PERTEMUAN 15

TURUNAN

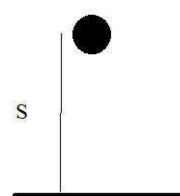
A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah mempelajari materi ini, mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal matematika yang berhubungan dengan turunan dalam matematika dalam matematika

B. URAIAN MATERI

1. TURUNAN

Konsep turunan adalah pengembangan dari konsep limit seperti bab sebelumnya. Didalam bab ini dibahas bagaimana sifat turunan aturan turunan dan penggunaan untuk memecahkan masalah teknik. Contoh turunan dapat diterangkan pada peristiwa benda yang jatuh bebas. Hasil percobaan menunjukkan posisinya setiap saat. Jika posisi benda sebagai fungsi waktu didefinisikan sebagai $S(t) = 8t^2$. Maka berapakah kecepatannya saat $t = 1$?



Gambar 15.2. Benda jatuh bebas

Untuk menghitung kecepatan pada detik tersebut digunakan tabel sebagai berikut:

t_1	t_2	S1	S2	$v_{errata} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$
1	2	8	32	24

1	1,1	9,68	9,68	16,8
1	1,01	8,1608	8,1608	16,08
1	1,001	8,016008	8,016008	16,008

Sehingga kecepatan rata-rata dapat dihitung dengan melihat data tabel diatas. Kecepatan rata rata adalah :

$$v_{errata} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

Sedangkan kecepatan dapat didefinikan sebagai berikut:

$$V_{\text{sesaat}} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{rata-rata}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

2. Definisi Turunan

Misalkan f(x) sebuah fungsi riil dimana x adalah anggota bilangan riil, $x \in R$. Maka turunan dari f di titik x, dituliskan sebagai

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Penulisan notasi turunan dinyatakan sebagai berikut :

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

Notasi f(x) biasa dituliskan dengan f saja. Menunjukkan suatu fungsi. Turunan pertama dari f adalah f'.

3. Rumus Turunan

Proses untuk menghitung derivative adalah diferential. Untuk menekankan idea maka digunakan notasi

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

$$= 10x$$

$$\frac{df(x)}{dx}\left(\frac{4}{5}x - 6\right) = \frac{4}{5}$$

Maka turunannya

Rumus umum, Jika

$$\mathrm{f(x) = ax^{n}}$$

Maka turunannya adalah :

$$f(x) = nax^{n-1}$$

Contoh:

a. Jika $f(x) = 5x^2$ dengan menggunakan rumus turunan maka

Jawab :

$$\frac{df(x)}{dx} = 2.5x^{2-1}$$

$$= 10x$$

b. Untuk $y = NIMx^{NIM} + NIMx + NIM$ maka turunannya adalah

Jawab :

$$y' = NIM.NIMx^{NIM-1} + NIM$$

c. Misal $y = \frac{1}{x}$ untuk $x \neq 0$, maka turunan y adalah :

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = y' = \ln x$$

Aturan turunan

Teorema

1. Untuk c konstanta, jika f(x)=c , maka f'(x)=0
2. jika f(x) = cx , maka f'(x)=c
3. jika $f(x) = x^n$, maka $f'(x)= nx^{n-1}$
4. $f(x) = u(x).v(x)$
   $f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$
5. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
   $f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$

Contoh:

Carilah turunan dari fungsi

a. $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 9$ b. $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = -\frac{\pi}{3}$

c. $h(\mathrm{x}) = \sqrt{5}$ d. $f(\mathrm{x}) = 3x^2$

Jawab

a. $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(9) = 0$

b. $\frac{dg(x)}{dx} = 0$

c. $\frac{dh(x)}{dx} = 0$

d. $\frac{dh(x)}{dx} = 2 \cdot 3\mathrm{x} = 6\mathrm{x}$

Contoh:

Carilah turunan dari fungsi

$$f(\mathrm{x}) = -\frac{1}{x}(90 + x^3)$$

Jawaban : Misalkan

$$u = -\frac{1}{x} \qquad ; \qquad v = (90x + x^3)$$

Maka

$$u' = \frac{1}{x^2} \qquad ; \qquad v' = (90 + 3x^2)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{x^2}(90x + x^3) + \left(-\frac{1}{x}\right)(90 + 3x^2)$$

$$= \frac{90}{x} + x - \frac{90}{x} - 3x^2$$

$$= -3x^2 + x$$

Contoh:

Carilah turunan dari fungsi

$$f(\mathrm{t}) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

Jawaban : Misalkan

$$u = t^2 - 1 \qquad ; \qquad v = t^2 + 1$$

Maka

$$u' = 2t \qquad ; \qquad v = 2t$$

$$f(\mathrm{t}) = \frac{2t(t^2 + 1) - (t^2 - 1)2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f(\mathrm{t}) = \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$f(\mathrm{t}) = \frac{4t}{t^4 + 2t^2 + 1}$$

4. Turunan Fungsi Trigonometri

Turunan pada fungsi trigonometri dapat dilihat pada rumus berikut:

a. Turunan y = sin x

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h-\sin x+\cos x\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right]\\
&= \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= (\sin x)(0)+(\cos x)(1)=\cos x
\end{aligned}
$$

b. Turunan y = cos x

$$f(x) = \cos x$$
$$f(x+h) = \cos(x+h)$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \cos x - \sin x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\right] \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= (\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x
\end{aligned}$$

c. Jika $\mathrm{f(x) = \sin a\ (x)}$

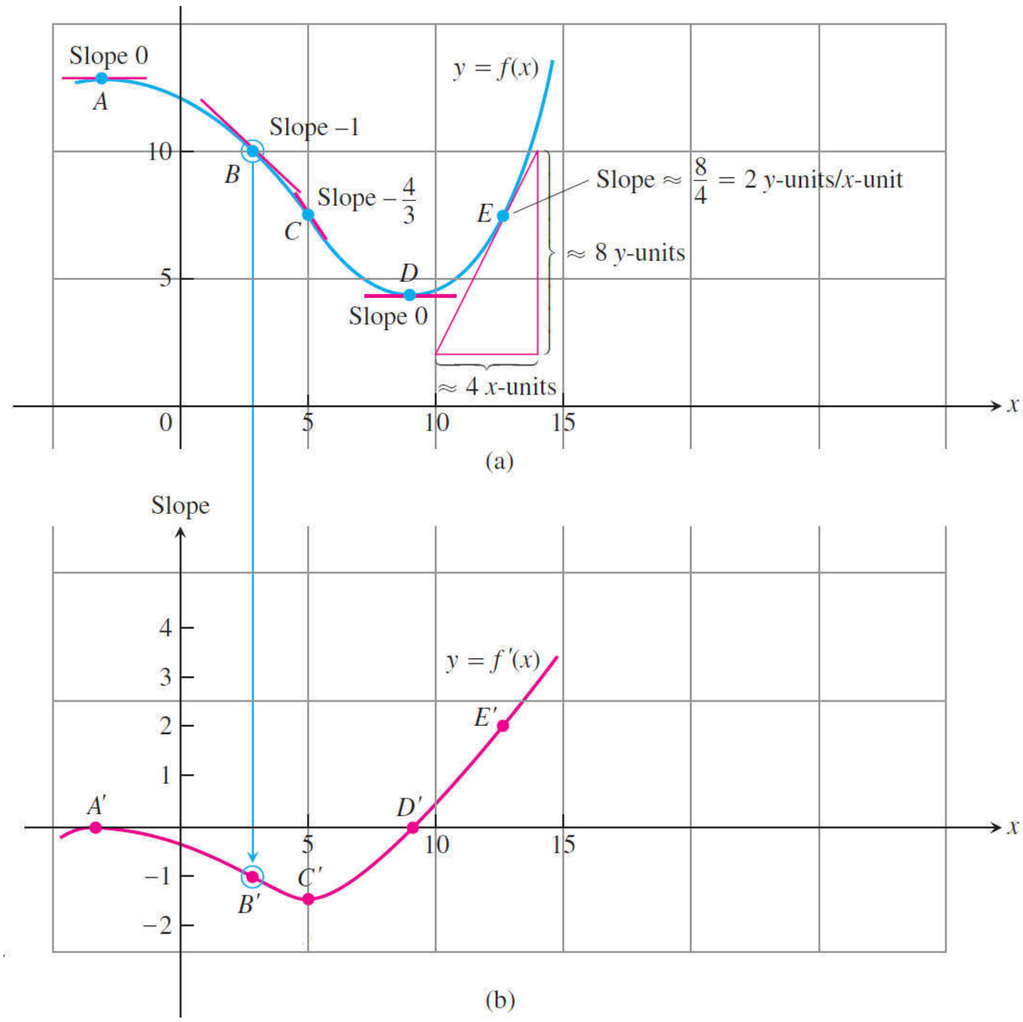
Maka $\mathrm{f'(x) = a \cos a\ (x)}$

d. Jika $\mathrm{f(x) = \cos b\ (x)}$

Maka $\mathrm{f'(x) = -b \cos b\ (x)}$

Menggambar fungsi turunan

Untuk membuat gambar fungsi yang wajar dari turunan biasanya dengan memperkirakan lereng pada grafik f. Yaitu dengan memplot titik titik dalam bidang xy dan menghubungkannya dengan kurva halus, yang mewakili turunan fungsi seperti pada Gambar 15.2



Gambar 15.2. (a)Grafik dalam fungsi dengan koordinatnya, grafik dalam (b). Turunan dari grafik a

Dari grafik tersebut maka dapat kita lihat

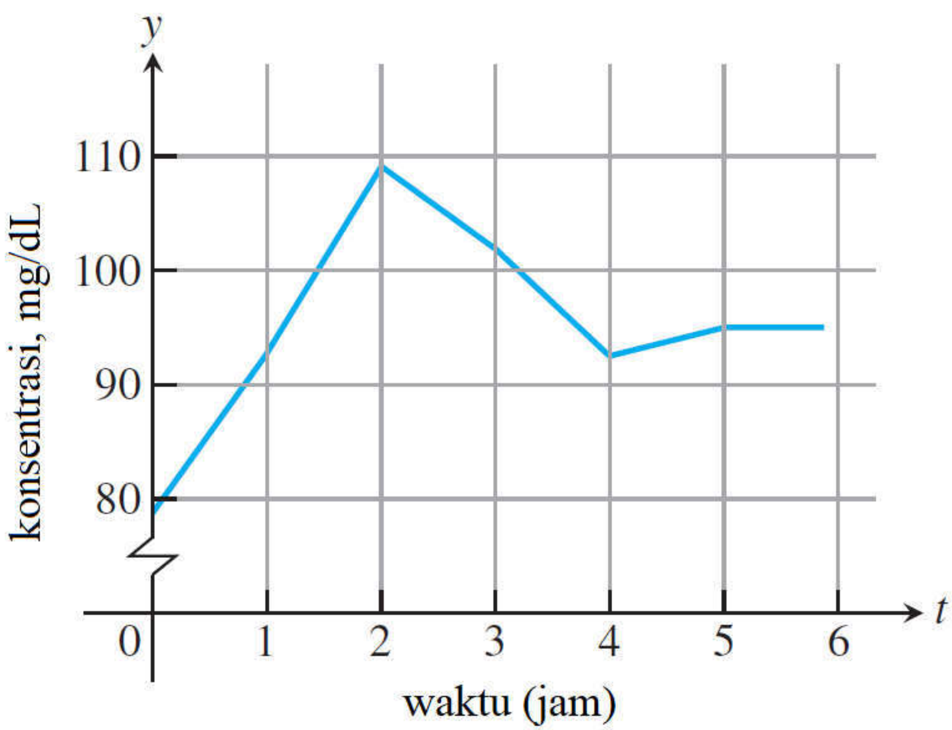
1. di mana tingkat perubahan f positif, negatif, atau nol;

2. ukuran kasar dari laju pertumbuhan pada setiap x dan ukurannya dalam kaitannya dengan ukuran f (x);

3. di mana tingkat perubahan itu sendiri meningkat atau menurun.

Contoh . Perhitungan konsentrasi gula darah seorang atlet

Seorang pembalap sepeda melakukan perjalanan sejauh 119 km dari selama 6 jam. Pembalap tersebut di pantau konsentrasi gula darahnya. Grafik konsentrasi nya ditunjukkan pada gambar dibawah ini



Buatlah grafik tingkat kenaikan gula darah tiap satuan waktu

Jawaban. Kenaikan konsentrasi gula darah tiap satuan waktu dapat dihitung dengan cara megambil nilai akhir konsentrasi gula darah dikurangi nilai awal dan di bagi dengan waktu.

Pada jam ke 1, jam ke 2, 3 dan seterusnya hingga jam ke 6 didapatkan

$$m1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{93 - 79}{1} = 14\ mg/dL\ jam$$

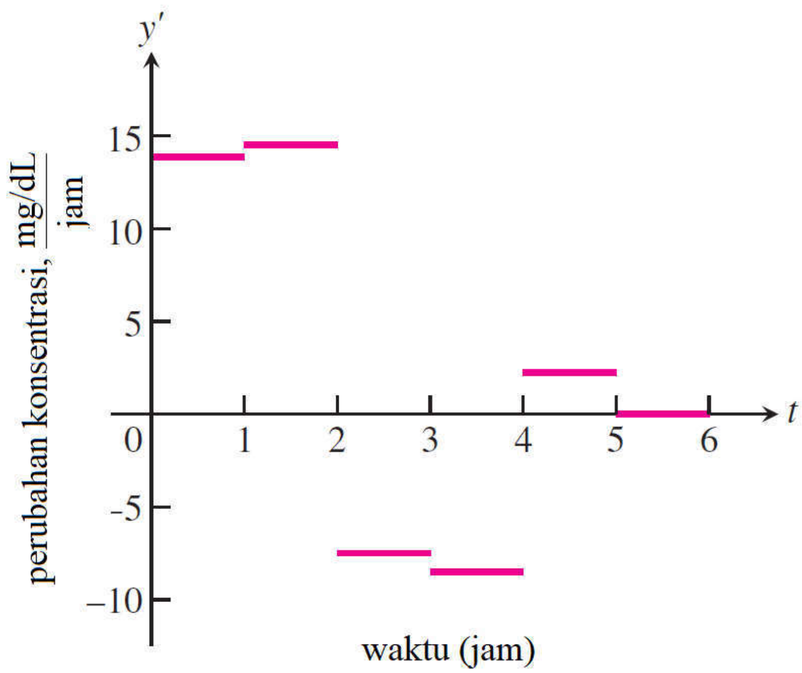
$$m2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{108 - 93}{1} = 15\ mg/dL\ jam$$

$$m3 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{101 - 108}{1} = -7 \ mg/dL \ jam$$

….

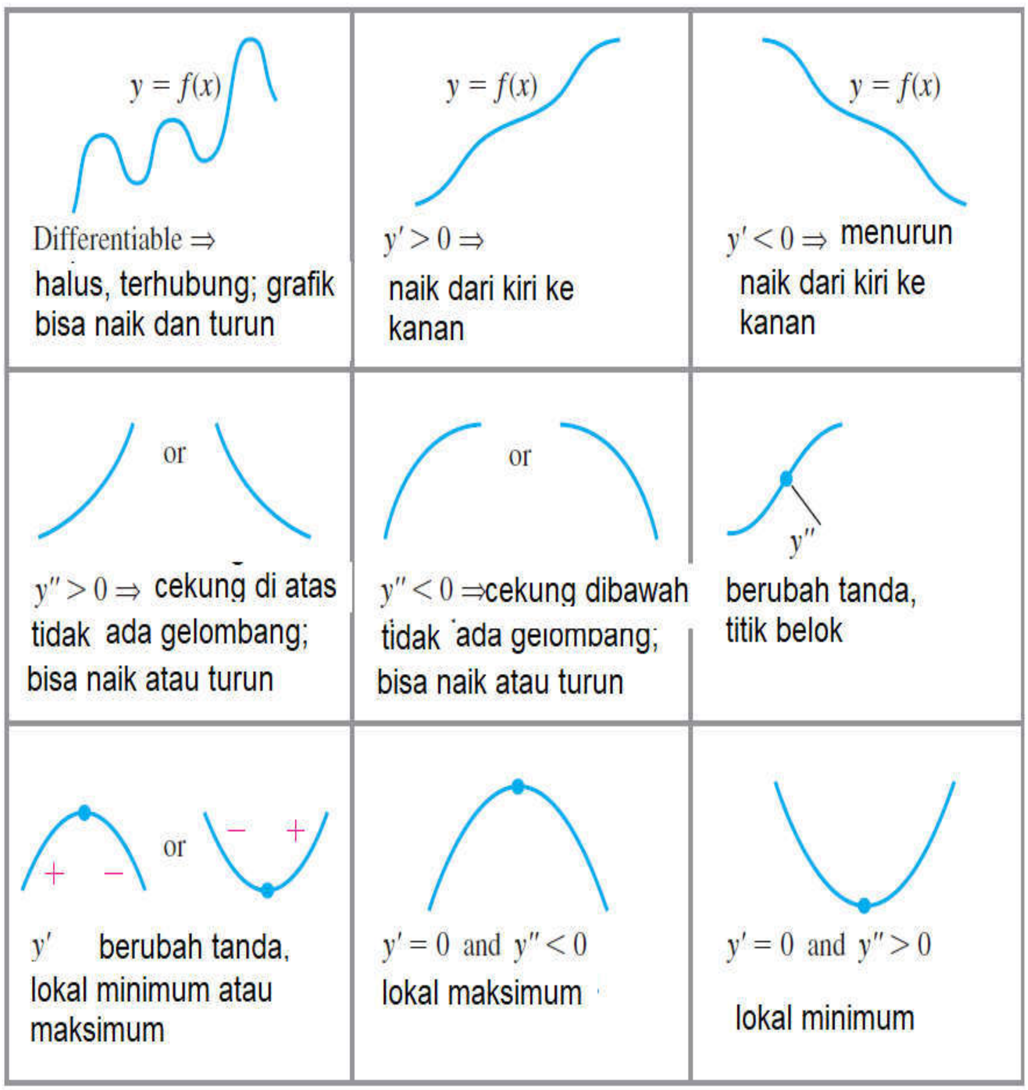
$$m6 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{95 - 95}{1} = 0 \, mg/dL \ jam$$

Hasil perhitungan ditunjukkan pada gambar dibawah:



(b)

Bentuk bentuk fungsi dengan menggunakan turunannya, dapat kita temukan apakah di mana grafik fungsi naik dan turun dan di mana setiap titik ekstrim, terbuka keatas atau kebawah, titik maksimum atau minimum dan lainnya yang dapat di liaht dalam gambar di bawah ini.



Gambar 15.3. (a) Bentuk bentuk grafik fungsi dengan melihat turunannya

C. SOAL LATIHAN/TUGAS

Selesaikan soal-soal berikut :

1. $f(x) = -x - x^2 + 5;\ cari\ f'(0),\ f'(NIM)$
2. $g(x) = (x-1)^2 + 5;\ cari\ g'(1), g''(1)$
3. $g(t) = \frac{1}{t^2};$ cari $t'(0),\ t'(1),$ dan $t''(1)$
4. $y = NIMx - \sin x$ cari y'
5. $r(s) = \sqrt{NIMs + 1};$ carilah $r'(0),\ r'(1),$ dan $r''(2)$
6. Diketahui $\mathrm{f(x)} = \sin 5\,(\mathrm{x})$, maka carilah $f'(x)$
7. Diketahui $\mathrm{f(x)} = cos\,8\,(\mathrm{x})$, maka carilah $f'(x)$

D. DAFTAR PUSTAKA

Thomas (2005), Calculus 11e with Differential Equations Pearson Addison Wesley

Weltner, Klaus (2009), Mathematics-for-physicists-and-engineers-fundamentals-and-interactive-study-guide, Springer