

頂点作用素と Hall–Littlewood 多項式

箱 (hako111223)

2023 年 10 月 24 日

概要

頂点作用素を用いた Hall–Littlewood 多項式の実現について扱う。

目次

| | | |
|---|---------------------|---|
| 1 | Hall–Littlewood 多項式 | 1 |
| 2 | 母関数 | 2 |
| 3 | 頂点作用素 | 5 |

1 Hall–Littlewood 多項式

x_1, \dots, x_n, t を変数とする。 $x = (x_1, \dots, x_n)$ とおく。 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ を長さが n 以下の分割とする。 m_i を i に等しい λ の成分の個数とする。ただし $m_0 = n - l$ とする。

$$v_m(t) = \prod_{j=1}^m \frac{1-t^j}{1-t}$$
$$v_\lambda(t) = \prod_{i \geq 0} v_{m_i}(t)$$

とおく。多項式 $P_\lambda(x; t)$ を

$$P_\lambda(x; t) = \frac{1}{v_\lambda(t)} \sum_{w \in S_n} w \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right)$$

により定める。ここで対称群 S_n は x_1, \dots, x_n の置換として作用する。また

$$\varphi_m(t) = \prod_{j=1}^m (1-t^j)$$
$$b_\lambda(t) = \prod_{i \geq 1} \varphi_{m_i}(t)$$

とおく。多項式 $Q_\lambda(x; t)$ を

$$Q_\lambda(x; t) = b_\lambda(t) P_\lambda(x; t)$$

により定める。 $P_\lambda(x; t), Q_\lambda(x; t)$ をともに **Hall–Littlewood 多項式** と呼ぶ。

2 母関数

Q_λ の母関数、すなわち

$$\sum_{\lambda} Q_{\lambda} z^{\lambda}$$

を求める。まずは λ が一行のときを考える。 $q_r = Q_{(r)}$ とおく。

補題 2.1.

$$G(z) = \prod_{i=1}^n \frac{1 - tx_i z}{1 - x_i z}$$

とおくと

$$G(z) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r z^r$$

が成り立つ。

証明. q_r は $r > 0$ のとき

$$\begin{aligned} q_r &= (1-t)P_{(r)} \\ &= (1-t) \sum_{i=1}^n x_i^r \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

と表せる。一方、部分分数分解により

$$\prod_{i=1}^n \frac{u - tx_i}{u - x_i} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(1-t)x_i}{u - x_i} \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}$$

となる。 $u = z^{-1}$ を代入すると

$$G(z) = 1 + (1-t) \sum_{i=1}^n \frac{x_i z}{1 - x_i z} \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}$$

となる。よって $G(z)$ における z^r の係数は q_r であることがわかる。 \square

補題 2.2. $\mu = (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_l), g_i = (1-t) \prod_{j \neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}$ とおき、 $Q_{\mu}^{(i)}$ を Q_{μ} に $x_i = 0$ を代入して得られるものとする。このとき

$$Q_{\lambda} = \sum_{i=1}^n x_i^{\lambda_1} g_i Q_{\mu}^{(i)}$$

が成り立つ。

証明. $m_0 = n - l$ より

$$\begin{aligned} v_\lambda(t) &= v_{n-l}(t) \prod_{i \geq 1} v_{m_i}(t) \\ &= v_{n-l}(t) b_\lambda(t) / (1-t)^l \end{aligned}$$

となる。また S_{n-1} を $2, 3, \dots, n$ の置換群とみなしたとき、 S_n の任意の元は $X_n = \{\text{id}, (1, 2), \dots, (1, n)\}$ の元と S_{n-1} の元の積として一意的に表せる。よって

$$\begin{aligned} Q_\lambda(x; t) &= \frac{(1-t)^l}{v_{n-l}(t)} \sum_{w \in S_n} w \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_l^{\lambda_l} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right) \\ &= \frac{(1-t)^{l-1}}{v_{n-l}(t)} \sum_{w_1 \in X_n} \sum_{w_2 \in S_{n-1}} w_1 w_2 \left(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_l^{\lambda_l} g_1 \prod_{2 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right) \\ &= \sum_{w_1 \in X_n} w_1(x_1^{\lambda_1} g_1 Q_\mu^{(1)}) \end{aligned}$$

となる。これは補題の主張と同値。 □

これを用いて母関数を求める。

命題 2.3. $Q_\lambda(x; t)$ は

$$G(z_1, \dots, z_l) = \prod_{i=1}^l G(z_i) \prod_{1 \leq i < j \leq l} \frac{1 - z_i^{-1} z_j}{1 - tz_i^{-1} z_j}$$

における $z^\lambda = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_l^{\lambda_l}$ の係数に等しい。

証明. l に関する帰納法を用いる。 $l = 1$ のときは補題 2.1 から従う。 $l > 1$ とする。

$$G(z_1, \dots, z_l) = G(z_2, \dots, z_l) G(z_1) \prod_{j=2}^l \frac{1 - z_1^{-1} z_j}{1 - t z_1^{-1} z_j}$$

が成り立つ。

$$\prod_{j=2}^l \frac{1 - u^{-1} z_j}{1 - t u^{-1} z_j} = \sum_{m \geq 0} f_m u^m$$

とべき級数展開する。このとき $G(z_1, \dots, z_l)$ における $z_1^{\lambda_1}$ の係数は

$$\begin{aligned} [z_1^{\lambda_1}] G(z_1, \dots, z_l) &= G(z_2, \dots, z_l) \left(\sum_{m \geq 0} f_m q_{\lambda_1 + m} \right) \\ &= G(z_2, \dots, z_l) \left(\sum_{m \geq 0} f_m (1 - t) \sum_{i=1}^n x_i^{\lambda_1 + m} \prod_{j \neq i} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) \\ &= G(z_2, \dots, z_l) \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{m \geq 0} f_m x_i^m \right) x_i^{\lambda_1} g_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n G(z_2, \dots, z_l) \prod_{j \geq 2} \frac{1 - x_i z_j}{1 - t x_i z_j} x_i^{\lambda_1} g_i \\ &= \sum_{i=1}^n G^{(i)}(z_2, \dots, z_l) x_i^{\lambda_1} g_i \end{aligned}$$

ここで $G^{(i)}(z_2, \dots, z_l)$ は $G(z_2, \dots, z_l)$ に $x_i = 0$ を代入して得られるものである。これより

$$[z_1^{\lambda_1} \cdots z_l^{\lambda_l}] G(z_1, z_2, \dots) = [z_2^{\lambda_2} \cdots z_l^{\lambda_l}] \sum_{i=1}^n G^{(i)}(z_2, \dots, z_l) x_i^{\lambda_1} g_i$$

であり、帰納法の仮定と補題 2.2 を合わせると右辺が Q_λ であることがわかる。 \square

系として Q_λ の次のような表示が得られる。 $q_\lambda = q_{\lambda_1} \cdots q_{\lambda_l}$ とする。raising operator R_{ij} は

$$R_{ij} \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j - 1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_l)$$

および

$$R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_m j_m} q_\lambda = q_{R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_m j_m} \lambda}$$

により定まる。 $R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} q_\lambda$ は $R_{i_1 j_1} (R_{i_2 j_2} q_\lambda)$ と等しいとは限らないことに注意する。

系 2.4.

$$Q_\lambda(x; t) = \prod_{i < j} \frac{1 - R_{ij}}{1 - t R_{ij}} q_\lambda$$

3 頂点作用素

p_m をべき和対称多項式 $p_m(x) = x_1^m + x_2^m + \cdots$ とする。頂点作用素 $H(z)$ を次のように定める。

$$H(z) = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n z^n \right) \exp \left(- \sum_{n>0} \frac{\partial}{\partial p_n} z^{-n} \right)$$

これを z のべき級数に展開して

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n z^n$$

とする。正規順序積を次のように定める。

$$:H(z)H(w): = \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n (z^n + w^n) \right) \exp \left(- \sum_{n>0} \frac{\partial}{\partial p_n} (z^{-n} + w^{-n}) \right)$$

命題 3.1.

$$H(z)H(w) = :H(z)H(w): \frac{z-w}{z-tw}$$

ここで $\frac{z-w}{z-tw}$ は w/z に関する形式的べき級数。

証明. Baker–Campbell–Hausdorff の公式より、 $[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0$ ならば

$$\begin{aligned} \exp(X) \exp(Y) &= \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]) \\ \exp(Y) \exp(X) &= \exp(Y + X + \frac{1}{2}[Y, X]) \end{aligned}$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned} H(z)H(w) &= :H(z)H(w): \exp \left(\left[- \sum_{n>0} \frac{\partial}{\partial p_n} z^{-n}, \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n w^n \right] \right) \\ &= :H(z)H(w): \exp \left(- \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} \left(\frac{w}{z} \right)^n \right) \\ &= :H(z)H(w): \frac{z-w}{z-tw} \end{aligned}$$

となる。 □

Hall–Littlewood 多項式は頂点作用素を用いて表せることを示す。

定理 3.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ に対して

$$H_{\lambda_1} \cdots H_{\lambda_l} . 1 = Q_{\lambda}(x; t)$$

が成り立つ。

証明. 命題 3.1 を繰り返し用いることで

$$\begin{aligned}
H(z_1) \cdots H(z_l).1 &= :H(z_1) \cdots H(z_l): \prod_{1 \leq i < j \leq l} \frac{z_i - z_j}{z_i - tz_j}.1 \\
&= \exp \left(\sum_{i=1}^l \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n z_i^n \right) \prod_{1 \leq i < j \leq l} \frac{z_i - z_j}{z_i - tz_j} \\
&= \prod_{i=1}^l \exp \left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n z_i^n \right) \prod_{1 \leq i < j \leq l} \frac{z_i - z_j}{z_i - tz_j} \\
&= \prod_{i=1}^l G(z_i) \prod_{1 \leq i < j \leq l} \frac{z_i - z_j}{z_i - tz_j} \\
&= G(z_1, \dots, z_l)
\end{aligned}$$

となる。 z^λ の係数を比較すればよい。 □

参考文献

- [1] Naihuan Jing, *Vertex operators and Hall–Littlewood symmetric functions*, Advances in Mathematics **87** (1991), 226–248.
- [2] Ian Grant Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.*, 2nd ed., Oxford: Clarendon Press, 1995.