PERTEMUAN 10

KOMBINATORIKA DAN TEOREMA BAYES

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa diharapkan mampu memahami pengertian kombinatorika dan penggunaannya serta penggunaan teorema Bayes dalam beberapa kasus

B. Uraian Materi

10.1 Kombinatorika

Kombinatorika yaitu bidang matematika yang membahas pengaturan objek-objek. Tujuan dari kombinatorika antara lain mengetahui banyaknya cara pengaturan objek-objek yang dimaksud pada suatu himpunan. Hal ini dapat memmantu memudahkan perhitungan titik sampel pada sebauh kejadian atau ruang sampel. Kombinatorika didasarkan pada perolehan hasil pada sebuah percobaan. Kombinatorika banyak digunakan pada berbagai kasus perhitungan peluang sebuah kejadian tanpa harus mendaftar atau menguraikan seluruh titik sampel yang termuat didalam suatu ruang sampel. Yang perlu anda lakukan yaitu mengatahui jumlah titik sampel dimana setiap titik sampel memiliki peluang untuk muncul yang tidak berbeda atau sama. Jika demikian maka peluang dari suatu kejadian A bisa dihitung seperti berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Rumus di atas dapat dijelaskan bahwa $n(A)$ merupakan jumlah titik sampel yang termasuk titik A. Sedangkan $n(S)$ yaitu jumlah titik sampel dalam ruang sampel.Sementara untuk $S\, n(S)$ dinamakan ukuran ruang sampel.

Contoh-contoh percobaan kombinatorika:

1. Pelemparan mata dadu
2. Pelemparan mata uang koin Rp 500,-
3. Pemilihan struktur organsisasi mahasiswa
4. Penyusunan banyaknya kata dengan 5 huruf.

Permasalahan terkait kombinatorika:

Kasus1:

Gambar 10.1 Uang koin

Jika mata uang koin seimbang, dapat diketahui bahwa peluang munculnya mata uang tersebut adalah $\frac{1}{2}$. Hal ini dikarenakan pada mata uang koin hanya terdapat dua hasil yang mungkin pada masing-masing kegiatan pelemparan mata uang koin tersebut. Hal ini berarti masing-maisng peluangnya sama untuk setiap sisi mata uang. Jika pelemparan dilakukan berulang-ualng maka nilai selisihnya akan semakin kecil.

10.1.1 Dasar-dasar Perhitungan Kombinatorika

1) Aturan Penjumlahan

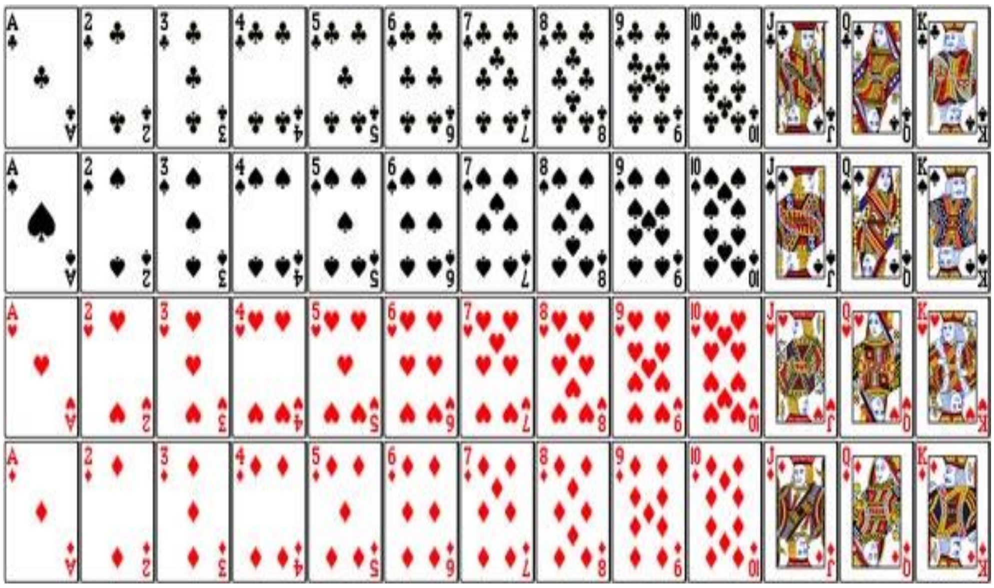
Dimisalkan A adalah gabungan dari himpunan-himpunan tak kosong dan saling asing.

Bila himpunan A terbagi ke dalam himpunan bagian $A_1, A_2, \dots, A_n$. Maka banyaknya anggota pada himpunan A akan sama dengan banyaknya anggota semua himpunan bagian $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Misalkan, percobaan 1 = *n* hasil dan percobaan 2 = *m* hasil. Dengan demikian, percobaan 1 atau percobaan 2:*n* + *m* hasil.

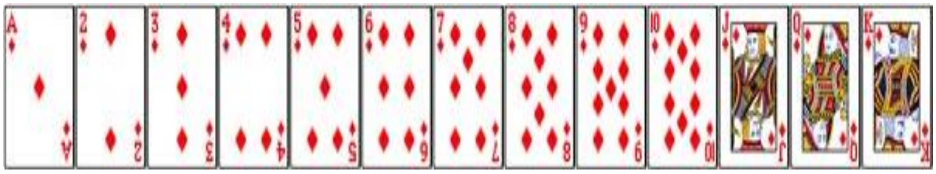
Contoh 1 :

Pada seperangkat kartu bridge, ada berapa banyak cara mengambil:

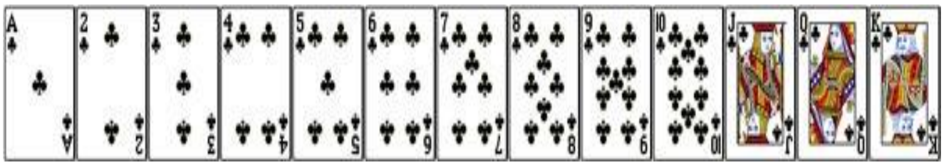


Gambar 10.2 Seperengkat kartu *Bridge*

a) Satu kartu bergambar wajik atau keriting
Penyelesaian:



Gambar 10.3 Kartu Wajik

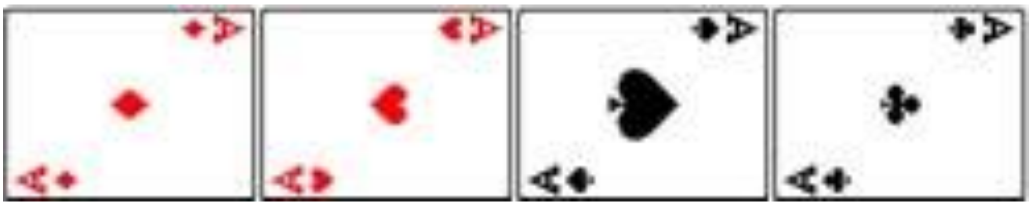


Gambar 10.4 Kartu Keriting

Kartu dengan gambar wajik dan keriting adalah himpunan yang saling asing sehingga untuk memperoleh salah satu dari mereka yaitu banyaknya (jumlah) cara pada setiap bagian (wajik dan keriting). Cara memperoleh satu kartu wajik yaitu 13 begitupula kartu dengan gambar keriting ada 13 cara pual untuk memperolehnya. **Dengan demikian untuk memperoleh satu kartu bergambar wajik atau keriting ada 26 cara yaitu 13+13.**

b) Satu kartu bergambar Queen atau As
Penyelesaian :

Gambar 10.5 Kartu Queen



Gambar 10.6 Kartu As

Sama seperti pada poin a) dimana banyaknya cara untuk memperoleh kartu dengan gambar Queen ada 4 cara. **Sedangkan** banyaknya kartu As pada seperangkat kartu bridge ada 4 buah.. **Jadi banyaknya cara untuk memperoleh satu kartu Queen atau As yaitu 4+4 = 8 cara.**

Contoh 2 : Dilakukan pelemparan 2 mata dadu denagn warna yang berbeda (putih dan hitam). Berapakah banayknya cara untuk mendapatkan jumlah angka 5 atau 3?

Gambar 10.7 Mata dadu putih

Gambar 10.8 Mata dadu hitam

Penyelesaian :
Bentuk anggota (putih, hitam)

Tabel 10.1. Pelemparan dua mata dadu berbeda

Mata dadu putih	**Mata dadu hitam**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Banyaknya cara untuk mendapat jumlah mata dadu 3 yaitu 2 cara
Banyaknya cara untuk mendapat jumlah mata dadu 5 yaitu 4 cara
Dengan demikian untuk mendapat jumlah mata dadu 3 atau 5 adalah 2+4 = 6 cara

Contoh 3 : Dilakuakn pelemparan dua mata dadu dengan warna yang sama. Berapakah banyaknya cara untuk memperoleh jumlah angka 3 atau 5.

Penyelesaian :
Dikarenakan mata dadu memiliki warna yang sama maka anggota (1,2) dengan (2,1) dihitung satu anggota.
Hal yang sama juga berlaku untuk (2,3) dengan (3,2) dan (1,4) dengan (4,1).
Dengan demikian banyaknya cara untuk memperoleh jumlah angka 3 atau 5 pada pelemparan mata dadu dengan warna yang sama ada 3 cara.

Contoh 4: Pada kongres pemilihan himpunan mahasiswa akan ditentukan terlebih dahulu ketua umum (boleh pria ataupun wanita). Banyaknya anggota kongres pria sebanyak 30 orang dan anggota wanita adalah 12 orang. Ada berapakah cara untuk memilih ketua umum himpunan mahasiswa?

Penyelesaian:

30 + 12 = 42 cara.

Contoh 5: Seorang mahasiswa ingin membeli sebuah leptop. Mahasiswa tersebut dihadapkan pada pilihan tiga merk laptop denagn rincian sebagai berikut Asus 4 pilihan, Lenovo 4 pilihan, dan Dell 3 pilihan.

Dengan demikian, mahasiswa tersebut mempunyai mempunyai pilihan sebanyak 4 + 5 + 3 = 11 pilihan.

2) Aturan Perkalian

Jika dilaksanakan percobaan 1 dan percobaan 2, maka menghasilkan *n* x *m* hasil kejadian (dengan kata lain *n* x *m* kemungkinan jawaban).

Misalkan: percobaan 1: *n* hasil dan percobaan 2: *m* hasil. Maka, percobaan 1 dan percobaan 2: *n x m* hasil.

Contoh 1:

Jumlah mahasiswa penggiat klub *science* adalah 31 orang sedangkan jumlah mahasiswinya hanya 5 orang. Untuk memilih wakil seorang mahasiswa dan juga seorang mahasiswi. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tersebut?

Penyelesaian:

31 x 5 = 155 cara.

Contoh 2:

Apabila 2 buah dadu dengan warna yang berbeda dilemparkan ada berapa banyak cara angka yang muncul ?

bagaimana jika 3 dadu yang dilemparkan?

bagaimna jika n dadu yang dilemparkan ?

Gambar 10.9 Dua buah dadu sama warna

Penyelesaian:
Banyaknya angka yang mucul pada pelemparan dua buah dadu: $6 \times 6 = 6^2 = 36$ cara.
Banyaknya angka yang mucul pada pelemparan 5 buah dadu: $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5$

10.2 Teorema Bayes

Apabila munculnya kejadian X memberikan pengaruh terhadap kemunculan kejadian Y ataupun sebaliknya. Dapat dikatakan bahwa kejadian X dan kejadian Y merupakan kejadian bersyarat. Dengan demikian dapat dituliskan seperti di bawah ini:

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

Apabila kejadian X dan kejadian Y merupakan dua kejadian yang saling lepas maka $X \cap B = \emptyset$. Dengan demikian $P(X|Y) = 0$.

Adapaun contoh adanya kejadian bersyarat akan dijabarkan sebagai berikut:

Diketahui hasil identifikasi jenis dan warna kulit kulit , dengan data sebagai berikut:

Tabel 10.2 Identifikasi jenis dan warna kulit

Jenis Kulit	Warna		Jumlah
	Kuning langsat (KL)	Sawo matang (SM)	
Normal (N)	4	2	**6**
Kering (K)	1	4	**5**
Berminyak (M)	3	2	**5**
Jumlah	**8**	**8**	**16**

a) Berdasarkan data di atas, berapakah peluang diperoleh jenis kulit normal dengan syarat warna kuning langsat?
b) Berdasarkan data di atas, berapakah peluang diperoleh jenis kulit normal dengan warna syarat sawo matang?

c) Berdasarkan data di atas, berapakah peluang diperoleh jenis kulit kering dengan warna syarat kuning langsat?
d) Berdasarkan data di atas, berapakah peluang diperoleh jenis kulit kering dengan warna syarat sawo matang?
e) Berdasarkan data di atas, berapakah peluang diperoleh jenis kulit berminyak dengan syarat warna kuning langsat?
f) Berdasarkan data di atas, berapakah peluang diperoleh jenis kulit berminyak dengan syarat warna sawo matang?

Penyelesaian:

a) $P(N|KL) = \frac{P(N \cap KL)}{P(KL)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

b) $P(N|SW) = \frac{P(N \cap SW)}{P(SW)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

c) $P(K|KL) = \frac{P(N \cap KL)}{P(KL)} = \frac{1}{16}$

d) $P(K|SW) = \frac{P(K \cap SW)}{P(SW)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

e) $P(M|KL) = \frac{P(M \cap KL)}{P(KL)} = \frac{3}{16}$

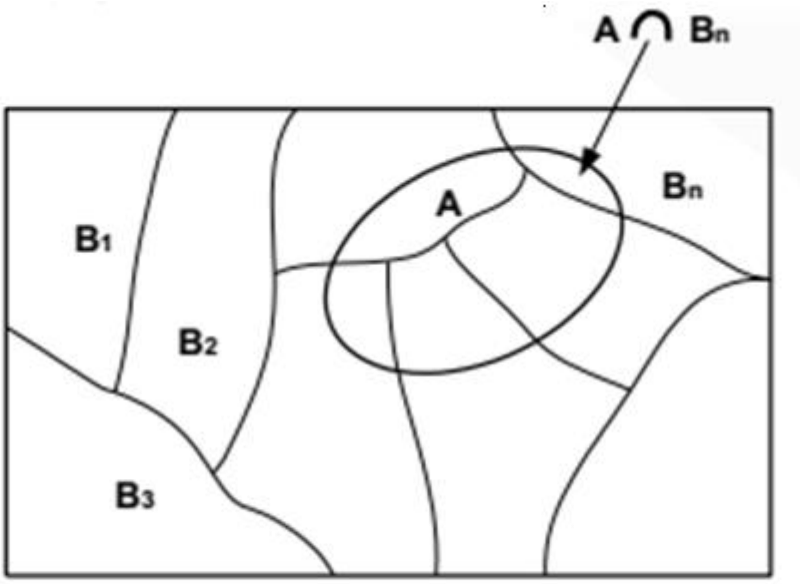
f) $P(M|SW) = \frac{P(M \cap SW)}{P(SW)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

Aplikasi dari Teorema Bayes antara lain untuk menghitung peluang terjadinya sebuah peristiwa didasarkan pada pengaruh yang diperoleh atas hasil kejadian yang telah diamati sebelumnya. Seperti pada umumnya, suatu teori muncul untuk menyempurnakan kekurangan atau kelemahan atas teori yang sebelumnya. Khususnya pada teori Bayes dikemukakan dengan tujuan menyempurnakan teori peluang bersyarat. Pada teori peluang bersyarat hanya dibatasi pada 2 peristiwa atau kejadian, sedangkan pada teori Bayes dapat diperluas sebanyak n peristiwa atau kejadian.

Pada statistiak inferensia banyak menggunakan teori Bayes dalam menyelesaikan berbagai persoalan. Nama Teori Bayes sendiri diambil dari pencetusnyan yaitu Reverend Thomas Bayes (1702-1761).

Gambar 10.10 Reverend Thomas Bayes (1702-1761)

Pada disiplin ilmu komputer banyak memanfaatkan teori Bayes. Salah satu penerapan teori Bayes dalam bidang *smart computer* sebagai salah satu dasar pada metode *machine learning* dan *data mining*.



Gambar 10.11 Diagram Venn Teori Bayes

Konsep di atas dipakai ketika menghitung peluang $P(B_1|A), P(B_2|A), \dots, P(B_n|A)$

Sebagai contoh:

Terdapat kejadian $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$. Kejadian tersebut merupakan sebuah bagian dari ruang sampel **S** dimana $P(B_n) \neq 0$ dengan $n = 1, 2, \dots, m$.

A merupakan sebauh kejadian sembarang dalam **S** dengan $P(A) \neq 0$

Maka peluang terjadinya kejadian A dapat dituliskan seperti di bawah ini:

$P(A) = \sum_{n=1}^{m} P(B_n \cap A) = \sum_{n=1}^{m} P(B_n)\, P(A|B_n)$ ….. (*i*)

Merujuk pada teri peluang bersyarat dimana peluang bersyarat suatu kejadian atau peristiwa A dengan syarat kejadian atau peristiwa B dirumuskan seperti di bawah ini:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, dimana $P(B) > 0$ ….. (*ii*)

atau

$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, dimana $P(A) > 0$ ….. (*iii*)

Diketahui menurut teori himpunan,

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$ ….. (*iv*)

Dengan demikian berdasarkan rumusan dari teori peluang bersyarat dan teori himpunan diperoleh konsep rumusan teori Bayes:

$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)\,P(A)$ ….. (*v*)

Sehingga

$P(A|B)P(B) = P(B|A)\,P(A)$ ….. (*vi*)

Dan

$\boldsymbol{P(B|A)} = \frac{\boldsymbol{P(A|B)P(B)}}{\boldsymbol{P(A)}}$ ….. (*vi*)

Keterkaitan antara peluang A dengan peluang kejadian bersyarat yang telah tertulis pada persamaan (*i*) sebagai berikut:

$$P(A) = \sum_{n}^{m} P(A|B_n)\,P(B_n)$$

Maka peluang sebuah peristiwa atau kejadian yang terbatas pada syarat *n* buah peristiwa atau kejadian akan diperoleh dari penjabaran rumus berikut:

$P(B_n|A) = \frac{P(A \cap B_n)}{\boldsymbol{P(A)}} = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum_{n=1}^{m} P(B_n)\,P(A|B_n)}; n = 1,2,\ldots,m$

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)\,P(A|B_n)}$$

Jadi secara umum, rumus dari teori Bayes dapat dituliskan seperti di bawah:

$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{\boldsymbol{P(B|A)P(A)}}{\boldsymbol{P(B)}}$

Keterangan:

- $\boldsymbol{P(A|B)}$ **: Peluang Posterior**

Peluang posterior yaitu perkiraan peluang munculnya satu peristiwa atau kejadian yang didasarkan pada informasi dari peristiwa atau kejadian yang lain.

- $\boldsymbol{P(B|A)}$ **: Pelunag Likelihood**

Peluang likelihood yaitu peluang yang menunjukkan derajat kemungkinan pengaruh sebuah informasi peristiwa atau kejadian terhadap peristiwa atau kejadian yang lain.

- $\boldsymbol{P(A)}$ **: Peluang Prior**

Peluang prior yaitu peluang kemunculan sebuah peristiwa atau kejadian yang telah dipercaya sebelumnya. Kemungkinan kejadian atau peristiwa ini dipengaruhi oleh kejadian yang lain.

- $\boldsymbol{P(B)}$ **: Peluang Evidence**

Peluang evidence yaitu suatu indiaktor pembanding tetap berdasarkan pada peluang sebauh informasi peristiwa atau kejadian.

Contoh:

Suatu laboratorium komputer memerlukan koneksi internet yang memadai supaya seluruh kegiatan pembelajaran yang menggunakan laboratorium komputer terjaga terhadap adanya ketiadaan aliran paket data internet. Dalam hal ini ada 2 sumber *internet service provider (isp)* yang dipakai, yakni *isp A* dan *isp B* (sebagai cadangan). Jika koneksi internet *isp A* terhenti maka *isp B* akan secara otomatis aktif dan menyalurkan aliran data pada semua PC yang tersedia. Selama ini persoalan yang menjadikan ketidaknyamanan praktikan adalah *instability* koneksi internet pada kedua layanan data internet (*internet service provider/ isp).* Beberapa waktu belakangan ini, diperoleh data bahwa peluang padamnya koneksi internet hanya 0,2. Dengan demikian diketahui bahwa peluang penggunaan *isp A* adalah 0,8 serta peluang penggunaan *isp B* adalah 0,2. Terjadinya *instability* (ketidakstabilan) koneksi *isp A* dan *isp B* masing-masing memiliki peluang 0,3 dan 0,4.

a) Berapa peluang terjadinya *instability* koneksi internet pada kedua *isp*?
b) Jika pada sebuah kondisi diketahui bahwa ada *instability* koneksi internet, maka berapa besar nilai peluang pada kondisi tersebut koneksi inetrnet berasal dari *isp B*?

   Penyelesaian:

   a) peluang terjadinya *instability* koneksi internet

      Sebelumnya lakukan pemisalan seperti berikut:

      A : peristiwa atau kejadian *instability* koneksi internet
      B_1 : peristiwa atau kejadian penggunaan *isp A*
      B_1 : peristiwa atau kejadian penggunaan *isp B*

      Dari soal diperoleh bahwa:

      $P(B_1) = 0{,}8$

      $P(B_2) = 0{,}2$

      $P(A|B_1) = 0{,}3$
      $P(A|B_2) = 0{,}4$

      Sehingga:

      $\boldsymbol{P(A)} = P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$
      $= (0{,}8).(0{,}3) + (0{,}2).(0{,}4)$
      $= 0{,}24 + 0{,}08$

$= 0{,}32$

b) peluang *instability* koneksi inetrnet apabila koneksi inetrnet berasal dari *isp B*

Sebelumnya lakukan pemisalan seperti berikut:

A : peristiwa atau kejadian *instability* koneksi internet

B_1 : peristiwa atau kejadian penggunaan *isp A*

B_1 : peristiwa atau kejadian penggunaan *isp B*

Dari soal diperoleh bahwa:

$P(B_1) = 0{,}8$

$P(B_2) = 0{,}2$

$P(A|B_1) = 0{,}3$

$P(A|B_2) = 0{,}4$

Ingat kembali rumus pelaung bersyarat, sehingga didapatkan seperti berikut:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_n \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_2).P(A|B_2)}{P(A)}$$

$$= \frac{(0{,}2).(0{,}4)}{(0{,}32)}$$

$$= \frac{0{,}08}{(0{,}32)}$$

$$= 0{,}25$$

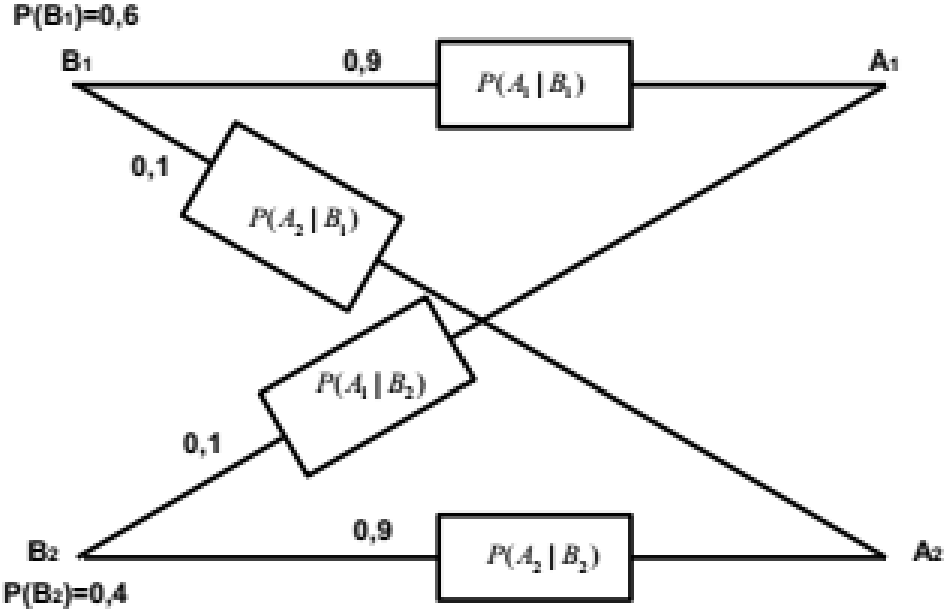
C. Latihan Soal/ Tugas

1. Jelaskan cara menghitung peluang bersyarat jika terdapat 2 atau lebih kondisi yang saling terkait ?

2. Tentukan banyak cara pengaturan supaya 3 orang mahasiswa Program studi Teknik Informatika (TI), 4 orang mahasiswa Program studi Teknik Kimia (TK), 4 orang mahasiswa Program studi Teknik Elektro (TE), dan 2 orang mahasiswa Program studi Teknik Mesin (TM) bisa menempati kursi satu baris supaya mahasiswa yang berasal dari Fakultas yang sama duduk berdampingan?

3. Suatu perangkat keras memiliki *password* yang terdiri dari 6 sampai 8 karakter. Masing-masing karakter dapat terdiri dari huruf maupun angka; baik huruf kapital maupun huruf kecil tidak dibedakan. Dengan kondisi tersebut, ada berapakah *password* yang mungkin terbentuk ?

4. Diketahui diagram sistem komuniaksi *binary symmetric* seperti di bawah ini:



a) Dengan menggunakan teorema Bayes, hitunglah peluang sinyal dengan syarat yang dikirimkan **benar** pada sisi penerima A_1 dan A_2
b) Dengan menggunakan teorema Bayes, hitunglah peluang sinyal dengan syarat yang dikirimkan **salah** pada sisi penerima A_1 dan A_2

D. Referensi

Kadir. 2015. Statistika Terapan Edisi Ke-2. Raja Grafindo Persada: Depok.

Spiegel, Murray R. & Stephens, Larry J. 2007. Statistik Edisi Ke-3. Erlangga: Jakarta.

Sudjana, M.A. 2005. Metode Statistika. Tarsito: Bandung.

Walpole, Ronald E. 1995. Pengantar Statistik Edisi Ke-4. PT. Gramedia: Jakarta.