PERTEMUAN 1

SISTEM BILANGAN RIIL

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu:

1. Menguasai materi Sistem Bilangan Riil dalam matematika dan kegunaannya.
2. Mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dengan sistem Bilangan Riil.

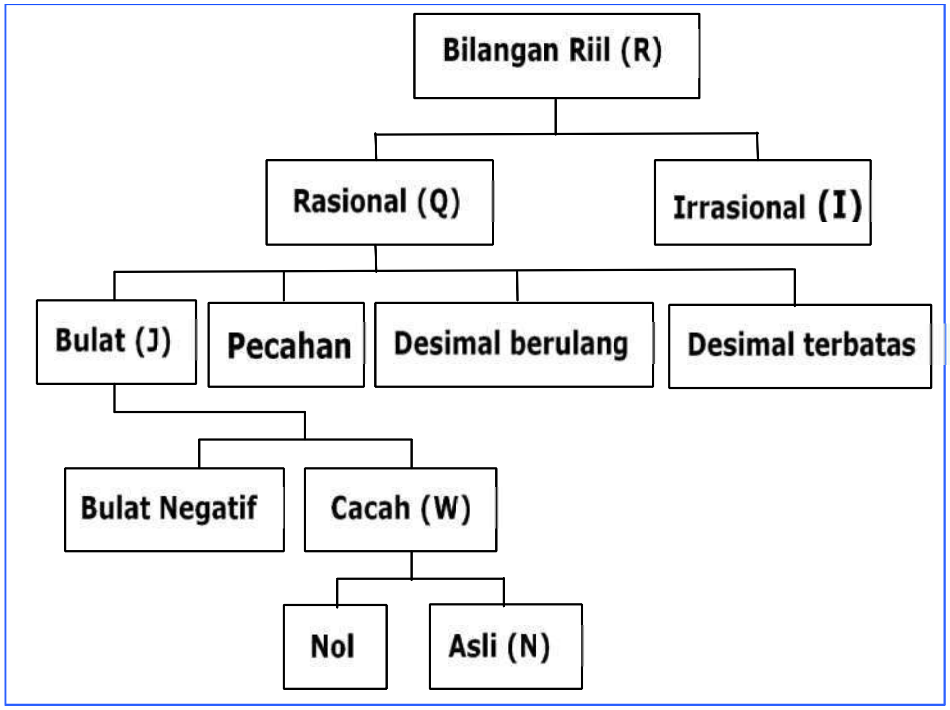
B. URAIAN MATERI

1. Sistem bilangan riil

Dalam matematika, bilangan riil adalah nilai kuantitas kontinu yang dapat dinyatakana dalam garis bilangan garis riil atau nyata. Bilangan riil dapat dianggap sebagai titik pada garis panjang yang tak terbatas yang disebut garis angka atau garis nyata, di mana poin yang sesuai dengan bilangan bulat sama-sama spasi. Setiap nomor riil dapat ditentukan oleh representasi desimal mungkin tak terbatas, seperti 7,538, di mana setiap digit berturut-turut diukur dalam unit sepersepuluh ukuran yang sebelumnya.. René Descartes, pada abad ke-17 menerangkan sifat nyata dalam bilangan untuk membuat perbedaa antara akar nyata dan imajiner dari polinomial. Bilangan riil biasa digunakan untuk mengukur jarak, untuk mengukur jumlah seperti waktu, massa, energi, kecepatan, dan banyak lagi.

Bilangan riil termasuk semua bilangan rasional, seperti bilangan bulat − 5 dan pecahan 4/3, dan semua Bilangan irasional, seperti $\sqrt{2}$ (1,41421356..., akar kuadrat dari 2, bilangan aljabar irasional). Termasuk dalam irasional adalah bilangan Transendental, seperti π (3,14159265...), bilangan natural atau euler dengan notasi e (2,71828…)

Biasanya bilangan riil biasanyak dinyatakan dengan notasi R. Dalam kalkulus, bilangan riil sering digunakan pada operasi pengurangan dan penjumlahan, perkalian dan pembagian. Misal a dan b bilangan riil maka operasinya adalah a+b, a-b, a x b, dan a/b.



Gambar 1. 1. Jenis Bilangan Riil

Jenis jenis bilangan ril dalam matematika dapat ditunjukkkan pada Gambar 1.1 Dimana bilangan riil merupakan induk dari bilangan bilangan matematika tersebut seperti dijelaskan sebagai berikut:

Himpunan bilangan asli (N)

N = { 1, 2, 3, …. }

Himpunan bilangan cacah (W)

W = {0, 1, 2, 3, … }

Himpunan bilangan bulat (J)

J = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … }

Himpunan bilangan rasional adalah himpunan bilangan yang mempunyai bentuk p/q atau bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk a/b, dimana a dan b adalah anggota bilangan bulat dan b ≠ 0

Contoh

Untuk bahwa bilangan-bilangan berikut ini, buktikan apakah temsuk bilangan rasional atau bukan?

a. bilangan 5
b. bilangan 3,4
c. bilangan 0,33333…
d. bilangan 2,121212…

Jawab

a. bilangan 5 dapat ditulis dalam bentuk a/b yaitu : 5/1 atau 10/2 atau 15/3 dan seterusnya.
b. bilangan 3,4 dapat ditulis dalam bentuk 34/10 atau 340/100 dan seterusnya
c. bilangan 0,33333… dapat ditulis dalam bentuk 1/3 dimana 1 dan 3 adalah bilangan ril
d. bilangan 2,121212 ….untuk merubah dalam bentuk a/b maka digunakan cara berikut:

$$x = 2{,}121212\ldots$$
$$100x = 212{,}1212\ldots$$
$$100x - x = 210$$
$$99x = 210$$

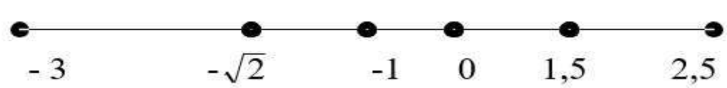
sehingga

$$x = 210/99$$

Sehingga bilangan tersebut adalah bilangan rasional

2. Garis bilangan riil

Garis bilangan riil adalah tempat titik titik bilangan dalam sebuah mistar nyata yang dimulai dari minus tak hingga (-~)` sampai tak hingga (~). Bilangan riil dapat diempatkan pada garis bilangan secara terurut seperti diperlihatkam pada Gambar 1.2.



Gambar 1. 2. Bilangan riil pada garis bilangan

Untuk menggambarkan keduudkan bilangan riil langkah pertama adalah gambarkan garis horizontal dan tentukan titik nol. Selanjutnya ditentukan titik-titik tempat kedudukan bilangan riil positif bulat disebelah kanan titik nol dan bilangan negatif pada sebelah kiri angka nol. Kemudian urutkan sesuai dengan besar kecilnya bilangan tersebut dengan jarak yang sesuai dan seterusnya.

3. Hukum-hukum bilangan riil

Untuk melakukan operasi matematika berupa penjumlahan,pengurangan, perkalian dan pembagian pada bilangan riil maka perlu di perhatikan hukum-hukum seperti yang dituliskan berikut ini :

Jika a dan b adalah bilangan-bilangan riil maka berlaku :

a.	a + b	hukum penjumlahan
b.	a . b	hukum perkalian
c.	a + b = b + a	hukum komutatif penjumlahan
d.	a . b = b .a	hukum komutatif perkalian
e.	a + 0 = 0 + a = a	hukum penjumlahan nol
f.	a . 0 = 0 . a = 0	hukum perkalian nol
g.	a . 1 = 1 . a = a	hukum perkalian satu
h.	a + (- a) = -a + a	hukum invers penjumlahan
i.	a . (1/a) = 1	hukum invers perkalian
j.	(a + b) + c = a + (b + c)	hukum asosiatif penjumlahan
k.	(ab) c = a (bc)	hukum asosiatif perkalian
l.	a (b + c) = ab + ac	hukum distributif

dimana a, b dan c merupakan bilangan-bilangan riil

4. Bilangan kompleks

Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari unsur bilangan riil dan imajiner. Bentuk umum bilangan kompleks adalah $z = a + bi$

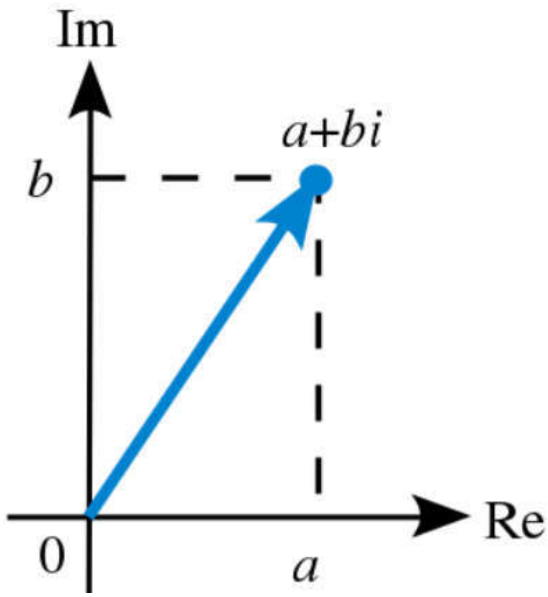
Dimana a adalah komponen nyata bagian riil dan ditulis sebagai Re(z) dan b adalah bagian imajiner dan ditulis sebagai Im(z). Bilangan a dan b adalah bilangan-bilangan riil sedangkan i adalah bilangan imajiner yang besarnya adalah $\sqrt{-1}.$.

Karena $\sqrt{-1}$ = i, maka : $i^2 = -1$

Dari keterangan diatas penulisan bilangan imajiner seperti $\sqrt{-2}$ dapat ditulis

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{2} \cdot i$$

dan seterusnya.



Gambar 1.3. Grafik bilangan komples dalam bentuk a+bi

Garis bilangan riil, Re" adalah sumbu riil dan "Im" adalah sumbu imajiner

5. Hukum – hukum bilangan kompleks

Misalkan terdapat dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$, maka berlaku hukum hukum berikut:

a. $z_1 = z_2$ maka $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ hukum kesamaan

b. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ hukum penjumlahan

c. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ hukum pengurangan

d. $z_1 . z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ hukum perkalian

6. Konjugat

Konjugat dari suatau bilangan kompleks dapat dijelaskan sebagai berikut. Bila terdapat suatu bilangan kompleks z = x + iy, maka konjugat bilangan kompleks tersebut adalah z = x – iy. Jika bilangan kompleks berbentuk z = x – iy, maka konjugatnya adalah z = x + iy.

Bila di perhatikan pada kedua bilangan kompleks diatas dengan konjugatnya maka perbedaannya terletak pada komponen imajinernya. Jika komponen imajiner pada suatu bilangan kompleks adalah +iy maka komponen imajiner pada konjugatnya adalah –iy. Demikian juga sebaliknya Jika komponen imajiner pada bilangan kompleks adalah –iy, maka komponen imajiner pada konjugatnya adalah +iy, sedangkan komponen riil pada bilangan kompleks maupun pada konjugatnya adalah sama. Konjugat pada bilangan kompleks juga sering ditulis dalam bentuk $\bar{z}$ atau dibaca **z bar**.

Contoh :

Bilangan komplek A= 3 + 4i , maka konjugat bilangan tersebut adalah

$$\bar{A} = 3 - 4i$$

Bilangan komplek B= 12 - 5i , maka konjugat bilangan tersebut adalah

$$\bar{B} = 12 + 4i$$

7. Operasi Aritmetika bilangan kompleks

Operasi aritmetika pada bilangan komplek meliputi operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Untuk memahami nya maka diber ikan contoh contoh sebagai berikut:

a. (2 + 3 i) + (5 – 4i) = (2 + 5) + (3 – 4)i = 7 – i

b. (8 + 4 i) – (3 – 4i) = (8 – 3) + (4 – (– 4)i) = 5 + 8i

c. ((2 + 3 i) + (5 – 4i) = (2 + 5) + (3i – 4i) = 7 – i

(2 + 3 i) + (5 – 4i) = (2 + 5) + (3i – 4i) = 7 – i / (1 + 2 i)

= ((2 + 3 i) * (1 – 2 i)) / ((1 + 2 i) * (1 – 2 i))

= ((2*1 + 3*2) + (-2*2 + 3*1) i) / ($1^2 + 2^2$)

= (8 – i) / 5

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i$

8. Perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya

Perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugatnya dapat dijelaskan sebagai berikut : Jika terdapat suatu bilangan kompleks $z = a + bi$ maka konjugat bilangan tersebut adalah nya adalah $\bar{z} = a - bi$. Jadi perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah :

$z * \bar{z} = (a + bi)(a - bi)$
$= a^2 - abi + bai - b^2i^2$
$= a^2 + b^2$

Dari hasil perkalian tersebut diatas, dapat di simpulkan bahwa perkalian bilangan kompleks dengan konjugatnya menghasilkan bilangan riil.

Contoh :

Diketahui bilangan g = 3 + 4i, Carilah perkalian bilangan kompleks tersebut dengan konjugatnya :

Jawab:

$g = 3 + 4i$

Konjugatnya: $\bar{g} = 3 - 4i$

$g * \bar{g} = (3 + 4i)(3 - 4i)$
$= 3^2 - 3 \cdot 4i + 4 \cdot 3i - 4^2i^2$
$= 3^2 + 4$
$= 25$

9. Pembagian dua buah bilangan kompleks

Untuk melakukan operasi pembagian dua buah bilangan kompleks, maka pertama dilakukan perkalian pembilang dan penyebutnya (dalam hal ini z_1 dan z_2) dengan konjugat z_2 . Sehingga didapat :

((a + b i) * (c – d i)) / ((c + d i)*(c-d i))
= ((a + b i)*(c – d i)) / (c^2 + d^2)
= ((a*c + b * d) + (– a*d + b*c) i) / (c^2 + d^2)

(5 + 4 i) / (1 + 2 i)
= ((5 + 4 i) * (1 – 2 i)) / ((1 + 2 i) * (1 – 2 i))
= ((5*1 + 4*2) + (-5*2 + 4*1) i) / (1^2 + 2^2)
= (13 – 6i) / 5

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Diketahui : -10, 3/2, 7, 0, -12 , 4/9, $\pi,\ e$, $\sqrt{10},\ \sqrt{2{,}333\ldots}$. Dari bilangan tersebut diatas, tentukan jenis jenis bilangan-bilangan tersebut serta gambarkan masing masing pada garis bilangan.

2. 3 + -4 x 2 -7 =
3. -24 : 2 x 3+-5 =
4. x = 0,212212212…

   Apakah x merupakan bilangan rasional? Jika ya nyatakan x dalam p/q ; (p,q = bilangan bulat)
5. Selesaikan soal-soal berikut :
   a. (4 + 5i) + (3 – 7i)
   b. (10 – 2i) + (-3 + 4i)
   c. (- 6 + 3i) – (6 - 5i)
   d. (5 + 4i)(7 + 3i)

6. Mang Udin melakukan pengukuran instrumen listrik dan memperoleh angka 1.5 V, 2 A pada kanal A. Pada kanal B diperoleh gelombang dgn amplitudo -100 V sd 100 V dengan frekuensi 50 Hz. Pada kanal C diperoleh tegangan 45 - 20i V. Pada kanal D diperoleh 11 - 3i V.
   a. identifikasi kan jenis jenis bilangan pada soal cerita diatas
   b. Kanal C + Kanal D berapa tegangannya.

7. Selesaikan soal bilangan komplek berikut ini :
   a. (NIM + 3 i) + (5 – NIMi) = ..i
   b. (8 + NIMi) – (NIM – 4i) = (8 – 3) + (4 – (– 4)i) = 5 + 8i

8. Selesaikan operasi bilangan komplek berikut ini:
   a. (NIM + 3 i) + (5 – NIMi) = ..i
   b. (8 + NIMi) – (NIM – 4i) = (8 – 3) + (4 – (– 4)i) = 5 + 8i

9. Diketahui bilangan g = 3 + 4i, Carilah perkalian bilangan kompleks tersebut dengan konjugatnya :

10. Berapakah hasil dari
    a. 3 + 4i / (9-5i)
    b. (NIM + 3 i) / (5 – NIMi)
    c. 3 + 4i * (9-5i)
    d. (NIM + 3 i) * (5 – NIMi)

D. DAFTAR PUSTAKA

Purcel. Edwin J.Varberg; Dale; Kalkulus dan Geometri Analitis, Jilid I, Edisi ke.5, Penerjemah Drs. I Nyoman Susila, M.Sc. Jakarta, Erlanga. 1995

Georhe B.Thomas Jr.; Calculus and Analytic Geometry; 4th edition; Addison Wesly; Publishing Company, Reading Massachussets printing, 1975

Thomas - Calculus 11e with Differential Equations HQ

Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide