

## Pertemuan 4:

### Teknik Pengintegralan Substitusi

#### (Teknik Integral Fungsi Aljabar Substitusi Aljabar)

#### A. Tujuan Pembelajaran

Mahasiswa mampu memahami dan menggunakan materi dasar turunan dalam memecahkan permasalahan integral tak tentu dan integral tentu fungsi aljabar menggunakan metode substitusi aljabar.

#### B. Uraian Materi

Suatu fungsi bisa diintegrasikan ketika fungsi tersebut sudah dalam keadaan baku. Nah, bagaimana jika fungsinya belum dalam keadaan baku? Ada dua cara penyelesaiannya.

1. Metode Substitusi
2. Metode Integral bagian demi bagian (Parsial).

Penggunaan metode substitusi merupakan mensubstitusi hasil diferensial atau turunan fungsi yang ada sehingga diperoleh rumus dasar integralnya. Jadi, dalam menyelesaikan permasalahan integral dengan menggunakan metode ini, kita perlu mampu memahami dan menggunakan materi dasar turunan.

Sekilas mengingat tentang turunan rumus dasar turunan:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(y)^a = a \cdot (y)^{a-1} \cdot \frac{dy}{dx}} \text{ atau } \boxed{\frac{d}{dx}(x)^a = a \cdot (x)^{a-1}} \text{ dengan } a: \text{konstanta}$$

**Contoh:**  $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$

## Teknik Integral Substitusi

Teknik pengintegralan dengan metode substitusi yakni dengan mengubah variabel dalam integral (misal variabel  $x$ ) pada fungsi dengan variabel lain yang melibatkan sistem turunan yang saling berhubungan. Ada 5 jenis teknik integral substitusi ini, yaitu: (1) Integral fungsi trigonometri substitusi aljabar; (2) Integral fungsi aljabar substitusi aljabar; (3) Integral fungsi eksponensial substitusi aljabar; (4) Integral fungsi trigonometri substitusi trigonometri; (5) Integral fungsi aljabar substitusi trigonometri.

### Teknik Integral Fungsi Aljabar Substitusi Aljabar

Teknik pengintegralan ini digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan integral fungsi aljabar yang dirasa sulit bila diselesaikan secara langsung (misal  $\int [f(x)]^a f'(x) dx$ ), dengan cara menyederhanakannya ke dalam bentuk  $\int x^a dx$ , sehingga dapat diselesaikan sesuai rumus berikut:

$$\int x^a dx = \begin{cases} \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C ; \text{jika } a \neq -1 \\ \ln|x| + C ; \text{jika } a = -1 \end{cases}$$

\*) Catatan: tidak semua bentuk integral fungsi aljabar dapat diselesaikan dengan cara ini.

**Contoh 1:** Tentukan integral dari  $\int 3x(x^2 + 5)^6 dx$

Kita lihat bahwa ada dua komponen variabel  $x$  yaitu  $3x$  (variabel  $x$  berpangkat 1) dan  $x^2$  (variabel  $x$  berpangkat 2). Pangkat berurutan seperti inilah yang dapat diselesaikan dengan metode substitusi ini. Setelah itu, gunakan pemisalan untuk variabel  $x$  yang memiliki pangkat paling tinggi, lalu turunkan, kemudian substitusi ke dalam soal dan selesaikan. Untuk lebih jelasnya, lihat penjelasan berikut!

### Penyelesaian:

Menyederhanakan  $\int 3x(x^2 + 5)^6 dx$

Misal:  $a = x^2 + 5$ , maka  $\frac{da}{dx} = 2x$  sehingga  $dx = \frac{da}{2x}$

Setelah itu, substitusi  $a$  dan  $dx$  hasil pemisalan tersebut ke dalam  $\int 3x(x^2 + 5)^6 dx$  (soal), sehingga:

$$\begin{aligned}\int 3x(x^2 + 5)^6 dx &= \int 3x(a)^6 \left(\frac{da}{2x}\right) \\&= \int 3(a)^6 \left(\frac{da}{2}\right) \\&= \frac{3}{2} \int (a)^6 da \\&= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{6+1} a^{6+1}\right) + C \\&= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{7} a^7\right) + C \\&= \frac{3}{14} a^7 + C\end{aligned}$$

Kemudian substitusi  $a$  kembali

$$= \frac{3}{14} (x^2 + 5)^7 + C$$

$$\text{Jadi } \int 3x(x^2 + 5)^6 dx = \frac{3}{14} (x^2 + 5)^7 + C$$

**Contoh 2:** Tentukan integral dari  $\int (5x + 17)^{999} dx$

**Penyelesaian:**

Menyederhanakan  $\int (5x + 17)^{999} dx$

Misal:  $a = 5x + 17$ , maka  $\frac{da}{dx} = 5$ , sehingga  $dx = \frac{da}{5}$

Setelah itu, substitusi  $a$  dan  $dx$  hasil pemisalan tersebut ke dalam  $\int (5x + 17)^{999} dx$  (soal), sehingga:

$$\begin{aligned}(5x + 17)^{999} dx &= \int (a)^{999} \frac{da}{5} \\&= \frac{1}{5} \int (a)^{999} da \\&= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{999+1} a^{999+1}\right) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{5} \left( \frac{1}{1000} a^{1000} \right) + C \\
 &= \frac{1}{5000} a^{1000} + C
 \end{aligned}$$

Kemudian substitusi  $a$  kembali

$$= \frac{1}{5000} (5x + 17)^{1000} + C$$

$$\text{Jadi } \int (5x + 17)^{999} dx = \frac{1}{5000} (5x + 17)^{1000} + C$$

**Contoh 3:** Tentukan integral dari  $\int_0^1 3x(x^2 + 5)^6 dx$

**Penyelesaian:**

Menyederhanakan  $\int_0^1 3x(x^2 + 5)^6 dx$

Misal:  $a = x^2 + 5$ , maka  $\frac{da}{dx} = 2x$ , sehingga  $dx = \frac{da}{2x}$

Setelah itu, substitusi  $a$  dan  $dx$  hasil pemisalan tersebut ke dalam  $\int_0^1 3x(x^2 + 5)^6 dx$  (soal), sehingga:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 3x(x^2 + 5)^6 dx &= \int_0^1 3x(a)^6 \left( \frac{da}{2x} \right) \\
 &= \int_0^1 3(a)^6 \left( \frac{da}{2} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 (a)^6 da \\
 &= \left[ \frac{3}{14} (x^2 + 5)^7 \right]_0^1 \\
 &= \left\{ \frac{3}{14} (1^2 + 5)^7 \right\} - \left\{ \frac{3}{14} (0^2 + 5)^7 \right\} \\
 &= \frac{3}{14} (6)^7 - \frac{3}{14} (5)^7 \\
 &= \frac{3}{14} (6^7 - 5^7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{14}(279936 - 78125) \\ &= \frac{3}{14}(201811) \approx 43245,214 \end{aligned}$$

Jadi  $\int_0^1 3x(x^2 + 5)^6 dx \approx 43245,214$

### C. Latihan Soal/Tugas

Selesaikan permasalahan integral berikut!

1.  $\int 3x(x^2 + \sqrt[3]{5^2})^6 dx$
2.  $\int_0^1 3x(x^2 + \sqrt[3]{5^2})^6 dx$
3.  $\int 3x(x^2 + \sqrt[3]{5^2})^{-1} dx$
4.  $\int_1^0 3x(x^2 + \sqrt[3]{5^2})^{-1} dx$

### D. Daftar Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2007). *Calculus (9<sup>th</sup> ed)*. Prentice-Hall.