PERTEMUAN 11
PERGANTIAN BASIS, TRANSFORMASI VEKTOR LINIER

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah menyelesaikan pertemuan ini Mahasiswa mampu memahami pengertian transformasi linier dan dapat menyelesaikan persoalan terkait dengan transformasi linier dan basis.

B. Uraian Materi

Terdapat hubungan erat antara pemahaman basis dengan sistem koordinat. Pada bagian ini kita kembangkan gagasan tersebut dan juga kita bahas hasil-hasil mengenai perubahan basis untuk ruang vektor. Selama ini kita sering menggunakan basis baku sebagai basis semua viktor. Selain itu, terdapat basis-basis lain yang dapat digunakan untuk vektor. Contoh basis baku, sebagai berikut:

1. Basis baku yang berada diruang R^2:

$$e^1\colon \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^2\colon \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

2. Basis baku yang berada diruang R^3:

$$e^1\colon \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} e^2\colon \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} e^3\colon \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Apabila $(B = e_1, e_2, \dots, e_n)$ merupakan basis baku pada R^n dimana titik x merupakan vektor yang dibangun oleh kombinasi linear pada basis tersebut, sehingga:

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan vector koordinat pada basis B

Suatu ruang vektor bisa memiliki beberapa basis Dari sifat inilah tentunya jika terdapat sembarang vektor x dalam suatu ruang vektor V yang memiliki himpunan vektor A dan B sebagai basisnya maka x tentunya merupakan kombinasi linier dari vektor – vektor di A dan B. Kajian yang dilakukan sekarang ini adalah melihat hubungan antar kombinasi linier tersebut.

Jika B dan B’ adalah basis untuk ruang vektor V dan v1 dalam V, maka akan dicari hubungan **[v]B** dengan **(v)B**’.

Misalkan **B = { u1 , u2}** adalah basis ruang vektor yang berdimensi 2

$$(u_1)B` = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, (u_2)B` = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, (v)B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Diubah kedalam persamaan:

1. $\underline{u}_1 = a\, \underline{u}_{1'} + b\, \underline{u}_{2'}$
2. $\underline{u}_2 = c\, \underline{u}_{1'} + d\, \underline{u}_{2'}$
3. $\underline{v}_1 = k_1\underline{u}_1 + k_2\, \underline{u}_2$
4. Disubstitusikan nilai $\underline{u}_1$ dan $\underline{u}_2$ pada persamaan $\underline{v}_1 = k_1\underline{u}_1 + k_2\, \underline{u}_2$ sehingga didapat :

   $\underline{v}_1 = k_1(a\, \underline{u}_{1'} + b\, \underline{u}_{2'}) + k_2\, (c\, \underline{u}_{1'} + d\, \underline{u}_{2'})$

   $= (k_1a + k_2c)\, \underline{u}_{1'} + (k_1b + k_2d)\, \underline{u}_{2'}$

   $(\, \underline{v}\,)_{B'} = \begin{bmatrix} K_1a & K_1b \\ K_2c & K_2d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}$

   $(\, \underline{v}\,)_{B'} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   Dimana:

   $(\, \underline{v}\,)_{B'} = P\, (\, \underline{v}\,)_B$

   $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

merupakan matriks yang kolom2nya diambil dari vektor koordinat $\underline{u}_1$ dan $\underline{u}_2$ terhadap basisB'. Umumnya jika B = {u_1, u_2,…, u_n} dan B'= {$\underline{u}'_1$, $\underline{u}'_2$, …, $\underline{u}'_n$} Adalah basis untuk ruang vektor V yang berdimensi –n dan $\underline{v}$ dalam V maka hubungan antara $[\, \underline{v}\,]_B$ dengan $[\, \underline{v}\,]_{B'}$ adalah $[\, \underline{v}\,]_{B'} = P[\, \underline{v}\,]_B$ Dimana $P = [[\, \underline{u}_1]_{B'}, [\, \underline{u}_2]_{B'}, \ldots, [\, \underline{u}_n]_{B'}]$ adalah matriks yang kolom-kolomnya diambil dari matriks koordinat dari u_1, u_2,…, u_n terhadap basis B'. Matriks P disebut matriks transisi dari B ke B.

Contoh:

1. Lihat R^3 pada basis $B = e_1, e_2, e_3$ dan basis $B` = E_1, E_2, E_3$ terhadap $E_1 = (1, 0, 1)$, $E_2 = (1, 1, -1)$ dan $E_3 = (0, 1, 2)$ tentukanlah:
   a. Vektor pada koordinat X pada basis B` dimana titik X terhadap basis B memiliki koordinat (2, 7, 0)
   b. Apabila titik Xmemiliki vector koordinat (1, -2, 3) pada basis B`, tentukan vector koodinat X pada basis B

   Jawab:

   a. Perpaduan linier vektor pada koordinat X yang berada pada basis B sama dengan perpaduan linear vektor koordinat X pada basis B`

$$2e_1 + 7e_2 + 0e_3 = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_n$$

$$2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

Sehingga x_1, x_2, x_3 akan memenuhi persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}2\\7\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

