PERTEMUAN 5

ALGORITMA PEMBUATAN KURVA

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah menyelesaikan materi pada pertemuan ini, mahasiswa mampu menerapkan algoritma pembautan.

Pada pertemuan ini akan dijelaskan mengenai :

1. Kurva
2. Algoritma Bezier

B. URAIAN MATERI

1. Kurva

Dalam matematika sebuah kurva adalah suatu objek geometri yang merupakan satu dimensi dan kontinyu.banyak kurva khusus telah dipelajari dalam geometri.

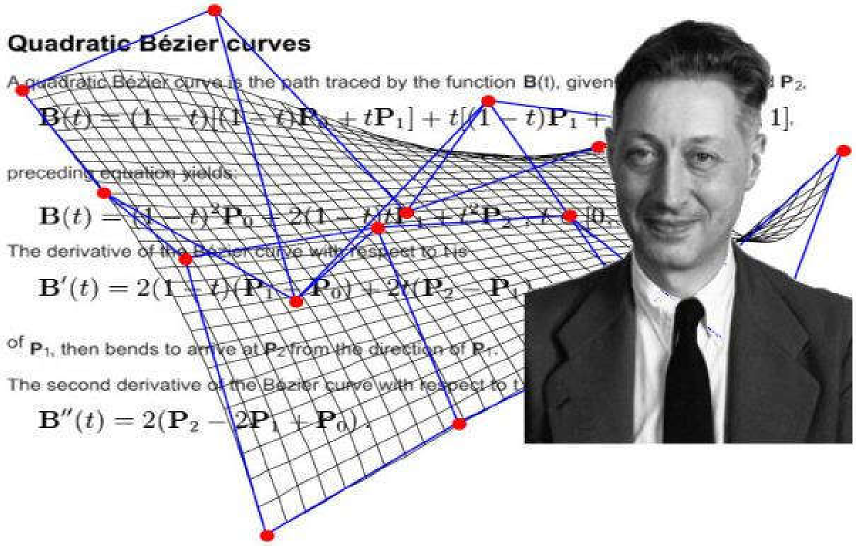
Geometri sering dikenal dengan istilah kurva (*curve*) dan permukaan (*surface*). Kurva merupakan suatu titik yang dibentuk dengan garis sehingga membentuk suatu lengkungan. Jenis-jenis kurva antara lain :

a. **Kurva linier** yaitu kurva yang dibentuk dari suatu garis antara 2 buah titik yang saling berhubungan.
b. **Kurva kubik** yaitu kurva yang memiliki persamaan ax3+bx2+cx+d di mana a,b,c,d adalah konstanta
c. **Kurva Bezier** yaitu kurva yang proses pembentukannya dari kurva linier,kurva kubik,kuadarat, Permukaan (surface) merupakan struktur matematis yang terbentuk atas himpunan kurva.

Kali ini kita akan mempelajari bagaimana membuat kurva menggunakan algoritma Bezier. Algoritma membuat kurva bezier diusulkan oleh seorang ahli mesin dari perancis yang bekerja di perusahaan Renault dan digunakan untuk merancang badan mobil.

2. Algoritma Bezier

Pembuatan kurva yang hendak dibahas dengan memakai algoritma yang diusulkan oleh Bezier.



Gambar 5. 1 Bezier

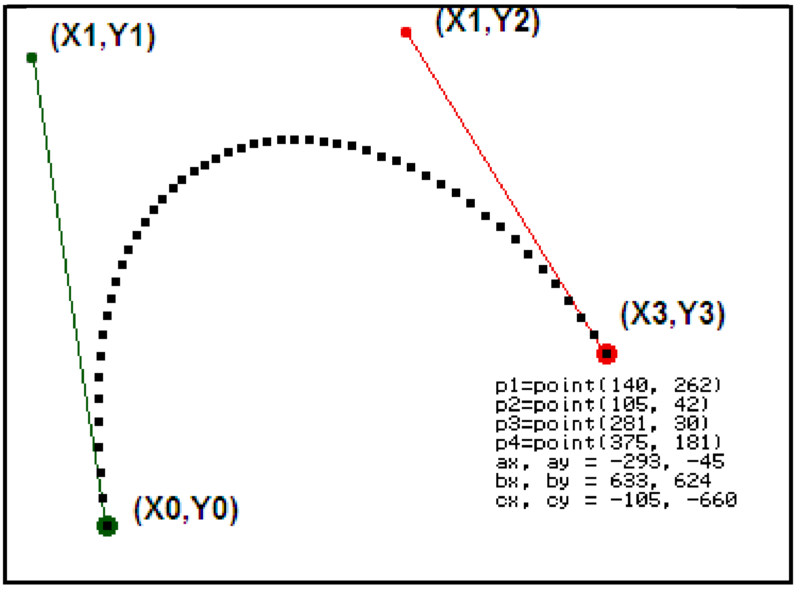
Pierre Bezier seorang ahli mesin perancis yang bekerja diperusahaan renult. Bezier lahir pada bersamaan pada 1 September 1910 dan meninggal pada tgl 25 Novmber 1999. Bezier memperoleh gelar dalam bidang mekanikal dari Ecole Nationale Superieure d' Seni et Metiers tahun 1930. Gelar kedua dibidang elektro pada tahun 1931 di Ecole Superieure d' Electricite, dan doktor pada tahun 1977 bidang matematik dari Universitas Paris. Ia bekerja buat renult dari 1933- 1975, di mana dia tingkatkan UNISURF USD CAM sistem. Dari tahun 1958- 1979 dia profesor penciptaan di tata cara konservatori nasional et des seni metiers. Pada tahun 1985 ia telah diakui oleh ACM SIGGRAPH dengan Steven A Coons atas kontribusi buat komputer grafis dan tata cara interaktif. Penafsiran Kurva Bezier.

a. Pengertian Kurva Bezier

Kurva Bezier diterapkan di bidang grafika computer buat menghasilkan kurva yang halus pada berbagai skala. Kurva Bezier diberinama sesuai dengan penemunya yakni Dokter. Pierre Bezier.

Dokter. Pierre Bezier merupakan seseorang engineer pada industri mobil Renault, persamaan Bezier sendiri dibesarkan pada tahun 1960- an serta digunakan buat desain body mobil.

Kurva Bezier awal adalah fungsi parametric yang terdiri dari 4 titik, titik awal, titik akhir dan 2 (dua) buah titik control.



Gambar 5. 2 Fungsi kurva Bezier dengan 4 titik

Keterangan :

(x_0,y_0) adalah titik awal .

(x_3,y_3) adalah titik akhir.

Titik (x_1,y_1) dan (x_2,y_2) adalah titik kontrol

Bentuk umum dari Persamaan Bezier adalah fungsi yang menggambarkan tiap titik pada kurva sebagai fungsi waktu.

1) Persamaan Kurva Bezier

Persamaan kurva Bezier disusun berdasarkan persamaan polinomial Bernstein berikut :

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

Gambar 5. 3 Persamaan Polinomial Bernstein

Pada kurva Bezier t dibatasi pada interval 0..1. Persamaan sebuah kurva Bezier dengan n titik control {P_1, P_2, P_3…P_n} adalah sebagai berikut :

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i \cdot (1-t)^{n-i} \cdot P_i$$

Gambar 5. 4 Persamaan kurva Bezier dengan n titik control

Kurva Bezier dimulai pada titik P_0 dan berakhir di titik P_n , tetapi belum tentu melewati titik-titik kontrolnya.

Untuk menggambarkan titik-titik pada kurva Bezier maka dilakukan perhitungan titik dari P0 sampai dengan Pn dengan t dari 0 sampai dengan 1, dengan Δt yang bervariasi, contoh untuk Δt = 0,1 maka jumlah titik yang harus digambarkan dapat dilihat pada tabel berikut :

Table 5. 1 Tabel titik kurva Bezier untuk Δt=0.1

T	(x,y)
0	Titik pertama
0.1	Titik kedua
0.2	Titik ketiga
0.3	Titik keempat

T	(x,y)
0.4	Titik kelima
0.5	Titik keenam
0.6	Titik ketujuh
0.7	Titik kedelapan
0.8	Titik kesembilan
0.9	Titik kesepuluh
1	Titik kesebelas

Jika Δt = 0,01, maka titik yang harus digambarkan sebanyak 101, dari t mulai 0, 0.01, 0.02, dst sampai t =1, semakin kecil Δt maka akan semakin banyak titik yang harus dihitung dan akan semakin halus kurva Bezier yang dihasilkan.

Pertanyaan :

Berapa jumlah titik yang harus digambarkan jika $\Delta t = n$

Jawab :

Jumlah titik yang harus digambarkan adalah : $1/n + 1$ (dibulatkan)

Perhitungan koordinat titik (x,y) dapat dihitung menggunakan persamaan pada gambar 5.4, selain dengan cara tersebut dapat dibantu menggunakan segitiga pascal seperti terlihat pada contoh.

Contoh 1:

Diketahui 3 buah titik kontrol dengan koordinat C1(1,2), C2(7,10), C3(15,4) , dengan menggunakan Δt =0.02 maka tentukanlah:

a) Berapa titik yang digunakan untuk membangun kurva bezier?
b) Berapa nilai titik pada kurva pada saat t=0.8?

Jawab :

a) Dengan kenaikan sebanyak 0.02 maka jumlah titik yang diperlukan antara 0 dan 1 adalah

$$\frac{1}{t}+1=\frac{1}{0.02}+1=51$$

b) Sebenarnya titik yang harus digambar adalah 51 titik, tetapi untuk soal ini yang dicari hanya koordinat titik pada saat t = 0.8

Table 5. 2 Tabel titik kurva Bezier untuk $\Delta t=0.01$

T	(x,y)
0	
0.02	
0.04	
0.06	
..	
..	
0.8	
..	
..	
1	

Bisa dicari dengan memasukkan pada persamaan pada gambar atau atau bisa dengan perhitungan berikut.

Karena terdiri dari 3 titik kontrol maka persamaan menjadi : $(x+y)^{3-1}$ =

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0$ Ganti x = (1-t) dan y = t Maka persamaan tersebut menjadi :

$L(t) = (1-t)^2 + 2(1-t)t + t^2$

Koordinat titik untuk t = 0.8

<u>Sumbu x</u>

$X(0,8) = (1-t)^2.X_1 + 2(1-t)t.X_2 + t^2.X_3$

Keterangan :

X_1,X_2 dan X_3 diambil dari titik control yaitu 1, 7 dan 15 $X(0.8) = (1-0.8)^2.1 + 2(1-0.8).(0.8).7 + (0.8)^2.1$

= 0.04 + 2.24 + 9.6 = 11.88 ~ 12

<u>Sumbu Y</u>

$Y(0.8) = (1-t)^2.Y_1 + 2(1-t)t.Y_2 + t^2.Y_3$

Keterangan :

Y_1, Y_2 dan Y_3 diambil dari titik control yaitu 2, 10 dan 4 $Y(0.8) = (1-0.8)^2.2 + 2(1-0.8).(0.8).10 + (0.8)^2.4$

= 0.08 + 3.2 + 2.56 = 5.84 ~ 6

Maka koordinat titik pada saat t=0.8 adalah (12,6)

Contoh 2:

Diketahui 4 buah titik kontrol dengan koordinat C1(0,1), C2(1,2), C3(2,2), C4(3,1) dengan menggunakan kenaikan t=0.02 maka tentukanlah berapa nilai titik pada kurva pada saat t=0.8?

<u>Jawab :</u>

Karena terdiri dari 4 titik kontrol maka persamaan menjadi :

$(x+y)^{4-1} = (x+y)^3$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 0$ Ganti x = (1-t) dan y = t

Maka persamaan tersebut menjadi :

$L(t) = (1-t)^3 + 3(1-t)^2t + 3(1-t)t^2 + t^3$

Koordinat titik untuk t = 0.8

Sumbu x

$X(0.8) = (1\text{-}t)^3.X_1 + 3(1\text{-}t)^2t.X_2 + 3(1\text{-}t)t^2.X_3 + t^3.X_4$

Keterangan :

$X_1,X_2,$ X_3 dan X_4 diambil dari titik control yaitu 0, 1, 2 dan 3 $X(0.8) = (1\text{-}0.8)^3.0+3(1\text{-}0.8)^2.(0.8).1+3(1\text{-}0.8).(0.8)^2.2+ (0.8)^3.3$

$= 0 + 0.096 + 0.768 + 1.536 = 2.4 \sim 2$

Sumbu Y

$Y(0.8) = (1\text{-}t)^3.Y_1 + 3(1\text{-}t)^2t.Y_2 + 3(1\text{-}t)t^2.Y_3 + t^3.Y_4$

Keterangan :

$Y_1,Y_2,$ Y_3 dan Y_4 diambil dari titik control yaitu 1, 2, 2 dan 1 $Y(0.8) = (1\text{-}0.8)^3.1+3(1\text{-}0.8)^2.(0.8).2+3(1\text{-}0.8).(0.8)^2.2+ (0.8)^3.1$

$= 0.008+0.192+0.768+0.512 = 1.48 \sim 1$

Maka koordinat titik pada saat t=0.8 adalah (2,1)

Panduan untuk persamaan polinomial

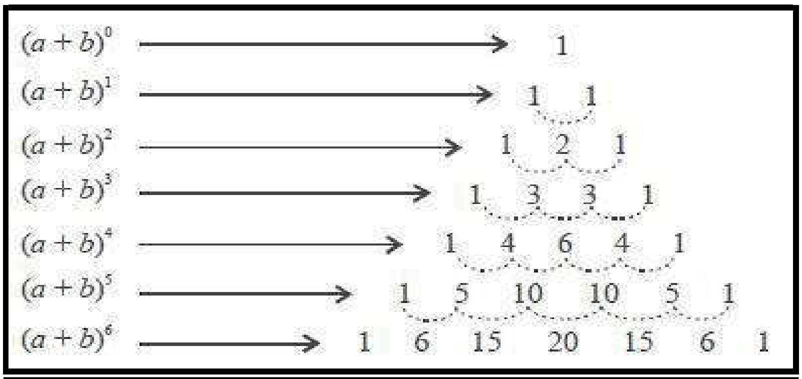
Untuk membantu membentuk persamaan polinomial pada kurva bezier berikut adalah panduannya, kurva bezier dengan n titik kontrol maka

persamaannya adalah :

$$\boxed{(x+y)^{n\text{-}1}}$$

Gambar 5. 5 Persamaan polinomial untuk kurva bezier dengan n titik control

Pembentukan persamaan polinomial dapat dibantu dengan segitiga pascal seperti terlihat pada gambar 5.6



Gambar 5. 6 Segitiga pascal dan persamaan polynomial

Angka pada segitiga pascal tersebut mewakili koefisien dari persamaan polynomial, Lihat contoh 2 untuk kurva Bezier dengan 4 titik control maka persamaannya adalah $(x+y)^3$ atau lihat pada gambar adalah $(a+b)^3$ Maka koefisien persamaan polynomial adalah 1 3 3 1 (lihat gambar 5.5), dapat dituliskan sebagai berikut :

$$1X^3Y^0 + 3X^2Y^1 + 3X^1Y^2 + 1X^0Y^3$$

Atau

$$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$$

Pangkat pada X dimulai dengan pangkat pada persamaan yaitu 3, kemudian dikurangi 1, sebaliknya pangkat pada Y dimulai dengan 0 dan bertambah 1

Tabel 5.1 tabel titik kurva Bezier untuk ∆t=0.1

T	(x,y)
0	Titik pertama
0.1	Titik kedua
0.2	Titik ketiga
0.3	Titik keempat

0.4	Titik kelima
0.5	Titik keenam
0.6	Titik ketujuh
0.7	Titik kedelapan
0.8	Titik kesembilan
0.9	Titik kesepuluh
1	Titik kesebelas

Jika Δt = 0,01, maka titik yang harus digambarkan sebanyak 101, dari t mulai 0, 0.01, 0.02, dst sampai t =1, semakin kecil Δt maka akan semakin banyak titik yang harus dihitung dan akan semakin halus kurva Bezier yang dihasilkan.

Pertanyaan :

Berapa jumlah titik yang harus digambarkan jika $\Delta t = n$

Jawab :

Jumlah titik yang harus digambarkan adalah : $1/n + 1$ (dibulatkan)

Perhitungan koordinat titik (x,y) dapat dihitung menggunakan persamaan pada gambar 5.4, selain dengan cara tersebut dapat dibantu menggunakan segitiga pascal seperti terlihat pada contoh.

Contoh 1 :

Diketahui 3 buah titik kontrol dengan koordinat C1(1,2), C2(7,10), C3(15,4) , dengan menggunakan Δt =0.02 maka tentukanlah:

1. Berapa titik yang digunakan untuk membangun kurva bezier?
2. Berapa nilai titik pada kurva pada saat t=0.8?

Jawab :

1. Dengan kenaikan sebanyak 0.02 maka jumlah titik yang diperlukan antara 0 dan 1 adalah

$$\frac{1}{t}+1=\frac{1}{0.02}+1=51$$

2. Sebenarnya titik yang harus digambar adalah 51 titik, tetapi untuk soal ini yang dicari hanya koordinat titik pada saat t = 0.8

Tabel 5.2 tabel titik kurva Bezier untuk Δt=0.01

T	(x,y)
0	
0.02	
0.04	
0.06	
..	
..	
0.8	
..	
..	
1	

Bisa dicari dengan memasukkan pada persamaan pada gambar atau atau bisa dengan perhitungan berikut. Karena terdiri dari 3 titik kontrol maka persamaan menjadi : $(x+y)^{3-1} = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0$ Ganti x = (1-t) dan y = t

Maka persamaan tersebut menjadi :

$L(t) = (1-t)^2 + 2(1-t)t + t^2$

Koordinat titik untuk t = 0.8

<u>Sumbu x</u>

$X(0,8) = (1-t)^2.X_1 + 2(1-t)t.X_2 + t^2.X_3$

Keterangan :

X_1,X_2 dan X_3 diambil dari titik control yaitu 1, 7 dan 15 $X(0.8) = (1-0.8)^2.1 + 2(1-0.8).(0.8).7 + (0.8)^2.15$

= 0.04 + 2.24 + 9.6 = 11.88 ~ 12

<u>Sumbu Y</u>

$Y(0.8) = (1-t)^2.Y_1 + 2(1-t)t.Y_2 + t^2.Y_3$

Keterangan :

Y_1, Y_2 dan Y_3 diambil dari titik control yaitu 2, 10 dan 4 $Y(0.8) = (1-0.8)^2.2 + 2(1-0.8).(0.8).10 + (0.8)^2.4$

= 0.08 + 3.2 + 2.56 = 5.84 ~ 6

Maka koordinat titik pada saat t=0.8 adalah (12,6)

Contoh 2 :

Diketahui 4 buah titik kontrol dengan koordinat C1(0,1), C2(1,2), C3(2,2), C4(3,1) dengan menggunakan kenaikan t=0.02 maka tentukanlah berapa nilai titik pada kurva pada saat t=0.8?

<u>Jawab :</u>

Karena terdiri dari 4 titik kontrol maka persamaan menjadi :

$(x+y)^{4-1} = (x+y)^3$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 0$ Ganti x = (1-t) dan y = t

Maka persamaan tersebut menjadi :

$L(t) = (1-t)^3 + 3(1-t)^2t + 3(1-t)t^2 + t^3$

Koordinat titik untuk t = 0.8

Sumbu x

$X(0.8) = (1-t)^3.X_1 + 3(1-t)^2t.X_2 + 3(1-t)t^2.X_3 + t^3.X_4$

Keterangan :

X_1,X_2, X_3 dan X_4 diambil dari titik control yaitu 0, 1, 2 dan 3 X(0.8) = $(1-0.8)^3.0+3(1-0.8)^2.(0.8).1+3(1-0.8).(0.8)^2.2+ (0.8)^3.3$

= 0 + 0.096 + 0.768 + 1.536 = 2.4 ~ 2

Sumbu Y

$Y(0.8) = (1-t)^3.Y_1 + 3(1-t)^2t.Y_2 + 3(1-t)t^2.Y_3 + t^3.Y_4$

Keterangan :

Y_1,Y_2, Y_3 dan Y_4 diambil dari titik control yaitu 1, 2, 2 dan 1 Y(0.8) = $(1-0.8)^3.1+3(1-0.8)^2.(0.8).2+3(1-0.8).(0.8)^2.2+ (0.8)^3.1$

= 0.008+0.192+0.768+0.512 = 1.48 ~ 1

Maka koordinat titik pada saat t=0.8 adalah (2,1)

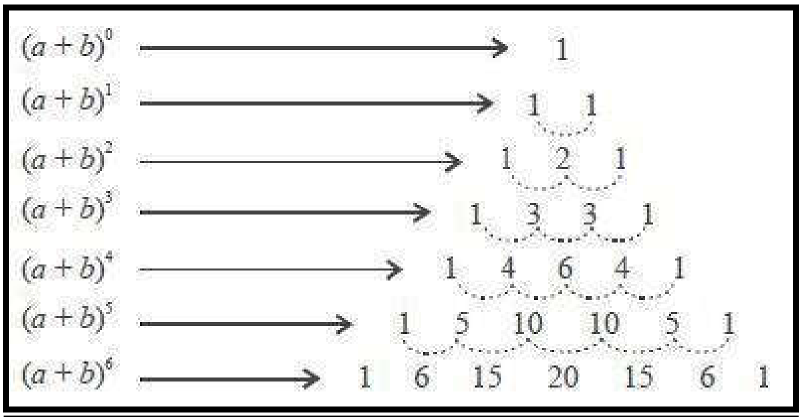
Panduan untuk persamaan polinomial

Untuk membantu membentuk persamaan polinomial pada kurva bezier berikut adalah panduannya, kurva bezier dengan n titik kontrol maka persamaannya adalah :

$$\boxed{(x+y)^{n-1}}$$

Gambar 5. 7 Persamaan polinomial untuk kurva bezier dengan n titik kontrol

Pembentukan persamaan polinomial dapat dibantu dengan segitiga pascal seperti terlihat pada gambar 5.6



Gambar 5. 8 Segitiga pascal dan persamaan polynomial

Angka pada segitiga pascal tersebut mewakili koefisien dari persamaan polynomial, Lihat contoh 2 untuk kurva Bezier dengan 4 titik control maka persamaannya adalah $(x+y)^3$ atau lihat pada gambar adalah $(a+b)^3$ Maka koefisien persamaan polynomial adalah 1 3 3 1 (lihat gambar 5.5), dapat dituliskan sebagai berikut :

$$1X^3Y^0 + 3X^2Y^1 + 3X^1Y^2 + 1X^0Y^3$$

Atau

$$X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$$

Pangkat pada X dimulai dengan pangkat pada persamaan yaitu 3, kemudian dikurangi 1, sebaliknya pangkat pada Y dimulai dengan 0 dan bertambah 1

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Latihan	Petunjuk Pengerjaan Tugas
Latihan Pertemuan 5	1. Bagaimana persamaan polinomial untuk kurva bezier dengan 6 titik, 7 titik dan 8 titik kontrol 2. Diketahui 6 buah titik kontrol dengan koordinat C0(-45,-15), C1(-40,- 12), C2(-32,-2), C3(-24,0), C4(10,12), C5(24,20) (dengan menggunakan Δt=0.065 maka tentukanlah: a. berapa jumlah titik yang harus digambar untuk membentuk kurva bezier b. berapa nilai titik pada saat t =0.55

D. REFERENSI