# PERTEMUAN 10

# TRANSFORMASI LINIER, SIFAT TRANSFORMASI LINIER

## A. Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan pertemuan ini Mahasiswa mampu memahami pengertian transformasi linier dan sifatnya.

## B. Uraian Materi

### 1. Tranformasi Linier

Jika daerah asal suatu fungsi $f\ adalah\ R^n$ dan daerah hasilnya adalah $R^m$, maka $f$ disebut $\boldsymbol{transformasi}$ dari $R^n\ ke\ R^m$ dan dapat ditulis:

$$f:\ R^n \rightarrow\ R^m$$

Jika tranformasi dari ruang yang sama, dinamakan $\boldsymbol{operator}$yaitu:

$$f:\ R^n \rightarrow\ R^n$$

Jika $f: V \rightarrow\ W$ merupakan fungsi suatu ruang dan vektor *V* ke dalam ruang vektor *W*, maka $f$ disebut transformasi linier (pemetaan linier), jika memenuhi syarat sebagai berikut:

a. $\mathbf{F}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\ =\ \mathbf{F}(\boldsymbol{u})\ +\ \mathbf{F}(\boldsymbol{v})$, untuk semua vektor $\boldsymbol{u}$dan $\boldsymbol{v}$ di V.

b. $\mathbf{F}(\boldsymbol{ku})\ =\ \boldsymbol{k}\mathbf{F}(\boldsymbol{u})$, untuk semua vektor $\boldsymbol{u}$di dalam$\boldsymbol{v}$ dan semua skalar *k*.

Kemudian, jika F mengasosiasikan vektor $\underline{\boldsymbol{w}}$dengan vektor $\underline{\boldsymbol{v}}$, maka kita dapat menuliskan $\underline{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{F}(\underline{\boldsymbol{v}})$ dan dapat dikatakan bahwa $\underline{\boldsymbol{w}}$adalah bayangan dari $\underline{\boldsymbol{v}}$di bawah F.

Untuk melukiskan bayangan tersebut, maka jika $\underline{v} = (a, b)$merupakan sebuah vektor didalam $R^2$, maka rumus:

$$\boldsymbol{F}(\underline{\boldsymbol{v}}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

Mendefinisikan sebuah fungsi yang memetakan:

a. Misal: $f:\ R^2 \rightarrow\ R^3$ merupakan sebuah fungsi yang didefinisikan oleh:

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\end{bmatrix}$$

Buktikanlah bahwa *F* tersebut adalah tranformasi linier.

Penyelesaian:

Misalkan $\boldsymbol{u}\ = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a_1}\\ \boldsymbol{b_1}\end{bmatrix}\ \boldsymbol{dan}\ \boldsymbol{v}\ = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a_2}\\ \boldsymbol{b_2}\end{bmatrix}, \boldsymbol{maka}\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2}\\ \boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}\end{bmatrix}$

$F\ (u) = F\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{bmatrix}$ ➔nilai $a_1 b_1$ dimasukan kedalam *F*diatas

$F\ (v) = F\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix}$ ➔nilai $x_1 y_1$ dimasukan kedalam *F*diatas

$F\ (u) + F\ (v)$ = $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \\ a_1 - b_1 + a_2 - b_2 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \end{bmatrix}$ sama dengan $F\ (u + v)$

Dan,

$F\ (u + v)$ = $\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\right)$

= $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \end{bmatrix}$ 🡠 didapat dari nilai $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$ dimasukan ke *F*.

= $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \\ a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \end{bmatrix}$ merupakan hasil $F\ (u + v)$, lalu dipecah $a_1$ dengan $b_1$ dan $a_2$ dengan $b_2$, menjadi:

= $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \\ a_1 - b_1 + a_2 - b_2 \end{bmatrix}$ , kemudian dipecah lagi sesuai fungsi $u\ dan\ v$, menjadi:

= $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 + b_1 \\ a_1 - b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 + b_2 \\ a_2 - b_2 \end{bmatrix} = F\ (u) + F\ (v)$syarat terpenuhi

Misalkan *k* adalah sebuah scalar, *ku* = $\begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$, kemudian masukan kedalam fungsi soal $\begin{bmatrix} a \\ a + b \\ a - b \end{bmatrix}$maka:

$$F\ (ku)\ =\ \left(\begin{bmatrix} k(a) \\ k(a+b) \\ k(a-b) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \quad k\begin{bmatrix} a \\ a+b \\ a-b \end{bmatrix} \quad = k\ F(u)$$ ➔ syarat dipenuhi

Maka F adalah sebuah tranformasi linier.

b. Proyeksi: $L : R^3 \to R^2$ didefinisikan oleh:

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

L adalah transformasi linier karena

1) Untuk setiap $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$,

$$L(u+v) = L\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = L(u) + L(v)$$

2) Untuk $k \in R$,

$$L(ku) = L\left(\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = kL\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = kL(u)$$

c. Dilasi: $L_1 : R^3 \to R^3$ didefinisikan oleh:

$$L_1(u) = L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = ru, r > 1$$

Konstraksi: $L_2 : R^3 \to R^3$ didefinisikan oleh:

$$L_2(u) = L_2\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = ru, 0 < r < 1$$

$$L_1\ dan\ L_2\ adalah\ transformasi\ linier, karena$$

1) Untuk setiap $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$,

$$L(u+v) = r(u+v) = ru + rv = L(u) + L(v)$$

2) Untuk setiap $k \in R$,

$$L(ku) = r(ku) = k(ru) = kL(u)$$

d. Rotasi: $L:\ R^2 \rightarrow\ R^2$ didefinisikan oleh:

$$L(u) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset) & -\sin(\emptyset) \\ \sin(\emptyset) & \cos(\emptyset) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

L adalah transformasi linier, karena

1) Untuk setiap $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},\quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$,

$$L(u+v) = L\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset) & -\sin(\emptyset) \\ \sin(\emptyset) & \cos(\emptyset) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}$$

$$L(u+v) = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset)\,(u_1+v_1) - \sin(\emptyset)\,(u_2+v_2) \\ \sin(\emptyset)\,(u_1+v_1) + \cos(\emptyset)\,(u_2+v_2) \end{bmatrix}$$

$$L(u+v) = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset)\,(u_1) - \sin(\emptyset)\,(u_2) \\ \sin(\emptyset)\,(u_1) + \cos(\emptyset)\,(u_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\emptyset)\,(v_1) - \sin(\emptyset)\,(v_2) \\ \sin(\emptyset)\,(v_1) + \cos(\emptyset)\,(v_2) \end{bmatrix}$$

$$L(u+v) = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset) & -\sin(\emptyset) \\ \sin(\emptyset) & \cos(\emptyset) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\emptyset) & -\sin(\emptyset) \\ \sin(\emptyset) & \cos(\emptyset) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

2) Untuk $k \in R$,

$$L(ku) = L\left(\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$L(ku) = \begin{bmatrix} \cos(\emptyset) & -\sin(\emptyset) \\ \sin(\emptyset) & \cos(\emptyset) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix}$$

$$L(ku) = k\begin{bmatrix} \cos(\emptyset) & -\sin(\emptyset) \\ \sin(\emptyset) & \cos(\emptyset) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$L(ku) = kL(u)$$

e. A adalah matriks $m\ x\ n$ dan, $L:\ R^n \rightarrow\ R^m$ didefinisikan oleh:

$$L(u) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = Au$$

L adalah transformasi linier, karena

1) Untuk setiap $u,\ v \in R^n$,

$$L(u+v) = A(u+v) = Au + Av = L(u) + L(v)$$

2) Untuk setiap $k \in R$,

$$L(ku) = A(ku) = k(Au) = kL(u)$$

Contoh:

1) Tunjukan bahwa $f : R^2 \rightarrow R^3$dimana:

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x \\ -y \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ada 2 syarat yang harus dipenuhi untuk menyelesaikan soal diatas, yaitu:

**a) Syarat pertama:**$\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

Dimana $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_1} \end{bmatrix} x_1\ sebagai\ nilai\ x, y_1\ sebagai\ nilai\ y\ dari\ fungsi\ \ u$

$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \end{bmatrix} x_2\ sebagai\ nilai\ x,$

$y_2\ sebagai\ nilai\ y\ dari\ fungsi\ \ v$

$F\ (u) + F\ (v) \ = \ F\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , $x_1,\ x_2\ sebagai\ x$ lalu $y_1, y_2\ sebagai\ y$

Lalu masukan nilai tersebut kedalam fungsi soal yang akan dibuktikan

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + y_1 \\ x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 + y_2 \\ x_2 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2) \\ x_1 + x_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix}$ sama dengan $F\ (u + v)$

Dan,

$$F\ (u + v) \ = \ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow menjadi\ nilai\ x \\ \rightarrow menjadi\ nilai\ y \end{matrix}$$

$= \begin{bmatrix} (2(x_1 + x_2)) + (y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 \\ -(y_1 + y_2) \end{bmatrix}$ 🡸 didapat dari nilai $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ dimasukan ke *F*pada soal.

$= \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix}$ merupakan hasil $F\ (u + v)$, lalu dipecah $x_1$ dengan $y_1$ dan $x_2$ dengan $y_2$, menjadi:

$= \begin{bmatrix} 2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2 \\ x_1 + x_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix}$ , kemudian dipecah lagi sesuai fungsi $u \; dan \; v$, menjadi:

$= \begin{bmatrix} 2x_1 + y_1 \\ x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 + y_2 \\ x_2 \\ -y_2 \end{bmatrix}$

$= F\ (u) + F\ (v)$

syarat pertama terpenuhi karena terbukti $\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

**b) Syarat kedua:** $\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{ku}) = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$

Misalkan *k* adalah sebuah scalar, *ku* = $\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$, kemudian masukan kedalam fungsi soal $\begin{bmatrix} 2x + y \\ x \\ -y \end{bmatrix}$ maka:

$F\ (ku) = \left( \begin{bmatrix} k(2x + y) \\ k(x) \\ k(-y) \end{bmatrix} \right)$

$= k \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ x \\ -y \end{bmatrix}$ $= k\ F(u)$➔ syarat dipenuhi

T dapat dikatakan Transformasi Linier karena syarat pertama dan kedua terpenuhi.

2) Tunjukan bahwa $f\ :\ R^3 \rightarrow\ R^2$dimana:

$$F \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ y + z \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ada 2 syarat yang harus dipenuhi untuk menyelesaikan soal diatas, yaitu:

**a) Syarat pertama:** $\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

Dimana $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \end{bmatrix}$ $u_1\ sebagai\ nilai\ x, u_2\ sebagai\ nilai\ y\ dan\ u_3\ sebagai\ nilai\ z\ dari\ fungsi\ \ u$

$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix}$ $v_1\ sebagai\ nilai\ x,\ \ v_2\ sebagai\ nilai\ y\ dan\ v_3\ sebagai\ nilai\ z\ dari\ fungsi\ \ v$

$$F\ (u) + F\ (v) \ = \ F\begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix}$$

Lalu masukan nilai tersebut kedalam fungsi soal yang akan dibuktikan

$F\ (u) + F\ (v) \ = \ \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 + u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 + v_3 \end{bmatrix}$, jumlahkan *u* dan *v*'nya menjadi:

$$= \begin{bmatrix} u_1 + u_2 + v_1 + v_2 \\ u_2 + u_3 + v_2 + v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\ u_2 + v_2 + u_3 + v_3 \end{bmatrix} = F\ (u + v)$$

Dan,

$$F\ (u + v) \ = \ \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \ menjadi\ nilai\ x \\ \rightarrow \ menjadi\ nilai\ y \\ \rightarrow \ menjadi\ nilai\ z \end{matrix}$$

$= \begin{bmatrix} (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) \end{bmatrix}$ ← didapat dari nilai $\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$ dimasukan ke *F*pada soal.

$= \begin{bmatrix} (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \\ (u_2 + u_3) + (v_2 + v_3) \end{bmatrix}$ merupakan hasil $F\ (u + v)$, lalu dipecah $x, y_1, z_1$ dan $x_2, y_2, z_2$ menjadi:

$= \begin{bmatrix} u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\ u_2 + v_2 + u_3 + v_3 \end{bmatrix}$, kemudian dipecah lagi sesuai fungsi $u\ dan\ v$, menjadi:

$$= \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 + u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 + v_3 \end{bmatrix} = F\ (u) + F\ (v)$$

syarat pertama terpenuhi karena terbukti $\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

**b) Syarat kedua:** $\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{ku}) = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$

Misalkan *k* adalah sebuah scalar, *ku* = $\begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix}$, kemudian masukan kedalam fungsi soal $\begin{bmatrix} x + y \\ y + z \end{bmatrix}$maka:

$$F\ (ku) \ = \ \left(\begin{bmatrix} k\ (u_1 + u_2) \\ k\ (u_2 + u_3) \end{bmatrix}\right)$$

$= k\begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \end{bmatrix} \qquad = k\ F(u)$ ➔ syarat dipenuhi

T dapat dikatakan Transformasi Linier karena syarat pertama dan kedua terpenuhi.

3) Tunjukan bahwa $f\,:\,R^3 \rightarrow R^3$dimana:

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \\ z \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ada 2 syarat yang harus dipenuhi untuk menyelesaikan soal diatas, yaitu:

**a) Syarat pertama: $\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$**

Dimana $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \end{bmatrix} u_1\ sebagai\ nilai\ x, u_2\ sebagai\ nilai\ y\ dan\ u_3\ sebagai$

$nilai\ z\ dari\ fungsi\ \ u$

$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix} v_1\ sebagai\ nilai\ x,\ v_2\ sebagai\ nilai\ y\ dan\ v_3\ sebagai$

$nilai\ z\ dari\ fungsi\ \ v$

$$F\,(u) + F\,(v) = F\begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{u_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix}$$

Lalu masukan nilai tersebut kedalam fungsi soal yang akan dibuktikan

$F\,(u) + F\,(v) = \begin{bmatrix} u_1+u_2 \\ u_2-u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1+v_2 \\ v_2-v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$, jumlahkan *u* dan *v*'nya menjadi:

$$= \begin{bmatrix} u_1+u_2+v_1+v_2 \\ u_2-u_3+v_2-v_3 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1+v_1+u_2+v_2 \\ u_2+v_2-u_3-v_3 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} = F\,(u+v)$$

Dan,

$$F\,(u+v) = \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow\ menjadi\ nilai\ x \\ \rightarrow\ menjadi\ nilai\ y \\ \rightarrow\ menjadi\ nilai\ z \end{matrix}$$

$= \begin{bmatrix} (u_1+v_1)+(u_2+v_2) \\ (u_2+v_2)-(u_3+v_3) \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}$ ← didapat dari nilai $\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}$ dimasukan ke *F*pada soal.

$= \begin{bmatrix} (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \\ (u_2 - u_3) + (v_2 - v_3) \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$ merupakan hasil $F\ (u + v)$, lalu dipecah $u_1, y_1, z_1$ dan $u_2, y_2, z_2$ menjadi:

$= \begin{bmatrix} u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\ u_2 + v_2 - u_3 - v_3 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$, kemudian dipecah lagi sesuai fungsi $u\ dan\ v$, menjadi:

$= \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 - v_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = F\ (u) + F\ (v)$

syarat pertama terpenuhi karena terbukti $\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$

**b) Syarat kedua:**$\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{ku}) = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$

Misalkan *k* adalah sebuah scalar, *ku* = $\begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix}$, kemudian masukan kedalam fungsi soal $\begin{bmatrix} x + y \\ y - z \\ z \end{bmatrix}$maka:

$F\ (ku) = \left( \begin{bmatrix} k\ (u_1 + u_2) \\ k\ (u_2 - u_3) \\ k(u_3) \end{bmatrix} \right)$

$= k \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = k\ F(u)$➔ syarat dipenuhi

T dapat dikatakan Transformasi Linier karena syarat pertama dan kedua terpenuhi.

## 2. Sifat Transformasi Linier (Kernel Dan Jangkauan)

Di sini, kita telah mengetahui transformasi linier sekali bayangan vektor basis, maka mungkin kita akan mencari bayangan vektor yang lainnya di dalam ruang vektor tersebut.

**Teorema 1.**

Misalkan $F: V \to W$ suatu transformasi linear, maka untuk $u, v \in V$ berlaku:

a. $F(0) = 0$

b. $F(-u) = -F(u)$

c. $F(u - v) = F(u) - F(v)$

Bukti

a. $F(u) = F(u + 0)$

$= F(u) + F(0)$

b. $F(u) + F(-u) = F(u + (-u))$

$= F(0)$

c. $F(u - v) = F(u + (-v)$

$= F(u) + F(-v)$

$= F(u) - F(v)$

Penjelasan:

Misalkan $F: V \rightarrow W$ suatu transformasi linear maka himpunan ***kernel*** (atau ***ruang nol***) dari $F$ ialah himpunan vektor di dalam *V* yang dipetakan $F$ke dalam 0, Sedangkan penulisannya dinyatakan oleh **ker *(*$F$*)***.

$$Ker\ (F) = \{v | v \in V, F(v) = 0\}$$

Sedangkan,

***Jangkuan*** dari $F$ **Ruang Peta(Image)**ialah Himpuanan semua vektor di dalam ***w*** yang termasuk bayangan di bawah $F$ dari paling sedikit satu vektor di dalam *V,* penulisannya dinyatakan oleh ***R(*$F$*)***atau $\boldsymbol{lm}(F)$**.**

$$lm(F) = \{w | w = F(v), v \epsilon V\}$$

**Teorema 2.**

Jika $F: V \rightarrow W$ suatu transformasi linear maka:

a. *Kernel dari T* ($\boldsymbol{Ker}\ (F)$) *adalah subruang dari V.*

b. *Jangkuan dari T* ($\boldsymbol{lm}(F)\boldsymbol{atauR}(F)$)*adalah subruang dari W.*

Bukti

Pada **Teorema 2** nomor 1, $\boldsymbol{Ker}\ (F)$ akan ditunjukkan bahwa $v_1, v_2 \epsilon Ker(F)$ dan $k$ suatu skalar berlaku

a. $v_1 + v_2 \epsilon Ker(F)$

b. $kv_1 \epsilon Ker(F)$

Yaitu misalkan $v_1, v_2 \epsilon Ker(F)$, dan $k$ suatu skalar.

Karena $v_1 \epsilon Ker(F)$ maka $F(v_1) = 0$ begitu pula untuk $v_2 \epsilon Ker(F)$ maka $F(v_1) =$ 0 sehingga

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2) = 0 + 0 = 0$$

Terlihat bahwa $v_1 + v_2$dipetakan ke 0, sesuai definisi $Ker(F)$, maka $v_1 + v_2 \epsilon Ker(F)$. ***syarat a terpenuhi**

Sedangkan

$$F(kv_1) = kF(v_1) = k0 = 0$$

Terlihat bahwa dipetakan ke 0, sesuai definisi $Ker(F)$, maka $kv_1 \epsilon Ker(F)$.***syarat b terpenuhi**

Pada **Teorema 2** nomor 2 Pada $\boldsymbol{lm}(F)$ akan ditunjukkan bahwa$w_1, w_2 \epsilon \boldsymbol{lm}(F)$dan $k$ suatu skalar berlaku

a. $w_1 + w_2 \epsilon \boldsymbol{lm}(F)$

b. $kw_1 \epsilon \boldsymbol{lm}(F)$

Yaitu misalkan $w_1, w_2 \epsilon \boldsymbol{lm}(F)$, dan $k$ suatu skalar.

Karena $w_1 \epsilon \boldsymbol{lm}(F)$ maka akan ada suatu $v_1 \epsilon\ V$ yang merupakan prapeta dari $w_1$. Sehingga dapat ditulis

$$w_1 = F(v_1)$$

Begitu pula untuk $w_2 \epsilon \boldsymbol{lm}(\boldsymbol{T})$ maka akan ada suatu $v_2 \epsilon\ V$ yang merupakan prapeta dari $w_2$. Sehingga dapat ditulis

$$w_2 = F(v_2)$$

Maka

$$w_1 + w_2 = F(v_1) + F(v_2) = F(v_1 + v_2)$$

Terlihat bahwa $w_1 + w_2$merupakan hasil dari peta $v_1 + v_2 \epsilon\ V$, sesuai definisi $\boldsymbol{lm}(F)$, maka $w_1 + w_2 \epsilon \boldsymbol{lm}(F)$. ***syarat a terpenuhi**

Contoh:

a) Misalkan $F: V \to W$adalah transformasi 0. maka **ker** $\boldsymbol{(F)}$ = $V$ Karena $F$memetakan tiap vektor ke dalam 0. Karena 0 ialah satu-satunya bayangan yang mungkin di bawah *T*, maka$\boldsymbol{R}(F)$atau $\boldsymbol{lm}(F)$terdiri dari vektor nol.

b) Misalkan $F: R^n \to R^m$ adalah perkalian oleh

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kernel dari $F$terdiri dari semua

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Yang merupakan vektor pemecahan dari sistem homogen

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dimana Jangkuan dari $F$terdiri dari vektor-vektor

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

c) Didefinisikan suatu transformasi linear $F: R^3 \to R^3$

$$F = \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks transformasi dari , lalu tentukan peta dari vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

Menentukan matriks transformasi dari artinya menentukan peta dari vektorvektor basis terhadap transformasi linear tersebut.

$F = (e_1) = F\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ➔ didapat dari dengan memasukan nilai $F$ ke persamaan soal

$F = (e_2) = F\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ➔ didapat dari dengan memasukan nilai $F$ ke persamaan soal

$F = (e_3) = F\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ➔ didapat dari dengan memasukan nilai $F$ ke persamaan soal

Sekarang susun $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$ secara kolom, maka akan didapatkan matriks transformasi dari $F$.

$$[F]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan peta dari vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$adalah perkalian $[F]_e$ dengan vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$F = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2, -2 dan 5 didapat dari baris metrics 3*3 dikali dengan nilai vector dan dijumlahkan. Yaitu:

$$F = \begin{bmatrix} (1\ x\ 2) + \big(0\ x(-1)\big) + (0\ x\ 3) = 2 + 0 + 0 = 2 \\ (0x\ 2) + \big(2\ x(-1)\big) + (0\ x\ 3) = 0 + (-2) + 0 = -2 \\ (1\ x\ 2) + \big(0\ x(-1)\big) + (1\ x\ 3) = 2 + 0 + 3 = 5 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian peta dari vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ terhadap transformasi linear adalah vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

## C. Latihan Soal/Tugas

1. Tunjukan bahwa $f\ :\ R^2 \rightarrow\ R^3$dimana fungsi dibawah ini merupakan transformasi linear:

$$F\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ a+b \\ 2a \end{bmatrix}$$

2. Tunjukan bahwa $f\ :\ R^2 \rightarrow\ R^2$dimana fungsi dibawah ini merupakan transformasi linear:

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y+2 \end{bmatrix}$$

3. Didefinisikan suatu transformasi linear $T\!: R^3 \rightarrow R^3$

$$F = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks transformasi dari , lalu tentukan peta dari vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

## D. Daftar Pustaka

Anton, Howard. (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Version (10$^{th}$ ed)*. John Wiley & Sons. Inc, New Your, NY.

Atmadja, J., Bandung, I. T., & Bandung, J. G. (2016). Penerapan Aljabar Lanjar pada Grafis Komputer, 1–9.

Kusumawati, Ririen (2006). *Diktat Aljabar Liniear dan Matriks*. Malang: Jurusan Teknik Informatika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Lay, David C. (2000). *Linear Algebra and Its Aplication (2$^{nd}$ ed)*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass.