**PERTEMUAN 18:**

**APLIKASI TURUNAN**

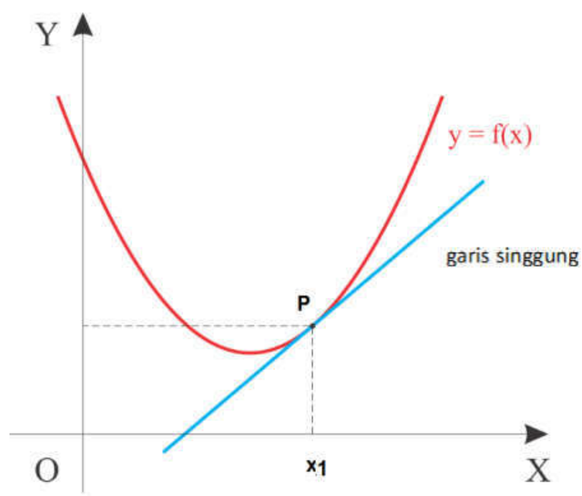
## A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dgn aplikasi turunan.

## B. URAIAN MATERI

Penggunaan turunan dapat di terapkan pada beberapa pada masalah matematika seperti menentukan karakterisik fungsi-fungsi matematika. Karakterisitik fungsi seperti garis singgung kurva, nilai minimum-maksimum, nilai monoton, dan perhitungan limit fungsi dan laju.

### 3. Garis Singgung Kurva




Gambar 18. 1. Garis singgung kurva

Garis singung kurva f(x) pada suatu titik $(x_1,y_1)$ akan membetuk suatu garis lurus yang mempunyai gradien m. Dimana nilai m = $f'(x)$

Oleh karenanya persamaan garis singgung dengan gradien *m* dan melalui titik $(x_1,y_1)$ dirumuskan :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**Contoh**

Penggunaan turunan untuk menentukan persamaan garis singgung kurva adalah sebagai berikut:

Diketahui suatu fungsi dengan dalam bentuk berikut:

$$y = 5x - x^2$$
$$m = y' = 5 - 2x$$

Persamaan garis singgung pada titik yang berabsis 3 adalah :

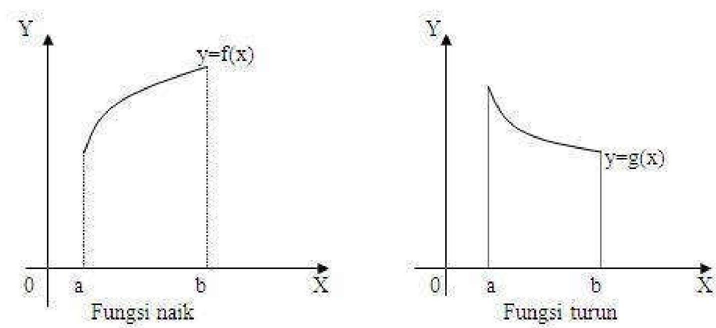
Pertama di cari gradien garis singgung

$$\begin{aligned} y' &= 5 - 2.3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Selanjutnya ordinat didapat

$$\begin{aligned} y &= 5.3 - 3^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

## 4. Fungsi Naik dan Fungsi Turun




Gambar 18. 2. Fungsi naik dan fungsi turun

Syarat :

$$y = f(x) \quad \begin{cases} naik & f'(x) > 0 \\ turun & f'(x) < 0 \end{cases}$$

**Menemukan Nilai Mutlak Minimum dan Maksimum sutyu fungsi**

**Contoh**

Temukan nilai absolut maksimum dan minimum fungsi

$$f(x) = x^2 \text{ pada [-2,1]}$$

Fungsi ini dapat diturunkan seluruh domainnya, jadi satu-satunya titik kritis didapat saat $f' = 0$

$$f'(x) = 2x$$

$$x = 0$$

Kita perlu memeriksa nilai fungsi pada $x = 0$, pada $x = -2$ , dan $x = 1$ ,

$$f(0) = 0$$

$$f(-2) = 4$$

$$f(1) = 1$$

Jadi fungsi ini memiliki nilai mutlak maksimum 4 pada $x = -2$ dan nilai mutlak minimum yaitu 0 pada $x = 0$

## 5. Menghitung Jarak, Kecepatan, dan Percepatan sebuah benda

Kecepatan adalah turunan pertama jarak, percepatan adalah turunan kedua jarak

Jarak ─► S (x)

Kecepatan ─► S '( x)

Percepatan ─► S'' ( x)

**Contoh**

Partikel netron sepanjang garis mendatar mengikuti persamaan :

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 7$$

dengan jarak (S) dalam meter dan waktu (t) dalam detik. Carilah:

a. Kecepatan dan percepatan netron tersebut.
b. Kecepatan dan percepatan netron saat t =5 detik
c. Kapankah netron tersebut akan berhenti.

**Penyelesaian :**

a. Menghitung kecepatan dan percepatan netron

Fungsi :

$S(t) = t^3 - 6t^2 + 7$

maka

Kecepatan : v(t) = s′(t) = $3t^2 - 12t$

Percepatan : a(t) =s″(t)

=6t−12

b. Menghitung kecepatan dan percepatan netron saat waktu t =5 detik :

Maka kecepatan saat 5 detik

V(5) = $3*5^2 - 6*5$

V(3)=75−30 = 45 m/s

percepatan netron tersebut saat waktu t =5 detik

$$a(5) = 6 * 5 - 12$$

$$a(5) = 18\ m/s^2$$

Sehingga percepatan netron tersebut adalah $18\ m/s^2$.

c. Netron akan berhenti ketika kecepatannya nol,

v(t)=0 → $3t^2 - 12t = 0$

$$3t(t-4) = 0$$

$$3t = 0 \quad \text{dan} \quad t - 4 = 0$$

Jadi, netron berhenti atau diam pada saat t = 4 detik.

**6. Menghentikan mobil secara mendadak**

Pak Onos mengendarai mobil Bujero di jalan tol dengan kecepatan 90 km / jam, saat itu melihat kecelakaan didepan mobil dan seketika Pak Onsos menginjak rem mobilnya. Berapakah perlambatan yang dibutuhkan untuk menghentikan mobil dalam jarak 100 m?

**Penyelesaian :**

Menentukan percepatan dengan turunan

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\mathrm{k} \quad \text{(konstan)}$$

Kondisi awal

$$v0 = \frac{ds}{dt} = 108\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{jam}} = 30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$vt^2 = v0^2 + 2\mathrm{aS}$$

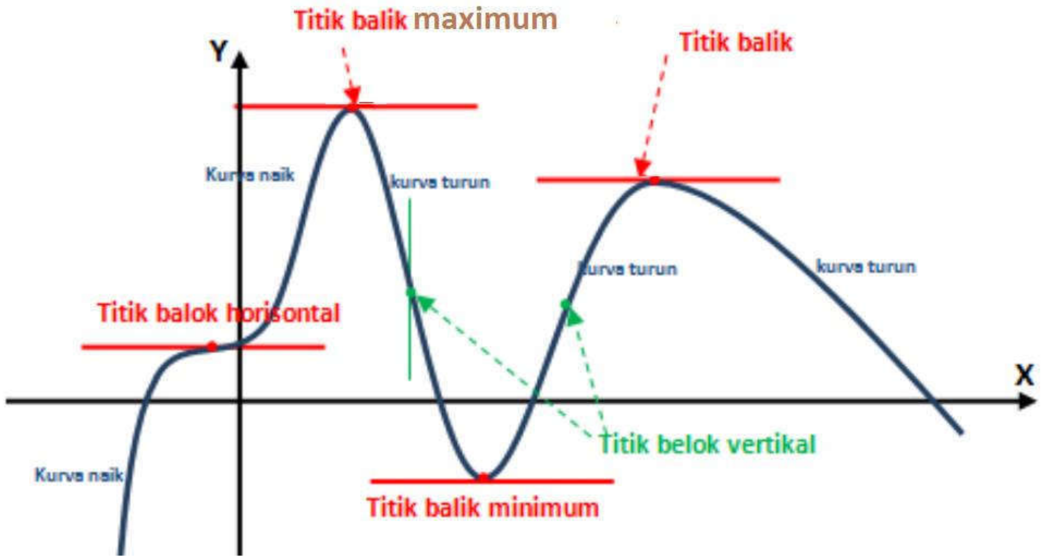
$$0^2 = 30^2 + 2\mathrm{a} * 100$$

$$\mathrm{a} = \frac{900}{200}$$

$$\mathrm{a} = 4{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{s^2}$$

## 7. Nilai Stasioner Fungsi

Nilai fungsi suatu fungsi stasioner $f(x)$ terjadi saat $f'(x) = 0$. Dimana pada sembarang titik $(x_0, f(x_0))$ dengan $f'(x_0) = 0$ maka titik $(x_0, f(x_0))$ disebut titik-titik stasioner. Titik titik stasioner tersebut dapat berupa : titik balik minimum, titik balik maksimum, atau titik belok seperti diperlihatkkan pada Gambar 18.3.




Gambar 18. 3. Titik balik dan titik belok pada fungsi

a. Titik balik maksimum

   Syarat : $f''(x_0) < 0$ dan $f(x_0)$ = nilai maksimum

   Sehingga $(x_0, f(x_0))$ = titik balik maksimum

b. Titik balik minimum

   Terjadi dengan syarat : $f''(x_0) > 0$ dan $f(x) =$ nilai minimum

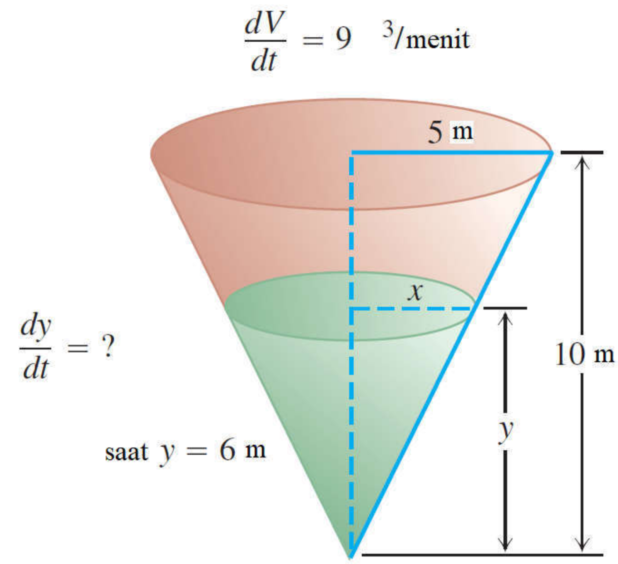
   Sehingga $(x_0, f(x_0))$ = titik balik minimum

c. Titik belok

   Terjadi dengan syarat : $f''(x_0) = 0$ dan $f(x) =$ nilai belok

   Maka $(x_0, f(x_0))$ = titik belok

**Contoh : Pengisian tangki kerucut terbalik**




Air diisi kedalam kedalam tangki kerucut terbalik dengan debit sebesar 9 m$^3$/menit. Tangki berdiri setinggi 10 m dan jari jari 5 m. Berapa kecepatan kenaikan air pada ketinggian 6 m.

Jawaban.

V= volume air ditangki saat t

X = jari jari permukaan air saat t

Y= kedalaman air saat t

Diasumsikan bahwa V,x, dan y. Konstanta ukuran tangki, sehingga

$y = 6\,m$ dan

$$\frac{dV}{dt} = 9\,m^3/menit.$$

Air membentuk kerucut dengan volume

$$V = \frac{1}{3}\pi x^3 y$$

$\frac{x}{y} = \frac{5}{10}$ atau $x = \frac{y}{2}$

atau

$$x = \frac{y}{2}$$

Saat y =6

$$x = 3$$

$$9\,m^3/menit.$$

Maka dengan $\frac{dV}{dt}$= 9 untuk mencari kecepatan dy/dt

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^3 \frac{dy}{dt}$$

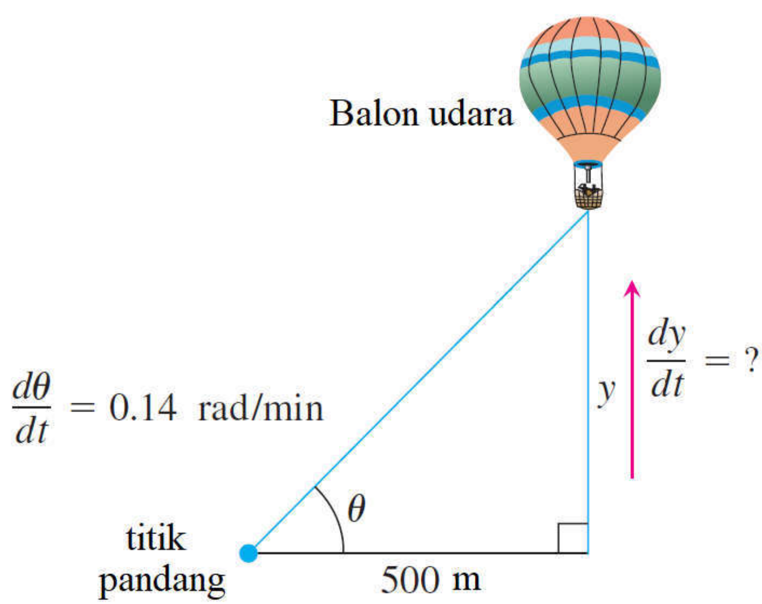
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0,32$$

Sehingga kecepatan air naik adalah 0,32 m/menit

**Contoh : Menghitung kecepatan naik balon Udara**

Balon udara terbang naik keatas dan pada suatu saat tingginya 500 m dari suatu titk yang terletak lurus dari tanah, Pada titik ini sudut terlihat adalah 45°, Sudut ini bertambah dengan kecepatan 0,14 rad/menit. Berapa kecepatan balon pada titik tersebut.

Jawaban:




Diketahui kenaikan sudut

$$\frac{d\theta}{dt} = 0,14\ \frac{rad}{menit}$$

$$\frac{y}{500} = \tan\theta$$

$$y = 500\tan\theta$$

Diturunkan dengan menggunakan aturan rantai

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

Pada titik ini sudut terlihat adalah 45° dan $\frac{d\theta}{dt}$ = 0,14 rad/menit. Maka kecepatan balon adalah:

$$\frac{dy}{dt} = 500(\sqrt{2})^2\ 0{,}14$$

$$= 140$$

Sehingga didapatkan kecepatan balon udara saat itu adalah 140 m/menit

## C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Suatu fungsi $f\,(x) = x^3 + 3x^2 - 5$. Dimanakah letak nilai x untuk fungsi turun dan fungsi naik.
2. Berapakah nilai minimum dari suatu fungsi $\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = 2x^3 + 6x^2 - 48\mathrm{x} + 5$ yang berada pada interval $-2 < \mathrm{x} < 5$
3. Sebuah kotak tanpa tutup dapat dibuat dari kertas berbentuk persegi dengan sisi *k* cm dengan cara menggunting empat persegi di pojoknya sebesar *s* cm. Agar volume kotak maksimum, berapa nilai s yang didapat.

## D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), alculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer