

Pertemuan 14

INTEGRAL TAK WAJAR

3.1 Pengertian

Sebelum membahas konsep tentang integral tak wajar, marilah kita ingat kembali teorema dasar kalkulus pada integral tertentu.

Teorema:

Misal $f(x)$ adalah fungsi yang kontinu dan terintegralkan pada $I = [a, b]$, dan $F(x)$ sebarang antiturunan pada I , maka

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Contoh

$$\begin{aligned} 1. \int_2^4 (1-x)dx &= \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_2^4 \\ &= (4 - \frac{1}{2} \cdot 16) - (2 - \frac{1}{2} \cdot 4) \\ &= -4 - 0 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int_1^2 \frac{dx}{1+x} &= [\ln|1+x|]_1^2 \\ &= \ln(1+2) - \ln(1+1) \\ &= \ln 3 - \ln 2 \end{aligned}$$

$$3. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \text{ tidak dapat diselesaikan dengan teorema di atas karena integran}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ tidak terdefinisi pada } x = 1.$$

4. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$, tidak dapat diselesaikan dengan teorema di atas, karena integran

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ tidak terdefinisi di } x = 0$$

Dengan demikian tidak semua integral fungsi dapat diselesaikan dengan teorema dasar kalkulus. Persoalan-persoalan integral seperti pada contoh 3 dan 4 dikategorikan sebagai integral tidak wajar.

Bentuk $\int_a^b f(x)dx$ disebut **Integral Tidak Wajar** jika:

a. Integran $f(x)$ mempunyai sekurang-kurangnya satu titik yang tidak kontinu (diskontinu) di $[a,b]$, sehingga mengakibatkan $f(x)$ tidak terdefinisi di titik tersebut.

Pada kasus ini teorema dasar kalkulus $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ tidak berlaku lagi.

Contoh

1) $\int_0^4 \frac{dx}{4-x}$, $f(x)$ tidak kontinu di batas atas $x = 4$ atau $f(x)$ kontinu di $[0,4)$

2) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ tidak kontinu di batas bawah $x = 1$ atau $f(x)$ kontinu di $(1,2]$

3) $\int_0^4 \frac{dx}{(2-x)^{\frac{2}{3}}}$, $f(x)$ tidak kontinu di $x = 2 \in [0,4]$ atau $f(x)$ kontinu di $[0,2) \cup (2,4]$

b. Batas integrasinya paling sedikit memuat **sat**u tanda tak hingga

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}, \text{ integran } f(x) \text{ memuat batas atas di } x = \infty$$

$$2) \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx, \text{ integran } f(x) \text{ memuat batas bawah di } x = -\infty$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + 4x^2}, \text{ integran } f(x) \text{ memuat batas atas di } x = \infty \text{ dan batasa bawah di } x = -\infty$$

Pada contoh a (1,2,3) adalah integral tak wajar dengan integran $f(x)$ tidak kontinu dalam batas-batas pengintegralan, sedangkan pada contoh b (1, 2, 3) adalah integral tak wajar integran $f(x)$ mempunyai batas di tak hingga (∞).

Integral tak wajar selesaiannya dibedakan menjadi Integral tak wajar dengan integran tidak kontinu Integral tak wajar dengan batas integrasi di tak hingga.