PERTEMUAN 3
KOMBINASI LINIER, BASIS DAN DIMENSI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan pertemuan ini Mahasiswa mampu memahami tentang konsep vektor.

B. Uraian Materi

1. Kombinasi Linier

Kombinasi linier adalah suatu kondisi dimana vektor – vektor yang diberikan pada soal harus memenuhi syarat a = K_1u + K_1v. Dimana K_1, K_2, … adalah skalar. Kombinasi linier dapat diselesaikan dengan menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer). Dimana hasil dari OBE tersebut apabila memiliki solusi maka dapat dikatakan memiliki kombinasi linier sedangkan jika hasil OBE tidak memiliki solusi maka tidak dapat dikatakan kombinasi linier.

Misal:

a. Misalkan vektor u = (2, 4, 0) dan vektor v = (1, -1, 3). Apakah vektor tersebut kombinasi linier dengan vektor a = (4, 2, 6)

Jawab:

AX = B

Dimana A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, X = $\begin{bmatrix} K1 \\ K2 \end{bmatrix}$, dan B = $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

Maka $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K1 \\ K2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

$= \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$

Langkah pertama adalah membuat segitiga atas dan segitiga bawah lalu menentukan diagonalnya. Diagonal dari A = $[2 \ \ -1]$ setelah itu menge-nolkan dari A, dimana

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$, b_2 - $2b_1$ Maka $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 4-(2x2) & -1-(2x1) & 2-(4x2) \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4-4 & -1-2 & 2-8 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

langkah selanjutnya adalah membuat nol baris satu kolom dua.

Dimana : $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$, $3b_1$ + b_2 = $\left[\begin{array}{cc|c} (3x2)+0 & (3x1)-3 & (3x4)-6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 6+0 & 3-3 & 12-6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Langkah selanjutnya adalah membuat nol baris 3 sedangkan untuk syarat diagonal OBE harus bernilai satu maka nilai diagonal tidak dibut kedalam nol.

Maka $\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$, b_3 + b_2 = $\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3+(-3) & 6+(-6) \end{array}\right]$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3-3 & 6-6 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

sehingga dari hasil yang diperoleh dapat disimpulan bahwa soal diatas memiliki solusi karena pada baris ketiga bernilai nol. Sehingga disebut solusi banyak tak hingga. Apabila pada baris ketiga memiliki satu nilai maka dikatakan bahwa matriks tersebut tidak memiliki solusi.

Karena matriks tersebut memiliki solusi, maka dapat dibuat kedalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $6k_1$ + 0 = 6 (persamaan 1)

0 - $3k_2$ = -6 (persamaan 2)

Dari persamaan 1 diperoleh

$6k_1$ = 6

k_1 = $\frac{6}{6}$

k_1 = 1

Dari persamaan 2 diperoleh

-3k_2 = -6

k_2 = $\frac{-6}{-3}$

k_2 = 2

Setelah kita menemukan nilai K1 dan K2, maka nilai yang sudah diperoleh dimasukan kedalam kondisi vektor dimana:

$\vec{a}$ = $k_1\vec{u}$+$k_2\vec{v}$

$\vec{a}$ = 1$\vec{u}$ + 2 $\vec{v}$

maka dapat dikatakan bahwa vektor tersebut sebagai kombinasi linier.

b. Misalkan:

$\vec{a}$ = (3,2,1,-3), $\vec{b}$ = (4,2,1,-2), $\vec{c}$ = (2,1,3,-1), $\vec{d}$ =(19,11,8,-14). Apakah $\vec{d}$ merupakan kombinasi dari $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{c}$.

Jawab:

$\vec{d}$ = $k_1\vec{a}$ + $k_2\vec{b}$ + $k_3\vec{c}$

$$\begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 8 \\ -14 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + K_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh 4 persamaan sebagai berikut:

1. $3k_1$ + $4k_2$ + $2k_3$ = 19
2. $2k_1$ + $2k_2$ + k_3 = 11
3. k_1 + k_2 + $3k_3$ = 8
4. $-3k_1$ - $2k_2$ - k_3 = -14

Maka dari persamaan diatas kita melakukan eliminasi terlebih dahulu. Eliminasi persamaan 2 dan 3 yaitu:

$2k_1$ + $2k_2$ + k_3 = 11 | x1

k_1 + k_2 + $3k_3$ = 8 | x2

$2k_1$ + $2k_2$ + k_3 = 11

$2k_1$ + $2k_2$ + $6k_3$ = 16 -

$-5k_3$ = -5

k_3 = -5/-5

k_3 = 1

Selanjutnya adalah persamaan 1 dan 4 yaitu:

$3k_1$ + $4k_2$ + $2k_3$ = 19

$-3k_1$ - $2k_2$ - k_3 = -14 +

$2k_2$ + k_3 = 5 ……..persamaan 5

Selanjutnya substitusikan hasil k_3 ke persamaan 5 yaitu:

$2k_2$ + k_3 = 5

$2k_2$ + 1 = 5

$2k_2$ = 5 – 1

$2k_2$ = 4

k_2 = 4/2

k_2 = 2

Selanjutnya substitusikan hasil k_3 dan k_2 ke persamaan 3, dimana:

k_1 + k_2 + $3k_3$ = 8

k_1 + 2+ 3.1 = 8

k_1 + 2 + 3 = 8

k_1 = 8 – 5

k_1 = 3

Setelah k_1, k_2 dan k_3 diperoleh, maka periksa apakah nilai yang didapat memenuhi ke empat persamaan.

