Pertemuan 15

Integral tak wajar dengan integran diskontinu

a. f(x) kontinu di [a,b) dan tidak kontinu di x = b

Karena f(x) tidak kontinu di x = b, maka sesuai dengan syarat dan definsi integral tertentu integran harus ditunjukkan kontinu di x = b - ε ($\varepsilon \to 0^+$), sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Karena batas atas x = b - ε (x $\to$b$^-$), maka

maka $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$

Perhatikan beberapa contoh di bawah ini.

1. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$, f(x) tidak kontinu di batas atas x = 4, sehingga

$$= \left[\lim_{\varepsilon \to 0^+} -2\sqrt{4-x} \right]_0^{4-\varepsilon}$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\lfloor \sqrt{4-(4-\varepsilon)} - \sqrt{(4-0)} \right\rfloor$$

$$= -2 \left(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sqrt{\varepsilon} - \sqrt{4} \right)$$

= -2(0-2)

= 4

Cara lain

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{t \to 4^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

$$= \lim_{t \to 4^-} \left[-2\sqrt{4-x}\right]_0^t$$

$$= \lim_{t \to 4^-} \left[-2\sqrt{4-t} + 2\sqrt{4-0}\right]$$

= -2(0)+2(2)

= 4

2. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, f(x) = $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Fungsi di atas tidak kontinu di x = 2 dan x = -2, sehingga:

maka $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$$= 2 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= 2 \left[\lim_{\varepsilon \to 0^+} \arcsin \frac{x}{2} \right]_0^{2-\varepsilon}$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$= \pi$$

3. $\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2}{\sqrt{4-x}} \Big]_0^{4-\varepsilon}$, f(x) tidak kontinu di batas atas x = 4

sehingga diperoleh

$$\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{2}{\sqrt{4-(4-\varepsilon)}} - \frac{2}{\sqrt{4-0}} \right]$$

= tidak berarti, karena mempunyai bentuk $\frac{2}{0}$

b. f(x) kontinu di (a,b] dan tidak kontinu di x = a

Karena f(x) tidak kontinu di x = a, maka sesuai dengan syarat dan definsi integral tertentu integrannya harus ditunjukkan kontinu di x = a + ε ($\varepsilon \to 0^+$), sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Karena batas bawah x = a + ε (x $\to$a$^-$) maka dapat dinyatakan dalam bentuk lain:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Perhatikan beberapa contoh dibawah ini.

1. $\int_3^4 \frac{3dx}{\sqrt{x-3}} = \lim_{t \to 3^+} \int_t^4 \frac{3dx}{\sqrt{x-3}}$

$$= \lim_{t \to 3^+} \left[3(2)\sqrt{x-3}\right]_t^4$$

$$= \lim_{t \to 3^+} \left[6\sqrt{4-3} - 6\sqrt{t-3}\right]$$

= 6(1) – 6(0)

= 6

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$,f(x) tidak kontinu di batas bawah x = 0 sehingga diperoleh:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_{0+\varepsilon}^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[2\sqrt{1} - 2\sqrt{0+\varepsilon}\right]$$

= 2 – 0

= 2

3. $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[x \ln x - x\right]_{0+\varepsilon}^1$, f(x) tidak kontinu di batas bawah x = 0

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(1 \ln 1 - 1) - (0+\varepsilon)\ln(0+\varepsilon) - (0+\varepsilon)\right]$$

= (1.0-1) –(0-0)

= -1

c. f(x) kontinu di [a,c) $\cup$ (c,b] dan tidak kontinu di x = c

Karena f(x) tidak terdefinisi di x = c, maka sesuai dengan syarat dan definsi integral tertentu integrannya harus ditunjukkan kontinu di x = c + ε dan x = c - ε ($\varepsilon \to 0^+$), sehingga

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \ + \ \underset{\varepsilon \to 0^+}{Lim} \int_{c-\varepsilon}^b f(x)$$

Dapat juga dinyatakan dengan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

Perhatikan beberapa contoh dibawah ini.

1. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$, f(x) tidak kontinu di x = 1, sehingga diperoleh

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$, berdasarkan contoh sebelumnya didapat:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \right]_{1+\varepsilon}^4$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(1-\varepsilon)-1)^{\frac{2}{3}} - (0-1)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(4-1)^{\frac{2}{3}} - ((1+\varepsilon)-1)^{\frac{2}{3}} \right]$$

$$= \frac{3}{2}(-1+\sqrt[3]{9})$$

2. $\int_{-1}^{8} x^{-\frac{1}{3}} dx,$ f(x) tidak kontinu di x = 0, sehingga diperoleh

$$\int_{-1}^{0} x^{-\frac{1}{3}} dx + \int_{0}^{8} x^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon} x^{-\frac{1}{3}} dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^{8} x^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^{0-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{0+\varepsilon}^{8}$$

$$= -\frac{3}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2}$$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$, f(x) diskontinu di x = 0, sehingga diperoleh:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^4} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^4}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} + \lim \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^4}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{-1}{3x^3} \right]_{-1}^{0-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{-1}{3x^3} \right]_{0+\varepsilon}^{8}$$

= tidak berarti karena memuat bentuk $\frac{1}{0}$