PERTEMUAN 11

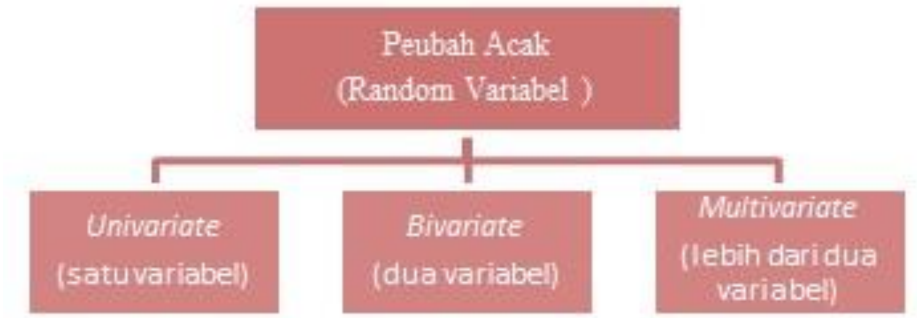
PEUBAH ACAK UNIVARIAT DAN DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT DAN KONTINU

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu memahami perbedaan peubah acak univariat (satu variabel), distribusi peluang diskrit dan kontinu.

B. Uraian Materi

11.1 Peubah Acak (random variabel)

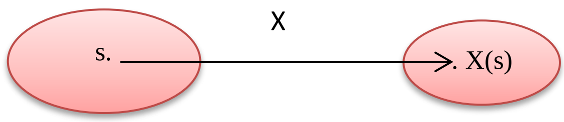


Gambar 11.1 Macam-macam peubah acak

Berdasarkan gambar diatas, dapat dilihat bahwa variabel acak dibedakan menjadi tiga, yaitu *univariate* (satu variabel), *bivariate* (dua variabel), *multivariate* (lebih dari dua variabel). Pada pertemuan ini, materi yang dibahas yaitu peubah acak univariate.

11.2 Definisi Peubah Acak

Perhatikan gambar dibawah ini:



Gambar 11.2 x disebut peubah acak

Berdasarkan gambar di atas, terdapat dua himpunan yaitu ruang sampel S yang beranggotakan s dan R_x yang memiliki hubungan antara nilai peluang dari X dan elemen S. Jadi fungsi yang mengkaitkan suatu bilangan real pada bagian unsur dalam ruang sampel disebut random variabel.

Random variabel dibagi menjadi dua yaitu peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu.

11.2.1 Peubah Acak Diskrit

Peubah acak diskrit memiliki sejumlah hasil yang dapat dihitung. Suatu fungsi dengan daerah asal variabel acak diskrit dinamakan fungsi kepadatan peluang (FKP) / *Probability Density Function* Diskrit atau distribusi dari variabel acak diskrit dengan syarat:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum f(x) = 1$
3. $P(x = x) = f(x) = fx(x)$

Contoh 1:
Budi melempar dua buah uang logam secara bersama. X memperlihatkan jumlah Angka yang terjadi secara bersamaan. Benarkah X merupakan random variabel?
Jawab:
Ruang sampelnya adalah: S= {AA, GA, AG, GG}
Dengan G= Gambar
A= Angka

Untuk S_1 = AA, maka $X(S_1) = X(AA) = 2$, dibaca kemungkinan $A = 2$
Untuk S_1 = GA, maka $X(S_2) = X(GA) = 1$, dibaca kemungkinan $A = 1$
Untuk S_1 = AG, maka $X(S_3) = X(AB) = 1$, dibaca kemungkinan $A = 1$
Untuk S_1 = GG, maka $X(S_4) = X(GG) = 0$, dibaca kemungkinan $A = 0$ (tidak ada).
Jadi, nila-nilai yang mungkin dari X, $R_x = \{0, 1, 2\}$

Sesuai definisi diatas, X merupakan random variabel karena termasuk syarat $f(x) \geq 0$ dan karena jumlah elemen dari R_x {0, 1, 2} adalah dapat dihitung.

Contoh 2:
Sebuah dadu dilempar secara imbang. Jika X memperlihatkan percobaan yang diulang-ulang sampai mata dadu 4 keluar pertama kali, kemungkinan nilai X yang muncul adalah R_x = {1,2,3, …}. Karena banyak elemen R_x tak berhingga akan tetapi bisa dihitung, maka X termasuk ke dalam random variabel.

11.2.2 Peubah Acak Kontinu

Peubah acak kontinu memiliki nilai yang tak terhingga dan berkaitan dengan titik dalam interval. Variabel acak kontinu mempunyai peluang 0 pada setiap titik , maka distribusi peluangnya berbentuk rumus. Rumus tersebut adalah fungsi dari nilai yang berbentuk bilangan dari variabel acak x dan dilambangkan $f(x)$ dinamakan fkp kontinu. Suatu variabel acak x disebut variabel acak kontinu jika terdapat $f(x)$, sedemikian sehingga $f(x)$:

$$f(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

$$f(x) = \frac{d}{dt} f(x) = f'(x)$$

Secara khusus, jika x kontinu, maka:

$$P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b)$$
$$= P(a \leq x \leq b)$$

Suatu fungsi $f(x)$ adalah FKP beberapa variabel acak x kontinu:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\sim}^{\sim} f(x)dx = 1$
3. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

Ketika X adalah random variabel, nilai yang mungkin dari X (yaitu ruang hasil R_x) adalah interval pada garis bilangan real, maka X dinamakan peubah acak kontinu.

<u>**Contoh 1**</u>:

Sekolah tinggi kepolisian memiliki mahasiswa sebanyak 13.000 orang dan para mahasiswa itu diberi NIM diawali dari 00001 sampai 13.000. Selanjutnya salah satu mahasiswa dipilih secara acak dan tinggi badannya diukur. Dari deskripsi ini, maka ruang sampelnya adalah:

$$S = \{s: s = 00001, 00002, 00003, \ldots, 13.000\}$$

X memperlihatkan tinggi dari mahasiswa yang terpilih, maka yang dipilih dapat ditandai sebagai: X(s), dengan $s \in S$. Kita mengasumsikan bahwa tidak ada mahasiswa di akademi kepolisian yang memiliki tinggi badan lebih dari 160 cm atau kurang dari 170 cm, sehingga ruang hasil dari X adalah:

$$R_x = \{x: 160 \leq x \leq 180$$

Karena R_x berbentuk interval, maka X termasuk kedalam peubah acak kontinu.

11.3 Distribusi Peluang

Apabila X merupakan peubah acak diskrit, sedemikian hingga p(x) = P(X=x) untuk masing-masing x pada interval X disebut fungsi peluang dari X. Nilai fungsi peluang dari X, adalah p(x), harus memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

a. $p(x) \geq 0$

b. $\sum_x p(x) = 1$

Himpunan pasangan yang diurutkan {x, p(x)} disebut distribusi peluang dari X. Terdapat 2 kemungkinan dari fungsi peluang, yang meliputi konstanta dan fungsi dari nilai peubah acak.

1. Fungsi peluang berupa konstanta yang terdiri atau satu nilai. Hal ini memiliki makna bahwa pada masing-masing nilai peubah acak yang diberikan, maka nilai fungsi peluangnya sama. Sebagai contoh fungsi peluang dari peubah acak Y memiliki pola sebagai berikut :

   $\mathrm{P}\,(y) = \frac{1}{4};\ y = -1, 0, 1, 2$

   Dari contoh di atas memiliki arti untuk nilai peubah acak -1, 0, 1, 2 mempunyai nilai fungsi yang sama yaitu $\frac{1}{4}$

   $$\mathrm{P(x)} = \frac{1}{3}; x = 2$$

   $$\mathrm{P(x)} = \frac{1}{3}; x = 3$$

   $$\mathrm{P(x)} = \frac{1}{4}; x = 4$$

   $$\mathrm{P(x)} = \frac{1}{12}; x = 5$$

   Dari contoh diatas memiliki arti untuk nilai fungsi $\frac{1}{3}$ memiliki nilai peubah acak yang lebih dari satu yaitu 2 dan 3.

2. Fungsi peluang berupa fungsi sama halnya dengan fungsi peluang berupoa konstanta, yang membedakan fungsi peluang berupa fungsi ditulis secara umum.

   Contoh 1:

   Farah mengundi dua mata uang koin seimbang secara sekaligus. Jika peubah acak X memperlihatkan jumlah Angka yang muncul, maka tentukan distribusi peluang dari X.

   Jawab:

   Ruang sampel : S= {GG, GA, AG, AA}. Karena X menyatakan banyak A yang muncul, maka:

a. Untuk titik sampel GG, bilangan bulat yang sesuai adalah 0, ditulis X(s)= X(GG)=0
b. Untuk titik sampel GA, bilangan bulat yang sesuai adalah 1, ditulis X(s)=X(GA)=1
c. Untuk titik sampel AG, bilangan bulat yang sesuai adalah 1, ditulis X(s)=X(AG)=1
d. Untuk titik sampel AA, bilangan bulat yang sesuai adalah 2, ditulis X(s)=X(AA)=2.

Oleh sebab mata uang koin yang dipakai dalam pengundian itu mmeiliki nilai sama, dengan demikian probabilitas setiap titik contoh sama, yakni sebesar ¼. Probabilitas masing-masing nilai peubah acaknya dapat dilihat seperti di bawah ini:

$$P(X=0) = P(\{GG\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(\{GA\} \text{atau } \{AG\})$$

$$= P(\{GA\}) + P(\{AG\})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{4}$$

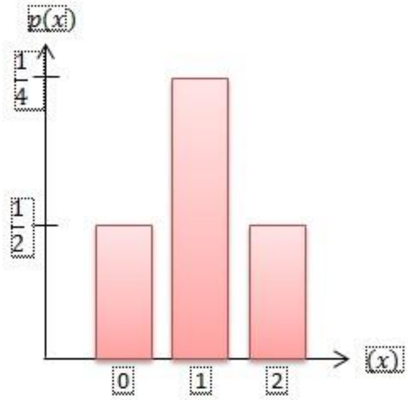
$$= \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(\{AA\}) = ¼$$

Jadi distribusi peluang dari X adalah:

x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Sedangkan grafik distribusi peluang dari X adalah sebagai berikut:



Gambar 11. 3 Grafik Diagram Batang Ditribusi Peluang

<u>Contoh 2</u>:
Suatu pengiriman 8 radio yang bermerk sama ke Toko Elektronik, ternyata terdapat 3 radio yang cacat. Jika Bimo membeli 2 radio secara acak. Tentukan distribusi peluang banyaknya radio yang cacat?
*Soal di atas dapat dikerjakan dengan cara kombinatorika

Jawab:
Diketahui: 8 radio : 3 cacat sehingga 5 baik
x = banyaknya yang cacat
$x = 0, 1, 2$ (Peluang dapat yang cacat)

$$f(0) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{3! \cdot 0!}}{\frac{8!}{6! \cdot 2!}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3}{3}}{\frac{8 \cdot 7}{2}} = \frac{10}{8}$$

$$f(1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{\frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{8!}{6! \cdot 2!}} = \frac{5 \cdot 3}{28} = \frac{15}{8}$$

$$f(2) = \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{\frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!}}{\frac{8!}{6! \cdot 2!}} = \frac{1 \cdot 3}{28} = \frac{3}{28}$$

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

Contoh 3:
Fungsi peluang dari peubah acak kontinu X berbentuk:

$$p(x) = \left(\frac{1}{5}\right)(kx+1); x = 0, 1, 2, 3$$

$$= 0 \text{ ; } x \text{ lainnya}$$

Tentukan nilai k.
Jawab:

$$\sum_{x} p(x) = 1$$

$$\sum_{x=0}^{3} \left(\frac{1}{5}\right)(kx+1) = 1$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)\{1 + (k+1) + (2k+1) + (3k+1)\} = 1$$

$$6k + 4 = 5$$

$$6k = 1$$

$$k = \frac{1}{6}$$

Contoh 4:
Sebuah perkumpulan akan memakai *vacum cleaner*, jika banyaknya waktu dinyatakan dalam satuan 100 jam, bila setahun berbentuk peubah acak kontinu X dengan fungsi padat.

$$f(x)\begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

Carilah peluang dimana dalam kurun waktu satu tahun perkumpulan tersebut akan memakai *vacum cleaner* < 120 jam:
Jawab:

$$x < \frac{120}{100} = \int_{0}^{1} x\,dx + \int_{1}^{1,2} 2 - x\,dx$$

$$x < \frac{120}{100} = \frac{1}{2}x^2 \quad + \quad 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$x < \frac{120}{100} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 0 + (2\cdot 1{,}2 - \frac{1}{2}\cdot (1{,}2)^2 - \left(2\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot (1)^2\right)$$

$$x < \frac{120}{100} = \frac{1}{2} + (2{,}4 - 0{,}72) - 1{,}5$$

$$x < \frac{120}{100} = 0{,}68$$

11. 4 Fungsi Distribusi

Fungsi distribusi dibagi 2 yaitu fungsi distribusi kumulatif diskrit dan fungsi distribusi kumulatif kontinu.

11.4.1 Definisi Fungsi Distribusi Kumulatif Diskrit:

Misal X adalah peubah acak diskrit, sedemikian sehingga fungsi distribusi kumulatif X memiliki pola:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t)$$

dengan p(t) adalah fungsi peluang dari X di t.

<u>Contoh 1</u>:

Apabila dua mata uang koin yang seimbang dilemparkan secara langsung semua, maka distribusi peluangnya berbentuk:

Dengan X memperlihatkan jumlah Angka

a. Tentukan fungsi distribusi dari X

Jawab:

a. Untuk $x < 0$

$F(x) = 0$

Untuk $0 \le x < 1$

$$F(0) = \sum_{t \le 0} p(t)$$

$$= p(0)$$

$$F(0) = \frac{1}{4}$$

Untuk $1 \le x < 2$

$$F(1) = \sum_{t \le 1} p(t)$$

$$= p(0) + p(1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Untuk $2 \le x$

$$F(2) = \sum_{t \le 2} p(t)$$

$$= p(0) + p(1) + p(2)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= 1$$

Jadi, fungsi distribusi dari X berbentuk:

$$F(x) \begin{cases} = 0; x < 0 \\ = \frac{1}{4}; 0 \le x < 1 \\ = \frac{3}{4}; 1 \le x < 2 \\ = 1; 2 \le x \end{cases}$$

11.4.2 Definisi Fungsi Distribusi Kumulatif Kontinu

Apabila X merupakan peubah acak kontinu y, di mana f(t) merupakan nilai fungsi densitas dari X di t, maka fungsi distribusi kumulatif dari X:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Contoh 1:
Diketahui fungsi densitas dari peubah acak X memiliki pola:

$$f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)x^2; 0 < x < 2$$
$$= 0; x\ lainnya$$

a. Tentukan fungsi distribusi $F(x)$

Jawab:

a. Untuk $x < 0$

$F(x) = 0$

Untuk $0 \leq x < 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} \left(\frac{3}{8}\right) t^2\, dt$$
$$= 0 + \left(\frac{1}{8}\right)(t^3)]_{t=0}^{2}$$
$$F(x) = \left(\frac{1}{8}\right)x^3$$

Untuk $2 \leq x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} f(t)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{2} \left(\frac{3}{8}\right) t^2\, dt + \int_{2}^{x} 0\ dt$$
$$= 0 + \left(\frac{1}{8}\right)(t^3)]_{t=0}^{2} + 0$$
$$F(x) = 1$$

11.5 Ekspektasi (Harapan Matematik)

Jika X merupakan sebuah peubah acak serta Y = H(X) merupakan suatu fungsi dari X, sehingga nilai harapan H(X) dapat didefinisikan seperti di bawah ini:

$E[H(X)] = \sum_{seluruh\ i} H(xi) \cdot p(xi)$ untuk X yang diskrit….. (1)

$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \cdot f(x)dx$ untuk X yang kontinu….. (2)

Dalam kasus X adalah kontinu, kita membentuk H sehingga $Y = H(X)$ adalah sebuah variabel random kontinu.

Rata-rata dan varian, seperti yang disajikan sebelumnya, adalah aplikasi khusus dari persamaan 1 dan 2. Apabila H(X)=X, kita ketahui bahwa

$$E[H(X)] = E(X) = \mu,$$

maka dapat disimpulkan bahwa rataan = ekpektasi = harapan matematika

Contoh 1:
Distribusi peluang X, jumlah cacat per 10 m serat dalam 1 bundelan dengan lebar sama, berbentuk:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,41	0,37	0,16	0,05	0,01

Tentukan rata-rata banyaknya cacat per 10 m serat :

$$\mu = E(x) = \frac{(0)\cdot(0{,}41) + (1)\cdot(0{,}37) + (2)\cdot(0{,}16) + (3)\cdot(0{,}05) + (4)\cdot 0{,}01}{10}$$

$$= \frac{0 + 0{,}37 + 0{,}32 + 0{,}15 + 0{,}04}{10}$$

$$= \frac{0{,}88}{10}$$

$$= 0{,}088$$

Contoh 2 :
Misalkan sebuah kontraktor memerlukan X hari untuk menyelesaikan suatu pekerjaan yang ditawarkan, dimana X sebuah variabel random yang menyatakan jumlah hari untuk menyelesaikan pekerjaan. Keuntungan, P tergantung pada X, yaitu, P= H (X). Distribusi peluang dari X, (x, p(x)), adalah sebagai berikut:

X	P(x)
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{5}{8}$
5	$\frac{2}{8}$

Dengan menggunakan ide nilai harapan, kita dapat menghitung rata-rata dan varian dari X sebagai berikut:

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{5}{8} + 5 \cdot \frac{2}{8} = \frac{33}{8}$$

Contoh 3:

Pengiriman 7 AC mengandung 2 AC yang cacat. Suatu perusahaan membeli secara acak 3 dari AC yang ada. Jika X menyatakan jumlah yang cacat dibeli oleh perusahaan, carilah rataan X!

Diketahui: x : jumlah yang cacat, $x = 0{,}1{,}2$

7 AC = 2 cacat, maka 5 baik

Jawab:

$$f(0) = \frac{\binom{5}{3}\binom{2}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{0! \cdot 2!}}{\frac{7!}{3! \cdot 4!}} = \frac{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!}} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

$$f(1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!}}{\frac{7!}{3! \cdot 4!}} = \frac{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} \cdot 2}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!}} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

$$f(2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!}}{\frac{7!}{3! \cdot 4!}} = \frac{\frac{5 \cdot 4!}{1 \cdot 4!} \cdot 1}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!}} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

$$\mu = E(x) = (0) \cdot \left(\frac{2}{7}\right) + (1) \cdot \left(\frac{4}{7}\right) + (2) \cdot \left(\frac{1}{7}\right)$$

$$= 0 + \frac{4}{7} + \frac{2}{7}$$

$$= \frac{6}{7}$$

Jadi rataan X adalah $\frac{6}{7}$

C. Soal Latihan/Tugas

1. Tentukan pola distribusi peluang peubah acak X yang memberikan deskripsi kemunculan suatu mata dadu yang dilambungkan satu kali.

2. Hitunglah nilai c, sedemikian hingga fungsi di bawah ini bisa disebut sebagai distribusi peluang peubah acak diskret :

$$f(x) = c\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}, \text{ untuk } x = 0{,}1{,}2$$

3. Sebuah perkumpulan akan memakai *vacum cleaner*, jika banyaknya waktu dinyatakan dalam satuan 100 jam, bila setahun berbentuk peubah acak kontinu X dengan fungsi padat.

$$f(x)\begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

Carilah peluang dimana dalam kurun waktu satu tahun perkumpulan tersebut akan memakai *vacum cleaner* kurang dari antara 50 dan 100 jam.

4. Banyaknya cara per 10 m serat sintetis dalam gulungan yang lebarnya seragam, diberikan tabel distribusi peluang sebagai berikut:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,41	0,37	0,16	0,05	0,01

Buatlah distribusi tumpukan X!

5. Tentukan nilai ekspektasi atau harapan dari distribusi peluang dibawah ini:

x	200	250	300
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

D. Referensi

Herrhyanto, Nar. 2009. *Pengantar Statistika Matematis*. Yrama Widya: Bandung.

Montgomery Douglas C, Hines William W. 1990. *Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*. UI-Pres: Jakarta.