PERTEMUAN 4

METODE GRAFIK: HASIL OPTIMAL

A. Tujuan Pembelajaran

Pertemuan 4 menjelaskan materi Metode Grafik. Setelah mahasiswa mempelajari pertemuan ini, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Memahami hasil optimal pada Metode Grafik
2. Menggambarkan garis kendala, menentukan area layak dan menentukan titik optimum sesuai fungsi tujuan

B. Uraian Materi

1. Komponen Hasil Optimal pada Metode Grafik

Ardan Furniture akan menghasilkan dua produk yaitu meja dan kursi. Keuntungan yang diharapkan dari sebuah meja adalah $ 7, dan keuntungan yang diharapkan dari sebuah kursi adalah $ 5. Namun, untuk meraup untung, Ardan Furniture mempunyai permasalahan pada waktu kerja. Proses pembuatan meja perusahaan membutuhkan waktu kerja 4 jam, dan proses pembuatan kursi perusahaan membutuhkan waktu kerja 3 jam. Diperlukan waktu kerja 2 jam untuk mengecat meja, dan 1 jam waktu kerja mengecat kursi. Waktu kerja pembuatan meja dan kursi adalah 240 jam seminggu, dan waktu kerja untuk mengecat 100 jam seminggu. Berapa meja dan kursi yang harus diproduksi untuk keuntungan perusahaan yang maksimal?

Dari permasalahan tersebut, maka kita dapat menyimpulkan bahwa fungsi tujuannya adalah untuk memaksimalkan keuntungan yang diperoleh. Pada saat yang sama, masalah perusahaan adalah waktu yang terbatas untuk produksi dan pengecatan. Untuk mempermudah menganalisa permasalahan tersebut, maka dibuat sebuah tabel permasalahan sebagai berikut:

Tabel 7 : Informasi Permasalahan Ardan Furniture

	Jam kerja untuk membuat 1 unit produk		Total waktu tersedia per minggu
	Meja	Kursi	
Pembuatan	4	8	240
Pengecatan	2	1	100
Profit per unit	7	5	

Untuk memaksimalkan keuntungan yang didapat, perusahaan harus membuat keputusan berapa unit jumlah produksi untuk meja maupun kursi. Kita buat permisalan yaitu misalkan meja (X_1) dan untuk kursi kita buat permisalan (X_2) sebagai variabel keputusannya.

Langkah berikutnya setelah variabel keputusan diketahui adalah mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala kedalam model matematis.

Fungsi Tujuan

Dari soal di atas diketahui bahwa perusahaan tersebut ingin memaksimalkan keuntungan, maka fungsi tujuannya yaitu maksimalisasi dengan $Z = \$7X_1 + \$5X_2$

Fungsi kendala

$4X_1 + 3X_2 \leq 240$

$2X_1 + 1X_2 \leq 100$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

Berikut merupakan rumus formulasi masalah yang berdasarkan uraian diatas :

Fungsi tujuan:

Maksimisasi $Z = \$7X_1 + \$S\ X_2$. Fungsi kendala:

$4X_1 + 3X_2 \leq 240$ (kendala departemen pembuatan)

$2X_1 + 1X_2 \leq 100$ (kendala departemen pengecatan)

$X_1 \geq , 0$ (Kendala Non Negatif pertama)

$X_2 \geq , 0$ (Kendala Non Negatif kedua)

Langkah pertama dalam menyelesaikannya adalah dengan mendeskripsikan fungsi kendala. Untuk mengilustrasikan kendala pertama, mengubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda persamaan seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

$4 X_1 + 3 X_2 = 240$

Batasan ini akan memotong satu atau dua sumbu.

Seperti yang kita pelajari dalam aljabar, untuk mendeskripsikan fungsi linier yang tidak lebih dari garis lurus, kita akan menemukan perpotongan dari garis lurus dan dua sumbu. Jika nilai variabel lain adalah nol, sebuah garis akan memotong sumbu. Oleh karena itu, ketika $X_2 = 0$, kendala pertama akan memotong X_1, sehingga ketika $X_1 = 0$, X_2 juga akan dipotong.

Kendala I: $4X_1 + 3X_2 = 240$

memotong sumbu X_1 pada saat $X_2 = 0$ $4 X_1+0=240$

$X_1 = 240/4 \Leftrightarrow X_1 = 60.$

memotong sumbu X_2 pada saat $X_1 = 0$ $0 + 3 X_2 = 240$

$X_2 = 240/3 \Leftrightarrow X_2 = 80$

Kendala I memotong sumbu X_1 pada titik (60, 0) dan memotong sumbu X_2 pada titik (0,80)

Kendala II: $2X_1 + 1X_2 = 100$

memotong sumbu X_1 pada saat $X_2 = 0$

$2 X_1+0=100$

$X_1 = 100/2$

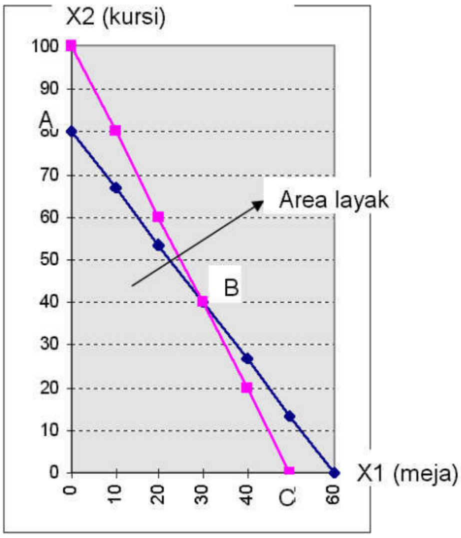
$X_1 = 50$

memotong sumbu X_2 pada saat $X_1 =0$

$O+ X_2 =100$

$X_2 = 100$

Kendala I memotong sumbu X_1 pada titik (50, 0) dan memotong sumbu X_2 pada titik (0,100).



Gambar 15 : Grafik Area Layak

Titik potong kedua kendala bisa dicari dengan cara substitusi atau eliminasi

$2X_1+1X_2=100$

$X_2=100-2X_1$

$4X_1+3X_2 = 240$

$4X_1+3(100-2X_1)=240$

$4X_1+300-6X_1 = 240$

$-2X_1 = 240-300$

$-2X_1 = -60$

$X_1 = -60/-2 = 30.$

$X_2=100-2X_1$

$X_2 = 100 – 2(30)$

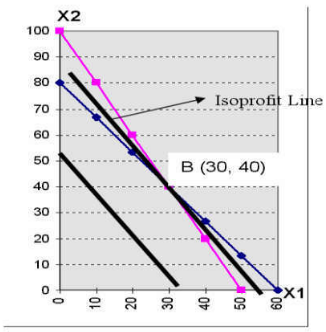
$X_2=100-60$

$X_2 = 40$

Sehingga kedua kendala akan saling berpotongan pada titik (30, 40). Simbol ≤ dari dua pembatas ditampilkan di area di sebelah kiri garis pembatas. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.1, area yang layak (*feasible region)* meliputi area di sebelah kiri titik A (0; 80), B (30; 40) dan C (60; 0). Untuk menentukan solusi terbaik dapat digunakan dua metode, yaitu 1. Dengan menggunakan garis keuntungan (*iso profit link*) 2. Dengan titik sudut (*corner point*)

Solusi yang menggunakan garis keuntungan adalah pemecahannya dengan mendeskripsikan fungsi tujuan. Kemudian memindahkan fungsi tujuan ke kanan hingga menyentuh titik terjauh dari titik nol, tetapi masih dalam kisaran yang memungkinkan. Untuk menggambar garis keuntungan, kami mengganti nilai Z dengan nilai apa pun yang mudah dibagi dengan koefisien fungsi keuntungan. Dalam hal ini, bilangan yang mudah dibagi 7 (koefisien X1) dan 5 (koefisien X2) adalah 35. Oleh karena itu, fungsi tujuan menjadi 35 = 7 X1 + 5 X2.

Garis ini akan memotong sumbu X1 pada titik (5, 0) dan memotong sumbu X2 pada titik (0, 7). Dapat dilihat dari Gambar 19 bahwa garis pendapatan iso menyinggung titik B, yang merupakan titik terjauh dari nol. Titik B ini adalah titik terbaik. Untuk mengetahui berapa nilai X_1 dan X_2 dan nilai Z dari titik B, kita mencari perpotongan antara kendala I dan kendala II (karena titik B adalah perpotongan kendala I dan kendala II). Dengan menggunakan eliminasi atau penggantian, nilai $X_1 = 30$, $X_2 = 40$ dan $Z = 410$. Hasil perhitungan tersebut dapat disimpulkan bahwa keputusan perusahaan untuk memberikan laba yang maksimal adalah dengan memproduksi 30 unit X_1 dan 40 unit X_2, dan perusahaan akan mendapatkan keuntungan sebesar 410.



Gambar 16 : Iso profit line

Solusi penggunaan titik sudut berarti kita harus mencari titik maksimal dari dua titik berikut: titik di *feasible region*. Terlihat dari Gambar 1 terdapat 4 titik yang membatasi kawasan layak, yaitu titik 0 (0, 0), titik A (0, 80), titik B (30, 40) dan titik C (50, 0). .

Keuntungan di titik O (0, 0) adalah (7 x 0) + (5 x 0) = 0.

Keuntungan dari titik A (0; 80) adalah (7 x 0) + (5 x 80) = 400.

Keuntungan dari titik B (30; 40) adalah (7 x 30) + (5 x 40) = 410.

Keuntungan di titik C (50; 0) adalah (7 x 50) + (5 x 0) = 350.

Karena laba tertinggi jatuh pada titik B, perusahaan harus memproduksi 30 meja dan 40 kursi, dan perusahaan harus mendapatkan laba terbaik 410.

2. Menggambarkan Garis-garis Kendala dan Menentukan Area Layaknya serta Titik Optimum sesuai Fungsi Tujuan

Mencari nilai optimum pada metode grafik dapat dilakukan dengan:

- Garis selidik
- Mencari pada titik-titik pada garis batas dari daerah layak.

a. Garis Selidik

Contoh:

Mencari x,y tidak negatif yang memenuhi:

(1) $2x \leq 8$

(2) $3y \leq 15$

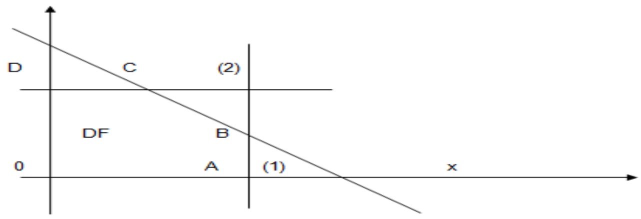
(3) $6x + 5y \leq 30$

(4) $x \geq 0$

(5) $y \geq 0$

dan memaksimalkan $f = 3x + 5y$

Pertidaksamaan (1) sampai dengan (3) merupakan kendala utama dan Pertidaksamaan (4) dan (5) merupakan kendala tidak negatif. Dari masing–masing kendala di atas apabila digambarkan akan diperoleh suatu grafik dengan daerah yang tertutup seperti gambar berikut:

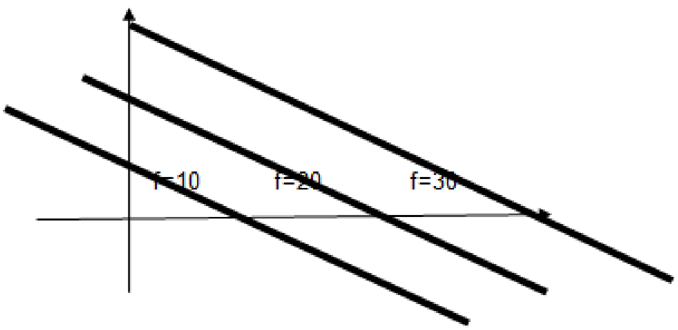


Gambar 17 : Daerah fisibel

Dari grafik diperoleh suatu daerah fisibel (DF) yang merupakan daerah tertutup 0ABCD. Daerah fisibel adalah daerah yang memenuhi sebagai penyelesaian layak. Penyelesaian layak (PL) sendiri dimaksudkan suatu pasangan (x,y) yang memenuhi semua kendala yang ada. Sedangkan (x,y) nya sendiri dinamakan titik layak. Titik –titik yang ada pada daerah layak merupakan calon-calon "dia" sebagai titik optimum.

Untuk mencari berapa nilai optimum dan titik layak mana yang memberikan nilai optimum, langkah selanjutnya digambarkan grafik fungsi sasaran sebagai **garis selidik**. Penggambaran grafik fungsi sasaran pada contoh soal di atas yang memiliki fungsi sasaran f=3x+5y dapat diambil f=10, f=20 ataupun f= 30. Sehingga kita dapat menggambar fungsi 3x+5y=10, 3x+5y=20 dan 3x+5y=30. Di dalam pengambilan nilai f adalah sembarang. Dari ketiga persamaan tersebut masing-masing memiliki gradient yang sama yaitu: -3/5 artinya ketiga garis lurus itu letaknya saling sejajar.

letaknya saling sejajar.

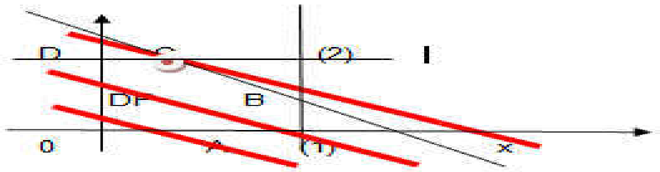


Gambar 18 : **Garis Senilai**

Grafik fungsi sasaran yang dilukis di atas dengan persamaan 3x+5y=k dengan mengganti k bilangan sembarang, ternyata menghasiulkan fungsi sasaran yang berupa garis luirus dan disebut garis senilai.

Apabila garis f selaku garis selidik digeser ke kanan maka diperoleh nilai f yang semakin besar

Dari Gambar 4.4 dapat dilanjutkan dengan menggambarkan garis selidiknya, diperoleh Gambar 4.5 berikut ini:



Gambar 19 : Daerah fisibel 0ABCD dan garis selidik

Setelah dilakukan penggeseran garis selidik ke kanan diperoleh nilai f yang terbesar (optimum) di titik C. Titik C adalah titik perpotongan garis (1) dan (2) dengan koordinat (x,y)= (5/6, 5). Dari titik (x,y)=(5/6,5) tersebut dimasukkan ke fungsi tujuan f= 3x+5y sehingga diperoleh 3(5/6)+5(5)=27½. Jadi dari contoh soal di atas diperoleh kesimpulan f maksimum sebesar 27 ½ dengan x=5/6 dan y=5.

b. **Mencari pada titik-titik pada garis batas dari daerah fifibel.**

Untuk mencari nilai optimum juga dapat dilakukan tanpa menggunakan garis selidik, yaitu dengan membandingkan nilai fungsi tujuan yang didapat setelah memasukkan titik-titik yang ada di daerah fisibel.

Pada daerah fisibel yang berupa daerah tertutup, untuk mencari nilai optimum cukup diselidiki pada titik sudut- titik sudut. Pada contoh soal di atas titik sudut adalah: 0(0,0), A(4,0), B(4, 5/6), C(5/6,5) dan D(0,5). Pada

titik O(0,0) diperoleh nilai f=0,
Titik A(4,0) → x=4 , y=0 diperoleh f=3.4+0=12
Titik B(4,5/6) diperoleh f=18
Titik C(5/6,5) diperoleh f=27 ½
Titik D(0,5) diperoleh f=25
Dari ke lima hasil nilai f ,diperoleh nilai f maksimum= 27 ½ di (x,y)=(5/6,5).

Daerah fisibel tak terbatas

Suatu soal yang berbunyi:

Mencari x,y yang memenuhi:

$x + y \geq 12$ (1)

$5x + y \geq 20$ (2)

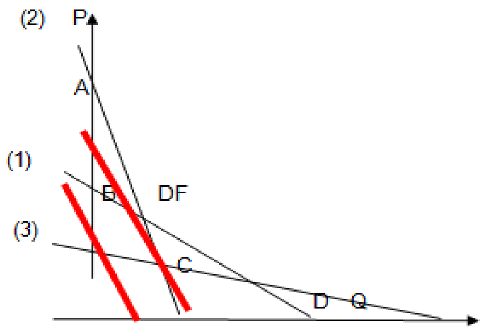
$x + 6y \geq 24$ (3)

$x \geq 0$ (4)

$y \geq 0$ (5)

dan meminimumkan $f=10x + 30y$.

Soal di atas apabila digambar, maka akan diperoleh suatu daerah fisibel yang tidak terbatas (unbounded). Adapun gambarnya adalah sebagai berikut:



Gambar 20 : Daerah fisibel PABCDQ dan garis selidik

Daerah fisibel ditunjukkan pada daerah terbuka PABCDQ yang merupakan daerah layak yang tak terbatas.

Garis selidik dapat dilukiskan pada Gambar 4.6 dengan mengambil f=0 dan f=10. Garis selidik memiliki gardien -1/3 dan garis selidik semakin di geser ke kiri akan memberikan nilai f yang semakin kecil.

Kendala berlebih (redundant)

Mencari x,y tak negatip yang memenuhi:

$4x + 2y \geq 4$ (1)

$2x + 6y \geq 12$ (2)

$2x + 6y \geq 24$ (3)

$x + y \geq 8$ (4)

$2x + y \geq 10$ (5)

$2x + y \geq 2$ (6)

$x \geq 0$ (7)

$y \geq 0$ (8)

dan meminimumkan $f = 100 - 40x - 15y$

Dari gambar grafik, diperoleh daerah fisibel yang tak terbatas (*unbounded*) yang dibatasi oleh 6 kendala, yaitu: ……… Sedangkan kendala … dan … tidak menjadi batas daerah fisibel. Walaupun dua kendala ini tidak sebagai batas, dua kendala ini telah terwakili oleh kendala yang lain. Artinya syarat dua kendala itu otomatis terpenuhi apabila kendala – kendala yang lain juga terpenuhi. Dua kendala ini dinamakan berlebih (*redundant*).

Merosot (*degenerate*)

Mencari x,y tak negatip yang memenuhi:

$3x + y \geq 6$ (1)

$4x + 3y \geq 12$ (2)

$x + 4y \geq 4$ (3)

$5x + 10y \geq 42$ (4)

$x \geq 0$ (5)

$y \geq 0$ (6)

dan meminimumkan $f = 40x + 5y$

Kendala berbentuk Persamaan

Tentukan x,y,z yang memaksimumkan $f = 30x + 20y + 5z$ dengan kendala:

$2x + 2y + z \geq 40$ (1)

$3y + 4z \geq 10$ (2)

$x + 3y + 3z = 30$ (3)

$5z \leq 50$ (4)

$x \geq 0$ (5)

$y \geq 0$ (6)

$z \geq 0$ (7)

Karena di dalam kendala terdapat satu persamaan yaitu persamaan (3) sehingga dapat dilakukan eliminasi, $x = -3y - 3z$ ke persamaan–persamaan yang lain sehingga diperoleh:

$2(-3y - 3z) + 2y + z \geq 40$ (1)

$3y + 4z \geq 10$ (2)

$5z \leq 50$ (3)

$-3y - 3z \geq 0$ (4)

$y \geq 0$ (5)

$z \geq 0$ (6)

dan memaksimumkan $f = 30(-3y - 3z) + 20y + 5z$

dapat disederhanakan menjadi:

$-4y - 2z \geq 40$ (1)

$3y + 4z \geq 10$ (2)

$5z \leq 50$ (3)

$-3y - 3z \geq 0$ (4)

$y \geq 0$ (5)

$z \geq 0$ (6)

dan memaksimumkan $f = -70y - 85z$

C. Soal Latihan/Tugas

1. Buatlah tabel faktor kendala, persamaan z, dan tentukan area layaknya serta titik optimum sesuai fungsi tujuan!

D. Referensi

Kuliah Manajemen. (2009, 12). Retrieved 05 2021, from Linier Programming Metode Grafik: http://kuliah-manajemen.blogspot.com/2009/12/linear-programming-metode-grafik.html

Linier Programming Metode Grafik. (2014, 10 26). Retrieved 20 2021, from andariisnadiah: https://andariisnadiah.wordpress.com/2014/10/26/linier-programming-metode-grafik/

Program Linear. (2017). Retrieved 05 20, 2021, from studiobelajar: https://www.studiobelajar.com/program-linear/

Pengertian linear programming. (2021, 03 26). Retrieved 05 20, from guru pendidikan: https://www.gurupendidikan.co.id/pengertian-linear-programing/

Frederich S. Hiller, G. J. (1990). Introduction to operations research. New York: McGraw-Hill.

Metode Grafik Garis Selidik. (n.d.). Retrieved 05 20, 2021, from Academia: https://www.academia.edu/8859275/P3a_METODE_GRAFIK_GARIS_SELIDIK

Syaifudin, D. T. (2011). Riset Operasi (Aplikasi Quantitative Analysis for Management). Malang: CV. Citra Malang.

Taha, H. A. (2006). *Operations Research: An Introduction .* Prentice Hall.