DESKRIPSI MATERI

PERTEMUAN 11

KOMBINATORIKA

Mata Kuliah Matematika Diskrit

PENGANTAR

Dalam masalah yang berhubugan dengan elemen-elemen diskrit, sering dijumpai istilah kombinatorika Kombinatorika adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya. Kombinatorial meliputi :

1. Pengisian tempat yang tersedia
2. Permutasi
3. Kombinasi

TUJUAN PERKULIAHAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai definisi relasi Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa diharapkan mampu :

- Mengetahui definisi & contoh kombinatorika
- Menyelesaikan permasalahan terkait kombinatorika

A. PENGISIAN TEMPAT YANG TERSEDIA

A.1. KAIDAH PERKALIAN

Misalkan kode password suatu jaringan komputer terdiri atas dua huruf berbeda yang diikuti dengan tiga angka dimana angka pertama bukan 0. Berapa banyak kode password berbeda yang dapat dibuat ?

Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut :

- Huruf pertama dapat dipilih dari 26 huruf berbeda,
- Huruf kedua dapat dipilih dari 25 huruf berbeda,
- Angka pertama dapat dipilih dari 9 angka berbeda,
- Angka kedua dapat dipilih dari 10 angka berbeda,
- Angka ketiga dapat dipilih dari 10 angka berbeda.

Jadi ada 26 x 25 x 9 x 10 x 10 = 585.000 kode password berbeda yang dapat dibuat.

Secara umum

Misalkan :

n_1 = banyaknya cara mengisi tempat pertama.

n_2 = banyaknya cara mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi.
n_r = banyaknya cara mengisi tempat ke-r setelah tempat (r-1) tempat-tempat sebelumnya terisi.

Maka banyaknya cara mengisi r tempat yang tersedia itu sama dengan :

$$\boxed{n_1} \times \boxed{n_2} \times \boxed{n_3} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{n_k}$$

$$\boxed{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_r}$$

Contoh 3.1.

Berapa banyaknya cara menyusun bilangan yang terdiri dari 5 angka yang disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6 dan 7 tanpa pengulangan ?

Jawab :

Buat lima tempat kosong sebagai ilustrasi untuk memudahkan pekerjaan :

$$\boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots}$$

Untuk kotak yang pertama kita bisa memilih 7 angka yang tersedia :

$$\boxed{7} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots}$$

Untuk kotak kedua, kita dapat memilih 6 angka tersisa setelah 1 angka menempati kotak pertama :

$$\boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots}$$

Untuk kotak ketiga, kita dapat memilih 5 angka tersisa setelah 2 angka menempati kotak pertama dan kedua :

$$\boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{\ldots} \times \boxed{\ldots}$$

Untuk kotak keempat, kita dapat memilih 4 angka tersisa setelah 3 angka menempati kotak pertama, kedua dan ketiga :

$$\boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{\ldots}$$

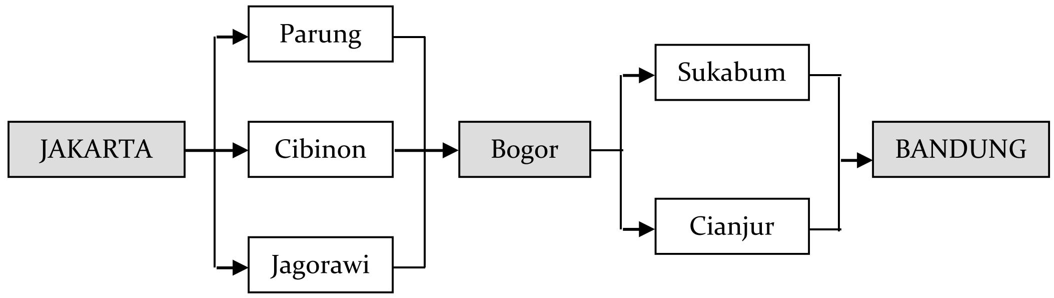
Dan untuk kotak terakhir (kelima), kita dapat memilih 3 angka tersisa setelah 4 angka menempati kotak pertama, kedua, ketiga dan keempat :

$$\boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3}$$

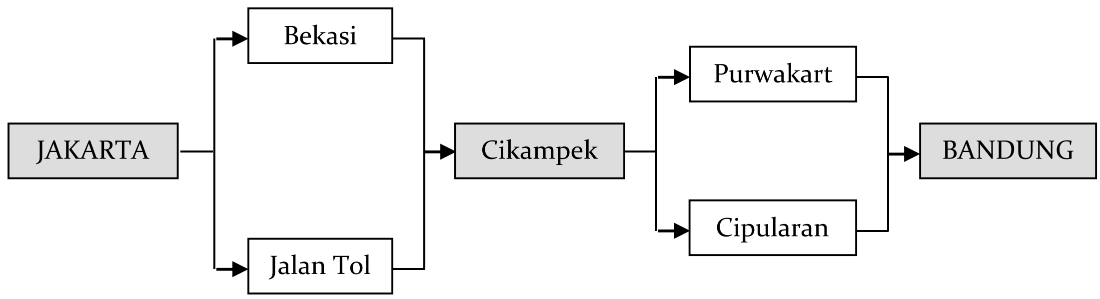
Jadi banyaknya susunan angka yang dapat dibuat adalah :
7 x 6 x 5 x 4 x 3 x = 2520 susunan.

A.2. KAIDAH PENJUMLAHAN

Dari Jakarta ke Bogor dapat ditempuh melalui (1) Parung, (2) Cibinong, atau (3) jalan tol Jagorawi. Dari Bogor ke Bandung bisa melalui (1) Sukabumi, (2) Cianjur. Menurut kaidah perkalian, ada $2 \times 3 = 6$ jalur dari Jakarta ke Bandung yang melalui Bogor.



Dari Jakarta ke Cikampek dapat ditempuh melalui (1) jalan tol Cikampek atau (2) jalan lama Bekasi. Dari Cikampek ke Bandung bisa melalui (1) jalan tol Cipularang, (2) Purwakarta. Jadi, ada 2 x 2 = 4 jalur dari Jakarta ke Bandung.



Jadi, terdapat $(2 \times 3) + (2 \times 2) = 6 + 4 = 10$ jalur dari Jakarta ke Bandung.
Kaidah penjumlahan digunakan untuk melengkapi kaidah perkalian bila cara untuk mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi tidak dapat dilakukan menggunakan benda-benda yang digunakan sebagai pilihan untuk mengisi tempat pertama.

Contoh 3.2.
Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak *string* biner yang dapat dibentuk jika:
- (a) panjang *string* 5 bit
- (b) panjang *string* 8 bit (= 1 *byte*)

<u>Penyelesaian</u>:
- (a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ buah
- (b) $2^8 = 256$ buah

Contoh 3.3.
Berapa banyak bilangan ganjil dari 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itu sendiri) yang

(a) semua angkanya berbeda
(b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

(a)

posisi satuan	: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
posisi ribuan	: 8 kemungkinan angka (1 sampai 9, setelah dikurangi satuan);
posisi ratusan	: 8 kemungkinan angka (0 sd 9, setelah dikurangi satuan dan ribuan)
posisi puluhan	: 7 kemungkinan angka (0 sd 9, setelah dikurangi ribuan, ratusan dan satuan).

Jadi, banyak bilangan ganjil seluruhnya = 5 x 8 x 8 x 7 = **2.240** buah.

(b)

posisi satuan	: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9);
posisi ribuan	: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)
posisi ratusan	: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)
posisi puluhan	: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = 5 x 9 x 10 x 10 = **4.500** buah.

Contoh 3.4..
Sandi-lewat (*password*) sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka; huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak sandi-lewat yang dapat dibuat?

<u>Penyelesaian:</u>
Banyaknya huruf alfabet adalah 26 (A-Z) dan banyak angka desimal adalah 10 (0-9), jadi seluruhnya 36 karakter.

Untuk sandi-lewat dengan panjang 6 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^6 = 2.176.782.336$$

Untuk sandi-lewat dengan panjang 7 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^7 = 78.364.164.096$$

dan untuk sandi-lewat dengan panjang 8 karakter, jumlah kemungkinan sandi-lewat adalah

$$(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36)(36) = 36^8 = 2.821.109.907.456$$

Jumlah seluruh sandi-lewat (kaidah penjumlahan) adalah

2.176.782.336 + 78.364.164.096 + 2.821.109.907.456 = **2.901.650.833.888** buah.

A.3. FAKTORIAL

Hasil kali dari bilangan-bilangan bulat positif dari 1 sampai dengan n, yaitu 1.2.3. ... (n-2).(n-1).n sering digunakan dalam matematika yang diberi notasi n! (dibaca n faktorial).

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3x2x1}$$

Selanjutnya didefinisikan :

$$\boxed{1! = 1 \text{ dan } 0! = 1}$$

Contoh 3.5.

1. 5! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 = 120
2. 6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 6 x 5! = 6 x 120 = 720

3) $\frac{8!}{6!} = \frac{8\ x\ 7\ x\ 6!}{6!} = 56$