Pertemuan 13

PENGGUNAAN INTEGRAL TERTENTU LANJUTAN

Tujuan Instruksional Umum :

Agar Mahasiswa memahami konsep kalkulus integral tertentu dan terampil menerapkannya dalam berbagai masalah.

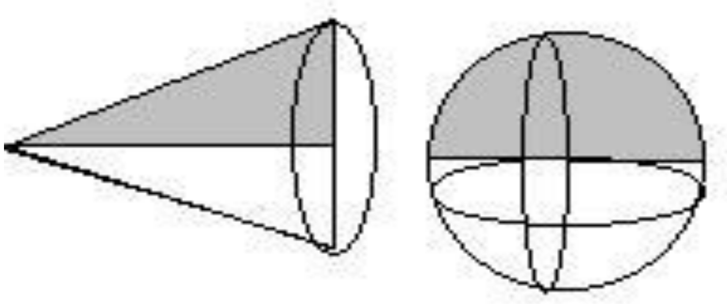
Tujuan Instruksional Umum :

Mahasiswa dapat :

- menghitung luas daerah terbatas di bidang datar dengan menggunakan integral tentu.
- menghitung volume benda putar dengan menggunakan integral tentu.

VOLUME BENDA PUTAR

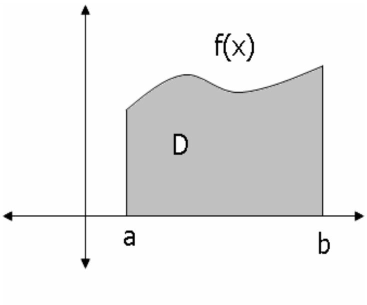
Benda Putar adalah Benda yang terbentuk karena sebuah daerah rata yang terletak pada bidang diputar mengelilingi suatu garis sebagai sumbu putarnya.

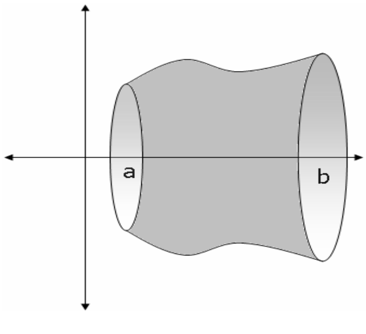


11.3.1. Metode Cakram.

Cakram dapat dipandang sebagai tabung pipih yang terbentuk karena suatu jalur yang diambil pada daerah rata ikut berputar mengelilingi sumbu putar ketika daerah rata yang bersangkutan berputar.

Dengan menggunakan pola berfikir seperti menghitung luas daerah rata yaitu : gambar, potong, aproksimasikan dan integralkan maka volume benda putar dapat ditentukan.





Pada waktu aproksimasi dilakukan, maka dihitung volume cakram sebagai $\Delta V \approx \pi\, r^2\, t$, r ditunjukkan oleh fungsi

$y = f(x)$ atau $x = f(y)$ dan t ditunjukkan oleh Δx atau Δy.

Contoh :

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk oleh daerah R yang dibatasi kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu X dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu X.
2. Tentukan volume benda putar yang terbentuk oleh daerah R yang dibatasi kurva $y = x^3$, sumbu Y dan garis $y = 3$ diputar mengelilingi sumbu Y.

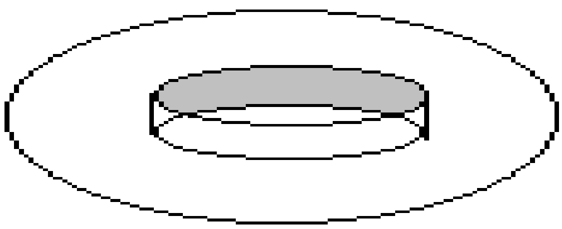
11.3.2. Metode Cincin.

Cincin dapat dipandang sebagai cakram yang ditengah-tengahnya ada lubangnya.

Jadi volume cincin adalah $V = \pi\,(r_b^2 - r_k^2)\, h$, dimana

r_b : jari-jari lingkaran alas yang besar.

r_k : jari-jari lingkaran alas yang kecil.



Contoh :

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk dari daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi sumbu X.
2. Daerah setengah lingkaran yang dibatasi oleh kurva

$x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu y diputar mengelilingi garis

$x = -1$, susunlah integral yang merumuskan volume benda putar itu.

11.3.3. Metode Kulit Tabung.

Kulit tabung adalah sebuah benda yang dibatasi oleh dua tabung lingkaran tegak yang sumbu simetrinya berimpit.

Jika jari-jari tabung dalam adalah r_1, dan jari-jari tabung luar adalah r_2, sedangkan tinggi tabung adalah h, maka volume kulit tabung adalah :

V = luas alas . tinggi

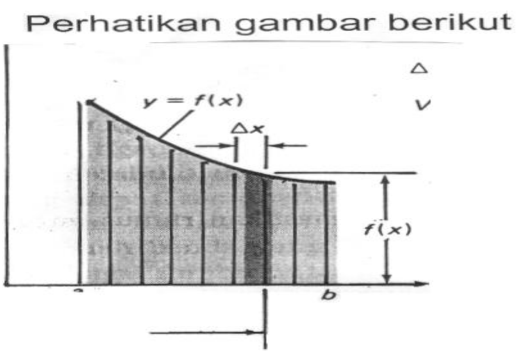
$= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$

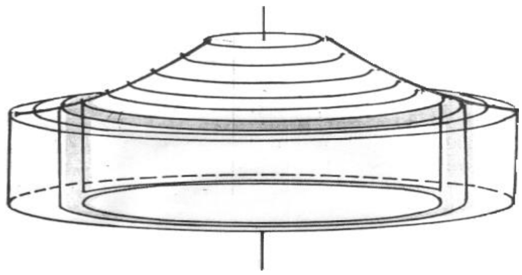
$= 2\pi\left(\dfrac{r_2 + r_1}{2}\right)(r_2 - r_1)h$

$= 2\pi$.(jari-jari rata-rata).(tebal).(tinggi)

$= 2\pi.r.h.\Delta r$

Untuk menghitung volume dengan menggunakan metode kulit tabung ini, dihitung volume ΔV sesuatu kulit tabung, jumlahkan dan kemudian tarik limit jumlah ini, jika





tebal kulit tabung menuju nol, maka limit ini menghasilkan sebuah integral yang menyatakan volume benda putar.

$$\Delta V = 2\pi r h \Delta r$$

$$= 2\pi x f(x) \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

SOAL :

1. Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 1/\sqrt{x}$, sumbu x, garis $x = 1$ dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu Y tentukan volume benda yang terbentuk.
2. Tentukan volume benda yang terbentuk jika daerah pada kuadran pertama yang terletak diatas parabola $y = x^2$ dan dibawah parabola $y = 2 - x^2$, diputar mengelilingi sumbu Y.