

PERTEMUAN 13**ALJABAR HITUNG LIMIT****A. TUJUAN PEMBELAJARAN**

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu materi mengenai aljabar hitung limit dalam matematika.

B. URAIAN MATERI**1. Teknik Aljabar Untuk Menghitung Limit**

Sifat-sifat dasar limit yang dinyatakan dalam beberapa teorema berikut ini sangat diperlukan dalam hitung limit.

Teorema 1

(i) $\lim_{x \rightarrow c} A = A$ untuk $A, c \in \mathbb{R}$.

(ii). $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

Teorema 2

Fungsi limit $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ keduanya ada dan $k \in R$ maka berlaku

pernyataan-pernyataan berikut:

- i. $\lim_{x \rightarrow c} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$, jika $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
- v. Untuk $n \in N$: (a). $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n$

Perhatikan soal dan penyelesaian berikut:

Contoh 1.

$$(a). \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 7x + 6) \underset{(i)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 7x + \lim_{x \rightarrow 2} 6$$

$$\begin{aligned} &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 7 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 6 \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 7 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 6 \\ &\quad \underset{v.a)}{} \\ &= 2.2^2 - 7.2 + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$(b). \lim_{x \rightarrow 1} 7x\sqrt{2x-1} \underset{3.2.2 \text{ (iii)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} 7x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-1}$$

$$\underset{3.2.2 \text{ (ii) \& (v.c)}}{=} \left(7 \lim_{x \rightarrow 1} x \right) \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)} = (7.1)\sqrt{2.1-1} = 7$$

$$(c). \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+3}{5x+2} \underset{3.2.2 \text{ (iv)}}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (2x+3)}{\lim_{x \rightarrow -1} (5x+2)} = \frac{2.(-1)+3}{5.(-1)+2} = \frac{1}{-3}$$

Contoh 2. Hitung

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Penyelesaian: Dilakukan substitusi langsung ke persamaan, Didapatkan $\frac{0}{0}$; kondisi ini penyebut sama dengan 0, maka tidak dapat digunakan. Oleh karenanya dilakukan penguraian dengan memanfaatkan teknik-teknik aljabar, untuk $x \neq 2$ sehingga diperoleh:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} \\ &= \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Contoh 3: Tentukan $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^4 - 16} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - (-2)^3}{x^4 - (-2)^4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - (-2))(x^2 + x \cdot (-2) + (-2)^2)}{(x - (-2))(x^3 + x^2 \cdot (-2) + x \cdot (-2)^2 + (-2)^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 2x + 4)}{(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)} = \frac{4 + 4 + 4}{-8 - 8 - 8 - 8} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Contoh 4. Carilah

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1}}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1)$$

$$= \sqrt{1} + 1 = 2.$$

Contoh 5. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$.

Penyelesaian: Untuk $x \neq 0$, $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$. Oleh karena itu, untuk $x \neq 0$ berlaku:

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

Hal ini berakibat:

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

Selanjutnya, karena $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ maka $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Untuk soal 1 – 6, tunjukkan pernyataan berikut dengan definisi limit.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) =$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} =$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} x^2 =$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x-1} =$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} =$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$7. \text{ Jika } f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \text{ tunjukkan bahwa } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ tidak ada.}$$

Untuk soal 8 – 20, hitunglah masing-masing limit jika ada.

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 20)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x + 1)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x-3}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x^3 - 8}$$

$$14. \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s^4 - 1}{s^3 + 1}$$

$$15. \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^{3/2} - 1}{1 - u}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{1 - x^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -a} \frac{x^n + a^n}{x + a}$$

$$20. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1/x) - (1/2)}{x - 2}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer