PERTEMUAN 8
MATRIKS ADJOIN DAN MATRIK INVERS

A. TujuanPembelajaran

Setelah menyelesaikan pertemuan ini Mahasiswa mampu menghitung invers matriks dan menyelesaikannya dengan beberapa cara invers matriks.

B. UraianMateri

1. Matriks Adjoin

Dalam matriks 2*2, matriks adjoinnya adalah pertukaran elemen-elemen yang terletak pada diagonal utama, dan mengalikan elemen-elemen yang terletak pada diagonal samping dengan -1.

Sebagai simulasi : A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, A^{-1} = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Sedangkan dalam matriks 3*3, matriks adjoinnya merupakan transpose dari kofaktor matriks A $(K_A)^t$. Jadi mencari minor dari matriks tersebut, kemudian mencari kofaktor dari minor tersebut, yang selanjutnya kofaktor tersebut di transpose.

Contoh :

a. Carilah adjoin dari matriks berordo 2*2 berikut : A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

Tukar nilai 3 dengan 1 di diagonal utama, kemudian kalian -1 diagonal samping (-1 dan 2), maka Adj A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

b. Carilah adjoin dari matriks berordo 3*3 berikut : A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab:

Langka 1: Mencari minor

$M_{11}(baris\ 1, kolom\ 1\ ditutup) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ = (3*1)-(2*1) = 3-2 = 1

$M_{12}(baris\ 1, kolom\ 2\ ditutup) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ = (1*1)-(2*1) = (1)-(2) = -1

$M_{13}(baris\ 1, kolom\ 3\ ditutup) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ = (1*1)-(3*1) = 1-3 = -2

$M_{21}(baris\ 2, kolom\ 1\ ditutup) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ = (0*1)-(1*1) = (0)-(1) = -1

$M_{22}(baris\ 2, kolom\ 2\ ditutup) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ = (2*1)-(1*1) = 2-1 = 1

$M_{23}(baris\ 2, kolom\ 3\ ditutup) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ = (2*1)-(0*1) = (2)-(0) = 2

$M_{31}(baris\ 3, kolom\ 1\ ditutup) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ = (0*2)-(1*3) = 0-3 = -3

$M_{32}(baris\ 3, kolom\ 2\ ditutup) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ = (2*2)-(1*1) = (4-1) = 3

$M_{33}(baris\ 3, kolom\ 3\ ditutup) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ = (2*3)-(0*1) = (6)-(0) = 6

Hasil diatas diubah kedam matriks sesusai letaknya sehingga menjadi:

Minor A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Langkah 2: Mencari Kofaktor

Selanjutnya minor A dirubah kedalam kofaktor dengan cara mengalikan masing elemen, seperti berikut:

Kofaktor A = $\begin{bmatrix} +|\ 1| & -|-1| & +|-2| \\ -|-1| & +|\ 1\ | & -|\ \ 2| \\ +|-3| & -|\ \ 3| & +|\ 6\ | \end{bmatrix}$, setiap elemen dikalikan dengan masing-masing tanda, menjadi:

Kofaktor A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}^{t}$, selanjutnya kofaktor tersebut di transpose (baris menjadi kolom), sehingga menjadi adjoin A.

Langkah 3: Mencari Adjoin

Adjoin A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$,

sehingga ini lah Adjoin A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

2. Matriks Invers

Jika A dan B adalah sebuah matriks berbentuk bujur sangkar dan berlaku notasi AB = BA = I (I adalah matriks identitas), maka dapat dikatakan bahwa A dapat dibalik dengan B, sehingga B adalah matriks invers dari A (notasi: A^{-1}).

Sifat – sifat yang berlaku di matriks invers:

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Contoh :

a. Carilah invers dari matriks berordo 2*2 berikut :A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab:

1) Dengan cara pemisalan $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{bmatrix}$

Misalkan A^{-1}kita anggap sebagai A^{-1}=$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ maka berlakuketentuan

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

untuk memcari nilai a, maka dikalikan terlebih dahulu antara matriks A (matriks soal) dengan Matriks A^{-1}(matriks A^{-1}yang dianggap) sehingga menjadi:

$\begin{bmatrix} 3a_1 + 2a_3 & 3a_2 + 2a_4 \\ 2a_1 + 3a_3 & 2a_2 + 3a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

setelah itu, diubah menjadi sebuah persamaan linier dua variable, yaitu :

$3a_1 + 2a_3 = 1$→(persamaan 1)

$3a_2 + 2a_4 = 0$→(persamaan 2)

$2a_1 + 3a_3 = 0$→(persamaan 3)

$2a_2 + 3a_4 = 1$→(persamaan 4)

Selanjutnya kita cari nilai $a_1, a_2, a_3,\ dan\ a_4$ dengan cara substitusi dan eliminasi, yaitu :

a) Mencari nilai a_3 dengan mengeliminasi $a_1 dan\ a_3$ dari persamaan 1 dan persamaan 3, yaitu :

Pers. 1 $3a_1 + 2a_3 = 1$ → *2 (karena kita akan eliminasi a_1)

Pers. 3 $\underline{2a_1 + 3a_3 = 0}$ – → *3(karena kita akan eliminasi a_1)

Maka menjadi:

$6a_1 + 4a_3 = 2$

$\underline{6a_1 + 9a_3 = 0}$–

$-5a_3 = 2$

$a_3 = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$

b) Mencari nilai $a_1$dengan mensubstitusikan nilai a_3 yang didapat diatas kepers.1$3a_1 + 2a_3 = 1$, nilai a_3 diganti dengan $-\frac{2}{5}$, maka:

$3a_1 + 2.-\frac{2}{5} = 1$

$3a_1 + \left(-\frac{4}{5}\right) = 1$

$3a_1 \quad = 1 + \frac{4}{5}$

$3a_1 \quad = \frac{5}{5} + \frac{4}{5}$

$3a_1 \quad = \frac{9}{5}$

$a_1 \quad = \frac{9/_5}{3} \rightarrow \frac{9/_5}{3}$ sama seperti $\frac{9/_5}{3/_1}$

$a_1 \quad = \frac{9}{5}\ x\ \frac{1}{3} \rightarrow$ karena dirubah kebentuk perkalian maka yang tadinya $\frac{3}{1}$ menjadi $\frac{1}{3}$

$a_1 \quad = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

c) Mencari nilai a_4 dengan mengeliminasi $a_2\ dan\ a_4$ dari persamaan 2 dan persamaan 4, yaitu :

Pers. 2 $\quad 3a_2 + 2a_4 = 0 \quad \rightarrow$ *2 (karena kita akan eliminasi a_1)

Pers. 4 $\quad \underline{2a_2 + 3a_4 = 1} - \quad \rightarrow$ *3(karena kita akan eliminasi a_1)

Maka menjadi:

$6a_2 + 4a_4 = 0$

$\underline{6a_2 + 9a_4 = 3} -$

$-5a_4 = -3$

$a_4 = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

d) Mencari nilai $a_2$dengan mensubstitusikan nilai a_4 yang didapat diatas kepers.2 $3a_2 + 2a_4 = 0$, nilai a_4 diganti dengan $\frac{3}{5}$, maka:

$3a_2 + 2\frac{3}{5} = 0$

$3a_2 + \left(\frac{6}{5}\right) = 0$

$3a_2 \quad = 0 - \frac{6}{5}$

$3a_2 \quad = -\frac{6}{5}$

$a_2 \quad = \frac{-6/_5}{3} \rightarrow \frac{-6/_5}{3}$ sama seperti $\frac{-6/_5}{3/_1}$

$a_2 \quad = -\frac{6}{5}\ x\ \frac{1}{3} \rightarrow$ karena dirubah kebentuk perkalian maka yang tadinya $\frac{3}{1}$ menjadi $\frac{1}{3}$

$a_2 \quad = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

Sehingga didapat A^{-1}= $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

2) Dengan cara Adjoin

A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, maka$ A^{-1} $=\frac{1}{\det A}\ Adj\ (A)$

$=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{3.3-2.2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{3.3-2.2} & -\frac{2}{3.3-2.2} \\ -\frac{2}{3.3-2.2} & \frac{3}{3.3-2.2} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{3}{9-4} & -\frac{2}{9-4} \\ -\frac{2}{9-4} & \frac{3}{9-4} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

Sehingga didapat A^{-1} = $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

3) Dengan cara OBE (Operasi Baris Elemeter)

Yaitu dengan cara melakukan manipulasi anggotanya dengan tranformasi baris elementer, dan dapat diskemakan sebagai berikut:

$[A|I]$→ OBE →$[I|A^{-1}]$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] H_1H_{2^{-1}}$ artinya baris 1 ditambah baris 2 yang dikalikan -1,

Menjadi

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] H_2H_{1^{-2}}$ artinya baris 2 ditambah (baris 1 dikalikan -2),

Menjadi

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{array}\right] H_{2^{1/5}}$ artinya baris 2 dikalikan ($\frac{1}{5}$),

Menjadi

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right] H_1H_2$ artinya baris 1 ditambah baris 2,

Menjadi

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$ karena ruas kiri sudah berubah menjadi matriks identitas yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka proses selesai.

sehingga didapat A^{-1} = $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

4) Dengan cara OKE (Operasi Kolom Elemeter)

Yaitu dengan cara melakukan manipulasi anggotanya dengan tranformasi kolom elementer, dan dapat diskemakan sebagai berikut:

$$\left[\frac{A}{I}\right] \rightarrow \text{OKE} \rightarrow \left[\frac{I}{A^{-1}}\right]$$

$\left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] K_1 K_{2^{-1}}$ artinya kolom 1 ditambah kolom 2yang dikalikan (-1),

Menjadi

$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ \hline 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right] K_2 K_{1^{-2}}$ artinya kolom 2 ditambah kolom 1yang dikalikan (-2),

Menjadi

$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ \hline 1 & -2 \\ - & 3 \end{array}\right] K_{2^{1/5}}$ artinya kolom 2 dikalikan $(-\frac{1}{5})$,

Menjadi

$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} \end{array}\right] K_1 K_2$ artinya kolom 1 ditambah kolom 2,

Menjadi

$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right]$ karena ruas atas sudah berubah menjadi matriks identitas yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka proses selesai.

sehingga didapat A^{-1} = $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

b. Carilah invers dari matriks berordo 3*3 berikut : A = $\begin{bmatrix} -5 & 5 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

1) Dengan cara OBE (Operasi Baris Elemeter)

Yaitu dengan cara melakukan manipulasi anggotanya dengan tranformasi baris elementer, dan dapat diskemakan sebagai berikut:

$[A|I]$→ OBE →$[I|A^{-1}]$

$$I\ adalah\ matriks\ identitas, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ket = ruas kiri dirubah kedalam bentuk matriks Identitas

Angka -5 pada baris 1 kolom 1, dirubah kedalam angka 1, dengan cara $H_{1^{-1/5}}$ yaitu baris 1 dikalikan dengan $-\frac{1}{5}$, menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $H_2H_{1^{-5}}$ artinya baris 2 ditambah baris 1 yang dikalikan -5, menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ H_3H_1 artinya baris 2 ditambah baris 1,

menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$ H_1H_3 artinya baris 1 ditambah baris 3,

menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$ $H_{2^{-1}}$ artinya baris 2 dikalikan (-1),

menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$ $H_3H_{2^{-1}}$ artinya baris 3 ditambah baris 2 yang dikalikan (-1),

Menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 1 \end{array}\right]$ $H_1H_{3^3}$ artinya baris 1 ditambah baris 3 yang dikalikan (3),

Menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 1 \end{array}\right]$ $H_2H_{3^5}$ artinya baris 2 ditambah baris 3 yang dikalikan (5),

menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 1 \end{array}\right]$ H_{3^5} artinya baris 3 yang dikalikan (5),

menjadi

$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right]$ karena ruas kiri sudah menjadi matriks identitas yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka proses selesai.

Maka didapatA^{-1} $= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

2) Dengan cara OKE (Operasi Kolom Elemeter)

Yaitu dengan cara melakukan manipulasi anggotanya dengan tranformasi kolom elementer, dan dapat diskemakan sebagai berikut:

$$\left[\frac{A}{I}\right] \rightarrow \text{OKE} \rightarrow \left[\frac{I}{A^{-1}}\right]$$

$\left[\begin{array}{ccc} -5 & 5 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $K_{1^{-1/5}}$ artinya kolom 1 dikalikan $(-\frac{1}{5})$,

Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 5 & -1 \\ -1 & -6 & 2 \\ \frac{1}{5} & 2 & -1 \\ \hline \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $K_2K_{1^{-5}}$ artinya kolom 2 ditambah kolom 1 dikalikan (-5),

Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{5} & 1 & -1 \\ \hline \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] K_3K_1$ artinya kolom 3 ditambah kolom 1,

Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ \hline \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] K_{2^{-1}}$ artinya kolom 2 dikalikan (-1),

Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \\ \hline \frac{1}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] K_1K_2$ artinya kolom 1 ditambah kolom 2,

Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{4}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \\ \hline -\frac{6}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] K_3K_{2^{-1}}$ artinya kolom 3 ditambah kolom 2 dikalikan (-1),

Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ \hline -\frac{6}{5} & -1 & \frac{4}{5} \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] K_{3^5}$ artinya kolom 3 dikalikan (5), Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -1 & 1 \\ \hline -\frac{6}{5} & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right] K_1K_{3^{4/5}}$ artinya kolom 1 ditambah kolom 3 dikalikan $(\frac{4}{5})$,

Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{array}\right] K_2K_3$ artinya kolom 2 ditambah kolom 3, Menjadi

$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{array}\right]$ karena ruas atas sudah berubah menjadi matriks identitas yaitu

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka proses selesai.

sehingga didapat $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

3) Dengan cara Determinan dan Adjoin

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj\ (A)$

e) Mencari determinan dengan cara sarrus

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det A} = \left|\begin{matrix} -5 & 5 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -5 & 5 \\ 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

$$= \Big(\big((-5)x(-6)x(-1)\big) + \big((5)x(2)x(-1)\big) + \big((-1)x(5)x(2)\big) -$$
$$\big((-1)x(-6)x(-1)\big) - \big((-5)x(2)x(2)\big) - \big((5)x(5)x(-1)\big)\Big)$$

$$= ((-30) + (-10) + (-10) - (-6) - (-20) - (-25))$$

$$= ((-30) + (-10) + (-10) + (6) + (20) + (25))$$

$$= 1$$

f) Mencari adjoin dengan cara K_A^t

Langka 1 : Mencari minor

$M_{11}(baris\ 1, kolom\ 1\ ditutup) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ = (-6*-1)-(2*2)

= 6-4 = 2

$M_{12}(baris\ 1, kolom\ 2\ ditutup) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ = (5*-1)-(2*-1)

= (-5)-(-2) = -3

$M_{13}(baris\ 1, kolom\ 3\ ditutup) = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ = (5*2)-(-6*-1)

= 10-6 = 4

$M_{21}(baris\ 2, kolom\ 1\ ditutup) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ = (5*-1)-(-1*2)

= (-5)-(-2) = -3

$M_{22}(baris\ 2, kolom\ 2\ ditutup) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ = (-5*-1)-(-1*-1)

= 5-1 = 4

$M_{23}(baris\ 2, kolom\ 3\ ditutup) = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ = (-5*2)-(5*-1)

= (-10)-(-5) = -5

$M_{31}(baris\ 3, kolom\ 1\ ditutup) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ = (5*2)-(-1*-6)

= 10-6 = 4

$M_{32}(baris\ 3, kolom\ 2\ ditutup) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ = (-5*2)-(-1*5)

= (-10)-(-5) = -5

$M_{33}(baris\ 3, kolom\ 3\ ditutup) = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ = (-5*-6)-(5*5)

= (30)-(25) = 5

Hasil diatas diubah kedalam matriks sesusai letaknya, menjadi:

Minor A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

Langkah 2: Mencari Kofaktor

Selanjutnya minor A dirubah kedalam kofaktor dengan cara mengalikan masing elemen, seperti berikut:

Kofaktor A = $\begin{bmatrix} +|\ 2| & -|-3| & +|\ 4\ | \\ -|-3| & +|\ 4\ | & -|-5| \\ +|\ 4\ | & -|-5| & +|\ 5\ | \end{bmatrix}$,

Ket : setiap elemen dikalikan dengan masing-masing tanda, menjadi:

Kofaktor A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}^t$, selanjutnya kofaktor tersebut di transpose (baris menjadi kolom), sehingga menjadi adjoin A.

Langkah 3: Mencari Adjoin

Adjoin A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ (kenapa hasilnya sama saja? karena kebetulan angka yang ditranpose, hasilnya sama)

Maka A^{-1} = $\frac{1}{\det(A)} Adj\ (A)$ = $\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

C. LatihanSoal/Tugas

1. Carilah Adjoin dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Berapakah Adjoin dari matriks A = $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

   a. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

3. Berapakah Adjoin dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   a. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

4. Carilah nilai invers dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, dengan cara OKE!

5. Carilah Invers dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, dengan cara OBE!

D. DaftarPustaka

Anton, Howard. (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Version (10th ed)*. John Wiley & Sons. Inc, New Your, NY.

Atmadja, J., Bandung, I. T., & Bandung, J. G. (2016). Penerapan Aljabar Lanjar pada Grafis Komputer, 1–9.

Kusumawati, Ririen (2006). *Diktat Aljabar Liniear dan Matriks*. Malang: Jurusan Teknik Informatika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Lay, David C. (2000). *Linear Algebra and Its Aplication (2nd ed)*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass.

.