos 0}{n} \right) + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = (0) + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

Karena $n = 8$, maka

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = \frac{7}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx$$

Dengan cara yang sama, dengan $n = 6$ maka $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx = \frac{5}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$

Dengan cara yang sama, dengan $n = 4$ maka $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$

Dengan cara yang sama, $n = 2$ maka $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 \, dx$

*) Ingat, bilangan berapapun jika pangkat ‘nol’ maka hasilnya ‘satu’.

$$\text{Dan } \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Jadi,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = \frac{7}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{256} \pi$$

$$\text{Jadi, } \int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx = \frac{35}{256} \pi$$

C. Latihan Soal/Tugas

Selesaikan permasalahan integral berikut dengan menggunakan teknik integral parsial!

1. $\int x^3 \sqrt{4 - x^2} dx$
2. $\int x e^x dx$
3. $\int (x + 7) e^{(2x+3)} dx$
4. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
5. $\int_1^2 \ln 3x dx$
6. $\int_{\pi/2}^0 \sin^8 x dx$
7. $\int x \sin 2x dx$

D. Daftar Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). *Calculus (9th ed)*. Prentice-Hall.