

Frekvens og Sampling

HÅKON SILSETH OG TRYM VARLAND

UiT - Norges Arktiske Universitet

11. oktober 2022

Sammendrag

I dette forsøket skal vi undersøke samplingteoremet og vi skal undersøke grunn-tonen og overtonene til instrumenter og til vokallyder. Da vi undersøkte samplingteoremet fikk vi se at signalet vårt ble veldig annerledes og 'stygt' når vi kom over nyquist-frekvensen. Vi så også at målingene ble mer rotete og generelt sett upålitelig. Da vi undersøkte toner og lyder, f.eks til tonen A, fikk vi se hvordan grunnfrekvensen på 440Hz er veldig fremtredende, og vi har mange overtoner som er multipler av grunnfrekvensen. Vi fikk også se at ulike instrument gir ulike overtoner og det er årsaken til at ulike instrumenter som spiller samme tone gir ulike lyder.

Kommentarer:

1 Formål

Formålet med forsøket er at vi skal teste samplingsteoremet, og finne overtonene til vokallyd og noen instrumenter. Vi vil også se på sammenhengen mellom tidsvariasjon til signalet og frekvensen til signalet.

2 Teori og definisjoner

2.1 Frekvensanalyse og frekvensspekteret til lyd

Lyd er noe vi hører hele tiden, enten om det er lyd som er lagd fra et klapp, en vibrerende streng eller et vibrerende stemmeband. *Lyd* får vi når luft vibrerer med forskjellige frekvenser.

Ta for eksempel en gitar streng, strengene vibrer med ulike frekvenser. Den laveste frekvensen som først oppstår kalles *grunnfrekvensen* f_0 , som vil bli etterfulgt av andre frekvenser som blir kalt *overtoner* ($2f_0, 3f_0, \dots, nf_0$) og vis disse er multipler av grunnfrekvensen så kalles de *harmoniske overtoner*. Siden grunnfrekvensen og overtonene får gitaren denne fine og fyldige lyden, men i forsøket tar vi bruk en signalgenerator som skaper en skarp lyd siden den bare gir ut en frekvens konstant. Mange frekvenser gir ut *komplekse bølge former*, men perioden vil fortsatt være $T = 1/f_0$. Invers av den komplekse periodiske bølge form, bli delt opp inn i sinusoidal bølge variasjoner. *Fourier* uttrykte et uttrykk for hver periodisk funksjon $x(t)$ med perioden T , uttrykkes ved uendelig sum av sinusoidal funksjoner som vi kan se i 1: Her $x(t)$ er variasjonen i tid, og når frekvensen er null

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi(kf_0)t + \phi_k) \quad (1)$$

Equation 1: Fourier-rekker

opptrer $k = 0$ som er en konstant funksjon og blir kalt signalets DC-verdi. Mens A_k er amplituden til frekvenskomponenten k og ϕ_k er fasen til frekvenskomponenten.

I forsøket skal vi se på hvordan vi kan finne frekvenskomponenten A_k når vi kjenner til lyden $x(t)$, dette er hva vi kaller *frekvensanalyse*. Dette utledes Fourier med å ta inversen av fourier-rekken, som ga 2: Her $j = \sqrt{-1}$. Når $k = 0$ vil vi få gjennomsnittet til $x(t)$ over perioden T , og amplituden

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi kf_0 t} dt \quad (2)$$

Equation 2: Frekvenskomponentene

A_k kalles *spekteret* til $x(t)$. Siden amplituden A_k til frekvenskomponentene er funksjon av $x(t)$ multiplisert med en kompleks eksponential funksjon, og integrert over perioden T .

I figur 1, viser spekteret til en tone. Der vi kan se grunnfrekvensen merket med et blåpunkt og noen av overtonene er merket med rødepunkter, vi ser at overtonene streker seg med en avtagende amplitude med høyere frekvens som vi kan se der det er merket med hvit.



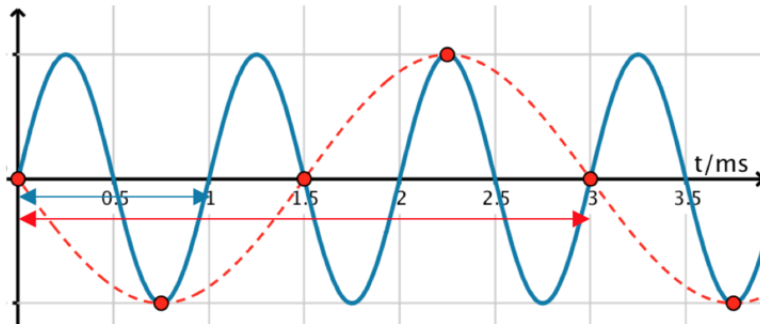
Figur 1: Spekteret til en tone, digitalisert med oscilloskop.

2.2 Digitalisering og sampling

Når vi jobber med digitalbehandling og kontinuerlige signaler, må vi diskretisere tidsaksen, det er dette vi kaller *sampling*. Her er det viktig å passe på at vi ikke endrer/forvrenger viktige signal-komponenter når vi sampler.

Men ut fra *samplingteoremet* sier at vi ikke trenger å være redd for at det skal forvrenges seg, så lenge vi sampler fort nok. Samplingteoremet sier at sample i diskret tid skal være $x[n] = x(nT_s)$, her vi har at n er diskret tidindeks og T_s er samplingtiden. Vis et signal $x(t)$ har maks frekvens f_{max} , så må vi minst sample dobbel så mye enn frekvens. Vi har fra *Nyquist-frekvensen* at $f_{max} = \frac{f_s}{2}$, da har vi for samplingen at vi må ha $T_s < \frac{1}{2f_{max}}$ eller $f_s = \frac{1}{T_s} > 2f_{max}$, så for den raskeste perioden tar vi minst 2 samplinger per perioden.

I det vi har en frekvens som er høyere enn Nyquist-frekvensen det vil også være da vi bryter samplingteoremet, så får vi det som kalles *aliasing*. Da oppstår det falske frekvenskomponenter i frekvensspekteret som vi kaller *folding*, som vil se ut som ut i figur 2 her den rødkurven er under-samplet og den blåkurven har riktig frekvens i følge Nyquist-frekvensen.



Figur 2: Frekvensspekter her den rødkurven er undersamplet og ikke lik den blå kurven. Hentet fra <https://no.wikipedia.org/wiki/Foldingsfeil>

Når vi skal sample så er det viktig at vi har riktig oppløsning, det digitale oscilloskopet bruker 8 bit oppløsning av amplituden som betyr at signalet blir delt opp i 255 nivåer tilsvarende 8 bit. Vi kan stille inn oscilloskopet inn på to signalet $5V_{pp}$ og $0.1V_{pp}$, som gjør at det minste signalet kun går over fire steg.

2.3 Amplitude i frekvensdomene og desibel

Desibel beskriver forholdet mellom to fysiske størrelser av samme dimensjon, dette kan for eksempel være effekt som vil være uttrykt som:

$$R(dB) = 10 \log \left(\frac{P}{P_{ref}} \right) \quad (3)$$

Her R beskriver forholdet mellom P og P_{ref} som er referanseeffekten, til en logaritmisk skala som her er dB . Med å sette P_{ref} til forskjellige størrelser, kan vi ha for eksempel et uttrykk for dBm som blir et mål for effekt.

$$R(dBm) = 10 \log \left(\frac{P}{P_{ref}} \right) = 10 \log \left(\frac{P}{1mW} \right) \quad (4)$$

eller uttrykk for dBV som blir et mål på spenningen, som er mulig siden $P \propto A^2$ da kan vi knytte forholdstallet og amplituden.

$$R(dBV) = 10 \log \left(\frac{P}{P_{ref}} \right) = 10 \log \left(\frac{V^2}{V_{ref}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{V}{1V_{RMS}} \right) \quad (5)$$

Her $1V_{RMS}$ er nå referanse spenning til dBV og V er spenningen.

3 Eksperimentelt oppsett og framgangsmåte

3.1 Utstysliste

- Agilent DSO-X 2002A oscilloskop

- Protek Funksjonsgenerator
- Mikrofon med forsterker
- USB-minnepen
- Lydkilde. Telefon eller PC

3.2 Oppsett

3.2.1 Oppgave 1

Oppsettet for oppgave 1 består kun av en funksjonsgenerator og et oscilloskop, her brukte vi den innebygde funksjonsgeneratoren på oscilloskopet og koblet den direkte inn i kanalen på oscilloskopet.

3.2.2 Oppgave 2

Oppsettet for denne oppgaven er identisk med oppgave 1.

3.2.3 Oppgave 3

For denne oppgaven er oppsettet likt som i oppgave 1 og 2, men vi har også en høytaler som er koblet til funksjonsgeneratoren, samt en pc koblet opp til oscilloskopet med Aux kabel.

3.2.4 Oppgave 4

For denne oppgaven består oppsettet av oscilloskopet og en mikrofon koblet opp til en av kanalene på oscilloskopet.

3.3 Fremgangsmåte

3.3.1 Oppgave 1

Vi startet med å koble funksjonsgeneratoren til en av kanalene på oscilloskopet, deretter innstilte vi generatoren til å gi oss en sinusbølge med frekvens på 1kHz og amplitude $1V_{pp}$.

1. Først sjekket vi oppløsninga til oscilloskopet indirekte ved å øke amplituden til signalet helt til vi får klipping, som er når deler av signalet går ut av skjermen og blir kuttet bort, vi tok så å stoppet signalet og sjekket verdien der vi fikk klipping og delte på 255 for å få oppløsninga.
2. Vi målte så oppløsninga direkte ved å stoppe signalet og zoomet inn til vi kunne se stegen til signalet og brukte 'cursors' for å måle høyden til trinnet. (Her brukte vi 200mV og 200 μ s, som i del 1)
3. Vi endret så skalaen til 50ms/rute og stoppet signalet, så zoomet vi inn til vi har rundt 5 perioder på skjermen og så på signalet og sammenlignet det med hvordan vi forventet det skulle se ut. Vi gjentok så dette for 10, 30, 50, 75, og 100kHz.

3.3.2 Oppgave 2

1. Her stilte først inn funksjonsgeneratoren på sinussignal, med frekvens på 1kHz og $1V_{pp}$. For aksene på oscilloskopet hadde vi 200mV og 50ms. Vi slo deretter på 'Math' på FFT med span = 100kHz og center = 40kHz. Så justerte vi frekvensen til funksjonsgeneratoren opp til 120kHz og observerte hvordan det påvirket signalet.

3.3.3 Oppgave 3

1. Her startet vi med å stille inn funksjonsgeneratoren på 440Hz og $1V_{pp}$ (vi brukte 200mV og 10ms, og AC). På innstillingene for Math brukte vi span = 10kHz og center = 5kHz.
2. Vi brukte så cursors for å finn frekvensen til toppene, og amplituden, så sjekket vi om overtonene var odde eller alle multipler av grunnfrekvensen, og vi analyserte hvor fort overtonene avtar. Dette gjorde vi for sinus-, firkan-t, og trekantsignal.
3. Så spilte vi av toner fra PCen og målte de på oscilloskopet (nettsiden vi brukte for å spille tonene ligger vedlagt i appendix). Vi tok også mål av grunnfrekvensen for tonene. Vi målte også overtonene til tonen og sjekket om de var multipler av grunnfrekvensen.

3.3.4 Oppgave 4

1. Vi koblet mikrofonen til oscilloskopet, så sa vi "i" inn i mikrofonen og målte grunnfrekvensen og overtonene.
2. Så gjentok vi det men for en annen vokal.
3. Så avslutningsvis testet vi ut den mørkeste og den laveste tonen vi klarte å lage og sjekket hvilket toneleie vi har.

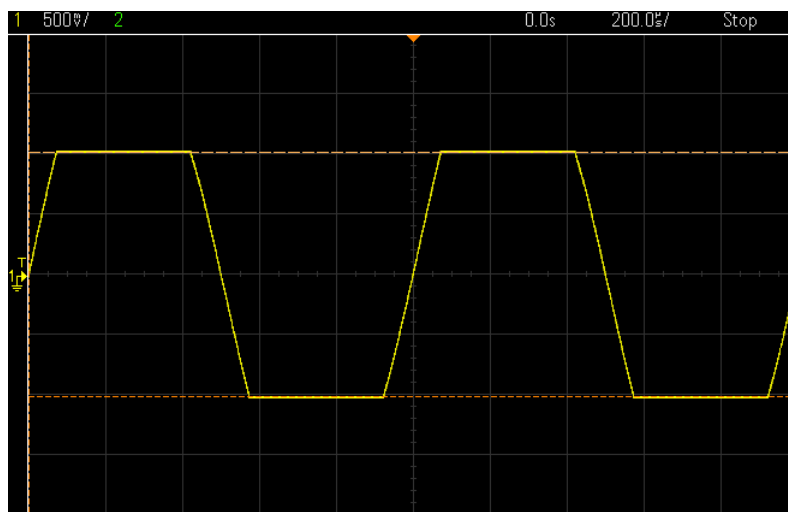
4 Resultater & Diskusjon

4.1 Harmonisk signal i tidsdomene

I denne delen av forsøket, stiller vi inn oscilloskopet på $200mV/rute$, $200\mu s/rute$ og offset = 0. Funksjonsgeneratoren er stilt inn på en sinusfunksjon med $1kHz$ og $1V_{pp}$.

4.1.1

Da vi økte amplituden til signalet klippet som skal se ut som i figur 3, fikk vi at den klippet ved $V_{klipp} = 2.00V$ og en oppløsning på $Res = V_{klipp}/255 = 7.875mV$.



Figur 3: Her har vi endret 200mV/rute til 500mV/rute for å få en bedre oversikt over klippingen til grafen.

4.1.2

Oscilloskopet her er stilt inn på 1kHz , $1V_{pp}$, 200mV/rute og $200\mu\text{s/rute}$. Finner oppløsningen til oscilloskopet direkte og får en graf som i figur 4, *oppløsningen* er høyden av et trappetrinn som er $Res = 7.875\text{mV}$. Som vi kan se stemmer overens med oppløsningen vi fikk i del 4.1.1.



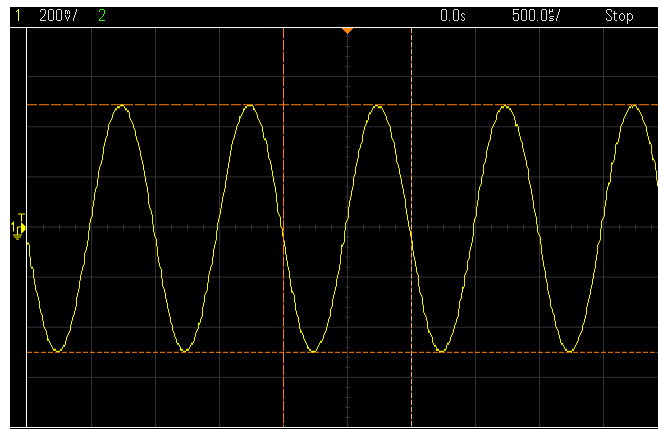
Figur 4: Her har vi zoomet inn for å gjøre det lettere å lese av oscilloskopet. Å vi ser at et trappetrinn har høyde 7.875mV

4.1.3

Innstillingene til oscilloskopet er 200mV/rute og 50ms/rute , og signalgeneratoren står fortsatt på 1kHz . Her fikk vi at *samplingfrekvensen* er 100kSa/s . Maks frekvensen for at samplingteoremet skal være oppfylt er $\frac{1}{2}$ samplingfrekvens, så den maksimale frekvensen på signalet må være 50kHz .

4.1.4

Her har vi justert signalet til å se 5 perioder, som vi ser gir dette en sinus kurve. Her med å regne ut $1/\Delta x$, fant vi ut at frekvensen må være 10.0kHz

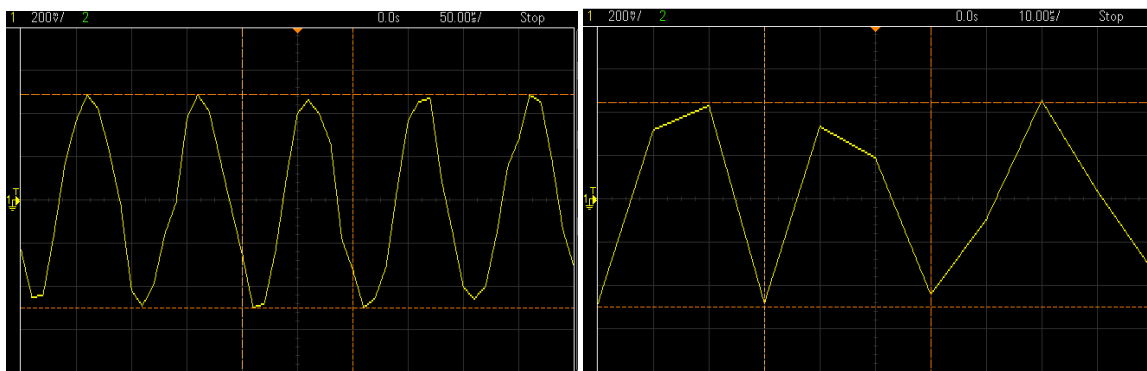


Figur 5: Et justert signal med 5 perioder, som gir en sinus kurve

4.1.5

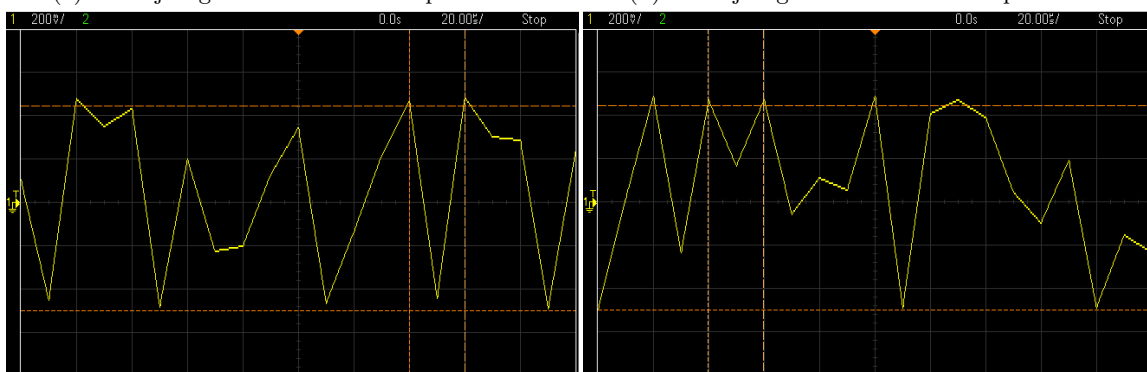
Her gjentok vi prosessen som vi gjorde i 4.1.3 og 4.1.4, med frekvensene 10kHz , 30kHz , 50kHz , 75kHz og 100kHz .

Med frekvensen 10kHz har vi perioden $\Delta x = 100.0\mu\text{s}$ og som forventet får vi at samplingfrekvensen blir $1/\Delta x = 10\text{kHz}$, ga kurven 6a som man kan se gir dette en liknende sinuskurve. Med frekvensen 30kHz har vi perioden $\Delta x = 30.0\mu\text{s}$ og en samplingfrekvens på $1/\Delta x = 33.33\text{kHz}$ som er underlig siden vi ikke har brutt samplingteoremet enda, men dette ga kurven 6b her vi kan begynne å se at signalet får endringer. Frekvens på 50kHz har vi perioden $\Delta x = 20.0\mu\text{s}$ og en samplingfrekvens på $1/\Delta x = 50\text{kHz}$, som gir oss kurven 6c og nå ser vi at signalet er vrent enda mer siden vi nærmer oss å bryte samplingteoremet. Med en frekvens på 75kHz har vi perioden $\Delta x = 20.0\mu\text{s}$ og samplingsfrekvensen ble $1/\Delta x = 50\text{kHz}$ som er forventet i følge samplingteoremt (2.2), som vi kan se i figur 6d.



(a) Funksjonsgeneratoren stilt inn på $10kHz$

(b) Funksjonsgeneratoren stilt inn på $30kHz$

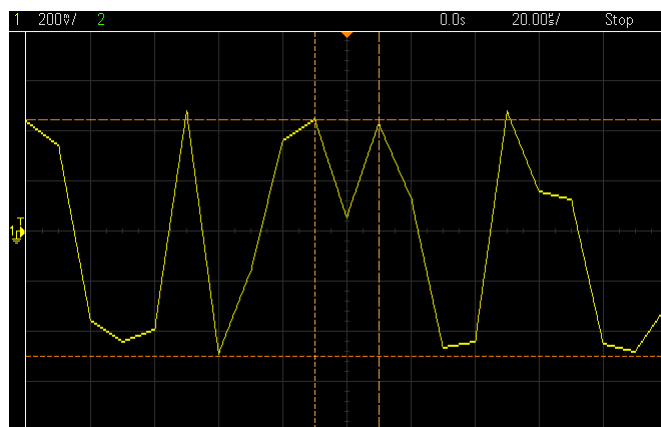


(c) Funksjonsgenerator stilt inn på $50kHz$

(d) Funksjonsgenerator stilt inn på $75kHz$

Figur 6

Her kjørte vi med en frekvens på $100kHz$ fra funksjonsgeneratoren, hadde vi perioden $\Delta x = 20.0\mu s$ og fikk samplingfrekvens på $1/\Delta x = 50kHz$ som er forventet i følge samplingteoremet (2.2) som sier at vi må ha $T_s < \frac{1}{2}f_{max}$. Som vi kan se i figur 7, så har det oppstått aliasing siden frekvensen til signalet har blitt høyere enn Nyquist-frekvensen.



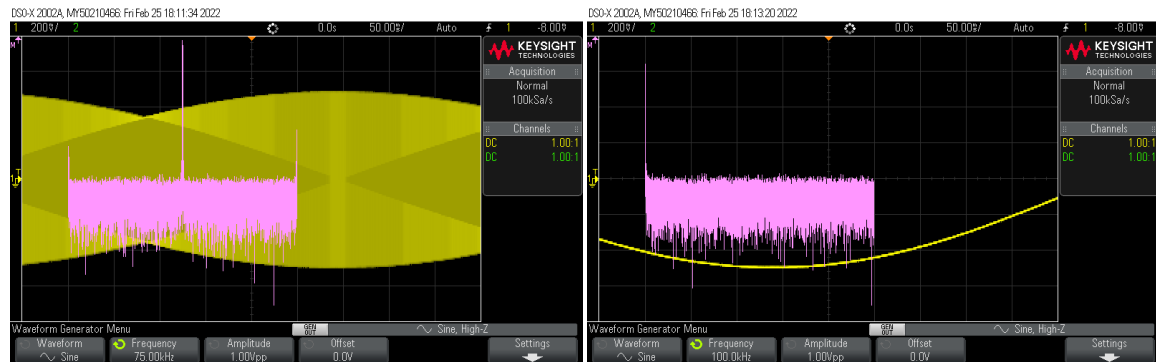
Figur 7: Funksjonsgenerator stilt inn på $100kHz$

4.2 Harmonisk signal i frekvensdomene



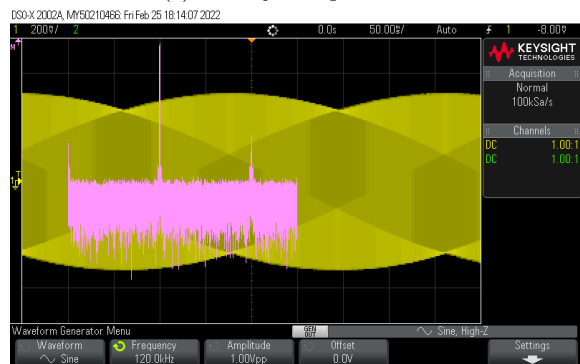
(a) Funksjonen på 30kHz

(b) Funksjonen på 50kHz



(c) Funksjonen på 75kHz

(d) Funksjonen på 100kHz



(e) Funksjonen på 120kHz

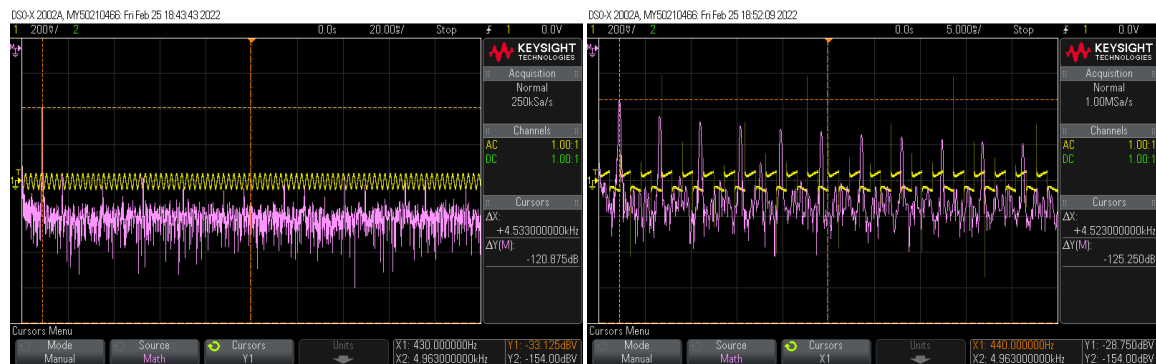
Oscilloskopet er stilt på 100 000 Samples per sekund, som betyr at nyquist-frekvensen er 50kHz (halvparten av samplingsfrekvensen). Vi kan altså da forvente aliasing og at spekteret generelt sett ser litt uforventet ut. Aliasing er forklart i mer detalj i teoriseksjonen, men kort forklart går det ut på at signalet 'undersamples' og vi ender opp med målinger som ikke er en god representasjon

av signalet vi måler. Vi kan se tegn av dette på bildene våre fra oscilloskopet. På bilde c, d, og e har vi frekvens som er høyere enn nyquist-frekvensen, det vi kan se på disse bildene er at det rosa 'math' signalet er mer 'rotete' enn de to som holder seg innenfor nyquistfrekvensen. Vi kan også se at vi får høye topper som stikker veldig ut fra resten av signalet.

4.3 Spekteret til ulike instrument

4.3.1

Plottene vi fikk for første del av oppgaven så slik ut:



(a) Sinusbølge

(b) Firkantbølge



(c) Trekantbølge

Vi kan se på sinusbølgen at grunnfrekvensen ligger på 440Hz med en amplitude på -32,5 dB. Verdiene for de 4 første overtonene er følgende:

	f(Hz)	A(dB)	ΔA (dB)
Grunntone	440	-32.5	-
Overtone 1	880	-71.3	-38.8
Overtone 2	2640	-70.6	-38.1
Overtone 3	3520	-75.0	-42.5
Overtone 4	4840	-76.88	-44.38

Tabell 1: Verdiene for sinusbølgen, hvor f måler frekvensen, A er amplituden og ΔA er et mål på endringen i desibel fra grunntonen til overtonen.

Det vi kan se her er at alle overtonene er multipler av grunntonen, de er 2, 6, 8 og 11 ganger grunntonen. Så de er harmoniske overtoner, men vi har jo altså ikke alle multiplene av grunntonen. Vi kan også se at overtonene avtar ganske langsomt, overtonene har betydelig lavere amplitude enn grunntonen, den avtar litt med hver nye overtone, men ikke med så veldig mye. Merk at vi har negative verdier for amplituden, selve verdiene er ikke så viktige, de er avhengige av hvordan de måles og hva som er baselinjen i målingen. Det vi er ute etter her er endringen i amplituden, altså ΔA .

	f(Hz)	A(dB)	ΔA (dB)
Grunntone	440	-28.8	-
Overtone 1	1320	-38.1	-9.3
Overtone 2	2200	-41.3	-12.5
Overtone 3	3080	-43.8	-15
Overtone 4	3960	-45.0	-16.2

Tabell 2: Verdiene for firkantbølgen, hvor f måler frekvensen, A er amplituden og ΔA er et mål på endringen i desibel fra grunntonen til overtonen.

Her kan vi også se at vi har harmoniske overtoner som er multipler av grunntonen, men i motsetning til sinusbølgen hvor vi hadde 'tilfeldige' multipler av grunntonen, har vi her de odde multiplene av grunntonen, 3, 5, 7, og 9 ganger grunntonen. Vi kan også se at overtonene er mye nærmere grunntonen i amplitude enn i sinusbølgen.

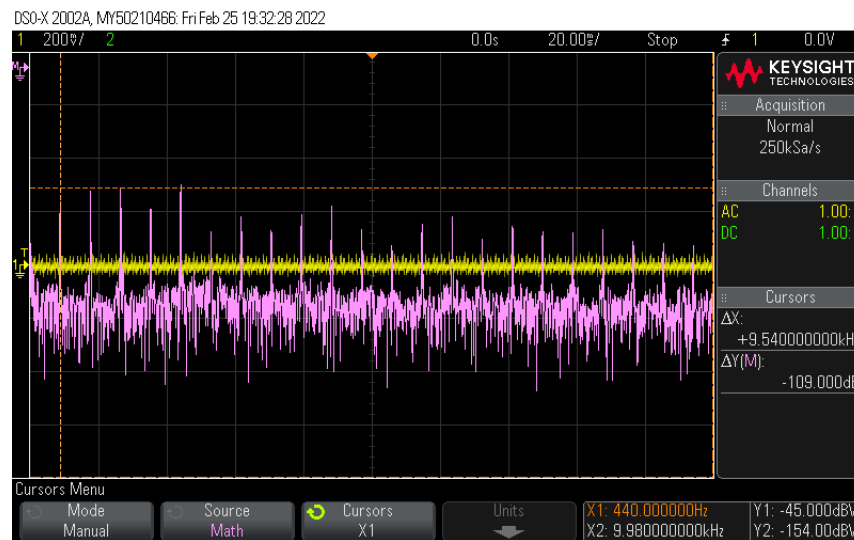
	f(Hz)	A(dB)	ΔA (dB)
Grunntone	440	-32.5	-
Overtone 1	1320	-51.3	-18.8
Overtone 2	2200	-58.8	-26.3
Overtone 3	3080	-63.8	-31.3
Overtone 4	3960	-66.9	-34.4

Tabell 3: Verdiene for trekantbølgen, hvor f måler frekvensen, A er amplituden og ΔA er et mål på endringen i desibel fra grunntonen til overtonen.

Vi ser her at vi har harmoniske overtoner som er odde multipler av grunntonen (3, 5, 7, og 9 ganger grunntonen). Akkurat som i firkantbølgen, men her ser vi også at overtonene avtar raskere enn i de andre to bølgeformene.

4.3.2

For denne oppgaven brukte nettsiden vedlagt i appendiksen til å måle frekvensen til 5 ulike toner (A, C#, Bb, G, og E(high)). Plottet vi fikk for tonen A så slik ut:



Figur 10: Tonen A målt med oscilloskopet, hvor 'cursorene' måler frekvensen til grunntonen.

	Frekvens(Hz)
Grunntone	440
Overtone 1	880
Overtone 2	1320
Overtone 3	1760
Overtone 4	2200

Tabell 4: Tonen A sin grunntone og overtoner

	Frekvens(Hz)
Grunntone	540
Overtone 1	1080
Overtone 2	1620
Overtone 3	2160
Overtone 4	2700

Tabell 5: Tonen C# sin grunntone og overtoner

	Frekvens(Hz)
Grunntone	460
Overtone 1	920
Overtone 2	1380
Overtone 3	1840
Overtone 4	2300

Tabell 6: Tonen Bb sin grunntone og overtoner

	Frekvens(Hz)
Grunntone	390
Overtone 1	780
Overtone 2	1170
Overtone 3	1560
Overtone 4	1950

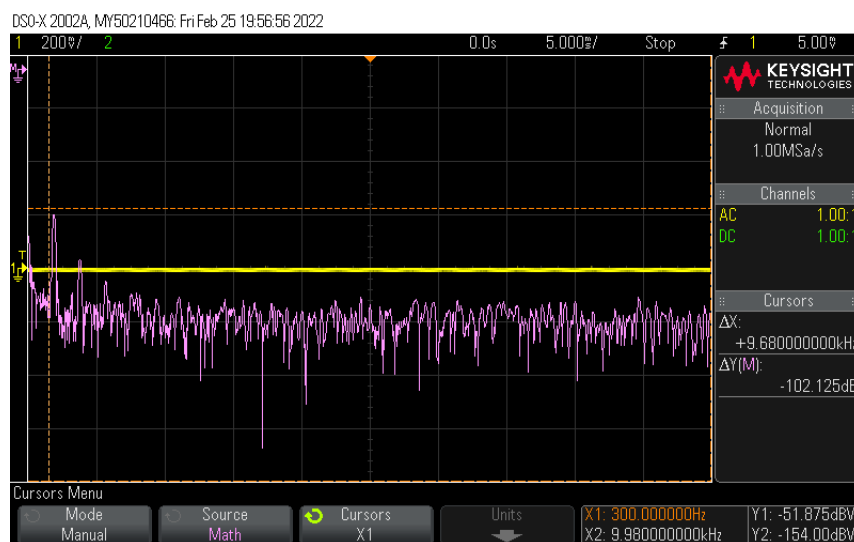
Tabell 7: Tonen G sin grunntone og overtoner

	Frekvens(Hz)
Grunntone	660
Overtone 1	1320
Overtone 2	1980
Overtone 3	2640
Overtone 4	3300

Tabell 8: Tonen E(High) sin grunntone og overtoner

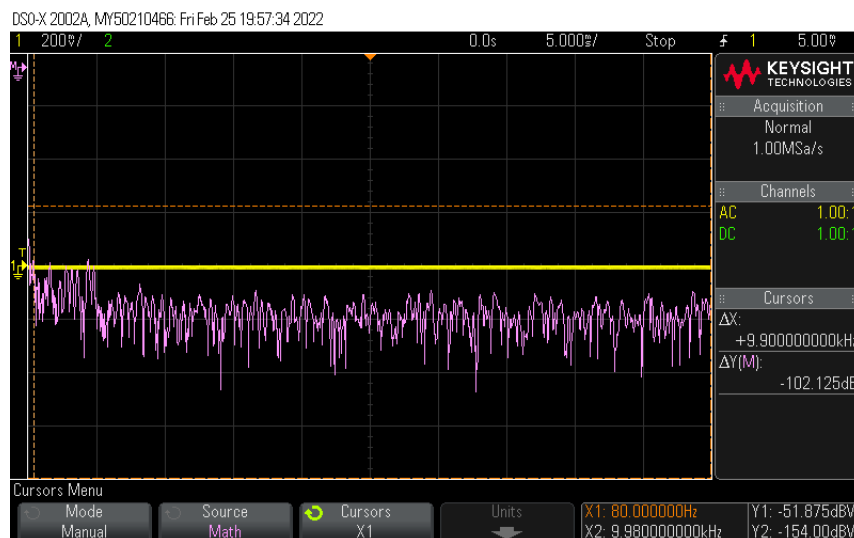
Det interessante vi kan se her, som gjelder for alle tonene, er at vi har grunntonen f_0 og alle overtonene er multipler av grunntonen $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$ og $5f_0$. Vi har altså at overtonene er alle multipler av grunntonen. Dette er nok å forvente ettersom vi brukte en nettside som spiller 'rene' toner. Dersom vi hadde brukt et ekte instrument for å måle tonene ville vi sett andre overtoner, det er dette som gjør at instrumenter høres ulike ut. Men nettsiden vi brukte vil gi en nøytral tone med alle overtonene tilstede.

4.4 Spekteret til vokallyden 'i'



Figur 11: Måling for vokalen "i"

Her kan vi se spekteret for lyden "i". Vi kan se at grunnfrekvensen er på 320Hz, og vi har to tydelige overtoner med frekvenser 635Hz og 950Hz. Disse er da altså (omtrent) harmoniske overtoner. De er ikke helt presise harmoniske overtoner (perfekte harmoniske overtoner ville vært 640Hz og 960Hz), men de er nære, avviket stammer nok fra at lyden vi lager selv ikke er en helt renlyd og vi må også ta høyde for at det kan være målefeil. Etter disse to overtonene kan man se at overtonene faller kraftig, man kan så vidt tyde to overtoner til på 1260Hz og 1580Hz, men disse er utydelige og betydelig svakere enn de to første.



Figur 12: Måling for vokalen "a"

Her har vi spekteret for vokalen "a". Vi kan se at grunntonen er på 80Hz, vi kan også tydelig se tre harmoniske overtoner på 160Hz, 240Hz og 320Hz, som henholdsvis er 2, 3, og 4 ganger grunnfrekvensen. Utover det har vi flere overtoner som går helt opp til 980Hz, men disse overtonene er langt svakere enn de tre første overtonene.

Sammenligner vi 'a' og 'i' kan vi se at lyden 'a' har overtoner som går lengre opp enn 'i' har. Men 'i' sin grunntone er mer fremtredende enn grunntonen til 'a'. Vi sjekket også toneleiet, ved å se på den mørkeste og den lyseste grunntonen vi kan lage. Den mørkeste lyden vi klarte å lage var 80Hz, og den lyseste var 710Hz. Dette samsvarer godt med toneleiet tenor, i følge tabellen i labheftet.

5 Konklusjon

Etter denne laben har vi to hovedkonklusjoner. Vi fant ut hvordan lyder og toner har en grunntone og flere overtoner, og hvordan overtoner påvirker lyden. Vi fikk også testet ut samplingsteoremet og vi fikk se hva som skjer når vi bryter samplingsteoremet. Vi fikk da erfare aliasing og hvordan det påvirker målingene våre.

A Appendix

A.1 Eksempel på en kretstegning

Under følger et eksempel på en kretstegning:

A.2 Nettside for tonearter

http://harmonize.com/metropolis/online_pitch_pipe.htm