Persamaan 1 : $3k_1$ + $4k_2$ + $2k_3$ = 19

3.3 + 4.2 + 2.1 = 19

9 + 8 + 2 = 19

19 = 19 (memenuhi)

Persamaan 2 : $2k_1$ + $2k_2$ + k_3 = 11

2.3 + 2.2 + 1 = 11

6 + 4 + 1 = 11

11 = 11 (memenuhi)

Persamaan 3 : k_1 + k_2 + $3k_3$ = 8

3 + 2 + 3.1 = 8

5 + 3 = 8

8 = 8 (memenuhi)

Persamaan 4 : $-3k_1$ -2k_2 - k_3 = -14

-3.3 – 2.2 – 1 = -14

-9 – 4 – 1 = -14

- 14 = -14 (memenuhi)

Berdasarkan hasil yang sudah diperoleh, maka dapat disimpulkan bahwa $\vec{d}$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{a}$, $\vec{b}$ dan $\vec{c}$

2. Basis dan Dimensi

Sebuah ruang vektor A dapat dikatakan mempunyai dimensi terhingga sebanyak n (maka ditulis dim A = n). Jika ada vektor – vektor seperti e_1, e_2 € A yang bebas linier, maka himpunan {e_1, e_2 …. e_n } disebut suatu basis dari A dan banyaknya maksimum suatu vektor disebut sebagai n.

Misal:

1) Diketahui vektor A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a) Semua vektor basis dan vektor kolom dari A
b) Basis dan dimensi dari ruang baris A
c) Baris dan dimensi dari ruas kolom A

Jawab:

a) Vektor baris dari A adalah:

$\overrightarrow{v1}$ = (1, 2, 3)

$\overrightarrow{v2}$ = (-2, 1, 0)

$\overrightarrow{v3}$ = (3, 1, 1)

$\overrightarrow{v4}$ = (5, 0, -1)

Vektor kolom dari A adalah:

$\overrightarrow{w1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{w2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{w3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Basis dan dimensi dari ruang baris A

Menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer)

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

baris 2 = 2b1 + b2

baris 3 = -3b1 + b3

baris 4 = -5b1 + b4

Maka A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ (2x1)-2 & (2x2)+1 & (2x3)+0 \\ (-3x1)+3 & (-3x2)+1 & (-3x3)+1 \\ (-5x1)+5 & (-5x2)+0 & (-5x3)-1 \end{bmatrix}$

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2-2 & 4+1 & 6+0 \\ -3+3 & -6+1 & -9+1 \\ -5+5 & -10+0 & -15-1 \end{bmatrix}$

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -10 & -16 \end{bmatrix}$

setelah itu kita harus mengubaj nilai diagonal menjadi 1. Yaitu b2 = 1/5b2.

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -10 & -16 \end{bmatrix}$, b2 = 1/5 b2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{5x5} & \frac{1}{5}x6 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -10 & -16 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -10 & -16 \end{bmatrix}$

setelah itu kita harus mengubah b3 dan b4 menjadi nol. Sehingga:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & -10 & -16 \end{bmatrix}$ b3 = 5b2 + b3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & (5x1)-5 & \left(\frac{5x6}{5}\right)-8 \\ 0 & -10 & -16 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & -16 \end{bmatrix}$ dan merubah b4 menjadi o

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -10 & -16 \end{bmatrix}$ b4 = 10b2 + b3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & (10x1)-10 & 12-16 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ lalu kita mengubah nilai baris 3 yaitu -2 menjadi 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ b3 = -1/2 x b3 } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}x - 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

nilai yang bernilai 1 merupakan suatu diagonal dan dimensi adalah 3. Maka r_1= {1, 2, 3) , r_2 = { 0, 1, 6/5} dan r_3 = {0, 0, 1} disebut sebagai U. Dimana bilangan utama 1 ada pada semua baris matriks U sehingga basis dari ruang baris adalah S = {$\overrightarrow{v1}$, $\overrightarrow{v2}$, $\overrightarrow{v1}$} dan S = {r1, r2, r3}

c) Basis dan dimensi dari ruang kolom A

Cari terlebih dahulu transpose dari matriks A lalu gunakan kembali OBE (Operasi baris elementer)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dimana $A^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ulangi proses b dengan mengubah nilai pada baris menjadi 0 dan diagonal menjadi 1.

Maka: $A^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b2 = -2b1 + b2 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2+2 & 4+1 & -6+1 & -10-0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

lalu mengubah baris 3 menjadi 0

B3 = -3b1+b3 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 6 & -8 & -16 \end{bmatrix}$

Lalu mengubah b2 menjadi 1, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 6 & -8 & -16 \end{bmatrix}$$

b2 = 1/5 b2 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & \frac{1}{5x5} & \frac{1}{5x}-5 & \frac{1}{5x}-10 \\ 0 & 6 & -8 & -16 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -8 & -16 \end{bmatrix}$

Setelah mengubah baris 2 maka kita juga harus mengubah baris 3 menjadi 0, dimana:

A^T = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -8 & -16 \end{bmatrix}$

b3 = -6 b2 + b3 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

Lalu mengubah baris 3 menjadi 1 sehingga mendapatkan diagonalnya.

A^T = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ b3 = -1/2 b3 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Setelah kita merubah nilai pada baris menjadi 0 dan sudah mendapatkan nilai diagonal bernilai 1 maka kita memasukkan nilai yg sudah didapat ke transpose matriks A tanpa merubah nilai diagonalnya.

Maka A^T = A^T $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

C1 = {1, 2, 3}

C2 = { -2, 1,0}

C3 = { 3, 1, 1}

Bilangan utama 1 terletak pada kolom 1, 2 dan 3. Maka basis dari ruang kolom adalah S ={ $\overrightarrow{w1}$, $\overrightarrow{w2}$, $\overrightarrow{w3}$} dan { c1, c2, c3}.

2) Diketahui X = $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, U = $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, V = $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Tentukan apakah U merupakan kombinasi linier dari X?

Jawab:

X = K_1U + K_2V

$$\begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix} = K_1\begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix} + K_2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

Maka:

$2K_1$ + K_2 = 4 ….. Persamaan 1

$4K_1$ - K_2 = 2 ….. Persamaan 2

$3K_2$ = 6

K_2 = $\frac{6}{3}$ = 2

jadi K_2 = 2

maka kita cari K_1 dengan menggunakan persamaan 1, yaitu:

$2K_1$ + K_2 = 4

$2K_1$ + 2 = 4

$2K_1$ = 4 – 2

$2K_1$ = 2

K_1 = $\frac{2}{2}$

K_1 = 1

Sehingga : $\begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2+2\\4-2\\0+6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix}$$

maka U dan V merupakan kombinasi linier dari X karena hasil yang diperoleh sama yaitu $\begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix}$

3) Diketahui U = $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, V = $\begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix}$, W = $\begin{bmatrix}3\\3\\-8\end{bmatrix}$Apakah S bebas linier jika S = {U, V, W} di R^3?

Jawab:

K_1U + K_2V + K_3W = 0

$K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + K_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} = 0$

K_1 +2K_2 + 3K_3 = 0

2K_1 +5K_2 + 3K_3 = 0

K_1 + 0 - 8K_3 = 0

Maka: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

lalu cari determinannya. Jika determinan bernilai nol, maka tidak bisa dikatakan bebas linier. Tetapi kalau nilainya tidak nol maka dapat dikatakan bebas linier. Disini kita menggunakan metode sarrus.

Sehingga:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

= (1 x 5 x -8) + (2 x 3 x 1) + (3 x 2 x 0) – (1 x 5 x 3) – (0 x 3 x 1) – (-8 x 2 x 2)

= - 40 + 6 + 0 – 15 – 0 + 32

= - 17

C. Soal Latihan/Tugas

1. Tentukanlah basis dan dimensi dari ruang vektor yang dibentuk oleh:
   a. A = [2, 3, 6], B = [5, 7, 2], C = [7, 10, 8]
   b. P = [3, 2, 7, 11] dan Q = [2, 5, 8, 9]

2. Apakah himpunan – himpunan vektor ini merupakan basis dari R^3
   a. [1, 1, 1], [1, -2, 3]
   b. [1, 0, 0] , [1, 1, 0], [1, 1, 1]
   c. [1, 1, 2], [1, 2, 5], [5, 3, 4]

3. Tulis p sebagai kombinasi linier dari {a, b, c} dimana p = [8, 10, 12], a = [1, 2, 3], b = [3, 2, 1] dan c = [3, 4, 5]

4. Apakah v_1 = $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, v_2 = $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, v_3 = $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, s = $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ merupakan sebuah basis untuk R^3

5. Apakah v_1 = $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$, v_2 = $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, v_3 = $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$, s = $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ merupakan sebuah basis untuk R^3

D. Daftar Pustaka

Anton, Howard. (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Version (10th ed)*. John Wiley & Sons. Inc, New Your, NY.

Atmadja, J., Bandung, I. T., & Bandung, J. G. (2016). Penerapan Aljabar Lanjar pada Grafis Komputer, 1–9.

Kusumawati, Ririen (2006). *Diktat Aljabar Liniear dan Matriks*. Malang: Jurusan Teknik Informatika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Lay, David C. (2000). *Linear Algebra and Its Aplication (2nd ed)*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass.