# PERTEMUAN 3

# METODE GRAFIK: TITIK OPTIMAL

## A. Tujuan Pembelajaran

Pertemuan ini menjelaskan Metode Grafik Titik Optimal. Setelah proses pembelajaran selesai dilakukan, mahasiswa diharapkan:

1. Memahami Metode Grafik: Titik Optimal.
2. Dapat menyelesaikan soal optimalisasi 2 variabel yang memiliki keterbatasan sumber daya.

## B. Uraian Materi

### 1. Metode Grafik

Dalam pemrograman linier, ada banyak cara untuk menyelesaikan sebuah permasalahan, salah satunya yaitu menggunakan metode grafik. Dalam metode grafik, hanya dua variabel keputusan yang dapat diselesaikan masalahnya. Untuk mengatasi masalah tersebut, adapun langkah yang pertama harus dilakukan yaitu mengubah masalah kedalam bentuk program linier. Langkah-langkah penyusunan permasalahan adalah sebagai berikut:

1. Memahami secara keseluruhan permasalahan manajerial yang dihadapi apakah itu maksimalisasi ataukah minimalisasi
2. Mengidentifikasi tujuan-tujuan dan kendala yang ada
3. Mendefinisikan variabel keputusan
4. Merumuskan fungsi tujuan dan fungsi kendala secara matematis dengan mengunakan variabel keputusan.

Sebelumnya perlu diketahui terlebih dahulu notasi-notasi matematika yang biasa ditemukan, yaitu:

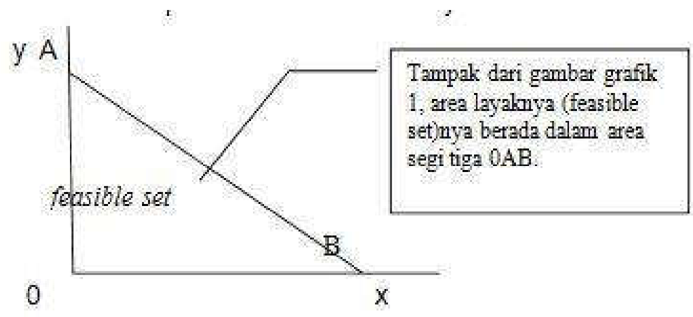
$x \leq 1$, yang artinya nilai x (sama dengan ‘=’) 1, atau (kurang dari ‘≤’) dari 1

$x \geq 1$, yang artinya nilai x (sama dengan ‘=’) 1, atau (lebih dari ‘≥’) dari 1

$x = 1$, nilai x (sama dengan ‘=’) 1

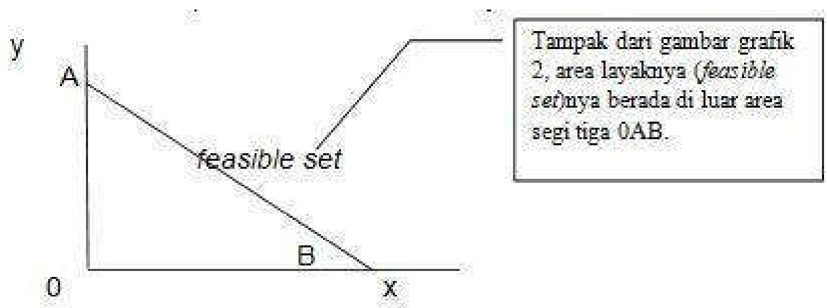
Contoh-contoh grafik:

a. Grafik pertidaksamaan dari $4x + 3y \leq 12$



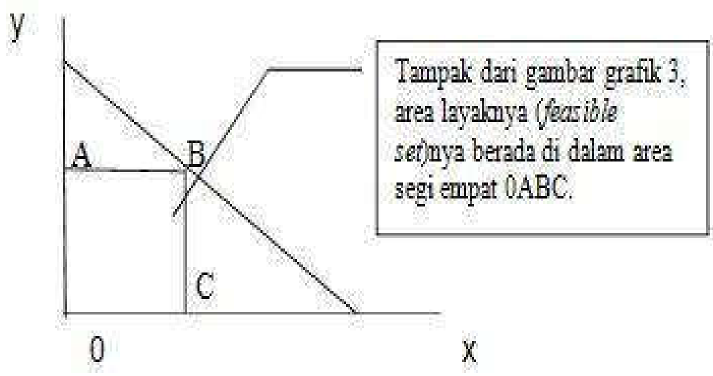

**Gambar 10** : Grafik himpunan penyelesaian dalam segitiga OAB

b. Grafik pertidaksamaan dari $4x + 3y \geq 12$




**Gambar 12.** Grafik *Feasible set* diluar segitiga OAB

c. Grafik persamaan dari $4x + 3y = 12$




**Gambar 11** : Grafik *himpunan penyelesaian* dalam segiempat OABC

## 2. Langkah-langkah dalam Penggunaan Metode Program Linier dengan Metode Grafik

Berikut adalah langkah-langkah dalam penggunaan metode progral linear dengan metode grafik, yaitu sebagai berikut:

a. Mengubah kedalam bentuk matematik dari fungsi tujuan dan fungsi batasan.
b. Mengubah fungsi pertidaksamaan atau yang dinotasikan ≥ dan ≤ menjadi fungsi persamaan yang dinotasikan = .
c. Menggambar fungsi-fungsi tersebut ke dalam sebuah grafik, kemudian area dari fungsi batasan yang memenuhi batasan daerahnya ditentukan dan diarsir. Sehingga didapat sebuah daerah atau area arsiran yang disebut dengan daerah himpunan penyelesaian/*feasible set/feasible area*.
d. Mencari kombinasi optimal dengan cara menyelesaikan secara matematik persamaan fungsi batasan yang bertepatan dengan kedudukan optimal.

## 3. Optimalisasi 2 Variabel yang Mempunyai Sumber Daya Terbatas

**Contoh 1.**

Sebuah perusahaan furnitur akan memproduksi meja dan kursi. Dimana untuk memproduksi proses perakitan memakan waktu 5 jam, proses pemolesan memakan waktu 6 jam, dan proses pengemasan memakan waktu 2 jam. Sedangkan untuk pembuatan kursi, proses perakitannya memakan waktu 2 jam, proses poles membutuhkan waktu 6 jam, dan proses pengemasan membutuhkan waktu 4 jam. Karena keterbatasan tenaga dan peralatan, perusahaan mempunyai waktu untuk memproduksi meja dan kursi setiap hari: proses perakitan memakan waktu 40 jam, proses mengkilapkan 60 jam, dan proses pengemasan 32 jam. Diketahui keuntungan marjinal untuk penjualan meja sebesar $6 dan keuntungan untuk penjualan kursi sebesar $8.

a. Formulasikanlah model program linier untuk masalah di atas
b. Tentukanlah jumlah meja dan kursi yang harus diproduksi sehingga keuntungan yang didapat maksimum.

**Pembahasan:**

Untuk mempermudah dibuat pemisalan. Misalkan meja = $X_1$ dan kursi = $X_2$.

**Tabel 3 : Data Meja dan Kursi**

| Kegiatan | Meja ($X_1$) | Kursi ($X_2$) | Kapasitas |
|---|---|---|---|
| Merakit | 5 | 2 | 40 |
| Mengkilapkan | 6 | 6 | 60 |
| Mengepak | 2 | 4 | 32 |

Model program linear:

Fungsi Tujuan: Maksimum $Z = 6X_1 + 8X_2$

Fungsi kendala:

(1) $5X_1 + 2X_2 \leq 40$

(2) $6X_1 + 6X_2 \leq 60$

(3) $2X_1 + 4X_2 \leq 32$

(4) $X_1 \geq 0$ dan $X_2 \geq 0$

**Langkah 1**.

Mengubah pertidaksamaan dari fungsi kendala menjadi persamaan eksplisit:

(1) $5X_1 + 2X_2 = 40 \rightarrow X_2 = 20 - 2.5X_1$

(2) $6X_1 + 6X_2 = 60 \rightarrow X_2 = 10 - X_1$

(3) $2X_1 + 4X_2 = 32 \rightarrow X_2 = 8 - 0.5X$

**Langkah 2**

Mengambar grafik setiap persamaan fungsi batasan, dan kemudian tentukan wilayah yang layak, yaitu, wilayah yang dikelilingi oleh semua fungsi batasan dan himpunan titik yang digabungkan dengan X1 dan X2, yang memberikan solusi untuk model LP terkait.

