PERTEMUAN 14

LIMIT TAK HINGGA

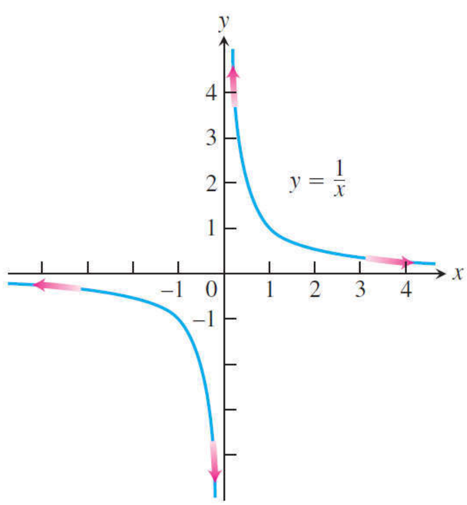
A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menguasi materi limit tak hingga dalam matematika dan kegunaannya dan mampu menyelesaikan soal-soal matematika limit tak hingga dengan benar.

B. URAIAN MATERI

1. Limit Tak Hingga dan Limit Menuju Tak Hingga

Perilaku fungsi ketika nilai-nilai dalam domainnya atau rentang melebihi semua batas yang batas tak hingga dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalnya, fungsi ini didefinisikan sebagai y = 1/x, seperti ditunjukkan pada Ga mbar .



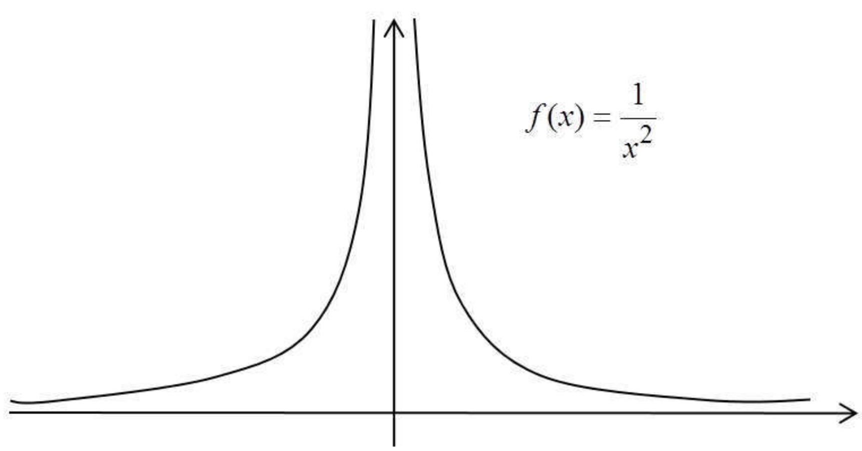
Gambar 14.1. Grafik y= 1/x

Ketika x berada pada sumbu positif dan menjadi semakin besar, maka nilai y menjadi semakin kecil. Ketika x negatif dan besarnya x menjadi semakin besar, sekali lagi menjadi kecil. Sehingga dapat disimpulkan bahwa fungsi y=1/x mempunyai limit 0 saat x mendekati tak hingga. Berikutnya untuk pmisalkan fungsi berikut: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$. Untuk nilai-nilai *x* yang cukup dekat dengan 0, maka nilai-nilai $f(x) = \frac{1}{x^2}$ diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 14.1. Penyelesaian Limit dengan numerik

x	$\frac{1}{x^2}$	x	$\frac{1}{x^2}$
1	1	−1	1
0,5	4	−0,5	4
0,01	10.000	−0,01	10.000
0,0001	100.000.000	−0,0001	100.000.000
0,000005	40.000.000.000	−0,000005	40.000.000.000

Tabel 14.1 menunjukkan bahwa bahwa apabila nilai *x* semakin mendekati nilai 0, maka nilai $f(x) = \frac{1}{x^2}$ menjadi semakin besar. Ketika di uji dari dengan memberikan nilai mendekati 0 dari sisi kiri (bilangan negatif) dan dari sisi kanan (bilangan positif), maka nilai $f(x) = \frac{1}{x^2}$ akan menjadi makin besar dan akan menjadi tak hingga. Penggambaran grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dapat dilihat pada Gambar 14.2



Gambar 14. 2. Kurva fungsi

Sehingga fungsi diatas dikatakan bahwa limit f(x) untuk x menuju nol adalah tak hingga, dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

2. Limit Tak Hingga

Untuk memahami limit tak hingga maka di berikan soal berikut:

Contoh 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Selanjutnya, diperoleh definisi berikut:

Definisi 1

(i). $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, untuk setiap nilai x yang cukup dekat dengan c, tetapi $x \neq c$, maka f(x) menjadi tak hingga pada arah positif.

(ii). $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$, untuk setiap nilai x yang cukup dekat dengan c , tetapi $x \neq c$, maka f(x) menjadi tak hingga pada arah negatif.

Secara matematis, Definisi di atas dapat ditulis sebagai:

$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ (atau $-\infty$) jika untuk setiap bilangan real $M > 0$ terdapat bilangan real $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in D_f$ dengan sifat $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $f(x) > M$ (atau $f(x) < -M$)

Contoh 2

(a). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{|x+1|} = \infty$

(b). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3 - x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$.

Untuk limit yang dituliskan $x \to c$, dengan c suatu bilangan berhingga. Akan tetapi, dalam berbagai aplikasi sering ditanyakan bagaimana nilai $f(x)$ apabila nilai x cukup besar.

Pada suatau fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ dengan nilai x yang cukup besar. Maka akan diperlihatkan penyelesaian nilai f untuk berbagai nilai x seperti diperlihatkan pada Tabel 14.1 di bawah ini. Ternyata semakin besar nilai x (arah positif), nilai $f(x)$ semakin kecil mendekati nol. Sehingga disimpulkan :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Tabel 14.1 Menghitung limit

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
10	0,1
1.000.000	0,000001
5.000.000	0,0000002
100.000.000	0,00000001

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
−1	−1
−1.000.000	−0,000001
−5.000.000	−0,0000002
−100.000.000	−0,00000001

Secara sama, apabila *x* besar tak terbatas arah negative ternyata berakibat $f(x)$ mendekati nol, yaitu:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Pengertian pengertian limit menuju tak hingga dapat dituliskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.

(i). $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika $f(x)$ terdefinisikan untuk setiap nilai x cukup besar (arah positif) dan jika x menjadi besar tak terbatas (arah positif) maka $f(x)$ mendekati L.

(ii). $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ jika $f(x)$ terdefinisikan untuk setiap nilai x cukup besar

Secara matematis, Definisi 2 dapat ditulis sebagai:

(i). $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x > M$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(ii). $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x < -M$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Mudah ditunjukkan bahwa:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Contoh 4

Tentukan $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+9}$.

Penyelesaian:

Untuk $x > 0$, $x^3 + 9 > x$. Sehingga $0 < \frac{1}{x^3+9} < \frac{1}{x}$. Selanjutnya, karena $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ maka dengan Teorema Apit diperoleh:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+9} = 0$$

.

Contoh 5.

Hitung $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+4x+7}$.

Penyelesaian: Karena:

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2-2x-3\right) = \lim_{x\to\infty} \left(x(x-2)-3\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(2x^2+4x+7\right) = \infty$$

Untuk soal ini tidak bisa digunakan maka sifat limit perbagian, tetapi apabila pada pembilang dan penyebut sama-sama dibagi dengan x^2 maka:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x^2+4x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2-2x-3\right)/x^2}{\left(2x^2+4x+7\right)/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}.$$

$$= \frac{1-0-0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$$

Contoh 6

Tentukan $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+7x-6}{x^5+2x^3-7x+10}$.

Penyelesaian:

Dengan membagi pembilang dan penyebut dengan x^5, diperoleh:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+7x-6}{x^5+2x^3-7x+10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3+7x-6}{x^5}}{\frac{x^5+2x^3-7x+10}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^4}-\frac{6}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}+\frac{10}{x^5}\right)}$$

$$= \frac{0+0-0}{1+0-0+0} \quad .$$

$$= 0$$

atau

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+7x-6}{x^5+2x^3-7x+10} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3+7x-6}{x^3}}{\frac{x^5+2x^3-7x+10}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{7}{x^2}-\frac{6}{x^3}}{x^2+2-\frac{7}{x^2}+\frac{10}{x^3}}$$

$$= \frac{1+0-0}{\infty+2-0+0}$$

$$= \frac{1}{\infty}$$

$$= 0$$

Contoh 7.

Hitung $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^6-2x^3+7x-6}{x^5+2x^3+7x+10}$.

Penyelesaian:

Pada fungsi tersebut diakukan pembagian dengan x^5 pada pembilang dan penyebut fungsi tersebut seperti dibawah ini:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6-2x^3+7x-6}{x^5+2x^3+7x+10} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^6-2x^3+7x-6}{x^5}}{\frac{x^5+2x^3+7x+10}{x^5}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^4} + \frac{10}{x^5}\right)}$$

$$= \frac{-\infty - 0 + 0 - 0}{1 + 0 + 0 + 0} .$$

$$= -\infty$$

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Selesaikan soal berikut:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+9}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^3 + NIMx - 7$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{NIMx^2+5x-8}{x^2-9x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x^2+4x+7}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x^4+4x+7}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-3}{2x^2+4x+7}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+7x-6}{x^5+2x^3-7x+10}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^6-2x^3+7x-6}{x^5+2x^3+7x+10}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+2x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-7}{\sqrt{x^2-7x+5}}$

11. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{3/2}-5x+2}{\sqrt{x^3-2x-3}}$

12. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{2x-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$

13. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+5x\right)$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations, Pearson Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer