DESKRIPSI MATERI
PERTEMUAN 5
REPRESENTASI RELASI DAN SIFAT-SIFAT RELASI

Mata Kuliah Matematika Diskrit

PENGANTAR

Dalam masalah yang berhubugan dengan elemen-elemen diskrit, sering dijumpai adanya hubungan/relasi di antara objek-objek tersebut. Dalam ilmu komputer, konsep relasi banyak sekali dipakai dalam basis data untuk menggambarkan hubungan-hubungan yang ada di anatara data-data. Dalam bab ini dapat di pelajari tentang relasi yang ada di antara objek-objek dan sifat-sifatnya.

TUJUAN PERKULIAHAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai definisi relasi Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa diharapkan mampu :

- Mengetahui definisi & contoh relasi
- Menyelesaikan soal relasi

DESKRIPSI MATERI : REPRESENTASI RELASI DAN SIFAT-SIFAT RELASI

A. RELASI

Aturan yang menghubungkan antara dua himpunan dinamakan relasi biner. Relasi antara himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang berisi pasangan terurut yang mengikuti aturan tertentu. Dengan demikian relasi biner R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari *cartesian product* $A \times B$ atau $R \subseteq (A \times B)$.

Notasi dari suatu relasi biner adalah $a\ R\ b$ atau $(a, b) \in R$. Ini berarti bahwa a dihubungankan dengan b oleh R. Untuk menyataan bahwa suatu unsur dalam *cartesian product* bukan merupakan unsur relasi adalah $a \not{R}\, b$ atau $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R. Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R, dan
himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R.

Contoh 2.1.

Misalkan :

A = {Anto, Budi, Choirul}, B = {Kalkulus, Logika, Fisika, Teknik Digital}

$A \times B$ = {(Anto, Kalkulus), (Anto, Logika), (Anto, Fisika), (Anto, Teknik Digital), (Budi, Kalkulus), (Budi, Logika), (Budi, Fisika), (Budi, Teknik Digital), (Choirul, Kalkulus), (Choirul, Logika), (Choirul, Fisika), (Choirul, Teknik Digital) }

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

R = {(Anto, Logika), (Anto, Teknik Digital), (Budi, Kalkulus), (Budi, Logika), (Choirul, Teknik Digital) }

- Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,
- A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R.
- (Anto, Logika) $\in R$ atau Anto R Logika
- (Anto, Fisika) $\notin R$ atau Anto $\not R$ Fisika.

Contoh 2.2.

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.
Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q, maka kita peroleh

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$

- Relasi pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus
- Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.
- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.

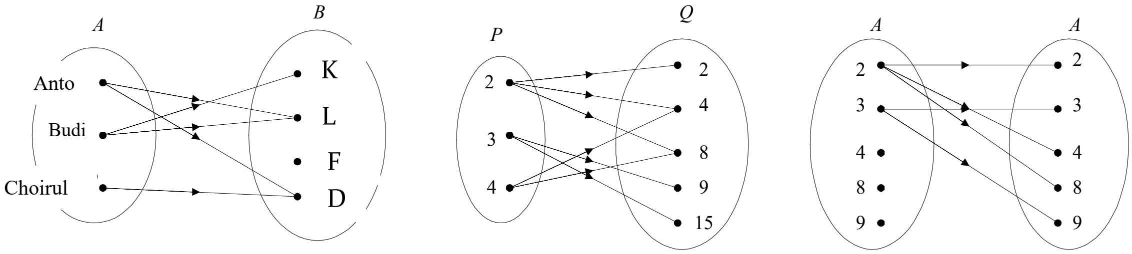
Contoh 2.3.

Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y. Maka

$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$

A.1. Representasi Relasi

1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah



2. Representasi Relasi dengan Tabel

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Tabel 2.1

A	*B*
Anto	Logika
Anto	Digital
Budi	Kalkulus
Budi	Logika
Choirul	Digital

Tabel 2.2

P	*Q*
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel 2.3

A	*A*
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

3. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 2.4.

Relasi *R* pada *Contoh 1* dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dalam hal ini, a_1 = Anto, a_2 = Budi, a_3 = Choirul, dan b_1 = Kalkulus, b_2 = Logika, b_3 = Fisika, dan b_4 = Teknik Digital.

Relasi *R* pada *Contoh 2* dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$.

4. Representasi Relasi dengan Graf Berarah

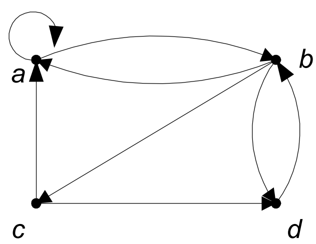
Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*). Graf berarah tidak didefinisikan untuk merepresentasikan relasi dari suatu himpunan ke himpunan lain.

Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*). Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul *a* ke simpul *b*. Simpul *a* disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul *b* disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*). Pasangan terurut (*a*, *a*) dinyatakan dengan busur dari simpul *a* ke simpul *a* sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

Contoh 2.5.

Misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

R direpresentasikan dengan graf berarah sbb:



A.2. Sifat-sifat Relasi Biner

1. **Refleksif** (*reflexive*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.
- Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh 2.6.

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka :

(a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu (1, 1), (2, 2), (3, 3), dan (4, 4).

(b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3, 3) \notin R$.

Contoh 2.7.

Relasi *"habis membagi"* pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif habis dibagi dengan dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Contoh 2.8.

Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

R : x lebih besar dari y, $S : x + y = 5$, $T : 3x + y = 10$

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan (2, 2) bukan anggota R, S, maupun T.

■

- Relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

2. **Menghantar** (*transitive*)

   Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk $a, b, c \in A$.

Contoh 2.9.

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ bersifat menghantar. Lihat tabel berikut:

Pasangan berbentuk		
(a, b)	(b, c)	(a, c)
(3, 2)	(2, 1)	(3, 1)
(4, 2)	(2, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 2)	(4, 2)

(b) $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak manghantar karena

(c) (2, 4) dan (4, 2) $\in R$, tetapi (2, 2) $\notin R$, begitu juga (4, 2) dan (2, 3) $\in R$, tetapi (4, 3) $\notin R$.

(d) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ jelas menghantar

(e) Relasi $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ menghantar karena tidak ada $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ sedemikian sehingga $(a, c) \in R$.

(f) Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti $R = \{(4, 5)\}$ selalu menghantar.

Contoh 2.10.

Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

R : x lebih besar dari y, $S : x + y = 6$, $T : 3x + y = 10$

- R adalah relasi menghantar karena jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$.
- S tidak menghantar karena, misalkan (4, 2) dan (2, 4) adalah anggota S, tetapi $(4, 4) \notin S$.
- $T = \{(1, 7), (2, 4), (3, 1)\}$ menghantar.

- Sifat menghantar pada graf berarah ditunjukkan oleh: jika ada busur dari a ke b dan dari b ke c, maka juga terdapat busur berarah dari a ke c.

3. **Setangkup** (*symmetric*) dan **tak-setangkup** (*antisymmetric*)

- Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika untuk semua a, $b \in A$, jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$.
- Relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$.
- Relasi R pada himpunan A disebut **tolak-setangkup** jika untuk semua a, $b \in A$, $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ hanya jika $a = b$.
- Relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.
- Perhatikanlah bahwa istilah setangkup dan tolak-setangkup tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) yang mana $a \neq b$.

Contoh 2.11.

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil, yang dinyatakan oleh :
$a\ R\ b$ jika dan hanya jika $a - b \in$ Z. Periksa apakah relasi R bersifat simetri !

Jawab :

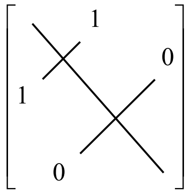
Misalkan $a\ R\ b$ maka $(a - b) \in \mathbf{Z}$, Sementara itu jelas bahwa $(b - a) \in \mathbf{Z}$.
Dengan demikian R bersifat simetri.

Contoh 2.12.

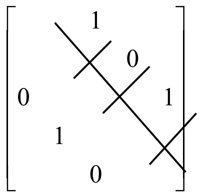
Misalkan relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ maka relasi R merupakan relasi yang simetri sekaligus relasi yang anti simetri.

Sifat simetri dan anti simetri memberikan beberapa ciri khas dalam penyajian berbentuk matriks maupun graf, yaitu :

- Relasi yang bersifat simetri mempunyai matriks yang unsur-unsur di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-unsurdi atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$ adalah :



- Relasi yang bersifat simetri, jika disajikan dalam bentuk graf berarah mempunyai ciri bahwa jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.
- Relasi yang bersifat anti simetri mempunyai matriks yang unsur mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi anti simetri adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$:
- Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$:



- Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat anti simetri mempunyai ciri bahwa tidak akan pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

A.3. Relasi Inversi

Misalkan, R merupakan relasi dari himpunan A ke himpunan B. **Invers dari relasi** R, dilambangkan dengan $\boldsymbol{R^{-1}}$, adalah relasi dari himpunan B ke himpunan A yang didefinisikan oleh :

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh 2.13.

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$.

Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q yaitu :

(p, q) $\in$ *R jika dan hanya jika p habis membagi q*

maka kita peroleh :

$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)$

R^{-1} merupakan *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P yang berbentuk :

$(q, p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p

sehingga diperoleh :

$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$

Jika M adalah matriks yang menyajikan suatu relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$