(1) $X_2 = 20 - 2.5X_1$

$X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 20$

$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 8$

(2) $X_2 = 10 - X_1$

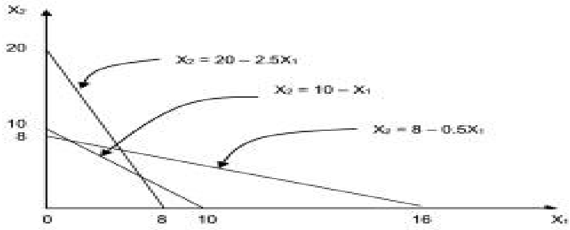
$X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 10$

$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 10$

(3) $X_2 = 8 - 0.5X_1$

$X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 8$

$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 16$




**Gambar 12** : Solusi LP

**Langkah 3**

Menentukan titik kritis (titik terluar dari feasible region) yang merupakan solusi optimal, yaitu titik kritis yang memberikan Z maksimum.

A (0, 8) $\rightarrow$ $Z_A = 3(0) + 4(8) = 32$

B (4, 6) tipot $X_2 = 10 - X_1$ dan $X_2 = 8 - 0.5X_1$

$8 - 0.5X_1 = 10 - X_1$

$0.5X_1 = 2 \rightarrow X_1 = 4$ dan $X_2 = 10 - X_1 \rightarrow X_2 = 10 - 4 = 6$

$Z_B = 3(4) + 4(6) = 36$

C(20/3, 10/3) tipot $X_2 = 20 - 2.5X_1$ dan $X_2 = 10 - X_1$

$10 - X_1 = 20 - 2.5X_1$

$(3/2)X_1 = 10 \rightarrow X_1 = 20/3$ dan $X_2 = 10 - X_1 \rightarrow X_2 = 10 - 20/3 = 10/3$

$Z_C = 3(20/3) + 4(10/3) = 33.3$

D(8, 0) $\rightarrow$ $Z_D = 3(8) + 4(0) = 24$

Kesimpulan:

Ketika $Z_{maks} = 78$ dan $X_1 = 4$ , $X_2 = 6$, solusi terbaik dari model program linier dapat diperoleh. Oleh karena itu, jika sebuah perusahaan furniture memproduksi 4 meja dan 6 kursi dalam sehari, maka dapat merealisasikan keuntungan hingga \$ 78 per hari.

**Contoh 2**

Ada dua macam produk yang dibuat di perusahaan sepatu bermerk Ardiles. Produk yang pertama yaitu sepatu atau dimisalkan menjadi ($x_1$) dan produk yang kedua adalah sandal atau dimisalkan menjadi ($x_2$). Untuk itu perusahaan mempunyai 3 macam alat, yaitu alat pertama untuk menjahit bagian atas sepatu, alat kedua untuk menjahit bagian atas sandal, dan alat ketiga untuk membuat sol, baik sol sepatu ataupun sol sendal. Pada pembuatan sepatu dibutuhkan penggunaan alat yang ke-1 yang membutuhkan waktu selama 4 jam, lalu diteruskan proses pembuatannya ke alat yang ke-3 tanpa melalui alat yang ke-2 selama 4 jam. Sedangkan untuk pembuatan sandal, dibutuhkan penggunaan alat yang ke-2 yang membutuhkan waktu selama 5 jam lalu diteruskan ke alat yang ke-3 selama 3 jam. Jam kerja maksimum untuk alat yang ke-1 adalah 16 jam, untuk alat yang ke- 2 adalah 30 jam dan untuk jam kerja pada alat yang ke- 3 selama 24 jam. Keuntungan yang diperoleh dari masing-masing produk yaitu: dari sepatu sebesar Rp 5.000,- dan keuntungan yang diperoleh dari sandal sebesar Rp 4.000,-. Dari data di atas, carilah kombinasi produk yang paling optimal?

**Pembahasan:**

a. Menganalisa soal dan memasukkannya kedalam Tabel bentuk standar formulasi masalah, kemudian deskripsikan formulasi fungsi tujuan dan fungsi batasan yang ada kedalam bentuk formula matematika:

**Tabel 4 : Bentuk Standar Formulasi Masalah**

| **Jenis Produk Alat** | **Sepatu** (X1) | **Sandal** (X2) | **Kapasitas** |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0 | 16 |
| 2 | 0 | 5 | 30 |
| 3 | 4 | 3 | 24 |
| Profit (Rp 1000) | 5 | 4 | |

b. Mengubah fungsi tujuan dan fungsi batasan kedalam dalam bentuk matematis

Fungsi Tujuan: Maksimumkan $z = 5x_1 + 4x_2$

Fungsi Batasan:

a. Alat 1 = $4x_1 \leq 16$
b. Alat 2 = $5x_2 \leq 30$
c. Alat 3 = $4x_1 + 3x_2 \leq 24$

c. Mengubah pertidaksamaan dari fungsi batasan menjadi sebuah persamaan:

a. $4x_1 = 16$

b. $5x_2 = 30$

c. $4x_1 + 3x_2 = 24$

d. Mencari daerah himpunan penyelesaian

a. $4x_1 = 16 \Leftrightarrow x_1 = 16/4 \Leftrightarrow x_1 = 4$

b. $5x_2 = 30 \Leftrightarrow x_2 = 30/5 \Leftrightarrow x_2 = 6$

c.. $4x_1 + 3x_2 = 24$

Jika $x_1 = 0$, maka fungsi batasan menjadi: $4(0) + 3x_2 = 24$

$3x_2 = 24$

$x_2 = 24/3$

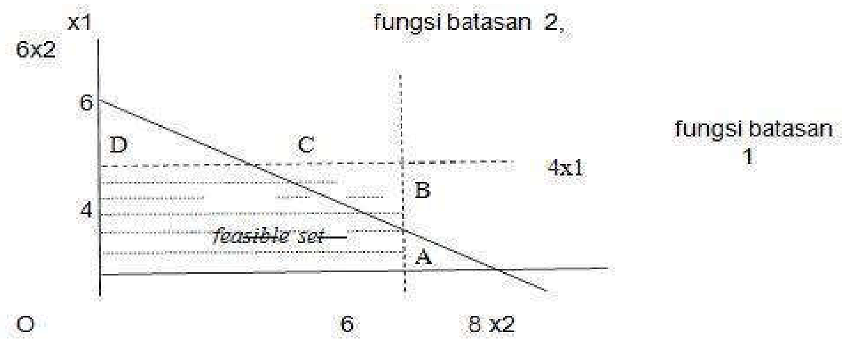
$x_2 = 8$

Jika $x_2 = 0$, maka fungsi batasan menjadi: $4x_1 + 3(0) = 24$

$4x_1 = 24$

$x_1 = 24/4 = 6$

Dengan diketahuinya titik-titik ekstrim dari masing-masing fungsi, maka *daerah himpunan penyelesaiannya* dapat digambarkan sebagai berikut:




**Gambar 15.** Grafik daerah himpunan penyelesaian (OABCD)

e. Mencari nilai masing-masing dari titik potong agar dapat mengetahui kombinasi yang optimal dari produk dan dapat memaksimumkan fungsi tujuan / nilai z dalam hal ini area himpunan penyelesaiannya yaitu

Titik O, di titik O, nilai $x_1 = 0$ dengan demikian nilai $z = 0$

Titik D, di titik D, nilai $x_1 = 4$, lalu nilai ini dimasukkan/disubtitusikan kepada persamaan batasan 3: $4x_1 + 3x_2 = 24$, maka persamaan tersebut menjadi:

$$4(4) + 3x_2 = 24$$

$$3x_2 = 24-16$$

$$x_2 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

lalu nilai-nilai tersebut dimasukkan/disubtitusikan ke persamaan fungsi tujuan:

Maksimumkan nilai $z = 5x_1 + 4x_2$

$$z = 5 (4) + 4 (2\tfrac{2}{3})$$

$$z = 20 + 10\tfrac{2}{3}$$

$$z = 30\tfrac{2}{3} \text{ (x Rp 1.000 = Rp 30.667,-)}$$

Titik C, pada titik C, nilai $x_1 = 6$, lalu nilai ini dimasukkan/disubtitusikan ke persamaan batasan 3: $4x_1 + 3x_2 = 24$, maka persamaan tersebut menjadi:

$$4(6) + 3x_2 = 24$$

$$3x_2 = 24 - 24$$

$$3x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

lalu nilai tersebut dimasukkan/disubtitusikan ke persamaan fungsi tujuan:

Maksimumkan nilai $z = 5x_1 + 4x_2$

$$z = 5 (6) + 4 (0)$$

$$z = 30 \text{ (x Rp 1.000 = Rp 30.000,-)}$$

Titik B, pada titik B, nilai $x_2 = 8$, nilai ini dimasukkan/disubtitusikan ke persamaan batasan 3: $4x_1 + 3x_2 = 24$, maka persamaan tersebut menjadi:

$4x_1 + 3\ (8) = 24$

$4x_1 = 24 - 24$

$x_1 = 0$

Lalu nilai $x_1$ ini dimasukkan pada persamaan fungsi tujuan:

Maksimumkan nilai z = 5x1 + 4x2

$z = 5\ (0) + 4(8)$

$z = 24$ (x Rp 1.000 = Rp 24.000,-)

Titik A, pada titik A, nilai x2 = 6, lalu nilai ini dimasukkan/disubtitusikan ke persamaan batasan 3: $4x_1 + 3x_2 = 24$

$4x_1 + 3(6) = 24$

$4x_1 = 24 - 18$

$4x_1 = 6$

$x_1 = 6/4 = 1\frac{1}{2}$

Lalu nilai tersebut dimasukkan/disubtitusikan ke persamaan fungsi tujuan:

Maksimumkan nilai $z = 5x_1 + 4x_2$

$z = 5(1\frac{1}{2}) + 4(6)$

$z = 7\frac{1}{2} + 24 = 31\frac{1}{2}$ (x Rp 1.000 = Rp 31.500,-)

Oleh karena itu, agar perusahaan memperoleh keuntungan yang maksimal maka perusahaan harus memproduksi di titik A dengan memproduksi $1\frac{1}{2}$pasang sepatu ($x_1$) dan 6 pasang sandal ($x_2$), dengan margin keuntungan sebesar 31.500 rupiah.

**Contoh 3:**

PT. ARDAN adalah sebuah perusahaan yang akan memproduksi 2 jenis produk, yaitu meja dan kursi. Untuk menghasilkan produk tersebut perusahaan membutuhkan bahan baku yaitu kayu dan alumunium. Untuk membuat meja dibutuhkan 4 lembar kayu dan 2 batang alumunium, sedangkan untuk membuat kursi dibutuhkan 2 lembar kayu dan 3 batang alumunium. Bahan yang tersedia setiap harinya yaitu 34 lembar kayu dan 31 batang alumunium. Dengan keuntungan yang diharapkan dari tiap unitnya yaitu meja Rp. 80.000,00- dan kursi dengan keuntungan sebesar Rp. 60.000,00. Untuk memperoleh keuntungan yang maksimal setiap harinya, berapa unitkah dari masing-masing produk yang dibuat agar mendapatkan solusi yang optimal?

Pembahasan:

Langkah pertama, untuk mempermudah menganalisa soal, buat terlebih dahulu tabel formulasi masalah dengan pemisalan meja (x) dan kursi (y) sebagai berikut:

**Tabel 5 : Formulasi Masalah Contoh Soal 3**

| Produk/bahan | Meja (x) | Kursi (y) | Persediaan |
|---|---|---|---|
| Kayu | 4 lembar | 2 lembar | 34 |
| Alumunium | 2 batang | 3 batang | 31 |

Langkah berikutnya yaitu menentukan fungsi tujuan & fungsi kendala

Fungsi tujuannya yaitu maksimalisasi z = Rp. 80.000x + Rp. 60.000y

Fungsi kendalanya yaitu:

$4x+2y \leq 34$

$2x+3y \leq 31$

Langkah berikutnya yaitu mengubah fungsi kendala kedalam bentuk persamaan sehingga diperoleh sebagai berikut:

$4x+2y=34$

$2x+3y=31$

Langkah berikutnya yaitu membuat grafik dari fungsi kendala yang telah diubah ke dalam persamaan.

$4x+2y=34$

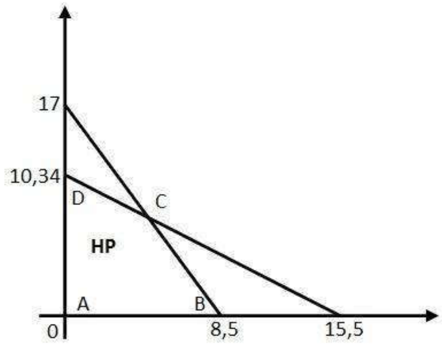
$x=0$, $y=34/2=17$

$y=0$, $x=34/4=8.5$

2x+3y=31

x=0, y=31/3=10.34

y=0, x=31/2=15.5




Gambar 13 **:** Grafik dari Fungsi Kendala

Langkah berikutnya yaitu mencari solusi yang optimal dari titik-titik ekstrim.

**Titik A**

x=0, y=0

substitusikan nilai x dan y ke fungsi tujuan (Z=80000x+60000y)

Z = 80000 . 0 + 60000 . 0 = 0

**Titik B**

x=8.5, y=0

substitusikan nilai x dan y ke fungsi tujuan (Z=80000x+60000y)

Z = 80000 . 8,5 + 60000 . 0 = 680000

**Titik C**

Untuk mengetahui nilai dari titik C, maka dicari titik potong dari dua persamaan di atas

$$\begin{array}{l|l} 4x+2y=34 & 4x+2y=34 \\ 2x+3y=31 & \underline{4x+6y=62} \; - \\ & -4y=-28 \\ & \quad y=7 \end{array}$$

4x+2(7)=34

4x+14=34

4x=34-14=20

x=20/4=5

x=5, y=7

substitusikan nilai x dan y ke fungsi tujuan (Z=80000x+60000y)

Z = 80000 . 5 + 60000 . 7 = 820000

**Titik D**

x=0, y=10,34

substitusikan nilai x dan y ke fungsi tujuan (Z=80000x+60000y)

Z = 80000 . 0 + 60000 . 10,34 = 620400

Sehingga dapat disimpulkan bahwa solusi optimal dari permasalahan di atas yaitu ada pada titik C dimana perusahaan tersebut harus memproduksi 5 unit meja dan 7 unit kursi agar mendapat keuntungan yang maksimal yaitu sebesar Rp. 820.000,00-

**Contoh 4:**

Seorang pedagang akan menjual dua jenis matrabak telur, yaitu martabak telur original dan martabak telur spesial, dimana keduanya sama-sama membutuhkan bahan baku telur ada telur ayam dan telur bebek. Untuk membuat martabak telur spesial pedagang tersebut membutuhkan 1 butir telur ayam dan 2 butir telur bebek, sedangkan untuk membuat martabak telur original pedagang tersebut membutuhkan 2 butir telur ayam dan 1 butir telur bebek. Telur yang tersedia satu kali produksi adalah 10 telur ayam dan 8 telur bebek. Penjual tersebut mengharapkan keuntungan tiap martabaknya sebesar Rp.15.000,- untuk martabak telur spesial dan Rp. 10.000,- untuk martabak telur original. Buatlah sebuah grafik dari permasalahan ini dan tentukkan dimana titik optimalnya sehingga pedagang tersebut mendapatkan keuntungan yang maksimal.

Pembahasan:

Langkah pertama untuk mempermudah menganalisa soal, buat terlebih dahulu tabel formulasi masalah dengan pemisalan martabak telur spesial (x) dan martabak telur original (y) sebagai berikut:

**Tabel 6 : Formulasi Masalah Contoh Soal 4**

| Produk/bahan | Martabak telur spesial (x) | Martabak telur original (y) | Persediaan |
|---|---|---|---|
| Telur Ayam | 1 butir | 2 butir | 10 |
| Telur bebek | 2 butir | 1 butir | 8 |

Langkah berikutnya yaitu menentukan fungsi tujuan dan fungsi kendala

Fungsi tujuannya yaitu maksimalisasi z = Rp. 15.000x + Rp. 10.000y

Fungsi kendalanya yaitu:

$x+2y \leq 10$

$2x+y \leq 8$

Langkah berikutnya yaitu mengubah fungsi kendala ke dalam bentuk persamaan sehingga diperoleh sebagai berikut:

$x+2y=10$

$2x+y=8$

Langkah berikutnya membuat grafik dari fungsi kendala yang telah diubah ke dalam persamaan.

$x+2y=10$

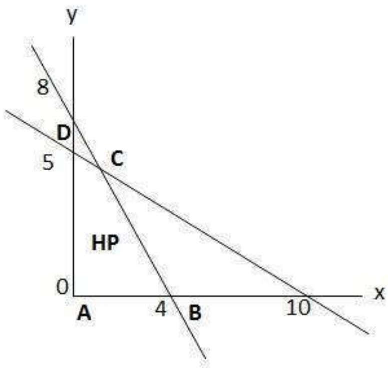
$x=0$, $y=10/2=5$

$y=0$, $x=10$

$2x+y=8$

$x=0$, $y=8$

$y=0$, $x=8/2=4$




**Gambar 14** : Grafik dari Fungsi Kendala

Langkah berikutnya yaitu mencari titik yang optimal dari grafik yang telah terbentuk.

**Titik A**

x=0, y=0

substitusikan nilai x dan y ke fungsi tujuan (Z=15000x+10000y)

Z = 15000 . 0 + 10000 . 0 = 0

**Titik B**

x=4, y=0

substitusikan nilai x dan y ke fungsi tujuan (Z=15000x+10000y)

Z = 15000 . 4 + 10000 . 0 = 60000

**Titik C**

Untuk mengetahui nilai dari titik C kita harus mencari titik potong dari dua persamaan diatas

$$\begin{array}{l|l} x+2y=10 & 2x+4y=20 \\ 2x+y=8 & \underline{2x+\ y=8}\ - \\ & 3y=12 \\ & \quad y=4 \end{array}$$

x+2(4)=10

x+8=10

x=10-8=2

sehingga x=2, y=4

substitusikan nilai x dan y ke fungsi tujuan (Z=15000x+10000y)

Z = 15000 . 2 + 10000 . 4 = 70000

**Titik D**

x=0, y=5

substitusikan nilai x dan y ke fungsi tujuan (Z=15000x+10000y)

Z = 15000 . 0 + 10000 . 5 = 50000

Sehingga dapat disimpulkan bahwa titik optimal dari permasalahan di atas dilihat dari grafik yang sudah dibuat dan disubstitusikan ke dalam fungsi tujuan, sehingga terdapat pada titik C dimana pedagang tersebut akan memperoleh keuntungan sebesar Rp. 70.000,- dalam sekali produksi, yaitu 2 martabak telur spesial dan 4 martabak telur original.

## C. Soal Latihan/Tugas

1. Pada sebuah toko yang memproduksi kue akan dibuat dua macam kue yaitu kue pisang dan kue keju. Bahan yang diperlukan untuk membuat kue pisang yaitu 300gr terigu, dan 100gr mentega. Sedangkan untuk membuat kue keju diperlukan bahan yaitu terigu sebanyak 150gr terigu dan 150gr mentega. Persediaan yang dimiliki toko tersebut untuk setiap harinya yaitu terigu 18kg dan mentega 12kg. Keuntungan yang diperoleh dari kue pisang yaitu Rp. 12.000,00 dan keuntungan dari kue keju yaitu Rp. 8.000,00. Berapakah kombinasi pembuatan kuenya agar mendapatkan keuntungan yang maksimal dan di titik manakah titik optimalnya?
2. Carilah sebuah kasus yang bisa dipecahkan dengan metode grafik, kemudian tentukan titik optimalnya!

## D. Referensi

*Kuliah Manajemen*. (2009, 12). Retrieved 05 2021, from Linier Programming Metode Grafik: http://kuliah-manajemen.blogspot.com/2009/12/linear-programming-metode-grafik.html

*Linier Programming Metode Grafik*. (2014, 10 26). Retrieved 20 2021, from andariisnadiah: https://andariisnadiah.wordpress.com/2014/10/26/linier-programming-metode-grafik/

*Program Linear*. (2017). Retrieved 05 20, 2021, from studiobelajar: https://www.studiobelajar.com/program-linear/

*Pengertian linear programming*. (2021, 03 26). Retrieved 05 20, from guru pendidikan: https://www.gurupendidikan.co.id/pengertian-linear-programing/

Frederich S. Hiller, G. J. (1990). *Introduction to operations research*. New York: McGraw-Hill.

Syaifudin, D. T. (2011). *Riset Operasi (Aplikasi Quantitative Analysis for Management)*. Malang: CV. Citra Malang.

Taha, H. A. (2006). *Operations Research: An Introduction* . Prentice Hall.