Setelah dihitung maka didapat Hasil dari persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\\3\end{bmatrix}$$

b. Perpaduan linear koordinat X pada basis B sama dengan perpaduan linear koordinat X pada basis B\`.

$$x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=1.E_1-2.E_2+3.E_3$$

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=1.\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-2.\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+3.\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

Sehingga x_1, x_2, x_3 akan memenuhi persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$$

Setelah dihitung maka didapat Hasil dari persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\9\end{bmatrix}$$

2. Tinjaulah basis $B=\{u_1,u_2\}\ dan\ B`=\{u_1`,u_2`\}$ untuk R^2, dimana:

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\ dan\ u_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_{1`}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\ dan\ u_{2`}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Maka tentukanlah matriks transisi p dari B\` ke B?

Jawab:

U_1\` = au_1 + bu_2

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ = a $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ + b $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ dimana a = 1, b = 1 sehingga:

[U_1\`]B = $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

Dan

U_2\` = cu_1 + du_2

$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ = c $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ + d $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ dimana c = 2 dan d = 1 sehingga

[U_1\`]B = $\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

3. Tinjaulah basis B = $\{u_1, u_2\}$ dan B` = { v_1, v_2 } untuk R^2, dimana:

   u_1 = $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, u_2 = $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, dan v_1 = $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, v_2 = $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$,

   Maka tentukanlah matriks transisi p dari B` ke B?

   Jawab:

   PB` → B = $[V_1]$B $[V_2]$B

   Dimana:

   $[V_1]$B = $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

   Dan

   $[V_2]$B = $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$

   Sehingga:

   PB` → B = $[V_1]$B $[V_2]$B

   $[V_1]$B = $\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}$

   $[V_1]$B = $C_1[U_1]$ + $C_2[U_2]$

   $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ = $C_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ + $C_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}C_1\\0\end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix}0\\C_2\end{bmatrix}$

   Dimana C_1 = 2 dan C_2 = 1

   Sehingga:

   $[V_2]$B = $\begin{bmatrix}C_1\\C_2\end{bmatrix}$

   $[V_2]$B = $C_1[U_1]$ + $C_2[U_2]$

   $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ = $C_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ + $C_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}C_1\\0\end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix}0\\C_2\end{bmatrix}$

   Sehingga nilai C_1 = -3 dan C_2 = 4

   Maka diperoleh nilai $[V_2]$B = $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$

   Dimana

   PB` → B = $\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{bmatrix}$

4. Diketahui dua buah baris R^3 sebagai berikut:

   Dimana B = $\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\}$

   B\` = $\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\}$

   Dimana vektor koordinat x = $\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}$ terhadap B. maka tentukanlah vektor koordinat x terhadap B\`

   Jawab:

   Kombinasi linier vektor koordinat x terhadap basis B\` harus sama dengan kombinasi linier vektor koordinat x terhadap basis B.

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = 2.E_1 + \ 4.E_2 + 1.E_3$$

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = 2.\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

   Sehingga x_1, x_2, x_3 akan memenuhi persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}$$

   Setelah dihitung maka didapat Hasil dari persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\\-2\end{bmatrix}$$

   Dari data tersebut diperoleh:

   x_3 = 2

   x_2 = 8

   x_1 = 9

   Jadi vektor koordinat x terhadap basis B\` adalah:

$$\begin{bmatrix}9\\8\\2\end{bmatrix}$$

5. B = { u_1, u_2} dan B' = { $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$} adalah basis untuk R^2 $\underline{u}_1$=(1, 0); $\underline{u}_2$=(0,1); $\underline{u}_1$=(1, 1); $\underline{u}_2$=(2,1)

   a. Carilah matriks transisi dari B ke B'

b. Tentukan [$\underline{v}$]$_{B'}$; jika [$\underline{v}$]$_B$ = $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

Jawab:

a. $\underline{U}_1$ = $c_1 \underline{u}'_1 + c_2 \underline{u}'_2$

$\underline{U}_1$ = $c_1 + c_2$

$c_1 + 2c_2 = 1$

$c_1 + c_2 = 0$

sehingga $c_1 = -1$ dan $c_2 = 1$

$u_2 = k_1 u_{1'} + k_2 u_{2'}$

$k_1 + 2k_2 = 0$

$k_1 + k_2 = 1$

$k_1 = 2$ dan $k_2 = -1$

P = $\begin{bmatrix} c_1 & k_1 \\ c_2 & k_2 \end{bmatrix}$ maka P = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Sehingga P merupakan matriks transisi dari B ke B'

b. [$\underline{v}$]$_{B'}$= P [$\underline{v}$]$_B$ karena [$\underline{v}$]$_B$ = (7,2) maka

$v = 7\ u_1 + 2\ u_2$

$v = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

[$\underline{v}$]$_B$= $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

Maka:

[$\underline{v}$]$_{B`}$ = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

[$\underline{v}$]$_{B`}$ = $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Teorema 1:

Jika P adalah matriks transisi dari B ke B' maka :P mempunyai invers P^{-1} adalah matriks transisi dari B' ke B.Bukti :

Misalkan Q matriks transisi dari B' ke B, B = { $u_1, u_2, \ldots, u_n$} dan

QP = $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \ldots\ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \ldots\ldots & C_{2n} \\ C_{m1} & C_{m12} \ldots. & C_{mn} \end{bmatrix}$

Dimana:

Untuk setiap vektor x dalam V selalu berlaku :

$(x)_{B'} = P\ (x)_B$

$(x)_B = P\ (x)_{B'}$

Sehingga : $(\underline{x})_B = QP\ (\underline{x})_B$

$$(\underline{u}_1)_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \dots \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} \dots .. & C_{2n} \\ C_{m1} & C_{m12} \dots . & C_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C\ _{21} \\ \vdots \\ C_{m1} \end{bmatrix}$$

Jika x = u_2, u_3,…., u_n maka dengan cara yang sama akan didapat

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C\ _{21} \\ \vdots \\ C_{m1} \end{bmatrix}, \dots\dots., \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C\ _{21} \\ \vdots \\ C_{m1} \end{bmatrix}$$

Sehingga:

c_{11}= 1,c_{22}, …, c_{nn}= 1

Jadi QP = 1 atau Q = P^{-1}

Teorema 2

Jika P adalah matriks transisi dari suatu basis orthogonal ke basis orthonormal yang lain untuk sebuah ruang inner product maka $P^{-1}= P^t$.

Contoh:

Misalkan B = {u_1, u_2} adalah basis orthonormal untuk ruang product yang berdimensi dua. Maka

$u_1 = au'_1 + bu'_2$

$u_1 = cu'_1 + du'_2$

$(u_1, u_2) = a^2\ (u'_1, u'_2) + 2ab\ (u'_1, u'_2) + b^2(u'_1, u'_2)$

$= a^2 + b^2$

$= 1$

$(u_2, u_2) = c^2\ (u'_1, u'_2) + 2cd\ (u'_1, u'_2) + d^2(u'_1, u'_2)$

$= c^2 + d^2$

$= 1$

$(u_1, u_2) = ac(u'_1, u'_1) + ad(u'_1, u'_2) + bc(u'_2, u'_2) + bd(u'_2, u'_2)$

$= ac + bd = 1$

C. Latihan Soal/Tugas

1. Lihat R^3 pada basis $B = e_1, e_2, e_3$ dan basis $B` = E_1, E_2, E_3$ terhadap $E_1 = (1, 1, 0)$, $E_2 = (1, 1, 1)$ dan $E_3 = (1, 0, 2)$ tentukanlah:
   a) Vektor pada koordinat X pada basis B` dimana titik X terhadap basis B memiliki koordinat (2, 6, 1)
   b) Apabila titik Xmemiliki vector koordinat (-1, 2, 2) pada basis B`, tentukan vector koodinat X pada basis B

2. Diketahui A = { $\vec{U}$, $\vec{V}$} dan B = { $\vec{X}$, $\vec{Y}$} yang berturut – turut merupakan basis dalam R^2 dimana $\vec{U}$ = {3, 3} dan $\vec{V}$ = {-3, 2}, $\vec{X}$ = {1, 4} dan $\vec{Y}$ = {-2, -2}
   Maka tentukanlah :
   a. Matriks transisi dari basis A ke basis B
   b. Matriks transisi dari basis B ke basis A.

3. Diketahui A = { $\vec{P}$, $\vec{Q}$} dan B = { U, $\vec{V}$} yang berturut – turut merupakan basis dalam R^2 dimana $\vec{P}$ = {3, 3} dan $\vec{Q}$ = {-3, 2}, $\vec{U}$ = {1, 4} dan $\vec{V}$ = {-2, -2}
   Maka hitunglah berapa nilai $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ pada vektor A

4. Diketahui A = { $\vec{U}$, $\vec{V}$} dan B = { $\vec{X}$, $\vec{Y}$} yang berturut – turut merupakan basis dalam R^2 dimana $\vec{U}$ = {3, 3} dan $\vec{V}$ = {-3, 2}, $\vec{X}$ = {1, 4} dan $\vec{Y}$ = {-2, -2}
   Maka hitunglah nilai $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ pada vektor B

D. Daftar Pustaka

Anton, Howard. (2010). *Elementary Linear Algebra: Applications Version (10th ed)*. John Wiley & Sons. Inc, New Your, NY.

Atmadja, J., Bandung, I. T., & Bandung, J. G. (2016). Penerapan Aljabar Lanjar pada Grafis Komputer, 1–9.

Kusumawati, Ririen (2006). *Diktat Aljabar Liniear dan Matriks*. Malang: Jurusan Teknik Informatika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Lay, David C. (2000). *Linear Algebra and Its Aplication (2nd ed)*. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass.