

Frekvens og Sampling

HÅKON SILSETH

UiT - Norges Arktiske Universitet

11. oktober 2022

Sammendrag

I dette forsøket skal vi undersøke hvordan et lavpassfilter fungerer. Vi skal også se på hva som må gjøres for å omgjøre det til et høypassfilter, og hvordan man lager et skarpere lavpassfilter. I forsøket brukte vi først en motstand ($R = 10.014k\Omega \pm 0.035\Omega$) og en kondensator ($C = 1.5509nF \pm 0.016009nF$) til å lage et lavpassfilter med grensefrekvens ($f_0 = 10248Hz \pm 40Hz$). Vi forsøkte også å lage et skarpere lavpassfilter ved å bruke flere motstander og kondensatorer. Vi fikk da et mye skarpere filter hvor signalet avtar med $-16.65dB/dekade$ hvor det originale lavpassfilteret avtar med $-30.32dB/dekade$.

Kommentarer:

1 Formål

Formålet for dette forsøket er å lære om egenskapene til et høypass- og et lavpassfilter. Vi skal også lage slike filter med motstander og kondensatorer, vi skal også forsøke å lage et lavpassfilter som er så skarpt som mulig.

2 Teori og definisjoner

2.1 Kondensator

En kondensator består av to metallplater med et dielektrisk materiale mellom de. En kondensator kan lagre ladninger og gi fra seg de lagrede ladningene, litt som et batteri, men siden det ikke er kontakt mellom metallplatene så kan den ikke lede strøm. En kondensator kan ikke lagre like store ladninger som et batteri, men oppladningen og utladningen går mye raskere enn hos et batteri. En kondensator er altså da en komponent som ikke kan lede strøm, men strøm kan gå til og fra kondensatoren, og når den lades opp vil spenningen over kondensatoren øke.

For å analysere kondensatorer innføres størrelsen kompleks impedanse Z_C . Den komplekse impedansen tar hensyn til tiden det tar å lade opp og å lade ut kondensatoren, dette fører til en faseforskyvning mellom strømmen og spenningen i kretsen. Impedansen til kondensator er gitt ved:

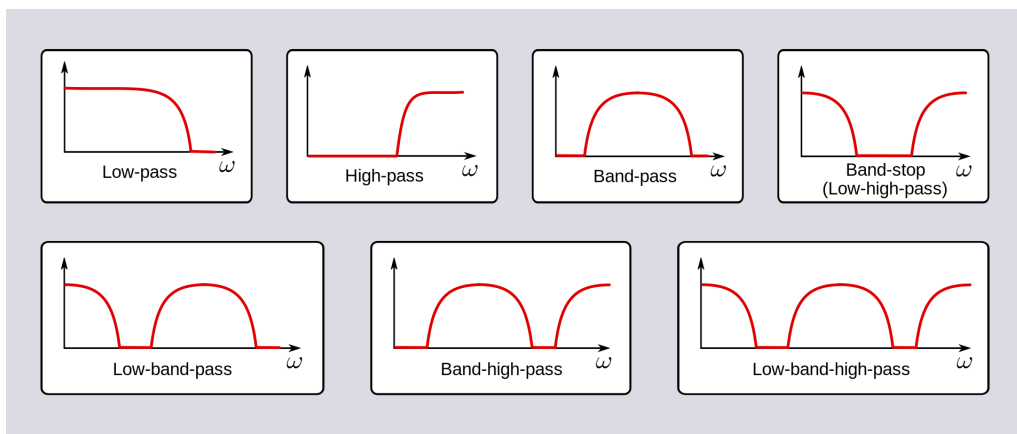
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (1)$$

Hvor $j = \sqrt{-1}$, C er kapasitansen til kondensatoren, og $\omega = 2\pi f$ er vinkelfrekvensen til spenningen, hvor f er frekvensen. Vi kan også innføre kompleks strøm i og spenning v , ved å gjøre dette kan vi bruke Ohms lov på kondensatoren, og for vekselspenning og vekselstrøm

$$v = Zi \quad (2)$$

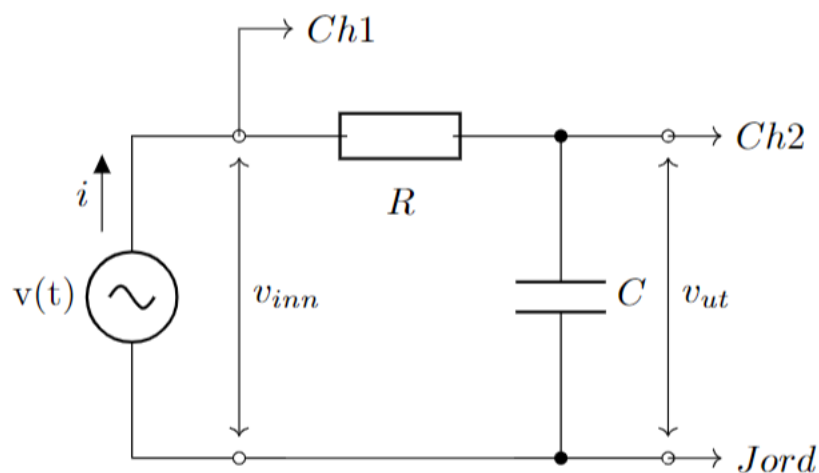
2.2 Filter

Et filter, i denne sammenhengen, er en krets som kan ta inn signal med alle mulige frekvenser, men som kun lar de med en viss frekvens slippe gjennom, de typene filter som er mest relevant for oss er lavpass- og høypassfilter, men det finnes mange ulike typer filter.



Figur 1: Eksempler på ulike typer filter. (Laget av SpinningSpark, Hentet fra: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=20951989>)

Det vi skal se på mest i denne oppgaven er lavpassfilter.



Figur 2: Kretsdiagram for et enkelt lavpassfilter. (Hentet fra labhefte)

I et slikt filter er vi ute etter å finne utgangsspenningen v_{ut} som en funksjon av inngangsspenningen v_{inn} . Hvis vi antar at det ikke går noe strøm inn til oscilloskopet (Ch1 og CH2 på kretsdiagrammet) kan vi angi strømmen i på følgende måte.

$$\begin{aligned} i &= \frac{v_{inn}}{R + Z_C} = \frac{v_{ut}}{Z_C} \\ v_{ut} &= \frac{Z_C}{R + Z_C} v_{inn} \end{aligned} \quad (3)$$

Det er også ønskelig å lage et uttrykk for forholdet mellom v_{inn} og v_{ut} . Dette uttrykket kalles transferfunksjonen til filteret og er som følger.

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{v_{ut}}{v_{inn}} = \frac{Z_C}{R + Z_C} \\
 &= \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \\
 &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \\
 &= \frac{1}{j2\pi f RC}
 \end{aligned} \tag{4}$$

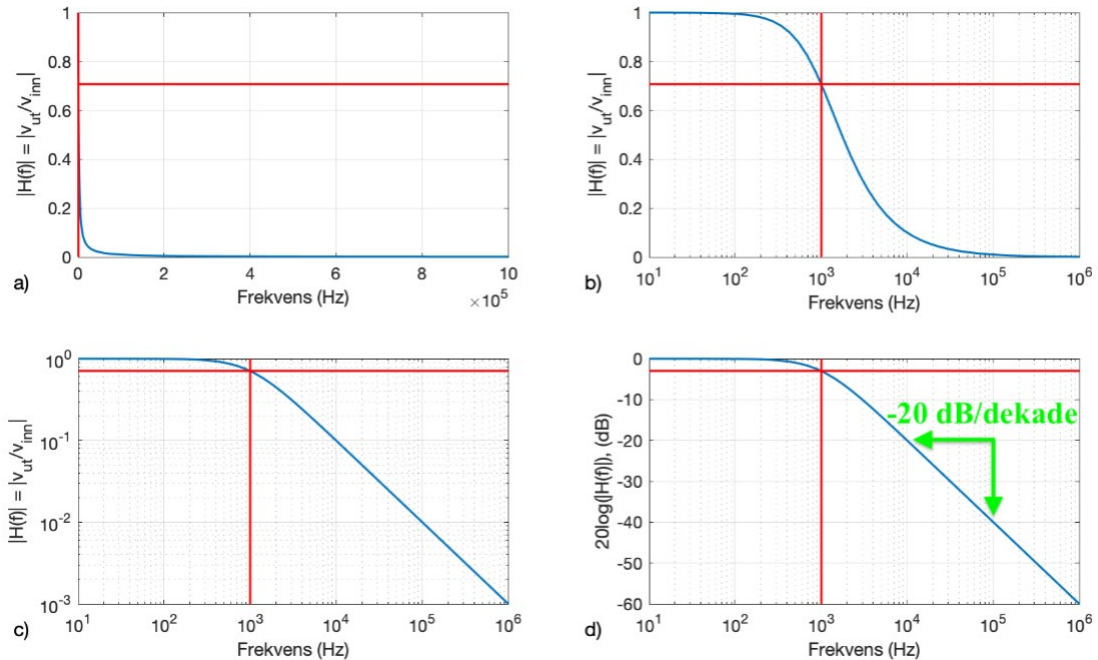
Vi kan også finne amplituden til transferfunksjonen ved å ta dens absoluttverdi.

$$\begin{aligned}
 |H(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Her er $f_0 = \omega_0/2\pi = 1/(2\pi RC)$ grensefrekvensen til filteret, ved grensefrekvensen vil $|H(f)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$. Ut ifra dette uttrykket kan vi også finne faseendringen mellom utgangssignalet og inngangssignalet.

$$\begin{aligned}
 \phi &= \arctan(-2\pi f RC) \\
 &= -\arctan\left(\frac{f}{f_0}\right) \\
 &= -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Fra (5) kan vi tydelig se hvordan transferfunksjonen oppfører seg for ulike verdier av f . Ved $f \ll f_0$ har vi $|H(f)| \approx 1$, ved $f \gg f_0$ har vi $|H(f)| \approx 0$ og ved $f = f_0$ får vi $|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Disse verdiene er i grunn det som definerer et lavpassfilter, de lave frekvensene, i forhold til grensefrekvensen, vil bli nærmest upåvirket, og de høye frekvensene vil ikke slippes gjennom. Amplituden til transferfunksjonen kalles frekvenskarakteristikken til filteret. Den kan fremvises på ulike måter, men det som gir mest informasjon, og er tydeligst å avlese er med logaritmisk skala. I figur 3 vises 4 ulike fremvisninger av samme frekvenskarakteristikk, her er det tydelig at de to med logaritmisk skala(c) og d)) er optimale for fremvisning av frekvenskarakteristikken.



Figur 3: Frekvenskarakteristikken for et lavpassfilter med $f_0 = 1000\text{Hz}$ fremvist på ulike skalaer. (Hentet fra labhefte)

Det som er mest vanlig å bruke for å finne frekvenskarakteristikken er en graf med desibel-skala langs y-aksen. Vi får da:

$$H(\text{dB}) = 10 \log \frac{P_{ut}}{P_{inn}} = 10 \log \frac{v_{ut}^2/R}{v_{inn}^2/R} = 20 \log \frac{v_{ut}}{v_{inn}} \quad (7)$$

Vi kan lett regne ut med (7) at amplituden ved grensefrekvensen er $20 \log(1/\sqrt{2}) = -3.01\text{dB}$. Så grensefrekvensen kan også defineres som frekvensen hvor utgangssignalet er dempet med 3.01dB.

3 Eksperimentelt oppsett og fremgangsmåte

3.1 Utstyrsliste

- Oscilloskop
- BNC-overganger og T-ledd
- Diverse motstander og kondensatorer
- Koblingsbrett

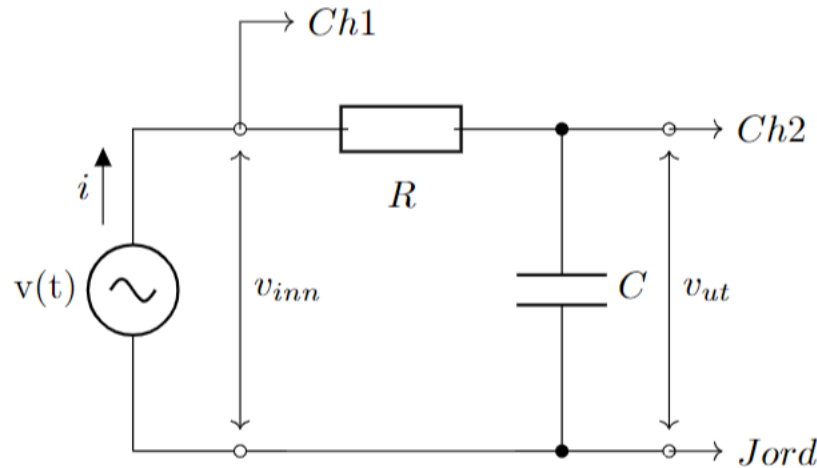
3.2 Oppsett

3.2.1 Oppgave 1

For oppgave 1 består oppsettet kun av multimeteret, og motstandene og kondensatorene vi skal bruke. I denne oppgaven skal vi kun måle resistansen til motstandene og kapasitansen til kondensatorene, så selve oppsettet er ikke noe spesielt viktig.

3.2.2 Oppgave 2

Oppsettet for denne oppgaven består av et oscilloskop, en 1.5nF kondensator og $10\text{k}\Omega$ motstand konfigurert slik som i figur 4



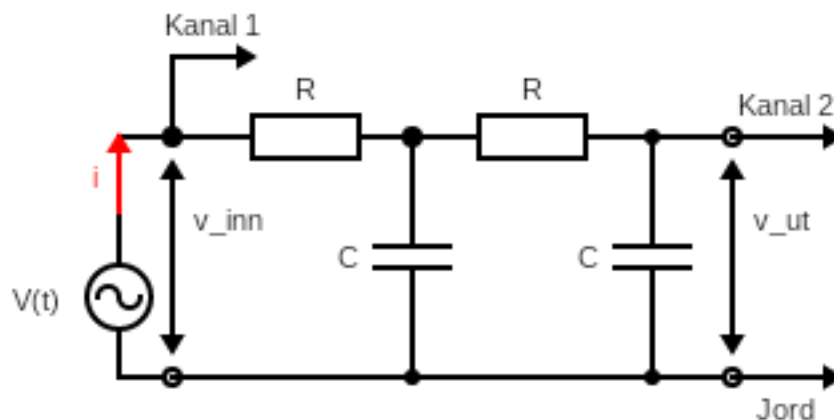
Figur 4: Lavpassfilteret som skal lages i oppgave 2 (Hentet fra labhefte)

3.2.3 Oppgave 3

For denne oppgaven er oppsettet helt likt som i oppgave 2, men vi bytter om på plasseringen til kondensatoren og motstanden.

3.2.4 Oppgave 4

For denne oppgaven er oppsettet mer åpent ettersom oppgaven er en mer åpen oppgave enn de andre. Vårt oppsett for denne oppgaven består av to 1.5nF kondensatorer og to $10\text{k}\Omega$ motstander koblet til oscilloskopet slik at vi får et todimensjonalt lavpassfilter, som vist i figur5



Figur 5: Kretsdiagram for 2d lavpassfilteret som lages i oppgave 4

3.3 Fremgangsmåte

3.3.1 Oppgave 1

For denne oppgaven brukte vi multimeteret for å måle resistansen til motstandene, og kapasitansen til kondensatorene vi skal bruke i de videre oppgavene.

3.3.2 Oppgave 2

I denne oppgaven startet vi med å sette opp lavpassfilteret som vist i figur 4. Vi fant så frekvens- og fasekarakteristikken til filteret ved å måle v_{inn} og v_{ut} for ulike frekvenser. Vi brukte frekvenser som passer godt til bruk av logaritmisk skala, 100, 200, 400, 1000,... osv helt opp til 1MHz. Signalet vi målte var et sinussignal med inngangsspenning på 5V peak to peak. Så regnet vi ut hvor mange dB per dekad signalen avtar med, dette gjorde vi ved å måle differansen i dB over en dekad like over grensefrekvensen. Deretter målte vi grensefrekvensen ved å finne frekvensen hvor faseendringen mellom v_{inn} og v_{ut} er 45° . Vi vet at dette er grensefrekvensen ut i fra ligning (6). Vi sammenlignet så dette med svaret vi får ved å regne ut grensefrekvensen gitt ved $f_0 = 1/(2\pi RC)$

3.3.3 Oppgave 3

Her startet vi med å bytte om på motstanden og kondensatoren i filteret slik at vi får et høypassfilter. Deretter kjørte vi en enkel karakterisering av filteret for å sjekke at det fungerer som høypassfilter. Vi målte v_{inn} og v_{ut} for følgende verdier: 1kHz, 3kHz, 10kHz, 30kHz, 100kHz.

3.3.4 Oppgave 4

I denne oppgaven valgte vi å lage et todimensjonalt lavpassfilter som vist i figur 5. Så gjentok vi stegene fra oppgave 2 til å finne frekvens- og fasekarakteristikken til filteret, og sammenlignet det

med lavpassfilteret vi hadde i oppgave 2.

4 Resultater & Diskusjon

4.1 Oppgave 1

Målingene vi fikk for motstandene vi brukte i de følgende oppgavene var:

$$\begin{aligned} R_1 &= 10.014k\Omega \pm 0.035\Omega \\ R_2 &= 10.011k\Omega \pm 0.035\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

Hvor R_1 er motstanden brukt i oppgave 2 og 3, og R_2 er motstanden som introduseres i oppgave 4. Målingene for kondensatorene som ble brukt er:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1.5509nF \pm 0.016009nF \\ C_2 &= 1.5409nF \pm 0.015909nF \end{aligned} \quad (9)$$

Hvor C_1 er kondensatoren som brukes i oppgave 2 og 3, og C_2 er kondensatoren som introduseres i oppgave 4.

4.2 Oppgave 2

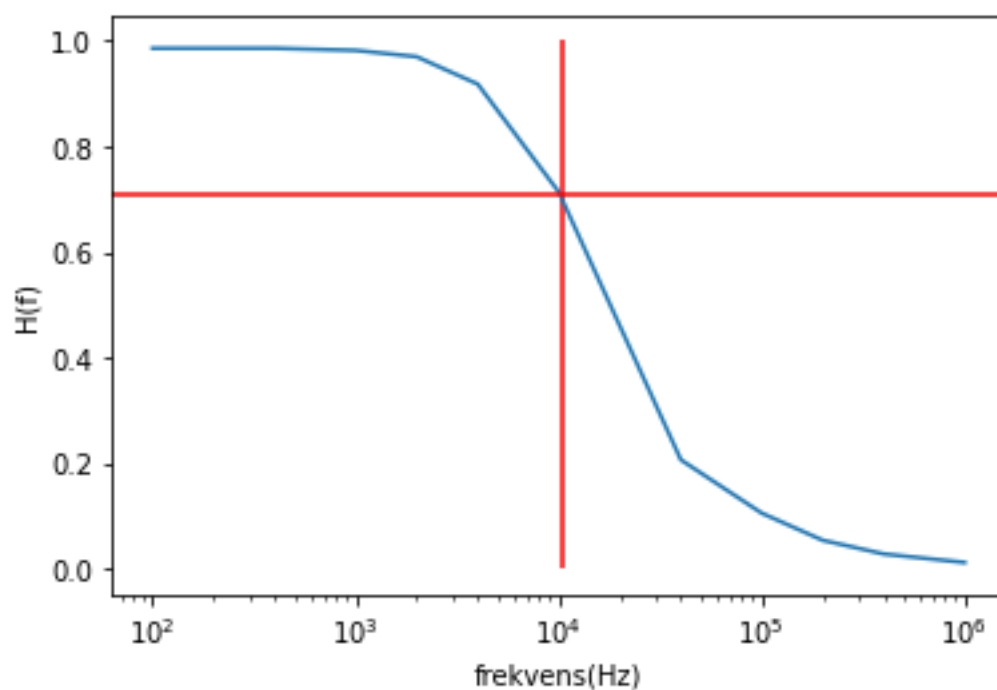
Verdiene for å finne frekvenskarakteristikken og fasekarakteristikken til lavpassfilteret ble som følgende.

Frekvens(Hz)	Input(V)	Output(V)	H(f)	Faseendring(°)	20log(H(f))
100	5	4,93	0,986	0,9	-0,122461701
200	5	4,93	0,986	1,4	-0,122461701
400	5	4,93	0,986	2,5	-0,122461701
1000	5	4,91	0,982	5,8	-0,157770244
2000	5	4,85	0,97	11,3	-0,264565315
4000	5	4,59	0,918	21,1	-0,743146376
10000	5	3,57	0,714	43,4	-2,926035764
20000	4,98	2,292	0,460241	61,5	-6,740294589
40000	4,99	1,028	0,206012	76,6	-13,72214862
100000	4,99	0,524	0,10501	82,4	-19,57538517
200000	4,99	0,2668	0,053467	84,7	-25,43829441
400000	4,99	0,1372	0,027495	85	-31,21492869
1000000	5,01	0,0571	0,011397	84,6	-38,86403235

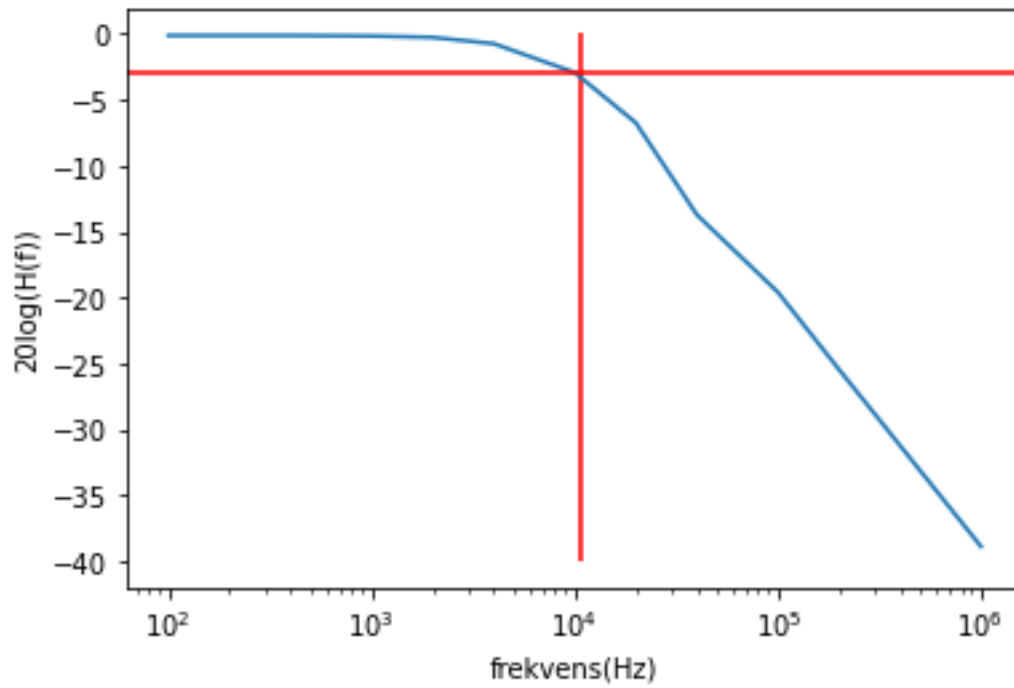
Tabell 1: Målte verdier for karakteristikken til lavpassfilteret, hvor $H(f)$, fasen og $20\log(H(f))$ er utregnet ved å bruke formlene fra teoriseksjonen.

Det som er verdt å bemerke her er at kretsen, som forventet, fungerer som et lavpassfilter ettersom at output frekvensen er mer eller mindre stabil fram til vi nærmer oss grensefrekvensen, også synker den kraftig for frekvenser over grensefrekvensen. Vi kan også se at ved 10kHz, som er det nærmeste

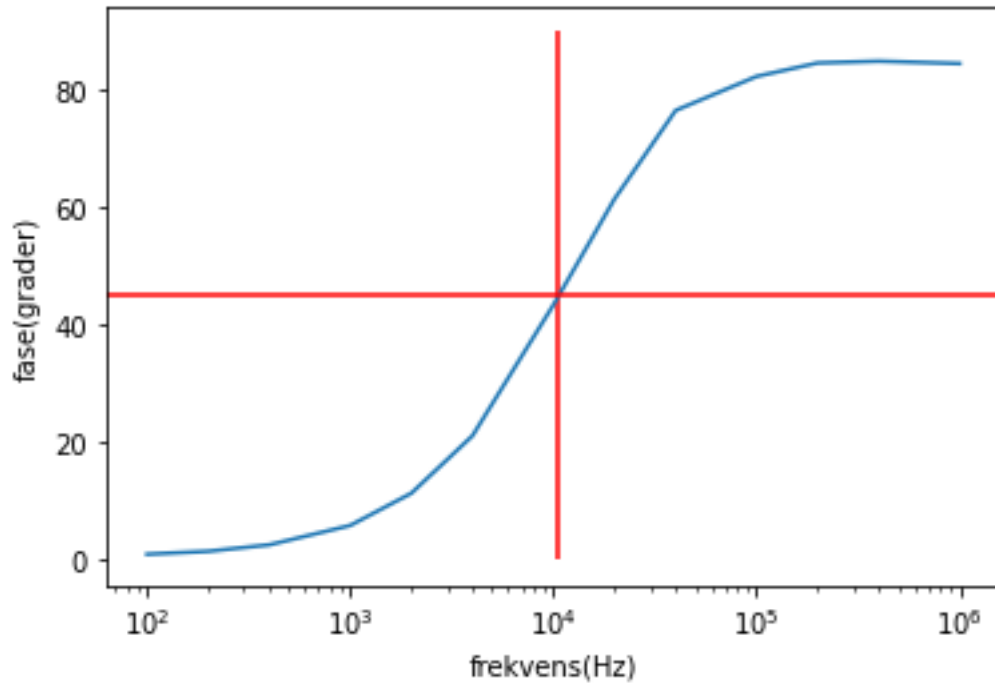
vi har målt til grensefrekvensen gir oss en faseendring på 43.4° og et signal som er svekket med -2.9dB . Dette er akkurat det vi forventer ettersom at vi har regnet oss fram til en grensefrekvens på rundt 10.25kHz . Verdiene ved grensefrekvensen skal være 45° faseskifte og -3.01dB svakere signal. Så at vi har verdier som er litt lavere enn disse ved en frekvens som er litt lavere enn grensefrekvensen er et veldig godt tegn. Om vi plotter verdiene i tabellen slik at vi får en graf av frekvens- og fasekarakteristikken på logaritmisk skala ser det slik ut.



Figur 6: Plot av $H(f)$ mot frekvens, plottet på semilogaritmisk skala. De røde linjene viser grunnfrekvensen til filteret og verdien til $H(f)$ ved $f = f_0$ ($1/\sqrt{2}$)



Figur 7: Plot av $H(f)$ mot frekvens, plottet på semilogaritmisk skala, med dB skala på y-aksen. De røde linjene viser grunnfrekvensen til filteret og svekkingen til signalet ved $f = f_0$ (-3.01dB)



Figur 8: Faseskifte til signalet plottet mot frekvensen. De røde linjene viser grensefrekvensen og faseskifte på 45 grader som er faseskiftet vi får ved grensefrekvensen.

For å finne hvor mange desibel signalet avtar med per dekad kan vi dB verdien for $f=100\text{kHz}$ og trekke fra dB verdien for $f=10\text{kHz}$, da ender vi opp med en verdi for hvor mange dB signalet avtar med per dekad. Dette blir da:

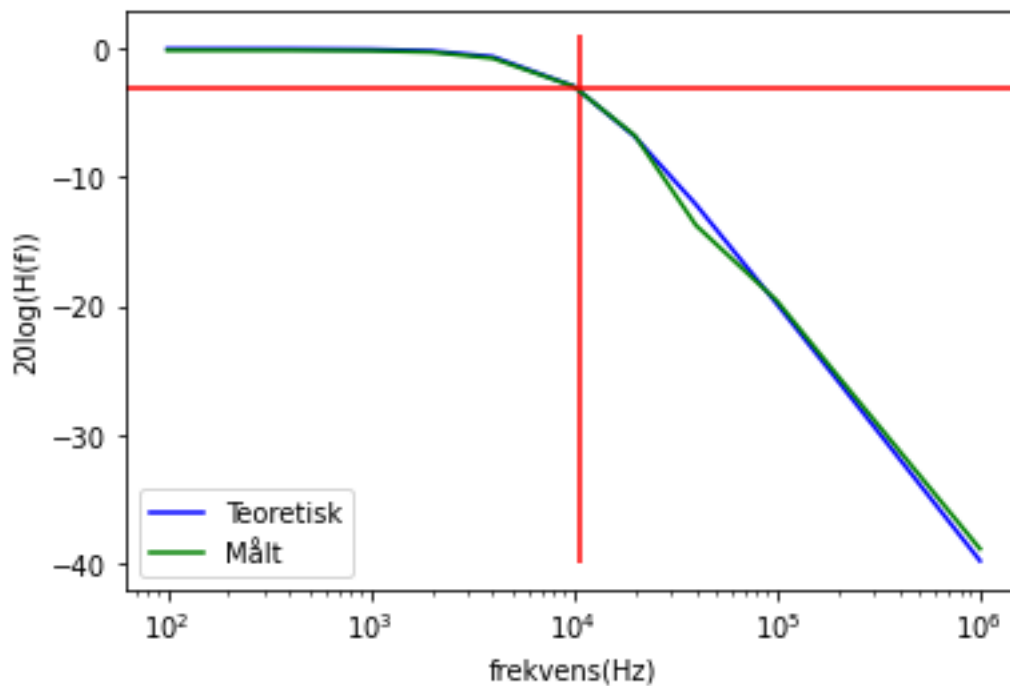
$$20\log(H(100000)) - 20\log(H(10000)) = -16.65\text{dB/dekade} \quad (10)$$

For å måle grensefrekvensen mest mulig presist brukte vi oscilloskopet til å finne frekvensen som gir oss en faseforskyvning på 45° . Det vi fikk som resultat da ble at grensefrekvensen er lik $f_0 = 10.56\text{kHz}$. Den teoretiske grensefrekvensen vi skal er:

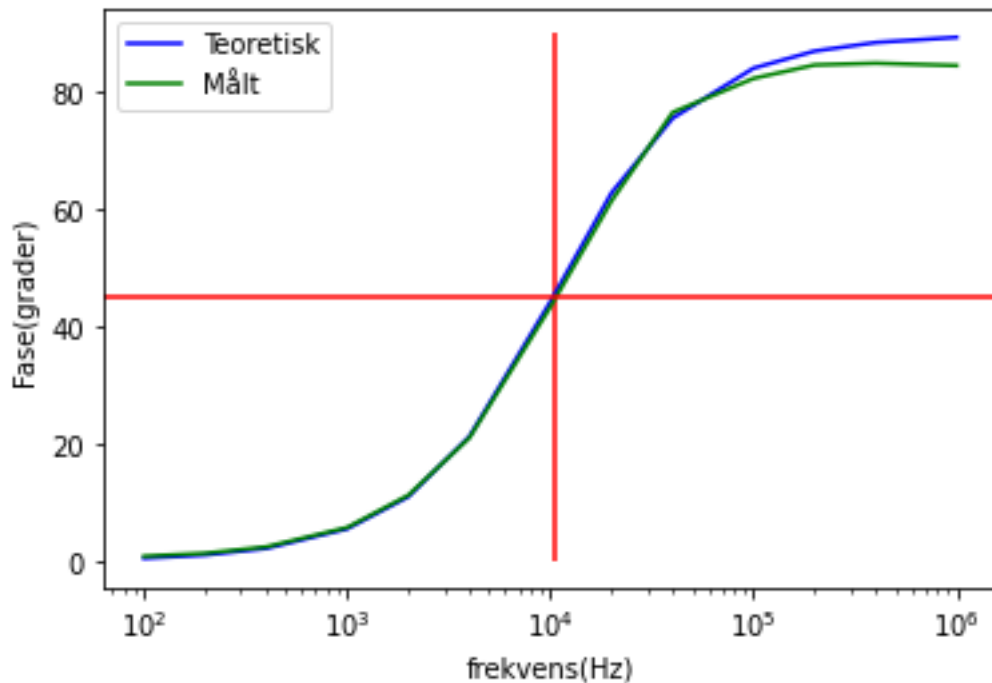
$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi RC} \\ &= \frac{1}{2 * \pi * 10.014 * 10^3 * 1.5509 * 10^{-9}} \\ f_0 &= 10248\text{Hz} \pm 40\text{Hz} \end{aligned} \quad (11)$$

Disse to verdiene er ikke helt like, men de er svært nære hverandre. Ideelt hadde disse verdiene vært like, men på grunn av systematiske feil som gir oss litt avvikende verdier sammenlignet med

det vi regner ut teoretisk. Vi kan også lage grafer av de teoretiske verdiene til faseendringen og transferfunksjonen gitt ved ligninger (6) og (5). De bli da seendes slik ut:



Figur 9: Den teoretiske grafen til $H(f)$ plottet sammen med de målte verdiene for $H(f)$



Figur 10: Den teoretiske grafen til faseskiftet plottet sammen med de målte verdiene for faseskiftet

Her kan vi se på begge grafene at de målte verdiene er, ikke helt perfekte, men veldig nære de teoretiske verdiene. Dette er et veldig godt tegn på at målingene som har blitt gjort er nøyaktige og riktige.

4.3 Oppgave 3

For denne oppgaven laget vi et enkelt høypassfilter ved å bytte om på komponentene i lavpassfilteret, de resulterende målingene ble som følgende.

Frekvens	Input(V)	Output(V)
1000	5,1	0,5
3000	5	1,39
10000	5	3,43
30000	4,98	4,62
100000	5	4,9

Tabell 2: Målingene for karakterisering av høypassfilteret

Vi kan lett se på outputverdiene i tabellen her for å se at dette er et velfungerende høypassfilter, vi trenger ikke å plote det. Vi kan tydelig se at de høye frekvensene slipper gjennom og de lave

frekvensene blir mye svakere. Vi kan altså bare bytte om på komponentene (i hvertfall i disse enkle filtrene) for å bytte mellom høypass- og lavpassfilter.

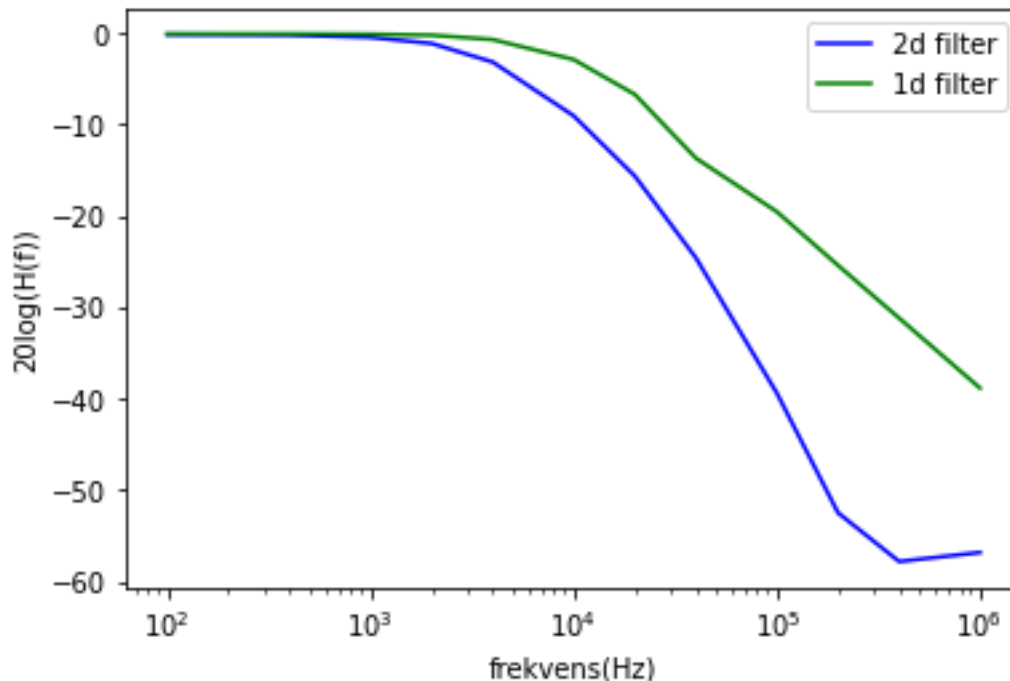
4.4 Oppgave 4

For denne oppgaven valgte vi å lage et andre ordens lavpassfilter, som vist i figur 5. Resultatene vi fikk for dette filteret er:

Frekvens(Hz)	Input(V)	Output(V)	H(f)	Fase(°)	20log(H(f))
100	4,99	4,88	0,977956	1,7	-0,193614472
200	4,99	4,87	0,975952	3,5	-0,211431688
400	5	4,86	0,972	6,9	-0,246674701
1000	5	4,72	0,944	15,8	-0,500560114
2000	4,99	4,36	0,873747	30,2	-1,172281127
4000	4,99	3,45	0,691383	52,1	-3,205629011
10000	4,98	1,75	0,351406	85,5	-9,083825881
20000	4,97	0,818	0,164588	110,9	-15,6720617
40000	4,98	0,292	0,058635	134,3	-24,63692983
100000	4,98	0,0533	0,010703	154,7	-39,41004267
200000	4,98	0,0118	0,002369	-171,1	-52,50694671
400000	4,99	0,0064	0,001283	-73	-57,83841143
1000000	5,01	0,0072	0,001437	-34,6	-56,85010459

Tabell 3: Verdiene for 2d lavpassfilter

Hvis vi plotter dette mot lavpassfilteret fra oppgave 2 får vi følgende plot.



Figur 11: Sammenligning av de to ulike lavpassfilterene

Vi kan tydelig se at det nye lavpassfilteret er mye skarpere enn det forrige, dette ser vi siden den har mye brattere kurve enn det originale lavpassfilteret brukt i oppgave 2. Vi kan også regne på hvor mye signalet avtar i dB per dekad.

$$20\log(H(100000)) - 20\log(H(10000)) = -30.3\text{dB/dekade} \quad (12)$$

Det nye og skarpere filteret avtar altså nesten dobbelt så raskt som det gamle filteret. Dette kommer jo da av at vi har på en måte to enkle lavpassfiltre koblet sammen (dette er en forenkling, men viser til hvorfor det er skarpere).

5 Konklusjon

Vi kan med dette forsøket konkludere mangt. Vi fikk testet ut hvordan filtere fungerer, særlig da lavpassfilter og hvordan man kan gjøre et filter skarpere slik at signalet avtar raskere når vi er over grensefrekvensen. Vi har også sett på hvordan målte verdier sammenligner seg med de teoretiske verdiene vi får ved regning. Vi kan da konkludere med at et lavpassfilter blir skarpere om vi legger til flere kondensatorer i parallellkobling med en motstand mellom hver.

A Appendix