

## PERTEMUAN 4

### SISTEM PERTIDAKSAMAAN

#### A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasai materi Sistem Pertidaksamaan dalam matematika dan kegunaannya.

#### B. URAIAN MATERI

##### 1. Pertidaksamaan

Dalam sebuah persamaan matematika dikenal perubah atau variabel (*variable*) adalah lambang (simbol) yang digunakan untuk menyatakan sembarang anggota suatu himpunan. Sebagai contoh jika suatu himpunan berupa bilangan  $R$  maka variabel tersebut dinamakan *perubah real*. Pada Pertidaksamaan (inequality) merupakan dalah pernyataan matematika yang menggunakan satu perubah atau lebih dengan memakai tanda tanda ketidaksamaan ( $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ).

##### Contoh 1:

a.  $2x - 7 \leq x + 1$

b.  $\frac{2x-1}{x+3} > 1$

c.  $x^2 + y^2 \leq 9$

d.  $x^2 - x - 12 < 0$

Untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan maka dilakukan operasi pada bilangan real yang dapat dicapai oleh perubah-perubah yang ada dalam pertidaksamaan tersebut, sehingga pertidaksamaan tersebut menjadi benar.

Penyelesaian pertidaksamaan akan menghasilkan bentuk dalam himpunan yang sma yaitu dalam bilangan riil, dimana penyelesaian tersebut harus memenuhi sifat sifat dan hukum dalam bilangan riil.

**Contoh 2.**

Carilah penyelesaian pertidaksamaan berikut

$$2x - 5 < 5x + 7.$$

**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} 2x - 5 &< 5x + 7 \\ \Leftrightarrow 2x - 5 - 5x + 5 &< 5x + 7 - 5x + 5 \\ \Leftrightarrow -3x &< 12 \\ \Leftrightarrow -3x \cdot (-1/3) &> 12 \cdot (-1/3) \\ \Leftrightarrow x &> -4 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian pertidaksamaan di atas adalah  $\{x \in R \mid x > -4\}$ .

Berikut diberikan contoh penyelesaian pertidaksamaan dalam fungsi kuadrat dan lainnya, seperti diberikan sebagai berikut.

**Contoh 3.**

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan:  $x^2 - 5x + 6 > 0$ .

**Penyelesaian:**

Dengan memfaktorkan ruas kiri pertidaksamaan, maka diperoleh:

$$(x - 2)(x - 3) > 0$$

Telah diketahui bahwa hasil kali 2 bilangan real positif apabila ke dua faktor positif atau ke dua faktor negatif. Oleh karena itu,

a. Jika ke dua faktor positif maka:

$$\begin{aligned} x - 2 &> 0 \text{ dan } x - 3 > 0 \\ x &> 2 \text{ dan } x > 3 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:  $x > 3$ .

b. Jika ke dua faktor negatif, maka:

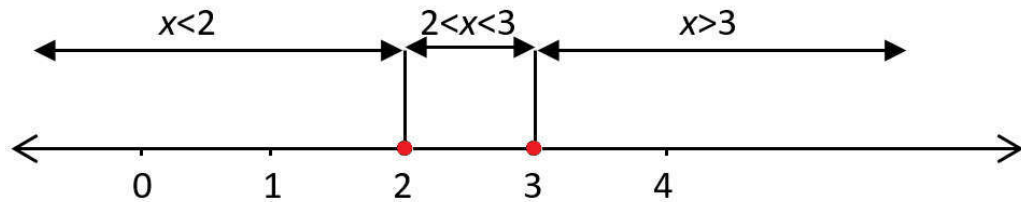
$$\begin{aligned} x - 2 &< 0 \text{ dan } x - 3 < 0 \\ \Leftrightarrow x &< 2 \text{ dan } x < 3 \end{aligned}$$

Diperoleh:  $x < 2$ .

Sehinga, penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah

$$\{x \in R \mid x < 2 \text{ atau } x > 3\}$$

Penyelesaian pertidaksamaan di atas dapat pula diterangkan sebagai berikut: ruas kiri pertidaksamaan bernilai nol jika  $x = 2$  atau  $x = 3$ . Selanjutnya, ke dua bilangan ini membagi garis bilangan menjadi 3 bagian:  $x < 2$ ,  $2 < x < 3$ , dan  $x > 3$  seperti diperlihatkan pada Gambar 4.1



Gambar 4. 1. Garis bilangan penyelesaian pertidaksamaan

Kemudian ujilah bilangan yang terletak pada daerah tersebut dan masukkan pada soal  $x^2 - 5x + 6$

Misal keduanya positif. Pada rentang  $2 < x < 3$ ,  $(x - 2)$  bernilai positif sedangkan  $(x - 3)$  bernilai negatif. Sehingga ketika dikalikan keduanya bernilai negatif. Terakhir, pada bagian  $x > 3$ ,  $(x - 2)$  dan  $(x - 3)$  masing-masing bernilai positif sehingga hasil kali keduanya juga positif. Penjelasan penyelesaian di atas dapat dilihat pada Tabel 1 di bawah ini.

Tabel 4.1. Penyelesaian pertidaksamaan

	$x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
Hasil	-	+	-

Daerah yang bernilai positif adalah pada  $2 < x < 3$

Sehingga penyelesaian pertidaksamaan adalah  $\{x \in R | x < 2 \text{ atau } x > 3\}$

Berikut ini adalah contoh penyelesaian soal soal pertidaksamaan

#### Contoh 4

Tentukan penyelesaian  $x^3 - 2x^2 - x + 1 \leq -1$ .

**Penyelesaian:** Apabila ke dua ruas pada pertidaksamaan di atas ditambah 1, maka diperoleh:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2) \leq 0$$

Jika  $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$ , maka diperoleh:  $x = -1$ ,  $x = 1$ , atau  $x = 2$ .

Selanjutnya, perhatikan table berikut:

Tabel 4.2. Penyelesaian pertidaksamaan

	Tanda nilai/nilai				Kesimpulan
	$x+1$	$x-1$	$x-2$	$(x+1)(x-1)(x-2)$	
$x < -1$	-	-	-	-	Pertidaksamaan
$-1 < x < 1$	+	-	-	+	dipenuhi.
$1 < x < 2$	+	+	-	-	tidak dipenuhi.
$x > 2$	+	+	+	+	dipenuhi.
$x = -1$	0	-2	-3	0	tidak dipenuhi.
$x = 1$	2	0	-1	0	dipenuhi.
$x = 2$	3	1	0	0	dipenuhi.

Jadi, penyelesaian adalah  $\{x \in R \mid x \leq -1 \text{ atau } 1 \leq x \leq 2\}$ .

### Contoh 5

Selesaikan  $\frac{2x+6}{x-2} \leq x+1$ .

**Penyelesaian:** Apabila pada ke dua ruas ditambahkan  $-(x+1)$  maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{2x+8}{x-2} - (x+1) &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+8-x^2+x+2}{x-2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10}{x-2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+2)}{x-2} \geq 0 \end{aligned}$$

Nilai nol pembilang adalah  $-2$  dan  $5$ , sedangkan nilai nol penyebut adalah  $2$ .

Sekarang, untuk mendapatkan nilai  $x$  sehingga  $\frac{(x-5)(x+2)}{x-2} \geq 0$  diperhatikan

tabel berikut:

Tabel 4.3. Penyelesaian pertidaksamaan

	Tanda nilai/nilai				Kesimpulan
	$x+2$	$x-2$	$x-5$	$\frac{(x+2)(x-5)}{x-2}$	
$x < -2$	-	-	-	-	tidak dipenuhi.
$-2 < x < 2$	+	-	-	+	dipenuhi.
$2 < x < 5$	+	+	-	-	tidak dipenuhi.
$x > 5$	+	+	+	+	dipenuhi.
$x = -2$	0	-4	-7	0	dipenuhi.
$x = 2$	4	0	-3	Tak terdefinisi	tidak dipenuhi.
$x = 5$	7	3	0	0	Pertidaksamaan dipenuhi.

Jadi, penyelesaian adalah  $\{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 2 \text{ atau } x \geq 5\}$ .

### C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Selesaikan soal- berikut :

- $2x - 4 > 0$
- $5 > 4x - 1$
- $2x + 6 \leq x + 1$
- $3x - 4 \geq NIMx + 1$  ; dengan NIM adalah angka terakhir nomor induk
- $x^2 - 7x + 12 \leq 0$
- $2x^2 + 11x + 3 \leq -2$
- $x^3 - 2x^2 - x + 1 \leq -1$ .
- $3(x - 2) \geq x + 1$
- $x^2 - 7x + 12 > 0$
- $\frac{2x+6}{x-2} \leq x+1$ .

#### **D. DAFTAR PUSTAKA**

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer