

DESKRIPSI MATERI

PERTEMUAN 13

INDUKSI MATEMATIKA

Mata Kuliah Matematika Diskrit

PENGANTAR

Metode pembuktian untuk pernyataan perihai bilangan bulat adalah **induksi matematik**. Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika. Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

TUJUAN PERKULIAHAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai definisi relasi Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa diharapkan mampu :

- Mengetahui Prinsip Induksi Matematika
- Menyelesaikan permasalahan terkait Induksi Matematika

4.A. Prinsip Induksi Sederhana.

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihai bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n . Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$, jika $p(n)$ benar maka $p(n + 1)$ juga benar.

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
- Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n .

Contoh 4.1.

Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa :

$$1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!) = (n + 1)! - 1$$

Contoh 4.2.

Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 .

Penyelesaian:

- (i) *Basis induksi:* Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.
- (ii) *Langkah induksi:* Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ adalah benar (*hipotesis induksi*) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke- n adalah $(2n - 1)$]. Kita harus memperlihatkan bahwa $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkann benar, maka benar bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 .