Pertemuan 10

Fungsi rasional adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dimana f(x), g(x) adalah fungsi pangkat banyak (polinom) dan $g(x) \neq 0$.

Fungsi pangkat banyak adalah suatu fungsi yang dinyatakan dengan

 $f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$, n = 1, 2, 3, ..., sehingga fungsi rasional adalah fungsi berbentuk $\frac{f(x)}{g(x)}$ yang pembilang dan penyebutnya polinom.

Contoh

1.
$$F(x) = \frac{1-x}{x^2-3x+2}$$
 (Fungsi Rasional Sejati)

2.
$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$$
 (Fungsi Rasional Tidak Sejati)

3.
$$F(x) = \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x}$$
 (Fungsi Rasional Tidak Sejati)

Pada contoh di atas, (1) disebut fungsi rasional sejati, karena derajat pembilang lebih dari derajat penyebut, sedangkan (2) dan (3) disebut fungsi rasional tidak sejati, karena derajat pembilang lebih besar atau sama dengan derajat penyebut.

Untuk langkah selanjutnya jika suatu fungsi rasional termasuk jenis tidak sejati, maka fungsi tersebut dijadikan fungsi rasional sejati. Melalui proses pembagian panjang akan diperoleh fungsi rasional sejati. Sehingga:

$$\mathbf{F(x)} = \frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x}$$

$$= x^2 - 3 + \frac{(14x+1)}{x^3 + 5x}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0.$$

Dalam menentukan integral fungsi rasional, langkah yang ditempuh adalah:

- 1. Nyatakan integrannya dalam bentuk fungsi rasional sejati.
- 2. Faktorkan penyebut g(x) dari fungsi rasional F(x) = $\frac{f(x)}{g(x)}$ sampai tidak dapat difaktorkan lagi.
- 3. Dalam hal langkah nomor 2 di atas, g(x) dapat berupa kombinasi antara:
 - fungsi linear berbeda, g(x) = (x-a)(x-b)....(x-t) dstnya.
 - fungsi linear berulang, $g(x) = (x-a)^n$

$$= (x-a)(x-a)(x-a) \dots (x-a)$$

- fungsi liner dan kuadrat, $g(x) = (x-a)(ax^2 + bx + c)$
- fungsi kuadrat berbeda, $g(x) = (ax^2 + bx + c)(px^2 + qx + c)$
- fungsi kuadrat berulang, $g(x) = (ax^2 + bx + c)^n$ dan seterusnya.
- 4. Nyatakan integran menjadi bentuk penjumlahan n-pecahan parsial sehingga integran dapat ditentukan antiturunannya,

Misal :
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(ax_1 + b_1)} + \frac{A_2}{(ax_2 + b_2)} + \dots$$
 (Penyebut kombinasi liner berbeda)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots$$
 (kombinasi lenear berulang)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{A_2 x + B_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \dots$$
 (kombinasi kuadrat

berbeda)

5. Integralkan secara keseluruhan jumlah n-pecahan parsial tersebut yang merupakan hasil akhir pengintegralan dengan terlebih dahulu menentukan konstanta A_1 , A_2 , ... A_n dan B_1 , B_2 , ... B_n .

Contoh

1. Tentukan $\int \frac{2}{x^2-1} dx$

Karena intergran adalah fungsi rasional sejati, selanjutnya faktorkan integran:

$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} dx$$

$$= \int \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 1)} dx$$

$$= \int \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} dx$$

$$= \int \frac{(A + B)x + (A - B)}{(x - 1)(x + 1)} dx$$

Diperoleh A + B = 0, A - B = 2 atau A = 1, B = -1 sehingga:

$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{x - 1} + \frac{-1}{(x + 1)} dx$$
$$= \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{1}{x + 1} dx$$
$$= \ln |x - 1| - \ln|x + 1| + C$$
$$= \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$$

2. $\int \frac{x+1}{x-1} dx$, integran fungsi rasional tidak sejati, maka:

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = \int 1 + \frac{2}{x-1} dx$$

$$= \int dx + \int \frac{2}{x-1} dx$$
$$= x + \ln (x-1)^2 + C$$

Soal-soal

Tentukan hasil pengintegralan berikut:

1.
$$\int \frac{x+1}{(x^3+x^2-6x)} dx$$

Jawab

$$\int \frac{x+1}{(x^3+x^2-6x)} dx = \int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} dx$$

$$= \int \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+3)} dx$$

$$= \int \frac{A(x-2)(x+3) + B(x)(x+3) + C(x)(x-2)}{x^3+x^2-6x} dx$$

$$= \int \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A}{x^3 + x^2 - 6x} dx$$

Diperoleh A + B + C = 0

$$A + 3B - 2C = 1$$

$$-6A = 1$$

Atau A =
$$-\frac{1}{6}$$
, B = $\frac{3}{10}$, C = $-\frac{2}{15}$

Sehingga
$$\int \frac{x+1}{(x^3+x^2-6x)} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{(x-2)} - \frac{2}{15} \int \frac{dx}{(x+3)}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x - 2| - \frac{2}{15}\ln|x + 3| + C$$

2.
$$\int \frac{dx}{x^2 - 9}$$

3.
$$\int \frac{dx}{x^2 + 7x + 6}$$

4.
$$\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx$$

$$\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx = \int (1 + \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8}) dx, \text{ menurut teorema 2.2}$$

$$= \int 1 dx + \int \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8} dx$$

$$= \mathbf{x} + \mathbf{C}_1 + \int \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8} dx$$

$$\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} dx, \text{ menurut teorema 2.2}$$

$$= \int \frac{A(x+2) + B(x-4) dx}{x^2 - 2x - 8}$$

$$= \int \frac{(A+B)x + (2A-4B) dx}{x^2 - 2x - 8}$$

Diperoleh A+B = 5, 2A-4B=4 atau A = 4, B = 1

Sehingga
$$\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{4}{x-4} + \frac{1}{x+2} dx$$

= $4 \ln |x-4| + \ln |x+2| + c$
= $\ln (x-4)^4 + \ln |x+2| + c$

$$= \ln |(x-4)^4 (x+2)| + C$$

5.
$$\int \frac{xdx}{x^2 - 3x - 4}$$

6.
$$\int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

Contoh (Penyebut integran dalam faktor linear berulang)

1. $\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx$, karena integran adalah fungsi rasional sejati maka:

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{x+1}{(x-2)(x-2)} dx$$

$$= \int \frac{x+1}{(x-2)^2} dx$$

$$= \int \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} dx$$

$$= \int \frac{A(x-2) + B}{(x-2)^2} dx$$

$$= \int \frac{Ax + (B-2A)}{(x-2)^2} dx$$

Sehingga diperoleh

A = 1, B - 2A = 1 atau A = 1 dan B + 3, sehingga

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} dx$$
$$= \int \frac{dx}{(x-2)} + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx$$

=
$$\ln |x-2| - \frac{3}{(x-2)} + C$$

2.
$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 4} dx$$

Integran di atas bukan fungsi rasional sejati, maka diubah terlebih dahulu menjadi fungsi rasional sejati. Sehingga:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 4} dx = \int 1 + \frac{(-5x - 4)}{x^2 + 4x + 4} dx$$
$$= \int dx - \int \frac{5x + 4}{x^2 + 4x + 4} dx$$

Selanjuntnya
$$\int \frac{5x+4}{x^2+4x+4} dx = \int \frac{5x+4}{(x+2)^2} dx$$
$$= \int \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} dx$$
$$= \int \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} dx$$
$$= \int \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2} dx$$

Diperoleh A = 5, 2A + B = 4 atau A = 5, B = -6, sehingga:

$$\int \frac{5x+4}{(x+2)^2} dx = \int \frac{5}{(x+2)} - \int \frac{6}{(x+2)^2} dx$$

$$= 5 \ln |x+2| + \frac{6}{(x+2)} + C$$

3.
$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

Integran fungsi rasional sejati, sehingga:

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int \frac{(3x+5)dx}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \int \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} dx$$

$$= \int \frac{A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} dx$$

$$= \int \frac{(A+B)x^2 + (C-2A)x + (A-B+C)}{(x+1)(x-2)^2} dx$$

Diperoleh

A+B=0, C-2A=3, A-B+C=5 atau $A=\frac{1}{2}$, B=-1/2, C=4, sehingga

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-2)} + 4 \int \frac{dx}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-2| - \frac{4}{(x-2)} + C$$

4. $\int \frac{x^6 + 4x^3 + 4}{x^3 - 4x^2} dx$ (integran bukan fungsi rasional sejati)

Jawab:

$$\int \frac{x^6 + 4x^3 + 4}{x^3 - 4x^2} \, dx = \int x^3 + 4x^2 + 16x + 68 + \frac{272x^2 + 4}{x^3 - 4x^2} dx$$
$$= \int (x^3 + 4x^2 + 16x + 68) dx + \int \frac{272x^2 + 4}{x^3 - 4x^2} dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 68x + \int \frac{272x^2 + 4}{x^3 - 4x^2} dx$$

Selanjutnya dicari
$$\int \frac{272x^2 + 4}{x^3 - 4x^2} dx = \int \frac{272x^2 + 4}{(x+0)^2(x-4)} dx$$
$$= \int \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-4)} dx$$
$$= \int \frac{A(x-4) + B(x)(x-4) + C(x^2)}{x^3 - 4x^2} dx$$
$$= \int \frac{Ax - 4A + Bx^2 - 4Bx + Cx^2}{x^3 - 4x^2} dx$$

Sehingga didapat B+C = 272, A-4B = 0, -4A = 4

atau A = -1, B =
$$-\frac{1}{4}$$
, C = $\frac{1089}{4}$

Sehingga:

$$\int \frac{272x^2 + 4}{x^3 - 4x^2} dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 + 68x - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1089}{4}\ln|x - 4| + C$$

Soal-soal

Tentukan hasil dari:

1.
$$\int \frac{x+1}{(x-3)^2} dx$$

$$3. \int \frac{x^8}{(x-2)^2 (1-x)^5} dx$$

4.
$$\int \frac{x^2 + 19x + 10}{2x^4 + 5x^3} dx$$

5.
$$\int \frac{1-2x}{(x+2)(x+4)^2} dx$$

Selain dalam bentuk penyebut integran dinyatakan dalam faktor linear berbeda dan berulang, dapat juga difaktorkan dalam kombinasi linear dan kuadrat. Artinya penyebut dapat difaktorkan dalam bentuk kombinasi linear dengan kuadra atau kuadrat dengan kuadrat.

Selanjutnya integran dengan bentuk seperti ini dijadikan jumlah pecahan n parsial

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{Bx+C}{px^2+qx+r}, \text{ berdasarkan jumlah tersebut dapat ditentukan}$$
 A,B, dan C.

Contoh

1.
$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} dx$$

Karena integran fungsi rasional sejati maka

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx = \int \frac{A}{(4x+1)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)} dx$$
$$= \int \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(4x+1)}{(4x+1)(x^2+1)} dx$$
$$= \int \frac{(A+4B)x^2 + (B+4C)x + (A+C)}{(4x+1)(x^2+1)} dx$$

Diperoleh

A+4B=6, (B+4C)=-3, (A+C)=1 atau A=2, B=1, dan C=-1 sehingga:

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx = \int \frac{2}{(4x+1)} + \frac{x-1}{(x^2+1)} dx$$
$$= \int \frac{2}{(4x+1)} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx$$
$$= \frac{2}{4} \ln|4x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - arctgx + C$$

$$2. \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

Integran merupakan fungsi rasional sejati, sehingga

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx$$

$$= \int \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} dx$$

$$= \int \frac{(Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx$$

$$= \int \frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + (2B + D)}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx$$

Diperoleh

A+C=1, B+D=1, 2A+C=1, 2B+D=2 atau A=0, B=1, C=1, D=0 sehingga:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 2} dx$$
$$= \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{x}{x^2 + 2} dx$$

= arctg x +
$$\frac{1}{2}$$
ln $|x^2 + 1| + C$

3.
$$\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x+3)(x-2)(x^2+1)} dx$$

Jawab: Penyebut adalah kombinasi linear berbeda (x+3) dan (x-2) dengan kuadrat (x^2+1), sehingga

$$\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x+3)(x-2)(x^2+1)} dx = \int \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} dx$$

$$= \int \frac{A(x-2)(x^2+1) + B(x+3)(x^2+1) + (Cx+D)(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)(x^2+1)} dx$$

$$= \int \frac{(A+B+C)x^3 + (-2A+3B+C+D)x^2 + (A+B+D-6C)x + (-2A+3B-6D)}{(x+3)(x-2)(x^2+1)} dx$$

Maka diperoleh

A + B + C = 1, -2A+3B+C+D = -8, A+B+D-6C = 0, -2A+3B-6D = -1 atau

A = 2, B = -1, C = 0, D = -1

$$A = \frac{B}{A} + \frac{Cx+D}{Ax} = \frac{2}{Ax} + \frac{-1}{Ax} + \frac{-1}{Ax} = \frac{-1}{Ax}$$

$$\int \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} dx = \int \frac{2}{(x+3)} + \frac{-1}{(x-2)} + \frac{-1}{(x^2+1)} dx$$

$$= 2 \ln(x+3) - \ln(x-2) - \arctan x + C$$

$$= \ln(x+3)^2 - \ln(x-2) - \arctan x + C$$

$$= \ln\left|\frac{(x+3)^2}{(x-2)}\right| - \arctan x + C$$

Jadi
$$\int \frac{x^3 - 8x^2 - 1}{(x+3)(x-2)(x^2+1)} dx = \ln \left| \frac{(x+3)^2}{(x-2)} \right| - \arctan x + C$$

Soal-soal

Tentukan hasil pengintegralan berikut ini:

1.
$$\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx$$

Jawab

$$\int \frac{2x^2 + x - 8}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{2x^2 + x - 8}{x(x^2 + 4)} dx$$

$$= \int (\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}) dx$$

$$= \int \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)x}{x^3 + 4x} dx$$

$$= \int \frac{(A + B)x^2 + Cx + 4A}{x^3 + 4x}$$

Didapat A+B = 2, C = 1, 4A = -8 atau A = -2, B = 4, dan C = 1

$$\int (\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}) dx = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{4x + 1}{x^2 + 4} dx$$

$$= \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{4x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$= \ln |x^{-2}| + 2\ln|x^2 + 4| + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2}\right) + C$$

2.
$$\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)} dx$$

Jawab:

$$\int \frac{x^3 - 4x}{(x^2 + 1)} dx = \int (x - \frac{5x}{x^2 + 1}) dx$$

$$= \int x dx - \int \frac{5x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 - 5 \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 - \ln (\mathbf{x}^2 + 1)^{5/2} + \mathbf{C}$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 - \ln \sqrt{(x^2 + 1)^5} + \mathbf{C}$$

$$3. \int \frac{2x^3 + 5x^2 + 16x}{x^5 + 8x^3 + 16} dx$$

4.
$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$
 (fungsi rasional sejati)

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)} dx$$

$$= \int \frac{px + q}{x^2 + 1} + \frac{rx + s}{x^2 + 2} dx$$

$$= \int \frac{(px + q)(x^2 + 2) + (rx + s)(x^2 + 1)}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$= \int \frac{(p + r)x^3 + (q + s)x^2 + (2p + r)x + (2q + s)}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

Didapat

$$p + r = 1$$
, $q + s = 1$, $2p + r = 1$, $dan 2q + s = 2$
 $atau p = 0$, $q = 1$, $r = 1$, $s = 0$

sehingga
$$\int \frac{px+q}{x^2+1} + \frac{rx+s}{x^2+2} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \frac{xdx}{x^2+2}$$

= $\arctan x + \frac{1}{2} \ln (x^2+2) + C$
= $\arctan x + \ln \sqrt{x^2+2} + C$

5.
$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{px + q}{x^2 + 1} + \frac{rx + s}{(x^2 + 1)^2} dx$$
$$= \int \frac{(px + q)(x^2 + 1) + (rx + s)}{(x^2 + 1)^2} dx$$
$$= \int \frac{px^3 + qx^2 + (p + r)x + (q + s)}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Diperoleh

$$p = 1$$
, $q = 0$, $p+r = 1$, dan $q+s = -1$

atau
$$p = 1$$
, $q = 0$, $r = 0$, dan $s = -1$

sehingga

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$
$$= \ln \sqrt{x^2 + 1} - \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}}{2(x^2 + 1)} + C$$

6.
$$\int \frac{x^3 + x^2 - 5x + 15}{(x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3)} dx$$

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 5x + 15}{(x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3)} dx = \int \frac{Ax + B}{x^2 + 5} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} dx$$
$$= \int \frac{(Ax + B)(x^2 + 2x + 3) + (Cx + D)(x^2 + 5)}{(x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3)} dx$$

Catatan: diteruskan sendiri