

Resonans

HÅKON SILSETH

UiT - Norges Arktiske Universitet

11. oktober 2022

Sammendrag

I dette forsøket skal vi lage LC-kretser/svingekretser og undersøke hva som skjer nære resonansfrekvensen. Vi skal også observere dets bruk i praksis, som et band-passfilter i en radiomottaker. I dette forsøket laget vi en parallellkoblet LC-krets med teoretisk resonansfrekvens på $23796\text{ Hz} \pm 226\text{ Hz}$, ved resonansfrekvensen observerte vi at impedansen økte, og nådde et maksimum på resonansfrekvensen, fasen målte vi som positiv og null ved resonansfrekvensen og negativ for verdier over resonansfrekvensen. Vi endret så på kretsen slik at vi hadde komponentene i seriekobling og observerte motsatt effekt, impedansen sank nære resonansfrekvensen og hadde minimumspunkt ved resonansfrekvensen, og faseskiftet var negativ for verdier under resonansfrekvensen, null ved resonansfrekvensen og positiv over.

Kommentarer:

1 Formål

Formålet med dette forsøket er å måle resonansfrekvensen til to ulike svingekretser og sammenligne dette med de teoretiske verdiene vi får etter å ha målt verdiene til de individuelle komponentene. Vi skal også lære mer om svingekretser og hva som skjer når vi nærmer oss resonansfrekvensen.

2 Teori og definisjoner

2.1 Induktans og spoler

En spole er metalltråd som er kveilet opp, viklingene i spolen er isolert fra hverandre. Det som er spesielt med en spole er at den kan 'lagre' elektrisk energi som et magnetfelt, magnetfeltet gjennom spolen kalles magnetisk fluks, den magnetiske fluksen er direkte proporsjonal med strøm og er gitt ved.

$$\Phi_B = LI \quad (1)$$

L er induktansen til spolen, induktansen er avhengig av den magnetiske permeabiliteten til spolen, samt dens geometri. Hvis vi endrer på strømmen gjennom spolen vil det magnetiske feltet til spolen endres (ut ifra ligning (1)). Faradays induksjonslov sier at et magnetisk felt som varierer med tid vil indusere en elektromotorisk spenning ϵ_l . Denne spenningen vil virke mot den påtrykte spenningen hvis strømmen øker, og med hvis strømmen minker, uttrykket for den elektromotoriske spenningen blir da.

$$\epsilon_l = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad (2)$$

Enheten til induktans blir da $[L]=Vs/A$, som blir kalt Henry (H).

2.2 Impedanse

For å analysere en krets som tar i bruk vekselstrøm på enklest mulig måte bruker vi komplekse tall. Impedansen til en kondensator er da gitt ved:

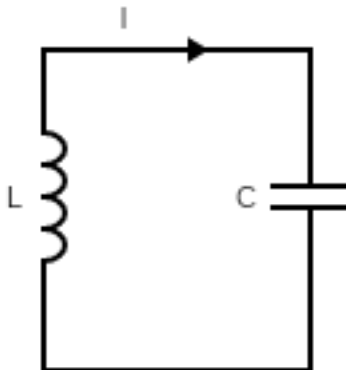
$$Z_C = \frac{1}{j2\pi fC} \quad (3)$$

Og impedansen til en spole er gitt ved:

$$Z_L = j\omega L = j2\pi fL \quad (4)$$

Siden Z_L er på formen $i = j|b|$ og Z_C er på formen $i = -j|b|$ får vi et 90° faseskifte fra en (ideel) spole, hvor en kondensator gir et faseskifte på -90° . Vi ser også at impedansen til en spole er direkte proporsjonal med frekvensen, og impedansen til en kondensator er inverst proporsjonal med frekvensen. En spole, vil også over tid avgi like mye energi som den tar opp, altså den forbruker ikke energi, akkurat som en kondensator.

2.3 LC-kretser



Figur 1: Enkel LC krets uten indre resistans

Figur 1 viser en enkel LC-krets som inneholder en spole og en kondensator. Hvis vi antar at kondensatoren er fullt oppladet ved $t=0$ og vi har en strøm i kretsen. Strømmen vil være liten i begynnelsen siden strømmen i spolen vil endres gradvis, ikke momentant. Når strømmen gradvis stiger vil det tappes ladning fra kondensatoren helt til spenningen i kondensatoren er lik null. Da vil strømmen være ved max, ettersom det ikke er ladningsforskjell over kondensatoren og all energien i systemet ligger i magnetfeltet til spolen. Nå vil strømmen gradvis gå mot null og 'fylle' på ladning i kondensatoren for så å starte syklusen på nytt. Strømmen går gradvis mot null og ikke momentant fordi spolen motstår strømindringer. Hvis vi antar at kretsen ikke har noen indre resistans vil denne syklusen fortsette og fortsette, og vi har vekselstrøm.

Vi kan også analysere denne kretsen matematisk.

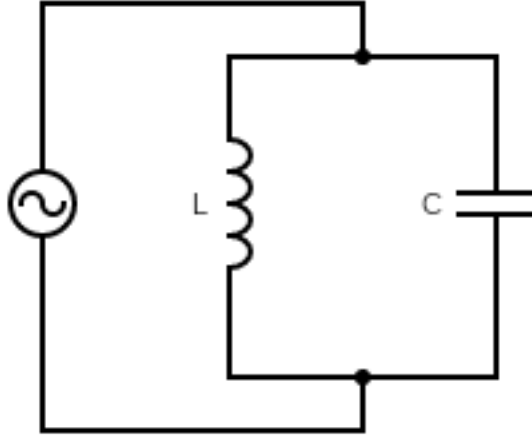
$$I = \frac{0 - V}{Z_L} = \frac{V}{Z_C} \quad (5)$$

Hvis vi setter inn for impedansen og for en vilkårlig frekvens får vi:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{j\omega_0 L} &= j\omega_0 C \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \end{aligned} \quad (6)$$

LC-kretsen vil altså da svinge med frekvens lik ω_0 uten en påtrykt spenning, og vi får egenfrekvensen

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (7)$$



Figur 2: LC-krets med påtrykt vekselspenning

Figur 2 viser en LC-krets med en påtrykt spennning, dette tilfellet er veldig ulikt fra når vi ikke har påtrykt spennning. Ved $f \ll f_0$ vil $|Z_C| \gg |Z_L|$ ettersom Z_C er invers proporsjonal med frekvensen og Z_L er proporsjonal med frekvensen. Mesteparten av strømmen vil da 'velge' å gå gjennom spolen, og strømmen blir faseforskyvd etter spenningen. Ved $f \gg f_0$ vil $|Z_C| \ll |Z_L|$. Mesteparten av strømmen vil da 'velge' å gå gjennom kondensatoren og strømmen vil bli faseforskyvd foran spenningen. Hvis $|Z_C| \approx |Z_L|$ vil like mye strøm gå gjennom spolen som kondensatoren og strømmen og spenningen i kretsen vil være i fase.

Vi kan regne på dette for å få

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{||}} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \\ Z_{||} &= j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = j \frac{\omega L}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Hvor $Z_{||}$ er den totale impedansen, og $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Hvis vi setter spenningen fra funksjonsgeneratoren lik $V = V_0 \sin \omega t$ får vi at strømmen blir

$$i = \frac{V}{Z_{||}} = -j \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t \quad (9)$$

Det vi kan se fra dette uttrykket er at fortegnet til strømmen og dermed fasen er avhengig av om $\omega < \omega_0$ eller $\omega > \omega_0$, og ved $\omega = \omega_0$ blir strømmen null, som betyr at impedansen må bli uendelig stor.

3 Eksperimentelt oppsett og fremgangsmåte

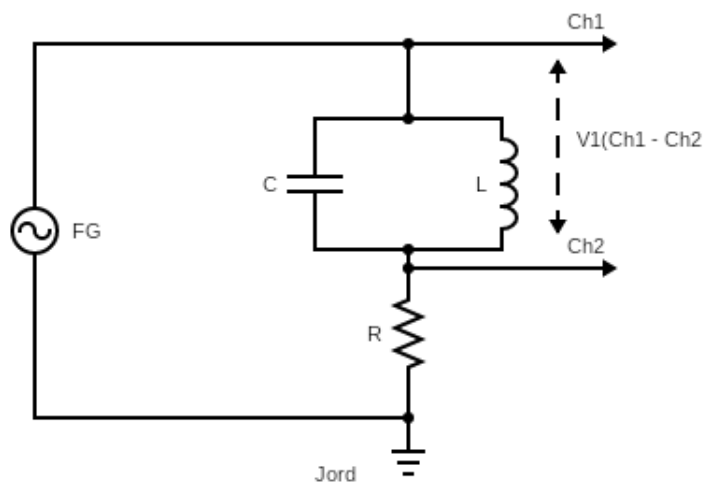
3.1 Utstyrsliste

- Oscilloskop (Agilent DSO-X 2002A)
- Koblingsbrett med kondensator ($C=10\text{nF}$), motstand ($R = 1\text{k}\Omega$) og spole.
- Ledninger
- LCR-meter
- Demonstrasjonsoppsett med radiosender og radiomottaker.

3.2 Oppsett

3.2.1 Oppgave 1

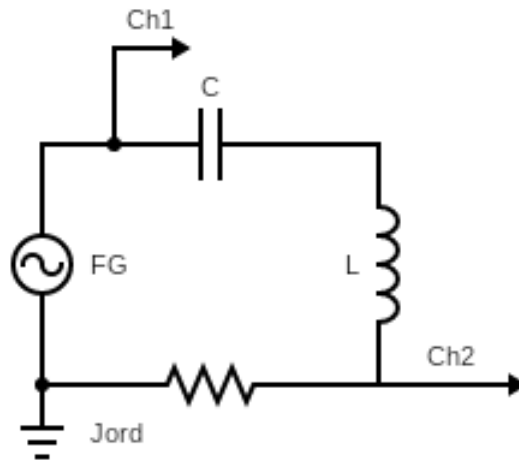
Oppsettet for denne oppgaven er en parallell svingekrets som består av en funksjonsgenerator, motstand, spole og kondensator som er koblet opp likt som i figur 3



Figur 3: Parallell svingekrets for oppgave 1

3.2.2 Oppgave 2

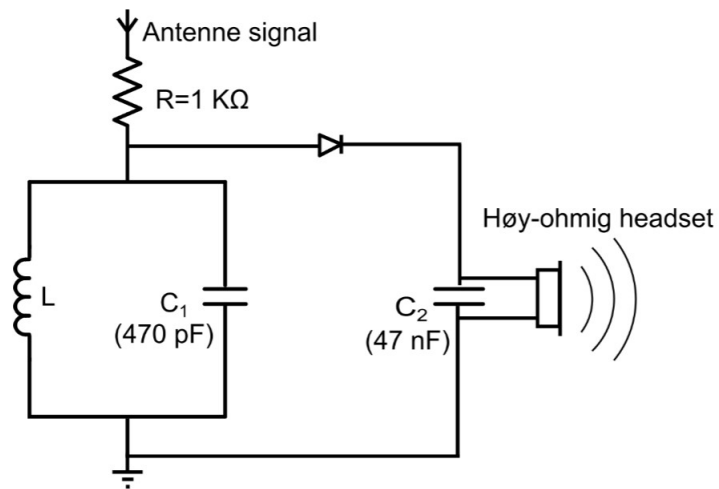
Oppsettet for denne oppgaven er nesten likt oppsettet fra oppgave 1, men her er L og C koblet i serie og ikke parallell, kretsdiagrammet blir da seendes slik ut.



Figur 4: Kretsdiagram for oppgave 2, hvor C og L er seriekoblet

3.2.3 Oppgave 4

I denne oppgaven skal vi se på en radiomottaker og analysere hvordan den fungerer, oppsettet for denne oppgaven består da av en radiomottaker, som er koblet opp slik.



Figur 5: Radiomottaker bestående av en resonskrets, en diode og en kondensator. Hodetelefonen er ikke en essensiell del av kretsen og vi har byttet det ut med en audioforsterker og høyttaler. (Hentet fra labhefte)

3.3 Fremgangsmåte

3.3.1 Oppgave 1

I denne oppgaven målte vi først verdiene til komponentene våre med LCR-meteret og brukte ligning (7) til å finne den teoretiske resonansfrekvensen til kretsen vår.

Så koblet vi opp kretsen som vist i figur 3. Vi slo så på math funksjonen på oscilloskopet og satte den på 'subtract' (som gir $V_{math} = V_{Ch1} - V_{Ch2}$), V_{math} er da et mål på spenningen over kondensatoren og spolen, og Ch2 gir et mål på strømmen i kretsen ved $I = V_{Ch2}/R$. Så endret vi på frekvensen til signalgeneratoren til vi fant frekvensen hvor strømmen (V_{Ch2}) og spenningen (V_{math}) er i fase.

Vi undersøkte så hvordan impedansen og faseskifte endret seg som en funksjon av frekvens, ved å gjøre målinger av V_{math} , V_{Ch2} og fasen mellom de. For å finne impedansen brukte vi:

$$|Z| = \frac{V_{pp}}{I_{pp}} = \frac{V_{math,pp}}{V_{Ch2,pp}} R \quad (10)$$

Vi plottet så resultatene våre, impedansen ble plottet med logaritmisk akse for både impedansen og frekvensen, fasen ble plottet med logaritmisk akse for frekvensen og lineær for fasen. Vi gjorde omtrent 3 målinger per dekad, men hadde hyppigere målinger nære resonansfrekvensen.

3.3.2 Oppgave 2

Her tok vi utgangspunkt i kretsen vi brukte i oppgave 1, og endret på den slik at vi fikk samme krets som vist i figur 4. Ellers fulgte vi akkurat samme steg som i oppgave 1, men bare for denne kretsen.

4 Resultater & Diskusjon

4.1 Oppgave 1

For komponentene i kretsen målte vi følgende verdier:

$$\begin{aligned} R &= 996.2\Omega \pm 3.5\Omega \\ C &= 10.075nF \pm 0.106nF \\ L &= 4.44mH \pm 0.07mH \end{aligned} \quad (11)$$

Usikkerhetene som er gitt her er regnet ut ved hjelp av tabellen som medfølger LCR-meteret. Resonansfrekvensen til kretsen vil da være gitt ved ligning (7) som gir:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{4.44 * 10^{-3} * 10.075 * 10^{-9}}} \\ &= 23796Hz \pm 226Hz \end{aligned} \quad (12)$$

Her er usikkerheten til f_0 regnet ut ved å bruke basisformelen for feilforplantning for tilfeldige målefeil (ligning (21) i kompendiet).

Ved å endre på frekvensen til vi hadde strøm og spenning i fase, som skal gi resonansfrekvensen,

fikk vi verdier som er nære den teoretiske resonansfrekvensen. Vi fikk ikke strømmen og spenningen perfekt i fase, men 23.88kHz ga faseskifte lik 1.8° og 23.89kHz ga -1.2° , så resonansfrekvensen må da ligge et sted mellom 23.88kHz og 23.89kHz. Dette avviker som sagt litt fra den teoretiske resonansfrekvensen til kretsen, men den er godt innenfor feilmarginene til den teoretiske verdien. Vi målte jo så impedansen og fasen for ulike frekvenser, for å finne impedansen målte vi $V_{math,pp}$ og $V_{2,pp}$ og regnet ut impedansen med følgende formel.

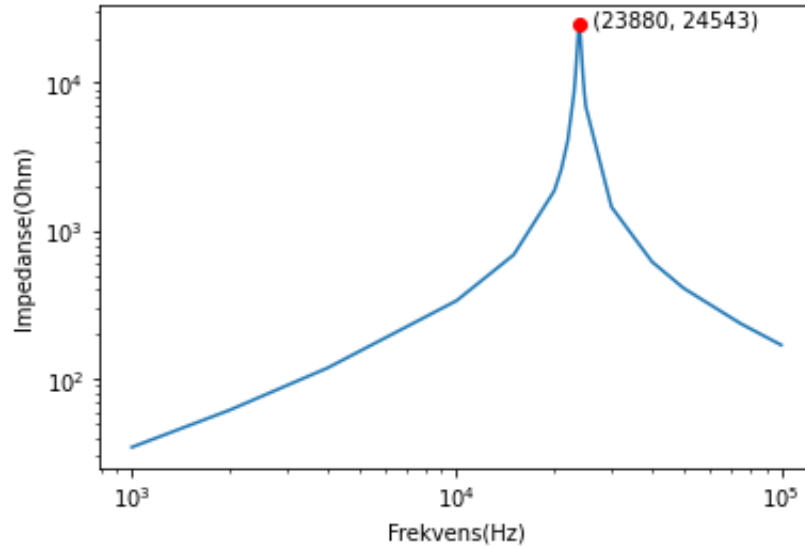
$$|Z| = \frac{V_{pp}}{I_{pp}} = \frac{V_{math,pp}}{V_{2,pp}} R \quad (13)$$

Resultatene vi da fikk var følgende:

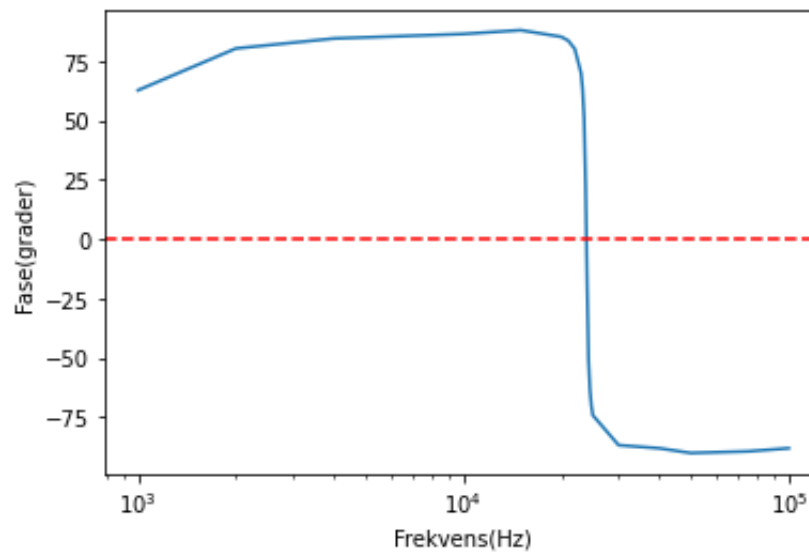
Frekvens(kHz)	V(math,pp)	V(2,pp)	Fase($^\circ$)	Impedanse(Ω)
1	0,082	2,357	62,7	34,66
2	0,146	2,357	80,3	61,71
4	0,279	2,342	84,5	118,68
10	0,76	2,239	86,4	338,15
15	1,355	1,955	88	690,46
20	2,11	1,126	85,2	1866,77
21	2,227	0,858	83,6	2585,71
22	2,318	0,568	80,1	4065,48
23	2,37	0,2769	69,9	8526,52
23,25	2,373	0,208	63,2	11365,30
23,5	2,375	0,1445	50,8	16373,53
23,75	2,376	0,1038	22,8	22803,19
23,8	2,376	0,0995	14,9	23788,66
23,88	2,375	0,0964	1,8	24543,31
24	2,375	0,1048	-17,7	22576,10
24,25	2,374	0,1475	-51,1	16033,75
24,5	2,373	0,2088	-63,8	11321,76
24,75	2,37	0,2734	-70,4	8635,68
25	2,363	0,34	-74,2	6923,59
30	1,974	1,354	-86,8	1452,36
40	1,259	2,025	-88,1	619,37
50	0,908	2,199	-90,1	411,35
75	0,546	2,297	-89,4	236,80
100	0,396	2,324	-88,1	169,75

Tabell 1: Målte verdier til kretsen for ulike verdier av f, med parallellkobling

Vi plottet også disse verdiene og fikk følgende plot:



Figur 6: Impedanse plottet mot frekvens på dobbel-logaritmisk skala



Figur 7: Fase plottet mot frekvens på logaritmisk skala

Det vi kan se på disse plottene er akkurat det vi forventer å se. Impedansen øker når f nærmer seg f_0 og synker når den går vekk fra f_0 . Fasen oppfører seg også som forventet i det at den brått skifter fortegn ved f_0 . Vi har også et tydelig toppunkt på impedanse-grafen, dette punktet viser oss resonansfrekvensen, som vi kan se på plottet og tabellen samsvarer dette med $f_0 = 23880 \text{ Hz}$

som vi fant eksperimentelt tidligere. I plottet for fasen er det også lagt inn en linje for fase = 0, som også skal vise resonansfrekvensen, dette punktet er ikke markert i grafen, men en rask titt i tabellen viser at dette er i enighet med verdiene for f_0 funnet tidligere.

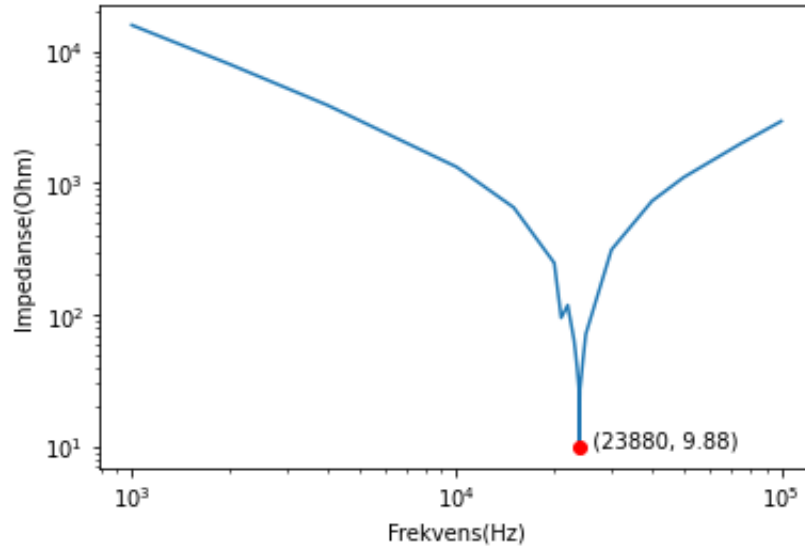
4.2 Oppgave 2

Her gjorde vi jo akkurat samme som i oppgave 1, og fikk følgende resultat:

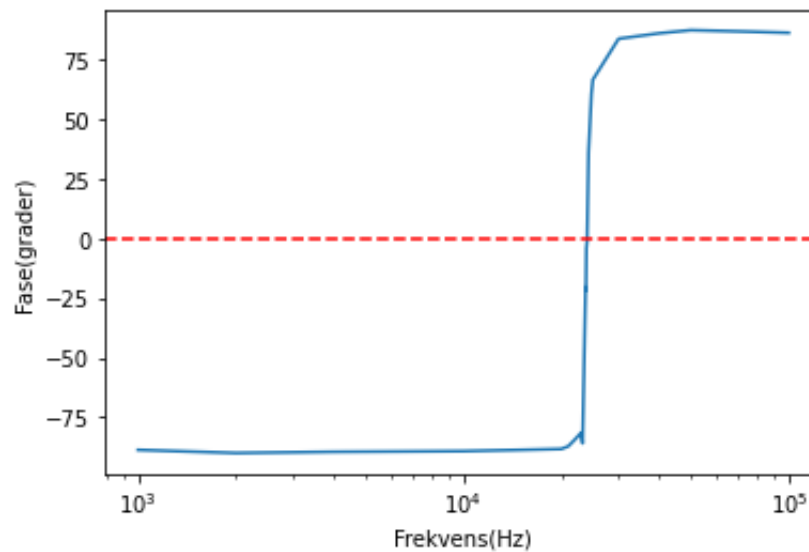
Frekvens(kHz)	V(math,pp)	V(2,pp)	Fase(°)	Impedanse (Ω)
1	2,485	0,1575	-88,7	15717,82
2	2,473	0,3101	-90	7944,54
4	2,403	0,616	-89,5	3886,15
10	1,95	1,471	-89,2	1320,59
15	1,309	2,005	-88,7	650,39
20	0,564	2,279	-88,3	246,54
21	0,219	2,304	-87,2	94,69
22	0,275	2,319	-84,4	118,13
23	0,15	2,322	-81,5	64,35
23,25	0,12	2,322	-85,9	51,48
23,5	0,093	2,319	-51,9	39,95
23,75	0,069	2,319	-20,3	29,64
23,8	0,064	2,317	-21,7	27,52
23,88	0,023	2,319	-4	9,88
24	0,063	2,317	-1	27,09
24,25	0,081	2,317	36,4	34,83
24,5	0,104	2,314	48,7	44,77
24,75	0,131	2,314	60,9	56,40
25	0,165	2,314	66,8	71,03
30	0,695	2,226	84	311,03
40	1,391	1,902	86,3	728,56
50	1,766	1,601	87,6	1098,87
75	2,164	1,087	87	1983,24
100	2,301	0,781	86,5	2935,03

Tabell 2: Målte verdier til kretsen for ulike verdier av f , med seriekobling

Og de medfølgende plottene ble slike:



Figur 8: Impedanse plottet mot frekvens på dobbel-logaritmisk skala

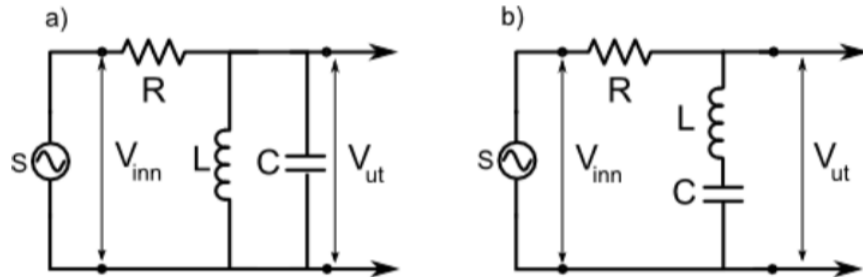


Figur 9: Fase plottet mot frekvens på logaritmisk skala

Som vi kan se her har vi omtrent samme plott som i oppgave 1, men grafene er 'snudd opp ned' vi har de samme verdiene for resonansfrekvens, men funksjonene er speilet om x-aksen sammenlignet med parallellkretsen fra oppgave 1. Det vi har her er da et band-stop filter, som 'fjerner' frekvenser nære resonansfrekvensen, og kretsen fra oppgave 1 blir da ett band-pass filter, som kun slipper

gjennom frekvenser som er nære resonansfrekvensen.

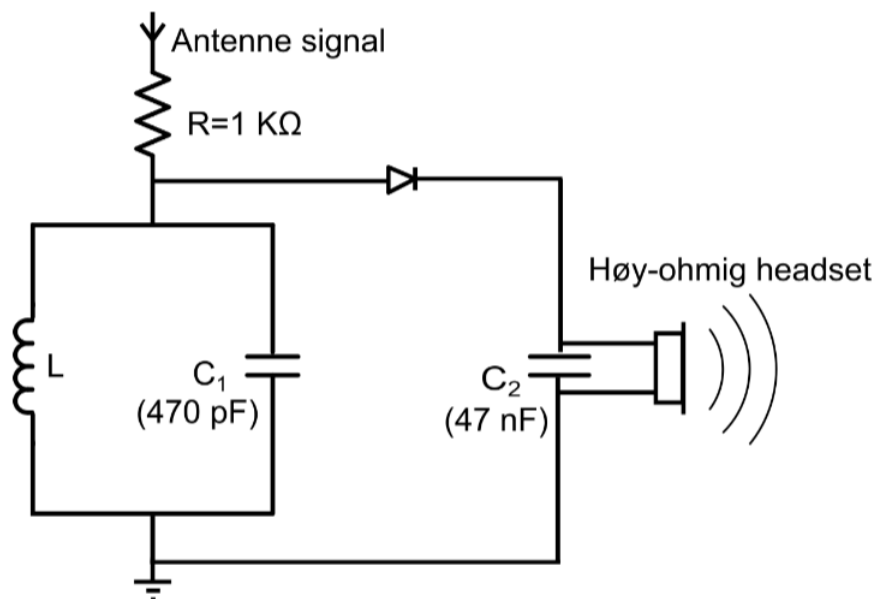
4.3 Oppgave 3



Figur 10: To kretser som kan brukes for å filtrere frekvenser vekk eller plukke ut frekvenser. (Hentet fra labhefte)

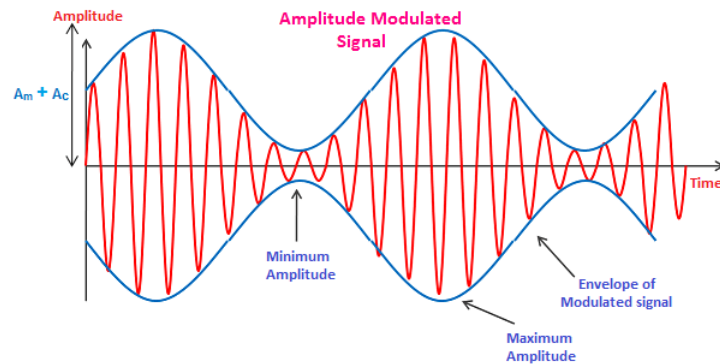
Figur 10 viser to kretser, hvor en av de er best egnet til å filtrere vekk en spesiell frekvens, og den andre er best egnet til å plukke fram en spesiell frekvens. Disse kretsene er mer eller mindre akkurat de samme vi har jobbet med i laben, hvor krets a er parallellkretsen som ble brukt i oppgave 1 og krets b er seriekretsen som ble brukt i oppgave 2. Som vist i figur 6 og nevnt i diskusjon til oppgave 2 fungerer krets a som et band-pass filter, altså at det kan slippe gjennom en spesiell frekvens, mens de andre blir blokkert. Dette kan sees i plottet ved at man kun tar med peaken. Og akkurat det samme gjelder for krets b bare motsatt. Så krets a vil altså være best egnet til å slippe gjennom en spesiell frekvens, og krets b er best egnet til å fjerne en spesiell frekvens.

4.4 Oppgave 4



Figur 11: En enkel radiomottaker bestående av en resonskrets, en diode og kondensator

Figur 11 viser kretsdigram av radiomottakeren som ble vist på lab, headsettet var byttet ut med høyttaler, men ellers er det likt. Måten denne kretsen fungerer på er som følger. Vi mottar et signal fra antennen som går gjennom svingekretsen (LC-kretsen), som forklart tidligere i labrapporten vil denne LC-kretsen fungere som et band-pass filter, altså vil den 'slippe gjennom' signaler med en spesifikk frekvens. Vi ønsker jo å kunne lytte til ulike stasjoner, som sender signaler med ulike frekvenser, så vi må altså kunne endre resonansfrekvensen til svingekretsen. Resonansfrekvensen er en funksjon av kapasitansen til kretsen, så den letteste måten for oss å endre resonansfrekvensen på er å bruke en ferittstav til å endre på kapasitansen til spolen. Ferittstaven vil endre kapasitansen til spolen avhengig av hvor langt inn i spolen den ligger, siden ferittstaven er ferro-magnetisk så den vil påvirke kapasitansen til spolen, og dermed resonansfrekvensen til kretsen. Dette stemmer også godt overens med det vi observerte i laben. Så LC-kretsen brukes altså for å kunne velge riktig radiostasjon. Men det har seg slik at å sende et signal på 50Hz-20kHz er vanskelig, og det er kun ved det intervallet vi mennesker kan høre lyd. Måten signaler på 50Hz-20kHz sendes med frekvenser i området 200kHz-200MHz, som er lettest å sende/motta, er ved modulering. Det finnes ulike typer modulering, for eksempel amplitude modulering (AM) og frekvens modulering (FM), men jeg skal fokusere på amplitudemodulering. Figur 12 viser et eksempel på et amplitudemodulert signal, den består av en bæreølge, som er av mye høyere frekvens enn bølgen vi ønsker, og har varierende amplitude som varierer slik at bølgetoppene følger det signaler vi ønsker å sende/motta. Dioden er introdusert i kretsen for å demodulere signalet, dioden lar strøm kun passere i en retning, og fjerner derfor halve (umodulerte)signalet. Den effektive verdien av signalet etter det har vært gjennom dioden vil da følge talesignalet, som er det signalet vi ønsker å motta.



Figur 12: Eksempel på et amplitudemodulert signal (Hentet fra <https://www.physics-and-radio-electronics.com/blog/amplitude-modulation/>)

5 Konklusjon

Med denne laben lærte vi i hovedsak hvordan en LC-krets/svingekrets fungerer og hvilke bruksområder den har. Vi fikk regnet ut resonansfrekvensen til en enkel RC-krets til å være $23796\text{Hz} \pm 226\text{Hz}$ og da sammenlignet denne verdien med eksperimentelle målinger og sjekket om den stemmer. Vi målte jo da resonansfrekvensen til å være 23880Hz , som ikke stemmer helt nøyaktig med det vi regnet oss fram til, men med tanke på feilmarginen til den beregnede verdien og diverse systematiske feil så er det et veldig nøyaktig resultat. Vi fikk også observert et praktisk bruk av LC-kretser som bandpassfilter i en radiomottaker.

A Appendix