

箱星学園数学教室

箱星

2025 年 4 月 1 日

目次

第 1 号	箱星学園、オープンです！	2
1	はじめ	2
1.1	箱星学園へようこそ	2
1.2	カリキュラム	3
2	数学語入門	5
2.1	数学語とは	5
2.2	定義	5
2.3	定理	6
2.4	証明	7
3	おやつ休憩	8
4	命題論理	8
4.1	かつ	8
4.2	または	9
4.3	ならば	10
4.4	でない	11
4.5	同値	11
5	同値な命題	11
6	おわりに	12

第1号

箱星学園、オープンです！

(論理と集合 第1講)

1 はじまり

箱星学園に、1人の先生と3人の学生が集まった。

1.1 箱星学園へようこそ

スピカ：箱星学園へようこそ。ここは箱星学園数学教室。この新しい教室でみんなに数学を教えていくよ。

望田紗也香：っていうか、ここスピカちゃんの家じゃん。

スピカ：そうだね。

石浦いおり：あれっ？箱星学園数学教室じゃないの！？

スピカ：合ってるよ。

望田紗也香：じゃあ、箱星学園数学教室でもあり、スピカちゃんの家でもあるってこと？

スピカ：そうだよ。

蛭津美悠：？

望田紗也香：そんな学校ある？

スピカ：箱星学園は自由な学園だからね。私の家がキャンパスになるくらいに。

石浦いおり：自由はだいじなの！

望田紗也香：自由すぎない……？

蛭津美悠：……。

.....
スピカ：まずは自己紹介をしていこう。私はスピカ。この学園の数学教師だよ。

望田紗也香：私はずーっとスピカちゃんに数学を教わってるんだ！

スピカ：本当にずっとだよ。何年も前から。

望田紗也香：じゃあ次は私！^{もちださやか}望田紗也香、大学生だよ！情報系が流行ってるみたいだから情報系のところに進学したんだけど、授業は難しいし課題も多いから大変だよ～。だからスピカちゃんに教わってるんだ。

石浦いおり：情報系ってすごそうなの！

望田紗也香：プログラミングもできるよ、ちょっとだけね。

石浦いおり：すごいの！

スピカ：じゃあ次はいおり。

石浦いおり：うん！^{いしうら}石浦いおりなの！おさななじみのしーちゃんと一緒に、世界を知るための冒険中なの！図書館で数え上げの本を見つけて、この本のことを知りたいって思ったの。でも難しかったの……。だから、くみあせんせーにいろいろ教えてもらってるの。

望田紗也香：くみあせんせー？

石浦いおり： くみあせんせーは、組合せ論に詳しいの！

望田紗也香： そうなんだ。私も教わりたいな。

スピカ： 前に話を聞いたけど、本当の先生じゃなくて大学院生なんだって。組合せ論の布教活動にかなり力を入れているみたい。

石浦いおり： そうなの！

望田紗也香： そんな人がいるんだ～。

スピカ： じゃあ最後は美悠。

蛭津美悠： えっと……、^{ほとつ み ゆ}蛭津美悠……です。高校1年生です。

望田紗也香： よろしくね。

蛭津美悠： 数学アイドル……やっています。

石浦いおり： アイドル！？それって、かわいくてキラキラしてる人たちなの！美悠ちゃんもそうなの？

蛭津美悠： わたしは、キラキラしてないけど……。

望田紗也香： 自信もって！

スピカ： 3人組のユニットで数学アイドルをやってるんだよね。最近話題みたいだね。

望田紗也香： ライブやるなら行きたいな～。

スピカ： 数学はどうやって勉強してる？高度な数学もやってるみたいだけど。

蛭津美悠： えっと、勝山先生から、教わってます……。

スピカ： あの勝山先生ね。

石浦いおり： いおりにとってのくみあせんせーみたいな感じ？

望田紗也香： 私にとってのスピカちゃんみたいな感じなのかな。

スピカ： いおりにはくみあがいて、美悠には勝山先生がいるということか。

望田紗也香： そんな私たちが、スピカちゃんのもとで数学を勉強するんだね！

スピカ： そういうこと。

石浦いおり： 楽しみなの！

1.2 カリキュラム

スピカ： 今日はガイダンスから始めるよ。現代では数学の重要性はますます増加している。みんなが使っているスマホやパソコンにも数学が使われている。特に最近は AI が話題だよね。これまでは数学科でしか使われていなかったような数学も、どんどん現代社会に応用されているんだよ。

石浦いおり： 世の中がどんどん高度になってるの……。

蛭津美悠： すごい……。

スピカ： というわけで、数学科以外でも数学は教えられている。でもここは箱星学園数学教室。数学科の数学を教えていくよ。

望田紗也香： なんだか難しそう。

スピカ： 実際、数学の勉強は難しい。数学の進化は速い上に、長い歴史がある。それを数年間の勉強でマスターしようとするわけだからね。

石浦いおり： いおりにできるかなあ……。

スピカ： 大丈夫、私がサポートするから。

望田紗也香：スピカちゃんがいたら安心だね。

スピカ：任せて。じゃあ、箱星学園数学教室のカリキュラムを紹介するね。まずは1年生の講義。

- 論理と集合
- 線形代数
- 微分積分

スピカ：この3講義だよ。これからの数学を学ぶ上で土台になるものだから、しっかり勉強しよう。

石浦いおり：わかったの！

望田紗也香：これはネタバレだけど、1年生だからといって簡単とは限らないよ。

石浦いおり：そ、そんな……！

スピカ：次は2年生。

- 集合と位相
- 線形代数応用
- 微分積分応用

スピカ：1年生の講義を発展させたものだよ。応用ということで、数学科ではあまり扱わないようなトピックも扱っていきたい。

蛭津美悠：面白そう……。

スピカ：集合と位相は、数学科の関門と呼ばれることもあるね。数学科らしい議論に慣れていこう。

望田紗也香：おー。

スピカ：次は3年生。

- 代数学
- 幾何学
- 実解析学
- 複素解析学

スピカ：ここから分野が細かく分かれていくよ。もっと詳しく言うと、代数学では群論やガロア理論、幾何学では多様体やホモロジー、実解析学ではルベーグ積分やフーリエ解析、複素解析学では留数定理などを扱う予定だよ。

石浦いおり：いっぱいなの！

スピカ：普通は選択科目になっているけど、熱心なみんなのために全部教えようかな。

望田紗也香：え～大変そう。

蛭津美悠：楽しそう……！

スピカ：最後は4年生。ゼミをやったり集中講義をやったりするよ。

蛭津美悠：ゼミ？

スピカ：みんなが数学書を読んで発表するの。

石浦いおり：いおりがせんせーになるってことなの？

スピカ：そういう気持ちで挑もう。数学書を読んで発表するというのは簡単なことではない。書いてあることをそのまましゃべるのはダメ。まず書かれていることは正確に、数学的に理解しないといけない。多くの数学書では証明に省略があるから、それを自力で補って理解しないといけない。いわゆる「行間を埋める」という作業だね。それができたら、今度は自分の言葉で証明を再構築する。こうすることで論理の流れが見えるようになって、自分の体にずっと馴染んでいくんだよ。あとは発表の仕方も工夫がいるね。これが数学科のゼミ。

石浦いおり：無理なの～！

スピカ：勿論大変だけど、これまでの受け身な学習から主体的な学習に変わっていくとより深く数学を理解できるよ。これは数学科で数学を学ぶことの最大の魅力だと思う。

望田紗也香：なるほどね。

石浦いおり：いおりの「たからもの」を増やしたいの！

蛭津美悠：ゼミ、やりたい……です。

スピカ：そのためにも、基礎知識をつけよう。講義で勉強して、演習で問題を解いていって、数学を身につけようね。

蛭津美悠：がんばります。

2 数学語入門

2.1 数学語とは

スピカ：さあ、箱星学園数学教室の講義を始めよう。今日の講義は「論理と集合」。これから数学を学ぶ上で基礎になる話だよ。ここを疎かにすると、この先の学習でつまづきやすくなる。

望田紗也香：大事なんだね。

スピカ：論理と集合について教える前に、数学語がどのように使われているかをざっと見ていこう。

石浦いおり：数学語？

スピカ：数学に特有な言葉の使い方のこと。日常でも使われる言葉だとしても、数学では少し意味が違うことがある。

蛭津美悠：そうなんだ……。

スピカ：じゃあ、私の家の本棚から適当に数学書をもってきて。そこでどのように数学語が使われているか見てみよう。

石浦いおり：わかったの！

2.2 定義

石浦いおり：本がいっぱいあったの！

蛭津美悠：すごかった……です。

望田紗也香：スピカちゃんは数学書コレクターだね。

スピカ：そこまでではないと思うけど。それで、まずは本から「定義」を探してみて。内容はわからなくても大丈夫。

望田紗也香：定義ね。

定義 1.1: (群の定義)

群とは集合 G に演算 $G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab$ を備えたものであって、次の条件をすべてみたすものである。

- (1) 結合法則が成り立つ: $a, b, c \in G$ に対して $(ab)c = a(bc)$
- (2) 単位元が存在する: $e \in G$ であって任意の $a \in G$ に対して $ea = a = ae$ をみたすものが存在する。
- (3) 任意の元 $a \in G$ は逆元をもつ: $b \in G$ であって $ab = e = ba$ となるものが存在する。

石浦いおり: な、何もわからないの……。

スピカ: 大丈夫。これは群の定義だね。3年生で学ぶものだからまだわからなくてもいいよ。

石浦いおり: よかったの。

スピカ: でもわかることはあるよね。まず、これは何を定義している?

石浦いおり: えっと……、群?

スピカ: そう。群とは何かを定義している。

石浦いおり: でもそれ以外はさっぱりなの。

スピカ: ここで出てきた数学語を列挙してみよう。

- 集合
- 演算
- 任意の
- 存在する

スピカ: この講義は「論理と集合」だけど、早速集合が出てきたね。そして、「任意の」や「存在する」は論理の方で扱う言葉だよ。述語論理と呼ばれることもあるね。

望田紗也香: 演算は?

スピカ: 演算は写像だね。写像もとても大切だから、この講義で扱うよ。

2.3 定理

スピカ: 次は「定理」を探してみて。

蛭津美悠: えっと……、これとか……?

定理 1.2: (Stokes の定理)

ω が n 次元の向きづけられた多様体 M 上のコンパクト台をもつ $(n-1)$ 形式で、 ∂M が誘導された向きをもつならば

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が成り立つ。

望田紗也香: 難しそうな本を持ってきたね。

石浦いおり: 何一つわかんないの……。

スピカ：ここで伝えたいのは、定理がどんな形をしているかということ。ほとんどの定理は「P ならば Q である」という形をしている。

望田紗也香：確かに、この定理もそうだね。

スピカ：P は何で Q は何かな？

望田紗也香：P は「 ω が n 次元の向きづけられた多様体 M 上のコンパクト台をもつ $(n-1)$ 形式で、 ∂M が誘導された向きをもつ」の部分で、Q は最後の等式だよね。

スピカ：そう。「P ならば Q である」と書かれていることもあるし、「P と仮定する。このとき Q が成り立つ」と書かれていることもある。P が仮定で Q が結論と呼ばれる。

石浦いおり：ちょっと違うこともあるんだ。

スピカ：例えば有名なポアンカレ予想はこういう形でよく書かれるね。

定理 1.3: (ポアンカレ予想)

単連結な 3 次元位相閉多様体は 3 次元球面と同相である。

望田紗也香：仮定がないこともあるってこと？

スピカ：そういうこともある。別の書き方をすると、「 M を単連結な 3 次元位相閉多様体とする。このとき M は 3 次元球面と同相である」というふうになる。書き方は色々ある。

蛭津美悠：予想なのに、定理……？

スピカ：長い間予想だったから今もこの名前で呼ばれるけど、もう証明されたから定理だよ。

2.4 証明

スピカ：すべての定理には証明がついている。今持っている本にも証明があるでしょ？

望田紗也香：あるね。

石浦いおり：あるの！

スピカ：証明というのはこんな感じだね。

■ *Proof.* 命題 8.5 を使うと証明できる。□

スピカ：証明というのは、すでに正しいとわかっているものを組み合わせて、数学的主張の正しさを保証すること。証明に不備があれば定理とは呼べなくなる。「なんとなく正しそうだから」というのは許されない。厳密な論証を 1 つ 1 つ積み重ねていくことで、数学的主張は定理となる。

石浦いおり：一步一步、しっかりやっていくのが大事なの。

スピカ：証明の書き方も大事だから教えていくつもりだよ。

望田紗也香：楽しみ～。

スピカ：初っ端から難しい言葉がいっぱい出てきて疲れちゃったかもしれないけど、勉強していけばいつかこの数学書たちも読めるようになるよ。焦らずに行こう。

蛭津美悠：うん。

3 おやつ休憩

スピカ： 休憩しよっか。

望田紗也香： そうだね。

スピカ： おやつはここにあるよ。

石浦いおり： やった～！

蛭津美悠： おいしそう……。

望田紗也香： 私からスピカちゃんへの差し入れもあるよ。

スピカ： ありがと。他のみんなも、たまにでいいから差し入れをもってきてね。

石浦いおり： 差し入れ？

スピカ： みんなのおすすめのおやつを知りたいから。それが授業料のかわり。

望田紗也香： スピカちゃんは甘いものが大好きだからね。

スピカ： まあね。

4 命題論理

スピカ： 休憩を終えて再開しよう。今日は命題論理について学ぼう。

石浦いおり： 命題論理？

スピカ： まず命題というのは、真か偽かがはっきり決まる数学的主張のこと。例えば「2 は 1 より大きい」は真の命題、「91 は素数である」は偽の命題だね。

望田紗也香： 91、素数っぽいけど……。

蛭津美悠： $91 = 7 \times 13$ 。

望田紗也香： ほんとだ。

スピカ： 一方で「今日はいい日だった」は、いい日かどうかははっきり決まるものではないし数学的な主張でもないから命題ではない。

望田紗也香： いい日かどうかは捉え方次第ということだもんね。

スピカ： そして、命題から新しい命題を作ることでもある。「2 は 1 より大きい、または、91 は素数である」といった感じで。

石浦いおり： なるほど！

スピカ： 新しい命題の作り方を 5 種類導入する。

4.1 かつ

スピカ： 以下では P, Q を命題とするよ。 P, Q の両方が真のとき、かつそのときに限り真になるような命題を $P \wedge Q$ と表す。 P かつ Q と読むよ。

石浦いおり： 両方が成り立つとき……。

スピカ： 言葉で定義したけど、真理値表を使って定義することもできる。

蛭津美悠： 真理値表……？

スピカ： こういう表だよ。

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表1 $P \wedge Q$ の真理値表

石浦いおり： えっと、どう読んだらいいの？

スピカ： まず T は真、F は偽を表している。例えば下から 2 行目は、 P が偽で Q が真のとき、 $P \wedge Q$ は偽であることを表している。

望田紗也香： T と F は True と False だね。プログラミングやってるからわかるよ。

石浦いおり： すごいの！

4.2 または

スピカ： P, Q のうち少なくとも一方が真であるとき、かつそのときに限り真であるような命題を $P \vee Q$ と表し、 P または Q と読むよ。

石浦いおり： または、なの！

スピカ： 真理値表にしてみよう。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表2 $P \vee Q$ の真理値表

蛭津美悠： 両方とも真のときも、真になる……。

スピカ： その通り。

望田紗也香： てことは、特典 1 または特典 2 がもらえるとき、両方もらってもいいってこと！？

スピカ： それは違うよ。日常語のまたはと数学語のまたはの違い。

望田紗也香： そっか……。

4.3 ならば

スピカ：次は P ならば Q を定義するよ。これは記号で $P \rightarrow Q$ とか $P \Rightarrow Q$ とか書く。真理値表で定義するとこのようになる。

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表3 $P \Rightarrow Q$ の真理値表

スピカ： $P \Rightarrow Q$ が偽になるのは、 P が真で Q が偽のときだけだね。

石浦いおり： えっ？ P, Q がどちらも偽のとき P ならば Q は真なの？

スピカ： そう。

石浦いおり： Q が成り立っていないのに P ならば Q は成り立つなんて変なの。

スピカ： これも日常語と数学語の違いだね。日常語の「ならば」と数学語の「ならば」が違うことは、例えば4枚カード問題といった心理学の実験でも浮き彫りになっている。

望田紗也香： でも、数学語の「ならば」ってなんでこんな定義なんだろう。

スピカ： 例えばこういう主張を考えよう。

「 n が偶数ならば、 $n+1$ は奇数である」

スピカ： これは真だと思う？

蛭津美悠： うん。

スピカ： じゃあここに、 $n=1$ を代入してみよう。

「1 が偶数ならば、2 は奇数である」

スピカ： これはどうかな？

石浦いおり： これはおかしいの！

スピカ： 1 は偶数でもないし、2 は奇数でもないね。これが P も Q も偽であることに対応する。では元の主張である P ならば Q 、つまり「 n が偶数ならば、 $n+1$ は奇数である」はどうかな？

石浦いおり： それは……。成り立つの？

スピカ： そう。 P ならば Q という命題は、 P を仮定したら Q が成り立つということと対応する。 P が成り立たないような状況は考えていない。 Q が成り立たないとしても、そもそも P が成り立っていないければ、 P ならば Q は偽とは言えないよね。

望田紗也香： だからこういう定義なんだ。

スピカ： とにかく、数学語の「ならば」は上の真理値表で定義されるということを覚えておこう。

石浦いおり： わかったの！

スピカ： あと、 P を「 n は偶数」としたけど、厳密にはこれは n を決めたら命題となるものだね。だから本当は $P(n)$ と書くべき。

蛭津美悠：関数……？

スピカ：そう考えることもできる。

4.4 でない

スピカ： P でないという命題を $\neg P$ と書くよ。これは真偽を逆にしたもの。真理値表だと次のようになる。

石浦いおり：簡単なの！

P	$\neg P$
T	F
F	T

表 4 $\neg P$ の真理値表

4.5 同値

スピカ：最後に、 P と Q が同値であることを、 $P \Leftrightarrow Q$ と書く。

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

表 5 $P \Leftrightarrow Q$ の真理値表

望田紗也香： $P = Q$ と書いてもよさそうだね。

スピカ：同値というのは等号の一般化といえるから、その見方もありかも。

5 同値な命題

スピカ：真理値表でいろいろな命題を考えてきたけど、異なる命題の真理値表が同じになることがある。

石浦いおり：そんなことあるの？

スピカ：例えば、 $P \Rightarrow Q$ と $\neg P \vee Q$ を考えてみよう。

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表6 $P \Rightarrow Q$ の真理値表

P	Q	$\neg P \vee Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表7 $\neg P \vee Q$ の真理値表

石浦いおり： 同じなの！

スピカ： このように2つの命題の真理値表が同じになるとき、命題は**同値**であるという。

望田紗也香： あれっ、さっきも同値って出てきたよね。

スピカ： うん。 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ が常に真になる、と考えてもいいね。

石浦いおり： 記号がいっぱいの……。

蛭津美悠： 他にも同値になる例は……、ある？

スピカ： いっぱいあるよ。例えばこのように。

- P と $\neg\neg P$ は同値。
- $\neg(P \wedge Q)$ と $(\neg P) \vee (\neg Q)$ は同値。
- $P \Leftrightarrow Q$ と $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ は同値。

蛭津美悠： $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ は、 $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ にすることも、できる……？

スピカ： $P \Rightarrow Q$ と $\neg P \vee Q$ が同値であることを使ったんだね。その通り。

望田紗也香： 勉強したことの応用もできちゃうんだ！すごいね。

スピカ： 応用は大事だよ。

石浦いおり： いおりも、命題でいっぱい遊んでみたくなったの！

スピカ： じゃあ実際に上で挙げた命題の真理値表が同じになるか確かめてみよう。

石浦いおり： がんばるの！

箱星学園数学教室の生徒たちは、命題論理で遊んだ。

6 おわりに

スピカ： 命題論理とお友達になれたかな？

石浦いおり： おともだちなの！

スピカ： 実際に手を動かすことは大事だからね。語学の習得が勉強だけでなく実際の会話を通じて深く身に

つくように、数学語の習得も実際に数学に触れることで身につくと思うよ。

望田紗也香：なるほど！

スピカ：次回の論理と集合の講義では述語論理を扱うよ。「任意の」や「存在する」という数学語を扱えるようになろう。

石浦いおり：楽しみなの！

スピカ：それじゃあ、今日の講義はここまで。