DESKRIPSI MATERI
PERTEMUAN 12
KOMBINATORIKA
Mata Kuliah Matematika Diskrit

PENGANTAR

Dalam masalah yang berhubugan dengan elemen-elemen diskrit, sering dijumpai istilah kombinatorika Kombinatorika adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya. Kombinatorial meliputi :

1. Pengisian tempat yang tersedia
2. Permutasi
3. Kombinasi

TUJUAN PERKULIAHAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai definisi relasi Setelah menyelesaikan perkuliahan, mahasiswa diharapkan mampu :

- Mengetahui definisi & contoh kombinatorika
- Menyelesaikan permasalahan terkait kombinatorika

B. PERMUTASI

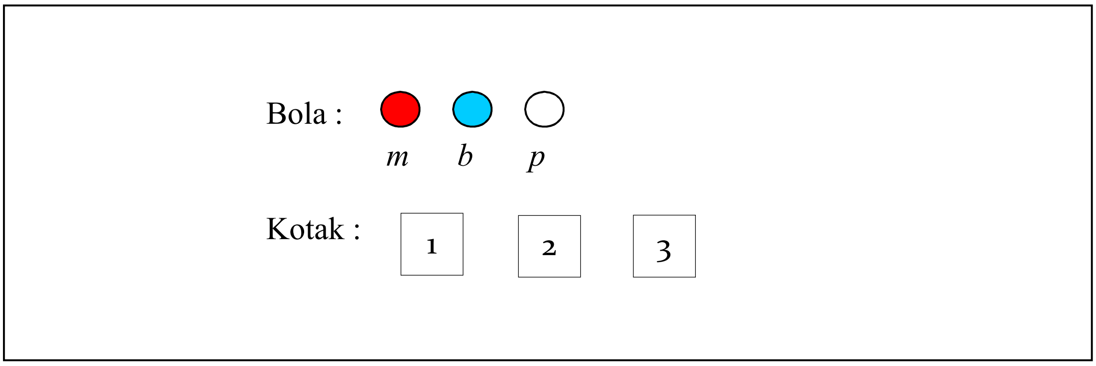
Apabila ada r tempat yang tersedia untuk ditempati oleh salah satu dari n unsur (penempatan dengan urutan tertentu), maka penempatan unsur-unsur kedalam tempat-tempat yang berbeda itu dapat dilakukan menurut :

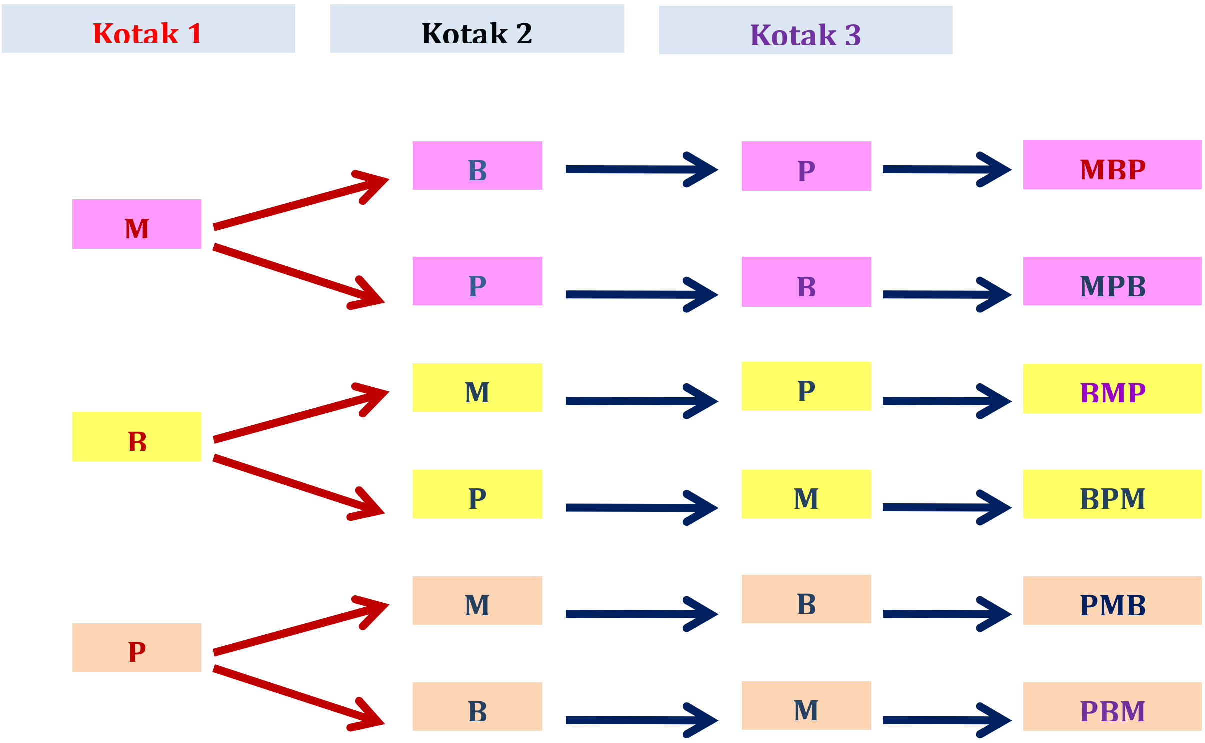
$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

Suatu susunan n objek dalam urutan tertentu itu disebut suatu ***permutasi*** dari n objek tersebut. Susunan sembarang r obyek dari n objek dalam urutan tertentu **($r \leq n$)** disebut ***permutasi r dari n objek*** atau permutasi r objek dari n objek yang diketahui.

Banyaknya permutasi r obyek dari n obyek dinotasikan dengan :
$\boldsymbol{P(n,r)}$

Misalkan terdapat tiga buah bola yang masing-masing berwarna merah, putih dan biru, dan terdapat pula tiga buah kotak bernomor 1, 2 dan 3 sebagai tempat bola-bola tersebut. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?





Jadi, jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah $(3)(2)(1) = 3! = 6$.

Elemen pertama dari permutasi n objek dapat dipilih dalam n cara yang berbeda, berikutnya elemen kedua dalam permutasi dapat dipilih dalam n-1 cara berbeda, dan berikutnya elemen ketiga dalam permutasi dapat dipilih dalam n-2 cara berbeda. Begitu seterusnya, dengan cara yang sama, kita dapatkan elemen ke-2 (elemen yang terakhir) dalam permutasi r objek dapat dipilih dalam $n-(r-1)$ cara berbeda, atau $n-(r-1) = n - r + 1$ cara.

Teorema 3.1.

$$\boxed{P(n,r) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}$$

atau
$$\boxed{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Untuk membuktikan $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ adalah sebagai berikut :

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \square$$

Contoh 3.6.

1. $P(5,3) = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5\,x\,4\,x\,3\,x\,2!}{2!} = 60$.

2. Suatu kepanitiaan dengan 15 anggota akan memilih ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Ada berapa cara yang berbeda mereka dapat memilih empat pengurus tersebut?

   Jawab:

   $n = 15$ dan $r = 4$

   $${}_{15}P_4 = \frac{15!}{(15-4)!} = \frac{15!}{11!} = \frac{15 \text{ x } 14 \text{ x } 13 \text{ x } 12 \text{ x } 11!}{11!} = 15 \text{ x } 14 \text{ x } 13 \text{ x } 12 = 32760 \text{ .}$$

   Jadi banyaknya cara untuk memilih empat pengurus itu ada 32.760 cara.

Untuk kasus khusus, jika dalam ruang sampel terdapat n elemen yang terdiri dari beberapa elemen berbeda (misalkan k elemen berbeda), misalkan n_1, n_2, n_3, ... , n_k, maka rumus permutasinya adalah:

$$\boxed{P = \frac{n!}{n_1!\; n_2!\; n_3! \ldots n_k!}, \text{ dengan } n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k \text{ .}}$$

Contoh 3.7.

Ada berapa cara berbeda tiga bolam merah, empat bolam kuning, dan dua bolam biru dirangkai untuk lampu hias sebuah cafe ?

Jawab:

$$P = \frac{9!}{3!\; 4!\; 2!} = 1260 \text{ cara.}$$

Permutasi Siklik

Permutasi siklik adalah permutasi yang objeknya disusun dalam bentuk lingkaran. Untuk menghitung permutasi siklik dari 3 elemen P, Q dan R kita ambil salah satu elemen sebagai titik tetap pada lingkaran, misalnya titik P, sehingga banyaknya permutasi sama dengan 2!. Untuk 4 elemen sama dengan 3!, untuk 5 elemen sama dengan 4!, sedangkan untuk *n* elemen sama dengan (*n*-1)!. Rumus umum untuk permutasi siklik adalah :

$$\boxed{P = \frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

Contoh 3.8.

Misalkan ada lima orang yang duduk melingkar di meja rapat, ada berapa cara urutan siklik yang mungkin terjadi?
Jawab:
$P = (n-1)! = (5-1)! = 4! = 24$ cara.

A. KOMBINASI

Kombinasi merupakan bentuk permutasi yang lain. *Kombinasi* meliputi memilih sejumlah elemen (r) dari jumlah total elemen yang ada (n) dan menyusun elemen yang terpilih *tanpa memperhatikan urutan*.

Rumus umum kombinasi adalah :

$$\boxed{C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Contoh 3.9.

1. Ada berapa susunan tiga huruf berbeda yang dapat dibentuk dari huruf-huruf A, B, C, D, dan E?

   Jawab:

   {ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE}

   $$C(5,3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5x4x3x2x1}{(3x2x1)(2x1)} = \frac{5x4}{2x1} = 10 \text{ susunan.}$$

2. Seorang siswa diminta mengerjakan 5 dari 6 soal ulangan, tetapi nomor 1 wajib dikerjakan. Berapa banyak pilihan soal yang dapat dikerjakan ?

Jawab :

Karena soal nomor 1 wajib dikerjakan, maka soal yang dipilih ada 4 soal dari 5 soal yang tersisa tanpa memperhatikan urutan. Jadi banyaknya kombinasi pilihan soalnya adalah :

$C(5,4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!1!} = \frac{5x4!}{4!} = 5$ cara.

LATIHAN

1. Tentukan banyaknya bilangan tiga angka yang dapat disusun dari himpunan A = {1,2,3,4} !
2. Berapakah banyaknya permutasi dari semua huruf dalam kata “STATISTIK” ?
3. Dalam suatu rapat, 7 orang peserta rapat duduk mengelilingi sebuah meja bundar. Dengan berapa carakah mereka duduk dengan urutan berbeda ?
4. Dengan berapa cara suatu pasangan ganda putra bulutangkis dapat disusun dari 10 pemain putra ?
5. Pak Agung membeli 2 ekor sapi, 3 ekor kuda dan 4 ekor domba dari seorang pedagang yang mempunyai 5 ekor sapi, 6 ekor kuda dan 7 ekor domba. Berapa cara yang dapat dipilih oloeh Pak Agung untuk memperoleh hewan-hewan peliharaan tersebut ?
6. Pada suatu pesta terdapat 24 tamu dan semuanya saling berjabat tangan, berapa banyak jabat tangan yang terjadi ?
7. Sebuah tas kopor mempunyai kunci kombinasi yang terdiri atas 3 angka dari 0 sampai dengan 5. Berapakah banyak kombinasi angka yang mungkin?