

Pertemuan 12

PENGUNAAN INTEGRAL TERTENTU

Tujuan Instruksional Umum :

Agar Mahasiswa memahami konsep kalkulus integral tertentu dan terampil menerapkannya dalam berbagai masalah.

Tujuan Instruksional Umum :

Mahasiswa dapat :

- menghitung luas daerah terbatas di bidang datar dengan menggunakan integral tentu.
 - menghitung volume benda putar dengan menggunakan integral tentu.
-

11.1. TEOREMA DASAR

Misal f kontinu pada $[a,b]$ dan F sebarang anti turunan f , maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Selanjutnya ditulis $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Contoh :

1. Perhatikan bahwa jika $r \in \mathbb{Q}$ dan $r \neq -1$, maka

$$\int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Jawab :

Karena $F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ suatu anti turunan dari $f(x) = x^r$, maka menurut TDK,

$$\int_a^b x^r dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

2. Hitung $\int_0^\pi 3 \sin x dx$

$$\int_0^\pi 3 \sin x dx = [-3 \cos x]_0^\pi = 3 + 3 = 6$$

Integral tentu sebagai operator linear, yaitu bersifat :

Misal f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan k suatu konstanta, maka kf dan $f + g$ terintegralkan, dan

$$1. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Contoh :

Hitung $\int_{-1}^2 (4x - 6x^2)dx$

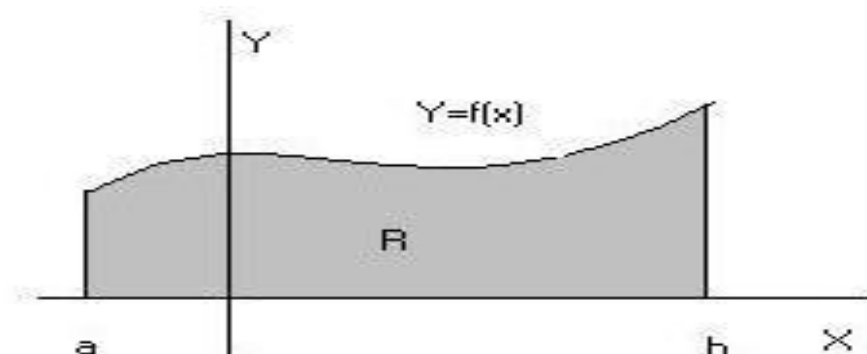
Jawab :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (4x - 6x^2)dx &= 4 \int_{-1}^2 xdx - 6 \int_{-1}^2 x^2 dx \\ &= 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 - 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= 4 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) - 6 \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) = -12 \end{aligned}$$

11.2. LUAS DAERAH BIDANG RATA

11.2.1. Daerah Antara Kurva dan Sumbu Koordinat.

Perhatikan gambar daerah rata dibawah ini

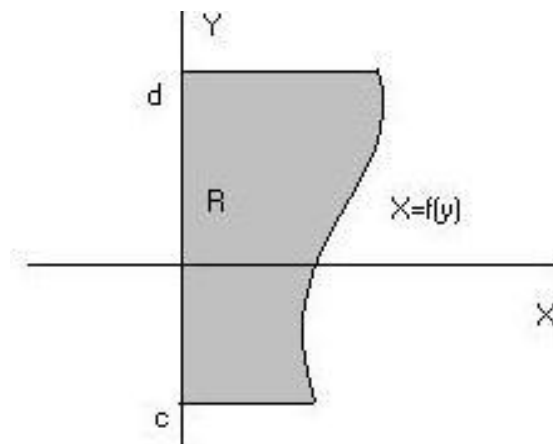


Daerah R dibatasi oleh grafik-grafik $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$, luasnya $A(R)$ ditentukan oleh :

$$A(R) = \int_a^b f(x) dx$$

Jika gambar terletak dibawah sumbu X maka integral diatas bernilai negatif, karena luas daerah tidak mungkin bilangan negatif maka nilai integral tersebut dimutlakkan.

Perhatikan pula gambar daerah rata berikut ini :



Daerah R dibatasi oleh grafik-grafik $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$ dan $x = 0$, luasnya $A(R)$ ditentukan oleh :

$$A(R) = \int_c^d f(y) dy$$

Jika gambar terletak disebelah kiri sumbu Y maka integral diatas bernilai negatif, karena luas daerah tidak mungkin bilangan negatif maka nilai integral tersebut dimutlakkan.

Contoh :

1. Tentukan luas daerah R dibawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ diatas sumbu X antara $x = -1$ dan $x = 2$.
2. Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^2/3 - 4$, sumbu X, $x = -2$ dan $x = 3$.

Untuk menghitung luas daerah rata ikuti pola berfikir sebagai berikut :

1. Gambar daerah yang bersangkutan
2. Potong daerah menjadi jalur-jalur dan beri nomor pada satu jalur tertentu
3. Hampiri luas jalur tertentu tersebut dengan luas persegi panjang
4. Jumlahkan luas jalur-jalur pada daerah tersebut
5. Ambil limit dari jumlah diatas dengan lebar jalur menuju 0, maka diperoleh integral tertentu.

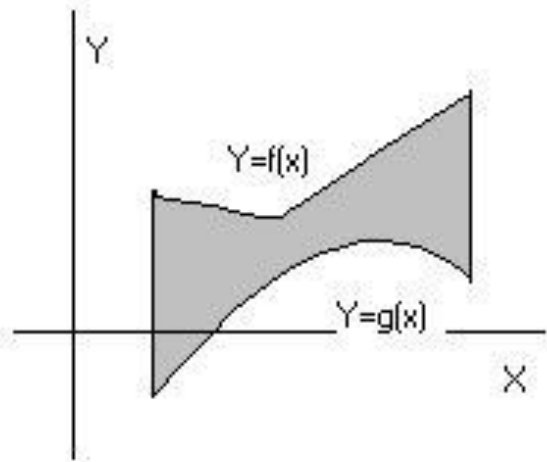
Contoh :

Susun integral untuk luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 1 + \sqrt{x}$, sumbu X antara garis $x = 0$ dan $x = 4$

11.2.2. Daerah Antara 2 Kurva

Perhatikan kurva-kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan

$g(x) \leq f(x)$ pada selang $[a,b]$, sebagai gambar berikut :



$$\Delta A \approx (f(x) - g(x))\Delta x$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Kita gunakan cara : potong, aproksimasikan, integralkan.

Contoh :

1. Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.
2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.