

## PERTEMUAN 9

### SISTEM PERSAMAAN LINIER

#### A. Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan pertemuan ini Mahasiswa dapat memahami konsep sistem persamaan linier (SPL) dan menyelesaikan spl dengan eliminasi dan substitusi.

#### B. Uraian Materi

##### 1. Pengertian Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier adalah sekumpulan dari persamaan linier yang terdiri dari beberapa variabel dimana sistem persamaan linier ini terdiri dari tiga variabel yaitu  $x$ ,  $y$  dan  $z$ .

##### 2. Metode Persamaan Linier

###### a. Eliminasi

Eliminasi adalah menghilangkan salah satu persamaan dan meletakkan kedua persamaan dalam posisi urutan yang sama dan membuat salah satu variabel untuk memiliki koefisien yang sama dengan variabel kedua yang ingin di eliminasi.

##### 1) SPL Metode Eliminasi 2 Variabel

###### Contoh:

Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi?

$$a. \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} -x + 4y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} -4x - y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

###### Jawab:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

$$3x - 4y = 7$$

Langkah pertama adalah menghilangkan salah satu variabel dari persamaan diatas. Kita boleh menghilangkan  $x$  terlebih dahulu ataupun  $y$  terlebih dahulu. Disini kita akan menghilangkan variabel  $x$ , maka nilai variabel  $x$  harus kita samakan antara persamaan 1 dan 2.

Sehingga:

$$2x - 3y = -1 \quad \times 3$$

$$3x - 4y = 7 \quad \times 2$$

---


$$6x - 9y = -3$$

$$\begin{array}{r} 6x - 8y = 14 \\ -y = -17 \end{array} \quad -$$

$y = 17$  dimasukkan ke persamaan 1

sehinggga menjadi:

$$2x - 3y = -1$$

$$2x - 3.17 = -1$$

$$2x - 51 = -1$$

$$2x = -1 + 51$$

$$2x = 50$$

$$x = 50/2$$

$$x = 25$$

Maka diperoleh nilai  $x = 25$  dan  $y = 17$  dengan pembuktian sebagai berikut:

$$2x - 3y = -1$$

$$1.25 - 3.17 = -1$$

$$50 - 51 = -1$$

$$-1 = -1$$

b)  $-x + 4y = 3$

$$2x - 3y = 5$$

Langkah pertama menghilangkan salah satu variabel persamaan diatas. boleh menghilangkan  $x$  terlebih dahulu ataupun  $y$  terlebih dahulu. Disini kita akan menghilangkan variabel  $y$ , maka nilai variabel  $y$  harus kita samakan antara persamaan 1 dan 2. Sehingga:

$$-x + 4y = 3 \quad \times 3$$

$$2x - 3y = 5 \quad \times 4$$

$$-3x + 12y = 9$$

$$8x - 12y = 20 \quad +$$

$$5x = 29$$

$x = \frac{29}{5}$  kita masukkan ke persamaan 2,

sehinggga menjadi:

$$2x - 3y = 5$$

$$2 \cdot \frac{29}{5} - 3y = 5$$

$$\frac{58}{5} - 3y = 5$$

$$-3y = 5 - \frac{58}{5}$$

$$-3y = \frac{25}{5} - \frac{58}{5}$$

$$-3y = -\frac{33}{5}$$

$$y = -\frac{33}{5} : \frac{-3}{1}$$

$$y = -\frac{33}{5} \times \frac{-1}{3}$$

$$y = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}$$

Maka diperoleh nilai  $x = \frac{29}{5}$  dan  $y = \frac{11}{5}$  dengan pembuktian:

$$2x - 3y = 5$$

$$2 \cdot \frac{29}{5} - 3 \cdot \frac{11}{5} = 5$$

$$\frac{58}{5} - \frac{33}{5} = 5$$

$$\frac{25}{5} = 5$$

$$5 = 5$$

Karena ruas kiri nilainya sama dengan ruas kanan, dimana sesuai dengan pembuktian maka nilai  $x$  dan  $y$  benar.

c)  $-4x - y = 3$

$$2x + 3y = 5$$

Langkah pertama menghilangkan salah satu variabel persamaan diatas. boleh menghilangkan  $x$  terlebih dahulu ataupun  $y$  terlebih dahulu. Disini akan menghilangkan variabel  $x$ , maka nilai variabel  $x$  harus kita samakan antara persamaan 1 dan 2. Sehingga:

$$-4x - y = 3 \quad | \times 1$$

$$2x + 3y = 5 \quad | \times 2$$

$$-4x - y = 3$$

$$4x + 6y = 10 \quad +$$

$$5y = 13$$

$$y = \frac{13}{5} \text{ (Masukkan ke persamaan 2 untuk mencari nilai } x \text{)}$$

Sehingga Persamaan 2 menjadi:

$$2x + 3y = 5$$

$$2x + 3 \cdot \frac{13}{5} = 5$$

$$2x + \frac{39}{5} = 5$$

$$2x = 5 - \frac{39}{5}$$

$$2x = \frac{25}{5} - \frac{39}{5}$$

$$2x = -\frac{14}{5}$$

$$x = \frac{-\frac{14}{5}}{2} = \frac{-\frac{14}{5}}{\frac{2}{1}}$$

$$x = -\frac{14}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5}$$

Sehingga diperoleh nilai  $x = -\frac{7}{5}$  dan  $y = \frac{13}{5}$

## 2) SPL Metode Eliminasi 3 Variabel

a) Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi

$$2x - 3y + z = 2$$

$$x - 2y + z = 5$$

$$3x - y + 3z = 6$$

**Jawab:**

$$2x - 3y + z = 2 \quad \text{Pers. 1)}$$

$$x - 2y + z = 5 \quad \text{Pers. 2)}$$

$$3x - y + 3z = 6 \quad \text{Pers. 3)}$$

Langkah pertama eliminasi persamaan 1) dan 2) yaitu:

$$2x - 3y + z = 2 \quad \times 1$$

$$x - 2y + z = 5 \quad \times 2$$

$$2x - 3y + z = 2$$

$$2x - 4y + 2z = 10 \quad \underline{\quad}$$

$$y - z = -8 \quad \text{Pers. 4)}$$

Setelah persamaan 4 diperoleh, maka kita eliminasi persamaan 1 dan persamaan 3 yaitu:

$$2x - 3y + z = 2 \quad \times 3$$

$$3x - y + 3z = 6 \quad \times 2$$

$$6x - 9y + 3z = 6$$

$$6x - 2y + 6z = 12 \quad \underline{\quad}$$

$$-7y - 3z = -6 \quad \text{Pers. 5)}$$

Langkah selanjutnya adalah eliminasi persamaan 4) dan 5)

$$\begin{array}{r|l} y - z = -8 & \times 3 \\ -7y - 3z = -6 & \times 1 \end{array}$$

$$3y - 3z = -24$$

$$-7y - 3z = -6 \quad -$$

$$10y = -18$$

$$y = -\frac{18}{10}$$

$$y = -\frac{9}{5} \text{ (selanjutnya cari nilai } z \text{ menggunakan persamaan 4)}$$

dimana:

$$y - z = -8$$

$$-\frac{9}{5} - z = -8$$

$$-z = -8 + \frac{9}{5}$$

$$-z = -\frac{40}{5} + \frac{9}{5} = -\frac{31}{5}$$

$$z = \frac{-\frac{31}{5}}{-1} = -\frac{31}{5} \times -1 = \frac{31}{5}$$

Diperoleh nilai  $y = -\frac{9}{5}$  dan  $z = \frac{31}{5}$  maka disini kita mencari nilai  $x$  menggunakan persamaan 1, yaitu:

$$2x - 3y + z = 2$$

$$2x - (3 \times \frac{9}{5}) + \frac{31}{5} = 2$$

$$2x + \frac{27}{5} + \frac{31}{5} = 2$$

$$2x + \frac{58}{5} = 2$$

$$2x = 2 - \frac{58}{5}$$

$$2x = \frac{10}{5} - \frac{58}{5}$$

$$2x = -\frac{48}{5}$$

$$x = \frac{-\frac{48}{5}}{2}$$

$$x = \frac{-\frac{48}{5}}{\frac{2}{1}} \rightarrow \text{ket : } 2 \text{ sama dengan } \frac{2}{1} \text{ kemudian } \frac{-\frac{48}{5}}{\frac{2}{1}}$$

dirubah perkalian yaitu menjadi  $-\frac{48}{5} \times \frac{1}{2}$

$$x = -\frac{48}{5} \times \frac{1}{2} = -\frac{48}{10} \text{ (diperkecil, sama2 dibagi 2), menjadi:}$$

$$x = -\frac{24}{5}$$

sehingga kita sudah memperoleh nilai  $x = -\frac{24}{5}$ ,  $y = -\frac{9}{5}$  dan  $z = \frac{31}{5}$ .

pembuktian:

$$2x - 3y + z = 2$$

$$2 \cdot -\frac{24}{5} - 3 \cdot -\frac{9}{5} + \frac{31}{5} = 2$$

$$-\frac{48}{5} + \frac{27}{5} + \frac{31}{5} = 2$$

$$\frac{10}{5} = 2$$

$$2 = 2 \text{ (Terbukti)}$$

b)  $4x - 3y - z = 8$

$$2x + y + 3z = -2$$

$$3x - 2y + z = 4$$

**Jawab:**

$$4x - 3y - z = 8 \text{ .....1)}$$

$$2x + y + 3z = -2 \text{ ..... 2)}$$

$$3x - 2y + z = 4 \text{ .....3)}$$

Eliminasi persamaan 1) dan 2)

$$4x - 3y - z = 8 \quad \times 3$$

$$2x + y + 3z = -2 \quad \times 1$$

$$12x - 9y - 3z = 24$$

$$2x + y + 3z = -2 \quad +$$

$$14x - 8y = 22 \text{ .....4)}$$

Eliminasi persamaan 1) dan 3)

$$4x - 3y - z = 8$$

$$3x - 2y + z = 4 \quad +$$

$$7x - 5y = 12 \text{ .....5)}$$

Lalu eliminasi persamaan 4) dan persamaan 5)

$$14x - 8y = 22 \quad \times 1$$

$$7x - 5y = 12 \quad \times 2$$

$$14x - 8y = 22$$

$$14x - 10y = 24 \quad -$$

$$2y = -2$$

$$y = \frac{-2}{2}$$

$$y = -1$$

sehingga didapat nilai  $y = -1$ , maka selanjutnya kita cari nilai  $x$  dengan menggunakan persamaan 4), Dimana:

$$14x - 8y = 22$$

$$14x - (8 \cdot -1) = 22$$

$$14x + 8 = 22$$

$$14x = 22 - 8$$

$$14x = 14$$

$$x = 1$$

Setelah diperoleh nilai  $x = 1$  dan  $y = -1$ , maka selanjutnya kita harus mencari nilai  $z$ . disini kita menggunakan persamaan 3). Sehingga:

$$3x - 2y + z = 4$$

$$3(1) - 2(-1) + z = 4$$

$$3 + 2 + z = 4$$

$$5 + z = 4$$

$$z = 4 - 5$$

$$z = -1$$

Sehingga diperoleh:

$$x = 1$$

$$y = -1$$

$$z = -1$$

## b. Substitusi

Substitusi adalah mengganti salah satu persamaan menjadi persamaan yang lain atau membuat salah satu persamaan menjadi persamaan  $x = \dots$ . Atau persamaan  $y = \dots$ . Dan memasukkan hasil persamaan yang sudah diganti ke persamaan yang lainnya.

### 1) SPL Metode Substitusi 2 Variabel

Contoh:

Selesaikan SPL berikut dengan metode substitusi:

a)  $2x - 3y = -1$

b)  $-x + 4y = 3$

$3x - 4y = 7$

$2x - 3y = 5$

**Jawab:**

$$a) 2x - 3y = -1$$

$$3x - 4y = 7$$

Persamaan diatas yang kita gunakan adalah contoh dari persamaan SPL metode eliminasi. Dimana substitusi adalah mengganti salah satu persamaan. Maka disini persamaan yang diganti adalah persamaan 1, sehingga:

$$2x - 3y = -1$$

$$2x = -1 + 3y$$

$$x = \frac{-1 + 3y}{2}$$

$$x = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}y$$

(persamaan x yang sudah diganti dimasukkan ke persamaan 2)

Maka:

$$3x - 4y = 7$$

$$3\left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}y\right) - 4y = 7$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{9}{2}y - 4y = 7 \rightarrow 4y \text{ kita ubah kedalam per'an menjadi } \frac{8}{2}y$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{9}{2}y - \frac{8}{2}y = 7$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y = 7$$

$$\frac{1}{2}y = 7 + \frac{3}{2} \text{ (ket: } -\frac{3}{2} \text{ pindah ruas menjadi } +\frac{3}{2})$$

$$\frac{1}{2}y = \frac{14}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}y = \frac{17}{2}$$

$$y = \frac{17/2}{1/2}$$

$$y = \frac{17}{2} \times \frac{2}{1}$$

$$y = \frac{34}{2} = 17$$

(Hasil Y = 17 hasilnya sama dengan hasil pada saat eliminasi)

Maka:

$$x = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}y$$

$$x = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}(17)$$

$$x = \frac{-1}{2} + \frac{51}{2}$$

$$x = \frac{50}{2}$$



$$x = 25$$

Sehingga diperoleh nilai  $x = 25$  dan  $y = 17$ , dimana hasil  $x$  dan  $y$  sama dengan metode eliminasi.

$$b) -x + 4y = 3$$

$$2x - 3y = 5$$

Persamaan diatas yang kita gunakan adalah contoh dari persamaan SPL metode eliminasi. Dimana substitusi adalah mengganti salah satu persamaan. Maka persamaan yang diganti adalah pers. 2, sehingga:

$$2x - 3y = 5$$

$$2x = 5 + 3y$$

$$x = \frac{5 + 3y}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}y \text{ (nilai } x \text{ dimasukkan ke persamaan 1), sehingga:}$$

$$-x + 4y = 3$$

$$-\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}y\right) + 4y = 3$$

$$-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}y + 4y = 3$$

$$-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{8}{2}y = 3$$

$$-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}y = 3$$

$$\frac{5}{2}y = 3 + \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2}y = \frac{6}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2}y = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{11/2}{5/2}$$

$$y = \frac{11}{2} \times \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

(maka nilai  $y = \frac{11}{5}$  sama dengan hasil nilai  $y$  pada cara eliminasi)

Maka :

$$x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}y$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{11}{5}\right)$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{33}{10}$$

$$x = \frac{25}{10} + \frac{33}{10}$$

$$x = \frac{58}{10}$$

$$x = \frac{29}{5}$$

Sehingga diperoleh nilai  $x = \frac{29}{5}$  dan nilai  $y = \frac{11}{5}$ . Dimana hasil yang diperoleh sama dengan hasil eliminasi.

## 2) SPL Metode Substitusi 3 Variabel

Selesaikan SPL berikut dengan metode substitusi:

a)  $2x - 3y + z = 2$

$$x - 2y + z = 5$$

$$3x - y + 3z = 6$$

b)  $4x - 3y - z = 8$

$$2x + y + 3z = -2$$

$$3x - 2y + z = 4$$

**Jawab:**

a)  $2x - 3y + z = 2$  ..... 1)

$$x - 2y + z = 5$$
 ..... 2)

$$3x - y + 3z = 6$$
 ..... 3)

Disini kita mengganti persamaan 2 yaitu:

$$x - 2y + z = 5$$

$$x = 5 + 2y - z$$

(persamaan yang sudah diganti dimasukkan ke pers. 1 dan 3)

Persamaan 1:

$$2x - 3y + z = 2$$

$$2(5 + 2y - z) - 3y + z = 2$$

$$10 + 4y - 2z - 3y + z = 2$$

$$10 + 4y - 3y - 2z + z = 2$$

$$10 + y - z = 2$$

$$y - z = 2 - 10$$

$$y - z = -8$$

$$y = -8 + z$$
 ..... 4)

Persamaan 3:

$$3x - y + 3z = 6$$

$$3(5 + 2y - z) - y + 3z = 6$$

$$15 + 6y - 3z - y + 3z = 6$$

$$15 + 6y - y - 3z + 3z = 6$$

$$15 + 5y = 6$$

$$5y = 6 - 15$$

$$5y = -9$$

$$y = -\frac{9}{5}$$

kemudian nilai y masukan ke persamaan 4), menjadi:

$$y = -8 + z$$

$$-\frac{9}{5} = -8 + z$$

$$-\frac{9}{5} + 8 = z$$

$$z = -\frac{9}{5} + 8$$

$$z = -\frac{9}{5} + \frac{40}{5}$$

$$z = \frac{31}{5}$$

Selanjutnya adalah mencari nilai x, dengan menggunakan persamaan 2 yang sudah diganti tadi, yaitu:

$$x = 5 + 2y - z$$

$$x = 5 + 2\left(-\frac{9}{5}\right) - \frac{31}{5}$$

$$x = 5 - \frac{18}{5} - \frac{31}{5}$$

$$x = \frac{25}{5} - \frac{18}{5} - \frac{31}{5}$$

$$x = -\frac{24}{5}$$

Maka nilai  $x = -\frac{24}{5}$   $y = -\frac{9}{5}$  dan  $z = \frac{31}{5}$  hasilnya sama dengan cara menggunakan eliminasi.

b)  $4x - 3y - z = 8$  ..... 1)

$2x + y + 3z = -2$  ..... 2)

$3x - 2y + z = 4$  ..... 3)

Mengganti persamaan 1 menjadi:

$$4x - 3y - z = 8$$

$$-z = 8 - 4x + 3y$$

$$z = \frac{8 - 4x + 3y}{-1}$$

$$z = -8 + 4x - 3y \text{ (Masukkan ke persamaan 2 dan persamaan 3)}$$

Persamaan 2:

$$2x + y + 3z = -2$$

$$2x + y + 3(-8 + 4x - 3y) = -2$$

$$2x + y - 24 + 12x - 9y = -2$$

$$2x + 12x + y - 9y - 24 = -2$$

$$14x - 8y - 24 = -2$$

$$14x - 8y = -2 + 24$$

$$14x - 8y = 22 \text{ .....4)}$$

Persamaan 3:

$$3x - 2y + z = 4$$

$$3x - 2y + (-8 + 4x - 3y) = 4$$

$$3x + 4x - 2y - 3y - 8 = 4$$

$$7x - 5y - 8 = 4$$

$$7x - 5y = 4 + 8$$

$$7x - 5y = 12 \text{ .....5)}$$

Setelah persamaan 4 dan persamaan 5 diketahui, maka kita kembali mengganti persamaannya. Disini persamaan yg kita ganti adalah persamaan 4, yaitu:

$$14x - 8y = 22$$

$$14x = 22 + 8y$$

$$x = \frac{22 + 8y}{14}$$

$$x = \frac{22}{14} + \frac{8}{14}y$$

kemudian Masukkan ke persamaan, menjadi:

Persamaan 5:

$$7x - 5y = 12$$

$$7\left(\frac{22}{14} + \frac{8}{14}y\right) - 5y = 12$$

$$\frac{154}{14} + \frac{56}{14}y - 5y = 12$$

$$\frac{154}{14} + \frac{56}{14}y - \frac{70}{14}y = 12$$

$$\frac{154}{14} - \frac{14}{14}y = 12$$

$$\frac{154}{14} - y = 12$$

$$-y = 12 - \frac{154}{14}$$

$$-y = \frac{168}{14} - \frac{154}{14}$$

$$-y = \frac{14}{14}$$

$$-y = 1$$

$$y = -1$$

Kemudian kita masukkan ke persamaan 4 yang sudah diganti untuk mencari nilai x, menjadi:

$$x = \frac{22}{14} + \frac{8}{14}y$$

$$x = \frac{22}{14} + \frac{8}{14}(-1)$$

$$x = \frac{22}{14} - \frac{8}{14}$$

$$x = \frac{14}{14}$$

$$x = 1$$

Setelah nilai x dan y diperoleh maka kita mencari nilai z dengan menggunakan persamaan 1 yang sudah diganti, yaitu:

$$z = -8 + 4x - 3y$$

$$z = -8 + 4(1) - 3(-1)$$

$$z = -8 + 4 + 3$$

$$z = -1$$

Maka diperoleh  $x = 1$ ,  $y = -1$  dan  $z = -1$ , dimana Hasilnya sama dengan hasil menggunakan cara eliminasi.

**C. Soal Latihan/Tugas**

1. Berapakah nilai  $q$  yang memenuhi persamaan  $-5p + 2q = 15$  dan  $2p - 3q = 3$ ?
2. Berapakah nilai  $x$  dan  $y$  dari persamaan  $-x + 2y = 6$  dan  $3x - 4y = 8$ ?
3. Diketahui harga 6 buah buku tulis dan 4 buah pensil adalah Rp. 12.000,00 harga 4 buah buku tulis dan 3 buah pensil adalah Rp. 9.500,00. Maka berapakah jumlah harga 5 buah buku tulis dan 7 buah pensil?
4. Penyelesaian dari sistem persamaan  $5x + 7y = -11$  dan  $7x + 9y = -21$  adalah  $x$  dan  $y$ . Maka berapakah nilai dari  $4x + 3y$ ?
5. Berapakah nilai  $3x - 2y$  jika  $x$  dan  $y$  merupakan penyelesaian dari sistem persamaan  $5x + 5y = 5$  dan  $2x - 3y = 15$ ?

**D. Daftar Pustaka**

- Anton, Howard. (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Version (10<sup>th</sup> ed)*. John Wiley & Sons. Inc, New Your, NY.
- Atmadja, J., Bandung, I. T., & Bandung, J. G. (2016). Penerapan Aljabar Lanjar pada Grafis Komputer, 1–9.
- Kusumawati, Ririen (2006). *Diktat Aljabar Liniear dan Matriks*. Malang: Jurusan Teknik Informatika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
- Lay, David C. (2000). *Linear Algebra and Its Aplication (2<sup>nd</sup> ed)*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass.