

Pertemuan 11

Integral Fungsi Rasional yang Memuat Sin x dan Cos x

Fungsi $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, $f(x)$ dan $g(x)$ memuat fungsi

trigonometri dapat juga dikategorikan sebagai fungsi rasional, hanya saja tidak dapat disebut sejati atau tidak sejati. Hal ini dikarenakan

$f(x) = \sin x$ dan $f(x) = \cos x$ tidak mempunyai derajat seperti halnya dengan fungsi polinomial. Pengintegralan jenis ini menggunakan METODE SUBSTITUSI.

Berikut ini diberikan beberapa contoh fungsi rasional yang pembilang dan penyebutnya memuat $f(x) = \sin x$ atau $g(x) = \cos x$.

$$1. F(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$2. F(x) = \frac{1 + 2\sin x + \cos x}{\sin x}$$

$$3. F(x) = \frac{5\sin x + 2}{\cos x}$$

$$4. F(x) = \frac{1}{3 - 2\sin x}$$

$$5. F(x) = \frac{2}{1 + \sin x - \cos x}$$

Sehingga dalam bentuk pengintegralan fungsi rasional yang pembilang dan penyebutnya memuat fungsi trigonometri adalah:

$$1. \int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$$

$$2. \int \frac{dx}{2 + \cos x}$$

$$3. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

$$4. \int \frac{1 + 2\sin x + \cos x}{\sin x} dx$$

$$5. \int \frac{1}{3 - 2\sin x} dx$$

Selesaian integral bentuk-bentuk di atas adalah menggunakan metode substitusi

$$x = 2 \arctan z \text{ sehingga } dx = \frac{2}{1+z^2} dz.$$

Selanjutnya $\sin x$ dan $\cos x$ di substitusi ke bentuk variabel z .

Karena $x = 2 \arctan z$ maka:

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = z$$

Menurut rumus identitas fungsi trigonometri

$$1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + z^2 = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+z^2}$$

Menurut rumus identitas fungsi trigonometri yang lain

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1, \text{ sehingga didapat}$$

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{1}{1+z^2}$$

$$= \frac{z^2}{1+z^2}$$

Dengan rumus jumlah cosinus didapat:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{1+z^2} - \frac{z^2}{1+z^2}$$

$$= \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Dengan rumus jumlah sinus didapat:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2 \sqrt{\frac{z^2}{1+z^2}} \sqrt{\frac{1}{1+z^2}}$$

$$= \frac{2z}{1+z^2}$$

Dengan demikian integral fungsi rasional yang memuat fungsi trigonometri dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi

$$x = 2 \arctan z, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

Tentukan selesaian dari

$$1. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

Jawab

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+z^2} dz}{1 + \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \\ &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2}{1+z^2} + \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \\ &= \int \frac{2dz}{2+2z} \\ &= \int \frac{dz}{1+z} \\ &= \ln |1+z| + C \\ &= \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

$$2. \int \frac{dx}{2 - \cos x}$$

Jawab

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 - \cos x} &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{2 - \frac{1-z^2}{1+z^2}} \\ &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2(1+z^2)}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2}} \\ &= \int \frac{2dz}{1+3z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \int \frac{dz}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + z^2} \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{3} \operatorname{arc tan} \left(\frac{z}{1/\sqrt{3}} \right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tan} \sqrt{3} z + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tan} \sqrt{3} (\tan x/2) + C
\end{aligned}$$

$$3. \int \frac{dx}{3+5 \sin x} =$$

Jawab

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3+5 \sin x} &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+5 \frac{2z}{1+z^2}} \\
&= \int \frac{2dz}{3+3z^2+10z} \\
&= \int \frac{2dz}{(3z+1)(z+3)} \\
&= \int \frac{A}{(3z+1)} + \frac{B}{(z+3)} dz \\
&= \int \frac{(A+3B)z + (A+B)}{(3z+1)(z+3)} dz \\
&= \int \frac{3}{(3z+1)} - \frac{1}{(z+3)} dz \\
&= 3 \ln|3z+1| - \ln|z+3| + C
\end{aligned}$$

$$= 3 \ln \left| 3 \tan \frac{x}{2} + 1 \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} + 3 \right| + C$$

Soal-soal

Selidiki kebenaran hasil pengintegralan berikut ini!

$$1. \int \frac{dx}{1-2\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 2 - \sqrt{3}}{\tan \frac{x}{2} - 2 + \sqrt{3}} \right| + C$$

$$2. \int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left| \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} \right| + C$$

$$3. \int \frac{dx}{5+3\sin x} = \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{5 \tan \frac{x}{2} + 3}{4} \right| + C$$

$$4. \int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right| + C$$

$$5. \int \frac{dx}{5+4\sin x} = \frac{2}{3} \arctan \frac{5 \tan \frac{x}{2} + 4}{3} + C$$

$$6. \int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \tan \frac{x}{2} \right) + C$$

$$7. \int \frac{dx}{3-2x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \arctan(\sqrt{5} \tan \frac{x}{2}) + C$$

$$8. \int \frac{\sin x u du}{\cos u (1 + \cos^2 u)} = \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \cos^2 u}}{\cos u} \right| + C$$

$$9. \int \frac{(2 + \tan^2 x) \sec^2 x dx}{1 + \tan^2 x} = \ln |1 + \tan x| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$10. \int \tan x dx = \ln |\sec x| + C$$

$$11. \int \cot x \, dx = -\ln|\csc x| + C$$