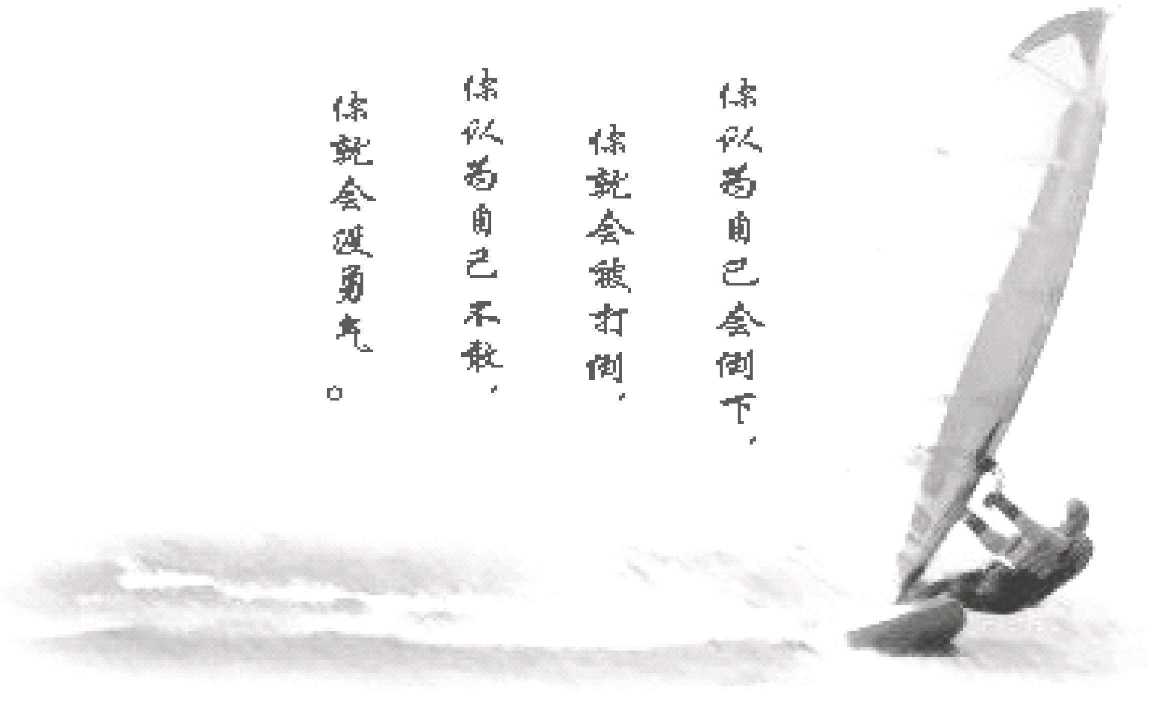
高 中 数 学 基 础 知 识

与常见解题规律



整理：孟伟业　2009 年 4 月

目 录

第一章 集　合

※本章内容※

公式定理及常见规律

1.1 集合的定义

（1）定义：指定的某些对象的全体称为集合.

（2）特性：确定性、互异性、无序性.

（3）表示法：列举法$\{1,2,3,\cdots\}$、描述法$\{x|P\}$、韦恩（Venn）图法.

注：注意区分集合中元素的形式，如：$A=\{x|y=x^2+2x+1\}$，元素为函数式的定义域；$B=\{y|y=x^2+2x+1\}$，元素为函数式的值域；$C=\{(x,y)|y=x^2+2x+1\}$，元素为图像上的点的坐标等.

练习

（1）$x^2\in\{0,1,x\}$，求实数x．【参考答案：-1】

（2）下列各对象可以组成集合的是（　　）．【参考答案：B】

A. 与 1 非常接近的全体实数

B. 某校 2002-2003 学年度第一学期全体高一学生

C. 高一年级视力比较好的同学

D. 与无理数π相差很小的全体实数

1.2 集合的分类

（1）分类：有限集、无限集.

（2）数集：自然数集$\mathbf{N}$、整数集$\mathbf{Z}$、有理数集$\mathbf{Q}$、实数集$\mathbf{R}$、正整数集$\mathbf{N}^*$、空集$\varnothing$.

1.3 集合中的关系

（1）元素与集合：属于$\in$、不属于$\notin$.

①$x\in A\Leftrightarrow x\notin C_U A$；②$x\in C_U A\Leftrightarrow x\notin A$.

（2）集合与集合：包含于$\subseteq$、包含$\supseteq$、真包含于$\subset$、真包含$\supset$、相等=.

注：①$x\in\varnothing$永远错误，$x\notin\varnothing$永远正确；②区别$\in$与$\subset$、$\notin$与$\not\subset$、a与$\{a\}$、$\varnothing$与$\{\varnothing\}$、$\{(1,2)\}$与$\{1,2\}$；③空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

练习

（1）下列八个关系式：①$\{0\}=\varnothing$；②$\varnothing=0$；③$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$；④$\varnothing\in\{\varnothing\}$；⑤$\{0\}\supseteq\varnothing$；⑥$0\notin\varnothing$；⑦$\varnothing\neq\{0\}$；⑧$\varnothing\neq\{\varnothing\}$，其中正确的个数为（　　）．【参考答案：C】

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

解析：其中①、②是不正确的.

（2）设全集$U=\mathbf{R}$，集合$M=\{x|x>1\}$，$P=\{x|x^2>1\}$，则下列关系式中正确的是（　　）．【参考答案：C】

A. $M=P$　　B. $P\subset M$　　C. $M\subset P$　　D. $C_U(M\cap P)=\varnothing$

1.4 集合的运算

（1）交集：$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$.

（2）并集：$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$.

（3）补集：$C_U A=\{x|x\notin A且x\in U,U是全集\}$.

运算性质有：

（1）$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cap B=B\cap A$

（2）$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=A$；$A\cup B=B\cup A$

（3）$A\cap C_U A=\varnothing$；$A\cup C_U A=U$

练习

（1）已知集合$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，则$C_U(A\cup B)=$_________，$A\cap B=$_________，$A\cup B=$_________．【参考答案：$\{1,6\}$, $\{4,5\}$, $\{2,3,4,5,7\}$】

1.5 集合分析方法

（1）韦恩（Venn）示意图.

（2）数轴分析.

1.6 德摩根公式

（1）$C_U(A\cap B)=C_U A\cup C_U B$，交之补等于补之并.

（2）$C_U(A\cup B)=C_U A\cap C_U B$，并之补等于补之交.

练习

（1）设$U=\{0,1,2,3,4\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则$C_U A\cup C_U B=$（　　）．【参考答案：C】

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{0,1,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

1.7 集合中的等价关系

（1）$A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow \complement_U B\subseteq \complement_U A\Leftrightarrow A\cap \complement_U B=\varnothing\Leftrightarrow \complement_U A\cup B=U$.（其中 A 有两种情况：$A=\varnothing$ 与 $A\neq\varnothing$）

（2）$A\cup B=A$ 也有类似的结论.（其中 B 有两种情况：$B=\varnothing$ 与 $B\neq\varnothing$）

练习

（1）已知集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{a^2\}$，且 $B\subset A$，那么实数 a 可能取的值是________.【参考答案：$-1,\pm\sqrt{3},0$】

（2）已知集合 $A=\{x|x\le 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\le a\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的范围是________.【参考答案：$a\ge 2$】

（3）已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x|2x^2-ax+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 a 的范围是________.【参考答案：$-4<a\le 4$】

（4）$A=\{x|ax^2-2x-1=0\}$，如果 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求 a 的取值.【参考答案：$a\le 0$】

1.8 用补集思想解决问题

练习

（1）已知关于 x 的不等式 $\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集为 M，若 $3\in M$ 且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.【参考答案：$\because 3\in M$，$\therefore \dfrac{3a-5}{3^2-a}<0$；$\because 5\notin M$，$\therefore \dfrac{5a-5}{5^2-a}\ge 0$，此外，$a=25$ 时，$5^2-a=0$.$\therefore a\in\left[1,\dfrac{5}{3}\right)\cup(9,25]$】

1.9 容斥原理

（1）$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}A+\operatorname{card}B-\operatorname{card}(A\cap B)$

（2）

$\operatorname{card}(A\cup B\cup C)=\operatorname{card}A+\operatorname{card}B+\operatorname{card}C-\operatorname{card}(A\cap B)-\operatorname{card}(B\cap C)-\operatorname{card}(C\cap A)+\operatorname{card}(A\cap B\cap C)$

（注：card 表示元素的个数）

练习

（1）在 100 个学生中，有乒乓球爱好者 60 人，排球爱好者 65 人，则两者都爱好的人数最少是________.【参考答案：25】

（2）某班举行数、理、化三科竞赛，每人至少参加一科，已知参加数学竞赛的有 27 人，参加物理竞赛的有 25 人，参加化学竞赛的有 27 人，其中参加数学、物理两科的人有 10 人，参加物理、化学两科的有 7 人，参加数学、化学两科的有 11 人，而参加数、理、化三科的有 4 人，求全班人数.【参考答案：55】

1.10 集合的子集个数

若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 A 的子集个数如下：

（1）子集共有 2^n 个.

（2）真子集共有 2^n-1 个.

（3）非空子集共有 2^n-1 个.

（4）非空真子集共有 2^n-2 个.

练习

（1）满足 $\{1,2\}\cup M=\{1,2,3\}$ 的所有集合 M 有（　　　）个. 【参考答案：D】

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

（2）集合 A 中有 m 个元素，若在 A 中增加一个元素，则它的子集个数将增加________个. 【参考答案：2^m】

1.11 有约束条件的集合的个数

设有限集合 A、B、C，$\text{card}(A)=n$，$\text{card}(B)=m$，$m<n$，用 $f(C)$ 表示集合 C 的个数，则

（1）若 $B\subseteq C\subseteq A$，则 $f(C)=2^{n-m}$.

（2）若 $B\subseteq C\subset A$，则 $f(C)=2^{n-m}-1$.

（3）若 $B\subset C\subseteq A$，则 $f(C)=2^{n-m}-1$.

（4）若 $B\subset C\subset A$，则 $f(C)=2^{n-m}-2$.

1.12 数轴在集合运算中的应用步骤

（1）化简集合.

（2）将集合在数轴上表示出来.

（3）进行集合运算，求出字母的值或范围.

运算时注意：①是否包含区间端点；②含参变量的集合能否为空.

练习

（1）已知集合 $A=\{x|x<4\}$，$B=\{x|x^2-4x+3>0\}$，则集合 $\{x|x\in A且x\notin A\cap B\}=$________. 【参考答案：$[1,3]$】

（2）已知集合 $A=\{-2\le x\le 2, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\ge a\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

【参考答案：$a\le -2$】

（3）设集合 $A=\{-3\le x\le 2\}$，$B=\{x|2k-1\le x\le 2k+1\}$，且 $A\supset B$，则实数 k 的取值范围是________.

【参考答案：$-1\le k\le \frac{1}{2}$】

1.13 方程组的解集

如方程组 $\begin{cases}2x+3y=13,\\3x-2y=0\end{cases}$ 的解集可表示为：$\{(x,y)|x=2,y=3\}$ 或 $\{(2,3)\}$.

第二章 简易逻辑

※本章内容※

公式定理及常见规律

2.1 命题，原命题，否命题，逆命题，逆否命题

（1）原命题：$p \Rightarrow q$.

（2）否命题：$\neg p \Rightarrow \neg q$.

（3）逆命题：$q \Rightarrow p$.

（4）逆否命题：$\neg q \Rightarrow \neg p$.

练习

（1）分别写出下面命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断其真假：①若 a、b 都是奇数，则 ab 必是奇数；②若 $x^2=y^2$，则 $x=y$. 【参考答案：略】

2.2 真值表

p	q	非 p（$\neg p$）	p 或 q（$p \vee q$）	p 且 q（$p \wedge q$）
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

注：若 $p \wedge q$ 为真，当且仅当 p、q 均为真；若 $p \vee q$ 为真，当且仅当 p、q 中至少有一个为真；若 $\neg p$ 为真，当且仅当 p 为假.

练习

（1）命题 p：5 是 10 的约数，q：5 是 15 的约数，r：5 是 12 的约数，s：5 是 8 的约数，判断命题“非 p”，“非 q”，“p 且 q”，“s 且 q”，“s 或 r”，“p 或 r”的真假. 【参考答案：假，假，真，假，假，真】

（2）下列结论中，正确的是（　　）. 【参考答案：B】

A. 命题 p 是真命题时，命题“p 且 q”一定是真命题

B. 命题“p 且 q”是真命题时，命题 p 一定是真命题

C. 命题“p 且 q”是假命题时，命题 p 一定是假命题

D. 命题 p 是假命题时，命题“p 且 q”不一定是假命题

2.3 常见结论的否定形式

原结论	反设词
是	不是
都是	不都是
大于	不大于
小于	不小于
对所有 x 成立	存在某 x 不成立
对任何 x 不成立	存在某 x 成立
至少有一个	一个也没有
至多有一个	至少有两个
至少有 n 个	至多有 $(n-1)$ 个
至多有 n 个	至少有 $(n+1)$ 个
p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

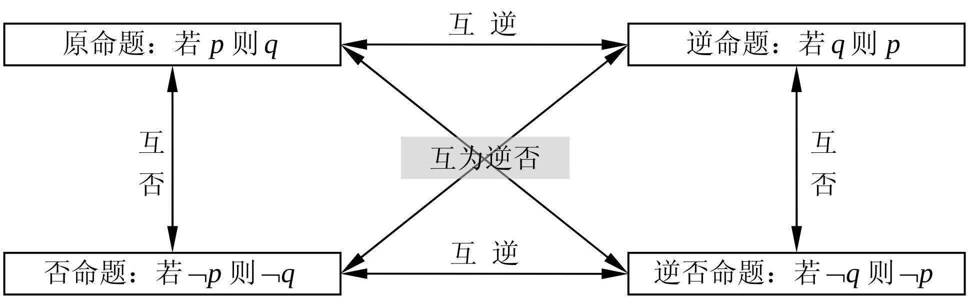
练习

（1）命题“2 和 3 都不是偶数”的否定形式为（　　）. 【参考答案：A】

A. 2 和 3 至少有一个是偶数　　B. 2 和 3 至少有一个是偶数

C. 2 是偶数，3 不是偶数　　D. 2 和 3 都是偶数

2.4 四种命题的相互关系



注：

（1）四种命题反映出命题之间的内在联系，要注意结合实际问题，理解其关系（尤其是两种等价关系）的产生过程，关于逆命题、否命题与逆否命题，也可叙述为：

①交换命题的条件和结论，所得的新命题就是原来命题的逆命题；

②同时否定命题的条件和结论，所得的新命题就是原来的否命题；

③交换命题的条件和结论，并且同时否定，所得的新命题就是原命题的逆否命题.

（2）四种命题的真假性之间的关系如下：

①两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

②两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有必然关系.

练习

（1）若 p 的逆命题是 q，r 是 q 的否命题，则 p 是 r 的_________命题. 【参考答案：逆否】

（2）一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中，(　　). 【参考答案：B】

A. 真命题的个数一定是奇数

B. 真命题的个数一定是偶数

C. 真命题的个数可能是奇数也可能是偶数

D. 上述判断都不正确

（3）命题“不等式 $x^2+x-6>0$ 的解是 $x<-3$ 或 $x>2$”的逆否命题是_________. 【参考答案：若 $-3\le x\le 2$，则 $x^2+x-6\le 0$】

2.5 否命题与非命题的区别

（1）否命题“$\neg p\Rightarrow\neg q$”，非命题（也叫命题的否定）是“$\neg p$”，用文字即叙述为：“否命题”既否定其条件，又否定其结论；而“非命题”只否定命题的结论.

（2）原命题若为真命题，否命题可真可假，但非命题一定是假命题.

2.6 全称量词与特称量词

（1）全称量词用“$\forall$”.

（2）特称量词用“$\exists$”.

2.7 充分条件与必要条件

（1）若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

（2）若 $q\Rightarrow p$ 且 $p\nRightarrow q$，则 p 是 q 的必要不充分条件.

（3）若 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件.

练习

（1）指出下列语句中，p 是 q 的什么条件？

①p：$x=2$，q：$x^2-5x+6=0$；②p：$A\cup B=A$，q：$A\cap B=B$.

【参考答案：① p 是 q 充分不必要条件；② p 是 q 的充要条件】

2.8 集合与充分必要条件

（1）若集合 $P\subseteq Q$，则 P 是 Q 的充分条件.

（2）若集合 $Q\subseteq P$，则 P 是 Q 的必要条件.

（3）若集合 $P\subset Q$，则 P 是 Q 的充分不必要条件.

（4）若集合 $Q\subset P$，则 P 是 Q 的必要不充分条件.

（5）若集合 $P=Q$，则 P 是 Q 的充要条件.

（6）若集合 $P\not\subseteq Q$ 且 $Q\not\subseteq P$，则 P 是 Q 的非充分非必要条件.

练习

（1）命题“$x\in M$ 或 $x\in P$”是“$x\in M\cap P$”的（　　）. 【参考答案：B】

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2.9 判断充要条件的常用方法

（1）定义法.

（2）逆否法.

（2）集合法.

练习

（1）对于集合 A、B，使 $A\bigcap B=B$ 成立的一个充分不必要条件是（　　）. 【参考答案：C】

A. $A\subseteq B$　　B. $B\subseteq A$　　C. $A=B$　　D. $A\neq B$

2.10 证明充要条件

证明问题“p 的充分必要条件是 q”，或表述为“q 是 p 的充分必要条件”，须分别证必要性（$p\Rightarrow q$）和充分性（$q\Rightarrow p$）.

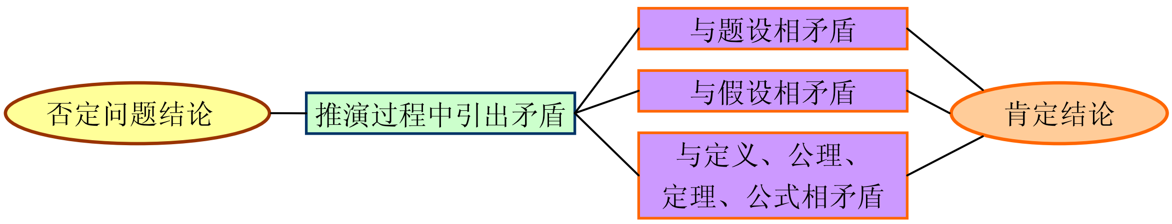
练习

（1）求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$. 【参考答案：略】

2.11 反证法

（1）反证法：先假设原命题的结论的反面成立，经过推理得出矛盾，从而判断假设错误，肯定原命题正确.

（2）反证法推证问题模式框图



（3）反证法根据命题否定的结论的情况多少，可分为下面两种

①归谬法：如果命题否定的结论只有一种情况，那么只需把这种情况否定，就能肯定原命题的结论成立.

②穷举法：如果命题否定的结论不止一种情况，那么就必须把它的所有可能情况一一否定，才能肯定原命题的结论成立.

（4）可用反证法证明的数学命题类型

①结论是否定形式的命题；

②结论是以至多、至少、唯一等形式给出的命题；

③结论的反面是较明显或较易证明的命题；

④用直接法证明困难的命题.

（5）用反证法证明命题的一般步骤为：

①假设命题的结论不成立，即假设命题结论的反面成立；

②从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾；

③由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

练习

（1）已知函数 $f(x)$ 满足下列条件：① $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$；② $f(xy)=f(x)+f(y)$；③ $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$. 试

证：$\dfrac{1}{4}$不在$f(x)$的定义域内.

【解析】本题主要考查利用函数的性质求值和反证法.

假设$\dfrac{1}{4}$在$f(x)$的定义域内，则$f\left(\dfrac{1}{4}\right)$有意义，且$f\left(\dfrac{1}{4}\right)\in[-1,1]$.

又由题设，得$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\notin[-1,1]$，这与$f\left(\dfrac{1}{4}\right)\in[-1,1]$矛盾.

故假设不成立，从而$\dfrac{1}{4}$不在$f(x)$的定义域内.

第三章 函　数

※本章内容※

公式定理及常见规律

3.1 映射与函数

1. 映射的定义

一般地，设 A、B 是两个集合，如果按照对应法则 f，对于集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，那么这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作 f：$A\to B$. 相应有原项与象等概念.

注：映射 f：$A\to B$，必须确保 A 中元素的任意性和 B 中与之对应元素的惟一性，如：一对一、多对一、允许 B 中有元素无原项.

练习

（1）下列从集合到集合的对应为映射的是（　　）. 【参考答案：B】

A. $A=B=N^*$，对应法则 f： $x\to y=|x-3|$

B. $A=R$，$B=\{0,1\}$，对应法则 f： $x\to y=\begin{cases}1, & (x\geq 0)\\ 0, & (x<0)\end{cases}$

C. $A=B=R$，对应法则 f： $x\to y=\pm\sqrt{x}$

D. $A=B$，$B=\{x\in \mathbf{R}|x>0\}$，对应法则 f： $x\to y=\log_2 x^2$

（2）设 (x,y) 在映射 f 下的象是 $\left(\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x-y}{2}\right)$，则 $(-5,2)$ 在 f 下的原象是________. 【参考答案：$(-3,-7)$】

2. 映射的个数

集合 A 中有 m 个元素，集合 B 中有 n 个元素，则可以构造 n^m 个从集合 A 到集合 B 的映射. 说明：A 中的每个元素都独立的有 n 中对应方式.

练习

（1）若 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c\}$，问：A 到 B 的映射有_________个，B 到 A 的映射有_________个.

【参考答案：3^4，4^3】

（2）若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$，则 A 到 B 的一一映射有_________个. 【参考答案：6】

3. 函数的定义

函数是指两个非空数集 A、B 之间的一种对应关系，它要求集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有惟一确定的数 $f(x)$ 与之对应.

练习

（1）函数 f：$\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$，满足 $f(f(x))=f(x)$，则这样的函数共有_________个. 【参考答案：10】

4. 函数三要素

（1）定义域.

（2）值域.

（3）对应法则.

两个函数为同一个函数要求函数三要素是一样的，而与函数选择的表示自变量的字母是无关的.

练习

（1）下列各组函数中，表示同一函数的是（　　）. 【参考答案：C】

A. $y=x$，$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　　　B. $y=|x|$，$y=\sqrt[3]{x^3}$

C. $y=x|x|$，$y=\begin{cases}x^2 & (x\ge 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$　　　　D. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$y=x+1$

3.2 函数表示法

1. 函数表示法

（1）列表法.

（2）解析法.

（3）图像法.

2. 求函数表达式的方法

（1）待定系数法.

练习

（1）已知 $f(f(x))=9x+8$，且 $f(x)$ 是一次函数，求 $f(x)$.

【解析】设 $f(x)=kx+b$，$f(f(x))=k^2x+kb+b=9x+8\Rightarrow\begin{cases}k^2=9\\ kb+b=8\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}k=3\\ b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-3\\ b=-4\end{cases}$，$\therefore$ $f(x)=3x+2$ 或 $f(x)=-3x-4$.

（2）换元法.

已知 $f(g(x))=h(x)$，求 $f(x)$ 时，可设 $g(x)=t$，从中解出 $x=x(t)$，代入 $h(x)$ 进行换元，便可求解.

练习

（1）已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】设 $t=x+\dfrac{1}{x}$，$\therefore f(t)=t^2-2$，$\therefore f(x)=x^2-2$.

（3）拼凑法（构造法）.

练习

（1）已知 $f\left(\sqrt{x}+1\right)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】$f\left(\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}+1-1=\left(\sqrt{x}+1\right)^2-1$，$\therefore f(x)=x^2-1$.

（4）解方程组法.

解决类似 $f(-x)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 结构的等式.

练习

（1）已知 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x$，求 $f(x)$.

【解析】用 $\dfrac{1}{x}$ 替换 x，得 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=2\cdot\dfrac{1}{x}$，两式消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 即得 $f(x)=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3x}$.

（5）直接法.

根据实际问题建立函数关系式.

3.3 函数的定义域

1. 函数定义域的求解

（1）分式的分母 $\neq 0$.

练习

（1）求 $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域. 【参考答案：$x\in\{x|x<0\}$】

（2）偶次方根的被开方数 ≥ 0.

练习

（1）求① $y=\sqrt{9-x^2}$；② $y=\sqrt[3]{4x+8}$ 的定义域. 【参考答案：① $x\in[-3,3]$；② $x\in\mathbf{R}$】

（3）对数的真数 >0，底数 >0 且底数 $\neq 1$.

练习

（1）求 $\log_{\sin x}\cos x$ 的定义域. 【参考答案：$x\in\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$】

（4）零次幂的底数$\neq 0$.

练习

（1）求$y=(5x-4)^0$的定义域. 【参考答案：$x\in\left\{x\middle|x\neq\frac{4}{5}\right\}$】

（5）$y=\tan x$中$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$y=\cot x$中$x\neq k\pi$，其中$k\in\mathbf{Z}$.

练习

（1）求$y=|\tan x|$的定义域. 【参考答案：$x\in\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$】

（6）已知$f(x)$的定义域为D，求函数$f(g(x))$的定义域则只需求$g(x)\in D$.

练习

（1）已知$f(x)$的定义域为$[1,2]$，求$f(x^2+1)$的定义域.

【解析】由题意可得$1\le x^2+1\le 2$，则可得$0\le x^2\le 1$，$\therefore -1\le x\le 1$，$\therefore f(x^2+1)$的定义域为$x\in[-1,1]$.

（7）已知$f(g(x))$的定义域，求函数$f(x)$的定义域则只需求$g(x)$的值域.

练习

（1）已知$f(x^2+1)$的定义域为$[1,2]$，求$f(x)$的定义域. 【参考答案：$x\in[2,5]$】

（8）由实际问题确定的函数，其定义域要受实际问题的约束.

3.4 函数的值域

注：求函数的值域首先要挖掘隐含的定义域.

1. 函数值域的求法

（1）图像法：通过函数图像求纵坐标的取值范围.

练习

（1）求$y=-x^2+x+2$，$x\in[0,2]$的值域. 【参考答案：画二次函数图像，$y\in\left[0,\frac{9}{4}\right]$】

（2）单调性法：根据单调性及定义域求值域.

练习

（1）求$y=x^2-\sqrt{2-x}$，$x\in[0,1]$的值域. 【参考答案：当$x\in[0,1]$，y的值随着x的增大而增加，$\therefore y\in\left[-\sqrt{2},0\right]$.】

（3）配方法：主要适用于二次函数或可化为二次函数的函数，要特别注意自变量的范围.

练习

（1）求$y=-x^2+x+2$的值域. 【参考答案：$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，$\therefore y\in\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$】

（4）对于复合函数从内逐层向外层递推.

练习

（1）求 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+2x-4}$ 的值域. 【参考答案：先计算 $t=-x^2+2x-4$ 的值域为 $(-\infty,-3]$，$\therefore$ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$（$t\in(-\infty,-3]$）的值域为 $[8,+\infty)$.】

（5）换元法（如代数换元、三角换元）：要注意新变量的取值范围.（学完三角函数后掌握）

练习

（1）求 $y=-\sin^2 x-3\cos x+3$ 的值域. 【参考答案：$t=\cos x$，$y=t^2-3t+2$，$t\in[-1,1]$，$\therefore$ $y\in[0,6]$】

（2）求 $y=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x$ 的值域. 【参考答案：$t=\sin x+\cos x$，$\therefore$ $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，$\therefore$ $y=t^2+t-1$，$t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，$\therefore$ $y\in\left[-\frac{5}{4},1+\sqrt{2}\right]$】

（3）求 $y=x-\sqrt{1-x^2}$ 的值域. 【参考答案：$x=\cos\theta$，$\theta\in[0,\pi)$，$y=\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$（$\theta\in[0,\pi)$），$\therefore$ $y\in\left[-\sqrt{2},1\right]$. 若设 $x=\sin\theta$，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$】

（4）求 $y=2x-3+3\sqrt{13-4x}$ 的值域. 【参考答案：设 $t=\sqrt{13-4x}$，$\therefore$ $x=\frac{13-t^2}{4}$，$\therefore$ $y=2\cdot\frac{13-t^2}{4}-3+3t=-\frac{t^2}{2}+3t+\frac{7}{2}$（$t\geq 0$），$\therefore$ $y\in(-\infty,8]$】

（6）利用式子或变量的有界性：根据某式子有界性，反解求这个式子，从而求函数值域.（学完三角函数后掌握）

练习

（1）求 $y=\frac{\sin x+1}{\sin x-2}$ 的值域. 【参考答案：$\sin x=\frac{2y+1}{y-1}\in[-1,1]$，$\therefore$ $y\in[-2,0]$】

（2）求 $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}$ 的值域. 【参考答案：$10^{2x}=\frac{y+1}{y-1}>0$，$\therefore$ $y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$】

（7）反函数法：求反函数的定义域.

（8）几何法：化成解析几何问题（比如斜率、距离）解决，也称为数形结合法.（学完解析几何后掌握）

练习

（1）求 $y=\frac{\sin x+1}{\cos x-2}$ 的值域. 【参考答案：把 y 看成 $(\cos x,\sin x)$ 与 $(2,-1)$ 的斜率的取值范围，$\therefore$ $y\in\left[-\frac{4}{3},0\right]$】

（2）求 $y=\frac{3\sin x+3}{\cos x-2}$ 的值域. 【参考答案：$\frac{y}{3}=\frac{\sin x+1}{\cos x-2}$，把 $\frac{y}{3}$ 看成 $(\cos x,\sin x)$ 与 $(2,-1)$ 的斜率的取值范围 $\therefore$ $\frac{y}{3}\in\left[-\frac{4}{3},0\right]$，$\therefore$ $y\in[-4,0]$】

（9）不等式法：利用平均值定理求最值时，一定要满足条件“一正二定三相等”．（学完不等式后掌握）

练习

（1）求 $y=x+\frac{2}{x}$，$x>0$ 的值域．【参考答案：$\because x>0$，$y=x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$（当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立），$\therefore y\in\left[2\sqrt{2},+\infty\right]$】

（10）导数法：利用函数的导数求函数的极值，进而求最值．（学完导数后掌握）

练习

（1）求 $y=x+\frac{3}{x}$，$x\in[2,+\infty)$ 的值域．【参考答案：$x\in[2,+\infty)$，$y'=1-\frac{3}{x^2}>0$，$\therefore y=x+\frac{3}{x}$（$x\in[2,+\infty)$）为增函数，$\therefore y\in\left[3\frac{1}{2},+\infty\right)$】

（11）判别式法：适用于可化为关于 x 的二次方程．由 $\Delta\geq 0$ 且首项不为 0 求出 y 的最值，注意要检验这个最值在定义域内是否有相应的 x 值．

练习

（1）求 $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ 的值域．【参考答案：$y\cdot\left(x^2+1\right)=x^2+x+1$，$\therefore (y-1)x^2-x+y-1=0$，当 $y=1$ 时，$x=0$，有解；当 $y\neq 1$ 时，$\Delta\geq 0$，$\therefore y\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$】

（12）分离常数法．

练习

（1）求 $y=\frac{4-x}{2-x}$（$x\in[-3,-2]$）的值域．【参考答案：$y=\frac{2-x+2}{2-x}=1+\frac{2}{2-x}$，$x\in[-3,-2]$，$x\nearrow$，$y\nearrow$，$\therefore y\in\left[\frac{7}{5},\frac{3}{2}\right]$】

（2）求 $y=\frac{3x^2+2}{x^2+1}$ 的值域．【参考答案：$y=\frac{3\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}=3-\frac{1}{x^2+1}$，$x^2\nearrow\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}\searrow\Rightarrow-\frac{1}{x^2+1}\nearrow\Rightarrow y\nearrow$，由于 $x^2\in[0,+\infty)$，$\therefore y\in[2,3)$】

（13）直观观察法．

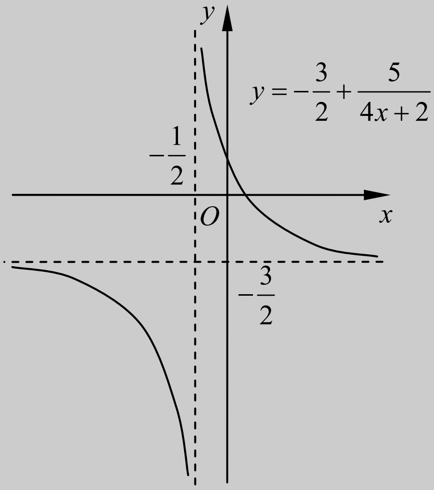
2. 两种特殊函数

（1）函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$（$c\neq 0$，$ad\neq bc$）．

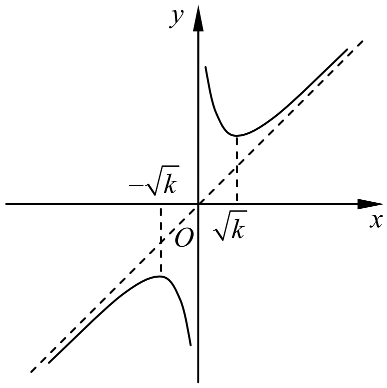
双曲线中心为 $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$，渐近线为 $\begin{cases}x=-\frac{d}{c}\\ y=\frac{a}{c}\end{cases}$；值域为 $y\neq\frac{a}{c}$ 的一切实数．

练习

（1）作函数 $y=\dfrac{1-3x}{2x+1}$ 的图像．【参考答案：$y=\dfrac{-\frac{3}{2}(2x+1)+\frac{5}{2}}{2x+1}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4x+2}$，图像如下图】



（2）“对勾函数” $y=x+\dfrac{k}{x}$（$k>0$）（又称双钩函数，Nike 函数）．（学完导数后掌握）



练习

（1）求 $y=x+\dfrac{1}{x}$（$x>0$）的值域．【参考答案：$\because x>0$，$y=x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，$\therefore y\in[2,+\infty)$】

（2）求 $y=x+\dfrac{1}{x}$（$x>3$）的值域．【参考答案：$\because x>3$，$y'=1-\dfrac{1}{x^2}>0$，$\therefore y$ 在 $x\in(3,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore y>3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$，$\therefore y\in\left(\dfrac{10}{3},+\infty\right)$】

3.5 函数的单调性

注：函数单调性的确定首先要确定定义域．

1. 函数单调性的定义

区间 D 上任意两个值 x_1、x_2，若 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 为 D 上增函数；若 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 为 D 上减函数．

练习

（1）用单调性定义证明 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数．

【解析】设 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(-x_1^3+1\right)-\left(-x_2^3+1\right)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)\left(x_2^2+x_1x_2+x_1^2\right)$

$=(x_2-x_1)\left(x_2^2+x_1x_2+\frac{1}{4}x_1^2+\frac{3}{4}x_1^2\right)=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]<0$.

$\therefore$ $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数.

2. 证明函数单调性的方法

（1）定义法（基本方法）. 一般步骤是：①取值：设 x_1、x_2 为所给区间 D 上的任意两个值，且 $x_1 < x_2$；②作差（正值可作商）；③变形；④定号；⑤结论.

（2）导数法. 一般步骤是：①求导数 $f'(x)$；②判断 $f'(x)$ 在区间 I 上的符号；③结论：$f'(x)>0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上增函数，$f'(x)<0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上减函数.（学完导数后掌握）

练习

（1）求 $f(x)=x^3+2x^2+x+4$ 的单调区间.【参考答案：用导数法，单调增区间为 $(-\infty,-1)$，$\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$，单调减区间为 $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$】

（3）图像法.

练习

（1）求 $f(x)=x^2-2|x|+1$ 的单调区间.【参考答案：根据图像可知，单调增区间为 $[-1,0]$，$[1,+\infty]$；单调减区间为 $(-\infty,-1]$，$[0,1]$】

（2）若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围.【参考答案：$a\le -3$】

（4）利用已知函数的单调性.

练习

（1）求 $y=2x-1-\sqrt{13-4x}$ 的单调区间.【参考答案：$y_1=2x-1$ 为单调增区间，$y_2=-\sqrt{13-4x}$ 为定义域内的单调增函数，$\therefore$ $y=y_1+y_2$ 为单调增函数，而定义域为 $\left(-\infty,\frac{13}{4}\right]$，$\therefore$ 单调增区间为 $\left(-\infty,\frac{13}{4}\right]$】

（5）利用复合函数单调性的结论.

练习

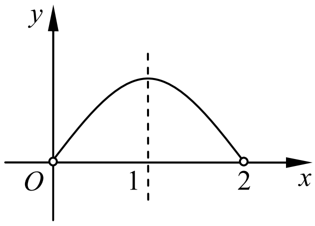
（1）求 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x}$ 的单调区间.【参考答案：$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^u$ 为减函数，而 $u=-x^2+3x$ 的单调增区间为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$，单调减区间为 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，$\therefore$ $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x}$ 的单调增区间为 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，减区间为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$.】

3. 复合函数 $f[g(x)]$ 在公共定义域上的单调性

（1）若 f 与 g 的单调性相同，则 $f[g(x)]$ 为增函数.

（2）若 f 与 g 的单调性相反，则 $f[g(x)]$ 为减函数.

以求 $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(-x^2+2x\right)$ 的单调区间为例. 设 $u=-x^2+2x$，由 $u>0$，则 $0<x<2$，且 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 为定义域内的减函数，而 $u=-(x-1)^2+1$（$0<x<2$）的图像如下图所示：



当 $x\in(0,1]$ 时，$u=u(x)$ 为增函数，而 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 为减函数，∴ $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(-x^2+2x\right)$ 的减区间为 $(0,1]$.

当 $x\in[1,2)$ 时，$u=u(x)$ 为减函数，而 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 为减函数，∴ $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(-x^2+2x\right)$ 的增区间为 $[1,2)$.

练习

（1）求 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\sqrt{x^2+3x}}$ 的单调区间. 【参考答案：单调增区间：$[0,+\infty)$；单调减区间：$(-\infty,-3]$.】

4. 在公共定义域内，函数 $f(x)\pm g(x)$ 的单调性

（1）增函数 $f(x)$ + 增函数 $g(x)$ 是增函数.

（2）减函数 $f(x)$ + 减函数 $g(x)$ 是减函数.

（3）增函数 $f(x)$ − 减函数 $g(x)$ 是增函数.

（4）减函数 $f(x)$ − 增函数 $g(x)$ 是减函数.

5. 函数单调性的应用

（1）比较大小.

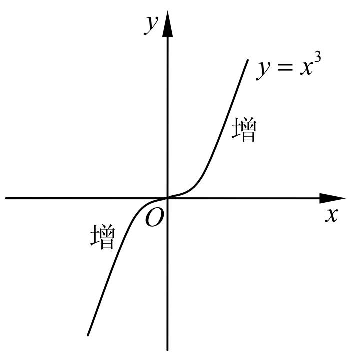
（2）求函数的值域或最值.

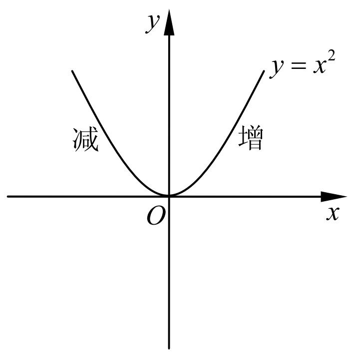
（3）解、证不等式.

（4）作函数的图像.

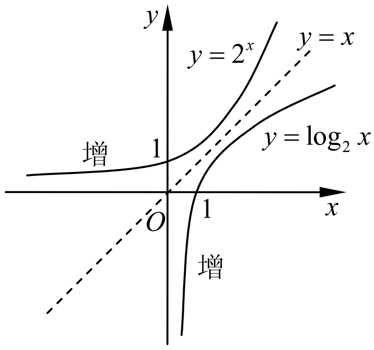
6. 单调性的其他性质

（1）奇函数在关于原点对称的区间上单调性相同；偶函数在关于原点对称的区间上单调性相反.





（2）互为反函数的两个函数有相同的单调性.



（3） $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数，但 $\dfrac{1}{f(x)}$ 、 $f^2(x)$ 、 $|f(x)|$ 的增减性不能随之确定.

（4）与 $f(x)$ 具有相同单调性的有： $f(x)+c$ 、 $\sqrt{f(x)}$ （ $f(x)\geq 0$ ）、 $cf(x)$ （ $c>0$ ）；与 $f(x)$ 具有相反单调性的有： $\dfrac{1}{f(x)}$ （ $f(x)\neq 0$ ）、 $cf(x)$ （ $c<0$ ）.

3.6 函数的奇偶性

判断奇偶性，首先注意定义域必须关于原点对称.

1. 函数奇偶性的判定

（1） $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 为奇函数.

（2） $f(-x)=f(x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 为偶函数.

注：判断函数是否为奇偶函数必须满足两个条件：①定义域关于原点对称；② $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)\pm f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1$ 等，否则函数在指定的区间内不具备单调性.

练习

（1）判断下列函数的奇偶性：

① $f(x)=\log_2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$； ② $f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$； ③ $f(x)=\begin{cases}\lg\dfrac{4^x}{4^x+1}(x>0)\\ 0(x=0)\\ \lg\left(4^x+1\right)(x<0)\end{cases}$.

【参考答案：①奇函数；②偶函数；③偶函数.】

2. 函数奇偶性运算

（1）奇 + 奇=奇；奇 − 奇=奇；奇 × 奇=偶；奇 ÷ 奇=偶.

（2）偶 + 偶=偶；偶 − 偶=偶；偶 × 偶=偶；偶 ÷ 偶=偶.

（3）奇 + 偶=？；奇 − 偶=？；奇 × 偶=奇；奇 ÷ 偶=奇.

注：？表示非奇非偶或不能判定.

3. 奇偶性的其他性质

（1）任一个定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 一定可以表示成一个奇函数和一个偶函数之和，即

$f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.（其中， $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数， $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数）

（2）多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的奇偶性：

①多项式 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项（即奇数项）的系数全为零；

②多项式 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项（即偶数项）的系数全为零.

练习

（1）已知奇函数 $f(x)=x^3+mx^2+5x$，求 m．【参考答案：$m=0$】

（3）$y=f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)=f\left(|x|\right)$.

练习

（1）$x>0$，$f(x)$ 为增函数，且 $f(x)$ 为偶函数，求 $f(2x)<f(3x-1)$ 的解集.【参考答案：$f\left(|2x|\right)<f\left(|3x-1|\right)$ 可知 $|2x|<|3x-1|$，即 $x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{5}\right)\cup(1,+\infty)$．】

（4）奇函数 $y=f(x)$ 在原点有定义 $\Leftrightarrow$ $f(0)=0$.

练习

（1）若奇函数 $f(x)=\dfrac{x^3+b}{x^2+1}$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 有意义，求 b．【参考答案：$b=0$】

（5）$y=f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 的图像关于原点对称；$y=f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

（6）$y=f(x+a)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x+a)=f(-x+a)$；$y=f(x+a)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x+a)=-f(-x+a)$.

4. 根据奇偶性求解析式

以例题说明：$f(x)$ 为定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$，求 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的解析式.

解：令 $x\in(-1,0)$，则 $-x\in(0,1)$，$f(-x)=\dfrac{2^{-x}}{4^{-x}+1}$.

又 $f(x)$ 为奇函数，∴ $f(x)=-\dfrac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=-\dfrac{2^x}{1+4^x}$.

又 $f(0)=0$，∴ $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2^x}{4^x+1},x\in(-1,0)\\0,x=0\\\dfrac{2^x}{4^x+1},x\in(0,1)\end{cases}$.

练习

（1）已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的表达式为_________.【参考答案：$f(x)=-x^2-2x$】

3.7 函数的周期性

1. 函数周期性的定义

（1）对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的任何值时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么就称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 为一个周期.

（2）T 是 $y=f(x)$ 的周期，则 kT（$k\in\mathbf{Z}$，$k\neq0$）也是它的周期.

（3）对于函数 $y=f(x)$ 定义域内的每一个 x，若 $f(kx+T)=f(kx)$（$k,T\neq0$），则函数 $y=f(x)$ 的周

期为 $\dfrac{T}{k}$.

注：

①并不是所有的周期函数都有最小正周期，如 $f(x)=\begin{cases}1, x\in\{\text{rational number}\}\\0, x\in\{\text{irrational number}\}\end{cases}$，明显地，任意有理数均为 $f(x)$ 的周期；

②周期函数的定义域是无界的；

③设 $f(x)$ 是非常数的周期函数，且定义域为 D，如 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 有最小正周期.

2. 几个函数方程的一个周期（约定 $a>0$）（着重了解前 2 个）

（1） $f(x)=f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 $T=a$.

（2）$f(x+a)=f(x-a)$，或 $f(x)+f(x+a)=0$，或 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$（$f(x)\neq 0$），或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$（$f(x)\neq 0$），则 $f(x)$ 的周期 $T=2a$.

注：$f(x)+f(x+a)=0$ 为例证明. $\because f(x+a)=-f(x)$，$\therefore f(x+a+a)=-f(x+a)=-(-f(x))=f(x)$，$\therefore$ 周期 $T=2a$.

（3） $f(x)=1-\dfrac{1}{f(x+a)}$ （$f(x)\neq 0$），则 $f(x)$ 的周期 $T=3a$.

（4）$f(x_1+x_2)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$ 且 $f(a)=1$（$f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1$，$0<|x_1-x_2|<2a$），则 $f(x)$ 的周期 $T=4a$.

（5）$f(x)+f(x+a)+f(x+2a)+f(x+3a)+f(x+4a)=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则 $f(x)$ 的周期 $T=5a$.

练习

（1）设 $f(x+3)=-\dfrac{1}{f(x)}$，求 $f(x)$ 的一个周期. 【参考答案：$T=6$】

3.8 函数的反函数

1. 反函数的定义和计算

反函数存在的条件：原函数为一一对应函数.

互为反函数的两个函数的关系：$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.

注：求 $y=f(x)$ 为反函数时，将 x、y 互换，根据原函数的定义域求出值域作为反函数的定义域.

练习

（1）求下列函数的反函数:

① $y=x^2+2x-1$，$x\in[1,2]$；② $y=-\sqrt{x^2-1}$，$x\geq 1$.

【参考答案：① $y=\sqrt{x+2}-1$，$x\in[2,7]$；② $y=\sqrt{1+x^2}$，$x\leq 0$】

2. 反函数的判定

（1）定义域上的单调函数必有反函数.

（2）周期函数不存在反函数.

（3）定义域为非单元素的偶函数不存在反函数.

3. 反函数的性质

（1）若 (a,b) 在 $y=f(x)$ 上，则 (b,a) 在其反函数上.

（2）奇函数的反函数也是奇函数.

（3）原函数与反函数具有相同的单调性.

（4）函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

练习

（1）若函数 $y=\dfrac{ax+1}{4x+5}$（$a\neq\dfrac{4}{5}$）的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $a=$__________.【参考答案：-5】

（5）反函数的定义域和值域分别是原函数的值域和定义域.

练习

（1）设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$，则 $f^{-1}(0)=$__________.【参考答案：1】

4. 反函数的其他注意事项

（1）若函数 $y=f(kx+b)$ 存在反函数，则其反函数为 $y=\dfrac{1}{k}\left[f^{-1}(x)-b\right]$，并不是 $y=f^{-1}(kx+b)$.

（2）$y=f^{-1}(kx+b)$ 是 $y=\dfrac{1}{k}\left[f(x)-b\right]$ 的反函数.

3.9 函数的对称性

1. 函数奇偶性与对称性

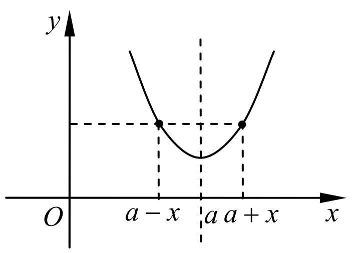
（1）在对称区间上，奇函数的单调性相同，偶函数的单调性相反.

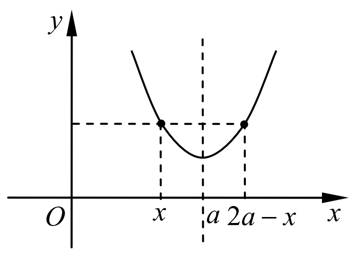
（2）奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

（3）如果一个函数的图像关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图像关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

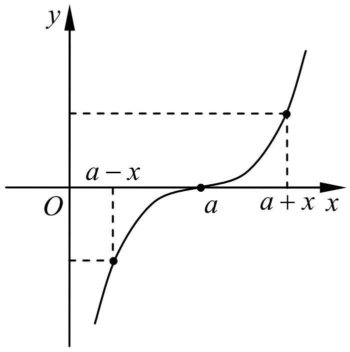
2. 函数对称性的其他性质

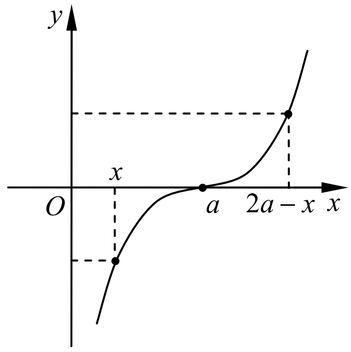
（1）对于函数 $y=f(x)$（$x\in\mathbf{R}$），$f(a+x)=f(a-x)$（或写成 $f(x)=f(2a-x)$）恒成立，则函数的对称轴是直线 $x=a$.



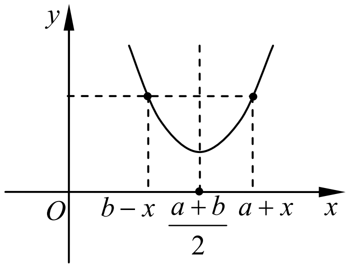


（2）若 $f(a+x)=-f(a-x)$（或写成 $f(x)=-f(2a-x)$），则函数的图像关于点 $(a,0)$ 对称.

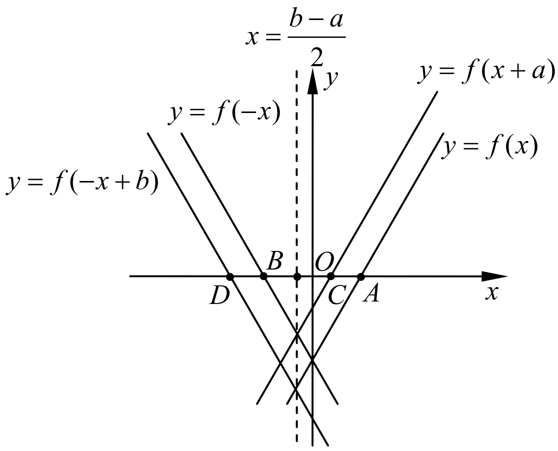




（3）对于某个函数 $y=f(x)$（$x\in\mathbf{R}$），$f(a+x)=f(b-x)$ 恒成立，则函数的对称轴是直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$.



（4）两个函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 对称（注意与（3）的差别）.



注：函数 $y=f(mx+a)$ 与函数 $y=f(b-mx)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2m}$ 对称.

3.10 函数图像的变换

1. 平移变换

（1）水平平移.

①函数 $y=f(x+a)$（$a>0$）的图像是把函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴向左平移 a 个单位得到的.（左加）

②函数 $y=f(x-a)$（$a>0$）的图像是把函数 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴向右平移 a 个单位得到的.（右减）

（2）竖直平移.

①函数 $y=f(x)+a$（$a>0$）的图像是把函数 $y=f(x)$ 的图像沿 y 轴向上平移 a 个单位得到的.（上加）

②函数 $y=f(x)-a$ （$a>0$）的图像是把函数 $y=f(x)$ 的图像沿 y 轴向下平移 a 个单位得到的.（下减）

2. 对称变换

（1）函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图像关于直线 $x=0$ （y 轴）对称.

（2）函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f(x)$ 的图像关于直线 $y=0$ （x 轴）对称.

（3）函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=-f(-x)$ 的图像关于坐标原点对称.

（4）函数 $y=f(a+x)$ 与函数 $y=f(a-x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称.

（5）函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(2a-x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称.

（6）$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

3. 伸缩变换

（1）$y=af(x)$ （$a>0$）的图像，可将 $y=f(x)$ 的图像上的每一点的纵坐标伸长（$a>1$）或缩短（$0<a<1$）到原来的 a 倍，横坐标不变.

（2）$y=f(ax)$ （$a>0$）的图像，可将 $y=f(x)$ 的图像上的每一点的横坐标伸长（$0<a<1$）或缩短（$a>1$）到原来的 $\frac{1}{a}$ 倍，纵坐标不变.

4. 翻折变换

（1）形如 $y=|f(x)|$，将函数 $y=f(x)$ 的图像在 x 轴下方沿 x 轴翻到 x 轴上方，去掉原 x 轴下方部分，并保留 $y=f(x)$ 在 x 轴以上部分，为函数 $y=|f(x)|$ 的图像.

（2）形如 $y=f(|x|)$，将函数 $y=f(x)$ 的图像在 y 轴右边部分沿 y 轴翻到 y 轴左边替代原 y 轴左边部分并保留 $y=f(x)$ 在 y 轴右边部分，为函数 $y=f(|x|)$ 的图像. 简言之，即先作出 $y=f(x)$ （$x\geq 0$）时的图像，再利用偶函数的特性关于 y 轴对称作出 $y=f(x)$ （$x<0$）时的图像.

5. 函数图像变换一览

平移	横向	$y=f(x)\xrightarrow{\text{左移 } a \text{ 个单位}} y=f(x+a)$，$y=f(x)\xrightarrow{\text{右移 } a \text{ 个单位}} y=f(x-a)$ （左加右减）
	纵向	$y=f(x)\xrightarrow{\text{上移 } b \text{ 个单位}} y=f(x)+b$，$y=f(x)\xrightarrow{\text{下移 } b \text{ 个单位}} y=f(x)-b$ （上加下减）
伸缩	横向	$y=f(x)\xrightarrow{\text{纵坐标不变，横坐标变为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍}} y=f(\omega x)$ （$\omega>0$）
	纵向	$y=f(x)\xrightarrow{\text{横坐标不变，纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y=Af(x)$ （$A>0$）
对称	中心对称	$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于中心 } (a,b) \text{ 对称}} 2b-y=f(2a-x)$

	轴对称	一条曲线	若 $y=f(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 满足 $f(a+x)=f(b-x)$，则 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称. 注：由 $x=\dfrac{(a+x)+(b-x)}{2}$ 解得
		两条曲线	函数 $y=f(a+x)$ 与函数 $y=f(b-x)$ 关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 对称. 注：由 $a+x=b-x$ 解得

6. 分析函数的图像主要观察的对象

（1）图像的上界与下届.

（2）与坐标轴的交点.

（3）图像的对称性、奇偶性.

（4）图像在某段上的变化趋势，即单调性.

（5）图像的变化规律，即周期性.

3.11 抽象函数方程

1. 抽象函数的解法

（1）赋值法：如赋值 $y=-x$、$y=x$、$x=y=1$、$x=y=0$ 等.

（2）结构变换法：如进行变换 $f(x_2)=f\left[(x_2-x_1)+x_1\right]$ 或 $f(x_2)=f\left(\dfrac{x_2}{x_1}\cdot x_1\right)$ 等.

练习

（1）已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x、y 都满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，试判断函数的奇偶性.

【参考答案：奇函数】

（2）已知 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $x>0$ 时，$f(x)<0$，试判断函数 $f(x)$ 的单调性.

【参考答案：减函数】

2. 几个常见的抽象函数方程及其对应函数方程

	可能对应函数	函数特征
正比例函数	$f(x)=cx$（$c\neq 0$）	$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(1)=c$ 或 $f(xy)=xf(y)$
指数函数	$f(x)=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）	$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(1)=a\neq 0$ 或 $f(xy)=f(x)$
对数函数	$f(x)=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）	$f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(a)=1$（$a>0$，$a\neq 1$）或 $f(x^y)=yf(x)$
幂函数	$f(x)=x^a$	$f(xy)=f(x)f(y)$，$f'(1)=a$
余弦函数/正弦函数	$f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$	$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，$f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=1$
余弦函数	$f(x)=\cos x$	$f(x)+f(y)=2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

		或 $f(x)f(y)=\frac{1}{2}\left[f(x+y)+f(x-y)\right]$
正切函数	$f(x)=\tan x$	$f(x\pm y)=\dfrac{f(x)\pm f(y)}{1\mp f(x)f(y)}$

注：遇到抽象函数方程的试题，只能想象它可能对应（相应）函数，切不可认为它就是这个函数.

3.12 幂函数

1. 幂函数 $y=x^a$ （$a\in\mathbf{R}$）的性质

（1）在 $(0,1)$ 上，幂函数中指数越大，函数图像越靠近 x 轴，在 $(1,+\infty)$ 上，幂函数中指数越大，函数图像越远离 x 轴.

（2）幂函数的图像最多只能同时出现在两个象限，如果与坐标轴相交，则交点一定是原点.

2. 幂函数 $y=x^a$ （$a\in\mathbf{R}$）的图像主要分类

（1）当 $a=0$ 时，图像是过 $(1,1)$ 点平行于 x 轴但出去 $(0,1)$ 点的一条断直线.

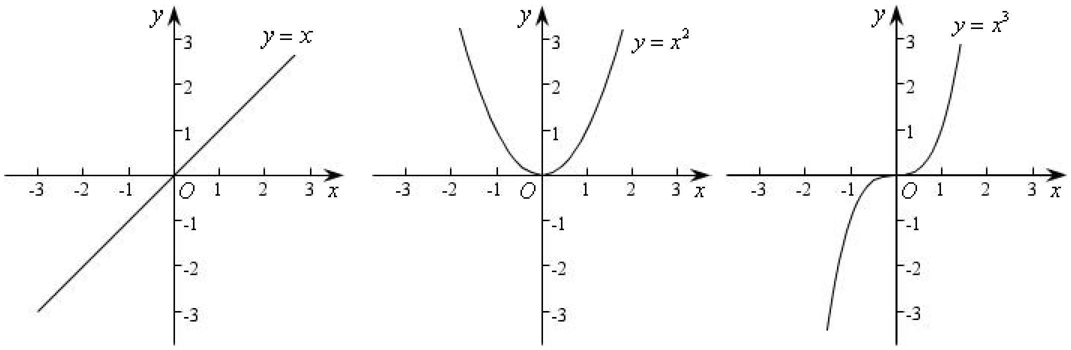
（2）当 a 为正偶数时，幂函数是偶函数，图像过一、二象限及原点.

（3）当 a 为正奇数时，幂函数是奇函数，图像过一、三象限及原点.

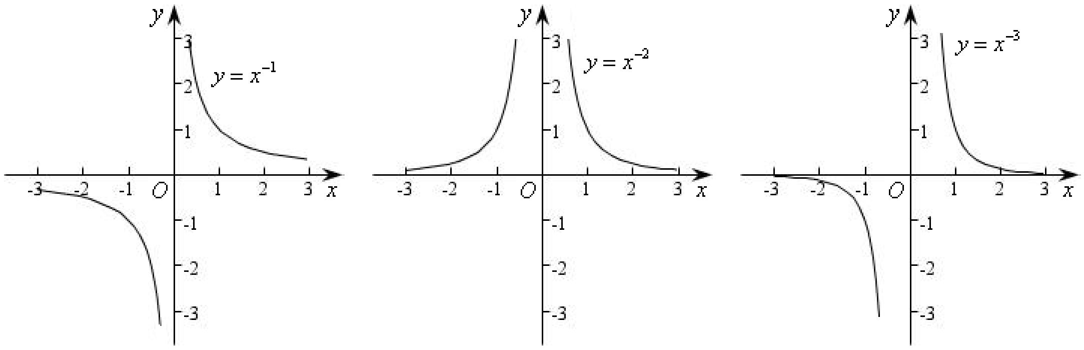
（4）当 a 为负偶数时，幂函数是偶函数，图像过一、二象限，但不过原点.

（5）当 a 为负奇数时，幂函数是奇函数，图像过一、三象限，但不过原点.

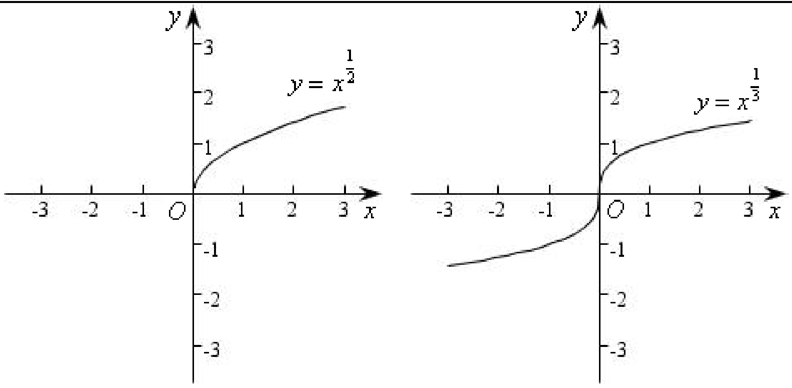
3. 常见幂函数的图像（可用描点法理解）



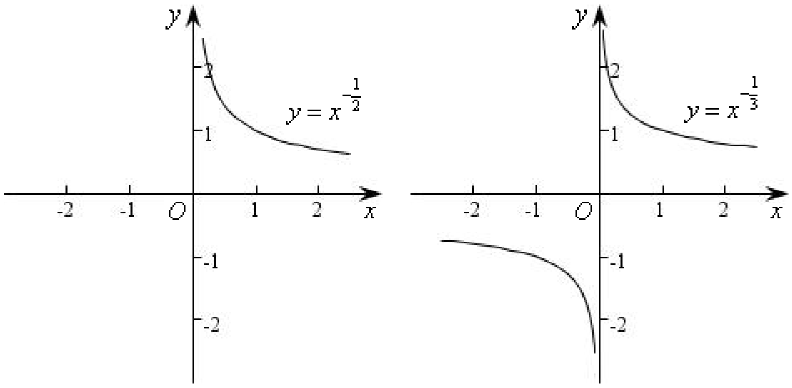
（1）



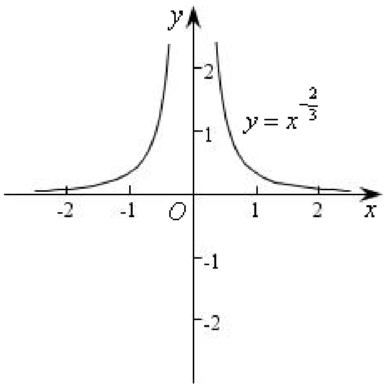
（2）



（3）



（4）



（5）

3.13 指数函数、对数函数

1. 分数指数幂

（1）$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ （$a>0$，$m,n \in \mathbf{N}^*$，且 $n>1$）.

（2）$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ （$a>0$，$m,n \in \mathbf{N}^*$，且 $n>1$）.

2. 根式的性质

（1）$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n} = a$.

（3）当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, & a>0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$.

3. 指数幂的运算性质

（1）$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$（$a>0$，$r,s\in\mathbf{Q}$）.

（2）$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$（$a>0$，$r,s\in\mathbf{Q}$）.

（3）$(ab)^r = a^r b^r$（$a>0$，$r,s\in\mathbf{Q}$）.

注：若$a>0$，p是一个无理数，则a^p表示一个确定的实数. 上述有理指数幂的运算性质，对无理指数幂同样适用.

4. 指数式与对数式的互化

$\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N$（$a>0$，$a\neq 1$，$N>0$）.

5. 对数的换底公式

$\log_a N = \dfrac{\log_m N}{\log_m a}$（$m>0$，$m\neq 1$，$a>0$，$a\neq 1$，$N>0$）.

推论：$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$.

6. 对数恒等式

（1）$a^{\log_a N} = N$.　　（2）$\log_a a^N = N$.

（3）$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$（$a,b>0$，$a\neq 1$，$b\neq 1$）.

（4）$\log_{a^m} b^m = \log_a b$.　　（5）$\log_a b^M = M\log_a b$.

7. 对数的四则运算法则

若$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，则

（1）$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$.

（2）$\log_a \dfrac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$.

（3）$\log_a M^n = n\log_a M$.

8. 对数换底不等式及其推广（学完导数后参考）

若$a>0$，$b>0$，$x>0$，$x\neq \dfrac{1}{a}$，则函数$y=\log_{ax}(bx)$，

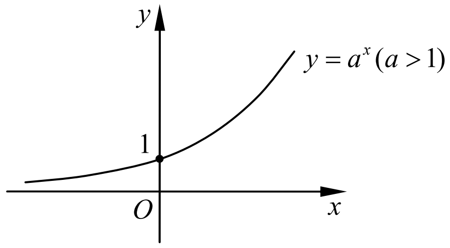
（1）当$a>b$时，在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$和$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上，$y=\log_{ax}(bx)$为增函数（求导可证明）;

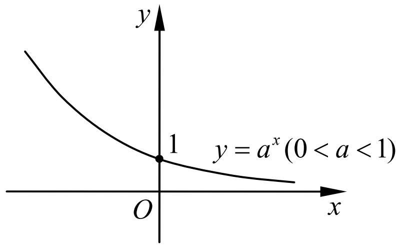
（2）当$a<b$时，在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$和$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上，$y=\log_{ax}(bx)$为减函数（求导可证明）.

推论：设$n>m>1$，$p>0$，$a>0$，且$a\neq 1$，则

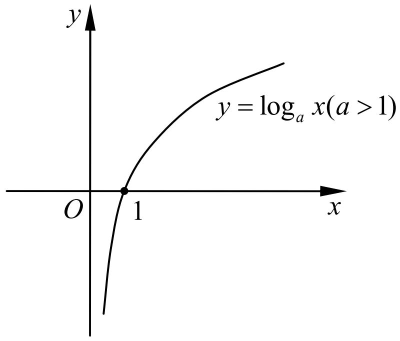
（1）$\log_{m+p}(n+p) < \log_m n$；（2）$\log_a m \log_a n < \left(\log_a \dfrac{m+n}{2}\right)^2$. （仅作参考）

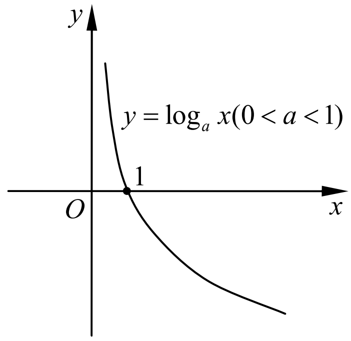
9. 指数函数的图像





10. 对数函数的图像





11. 指数对数函数解题注意事项

（1）指数函数值受到底数大小的变化，因此解题时常对底数a进行讨论.

（2）对数函数值受到底数大小的变化，因此解题时常对底数a进行讨论.

练习

（1）若$\log_a \frac{3}{4}<1$，则a的取值范围是（　　）．【参考答案：D】.

A. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$　　C. $\left(\frac{3}{4},1\right)$　　D. $\left(0,\frac{3}{4}\right)\cup(1,+\infty)$

（2）求函数$y=\sqrt{1-a^x}$（$a>0$）的定义域.【参考答案：$a>1$时，$x\in(-\infty,0]$；$0<a<1$时，$x\in[0,+\infty)$；$a=1$时，$x\in\mathbf{R}$.】

12. 形如$y=a^{f(x)}$（$a>0$，$a\neq1$）的函数的性质

（1）定义域与函数$f(x)$的定义域相同.

（2）先确定函数$u=f(x)$的值域，然后以u的值域作为函数$y=a^u$（$a>0$，$a\neq1$）的定义域，求得函数$y=a^{f(x)}$（$a>0$，$a\neq1$）的值域.

练习

（1）求函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-2x}}$的单调区间和值域.【参考答案：单调增区间$(-\infty,0]$，单调减区间$[2,+\infty)$，值域$(0,1]$】

13. 形如$y=\log_a f(x)$（$a>0$，$a\neq1$）的函数的性质

（1）定义域是$u=f(x)$的定义域与$f(x)>0$的解集的交集.

（2）先确定函数 $u=f(x)$ 的值域，然后以 u 的值域作为函数 $y=\log_a u$（$a>0$，$a\neq 1$）的定义域，求得函数 $y=\log_a f(x)$（$a>0$，$a\neq 1$）的值域.

练习

（1）求函数 $y=\log_2(-x^2-2x+3)$ 的单调区间和值域. 【参考答案：单调增区间 $(-3,-1]$，单调减区间 $[-1,1)$，值域 $(-\infty,2]$】

14. 平均增长率的问题

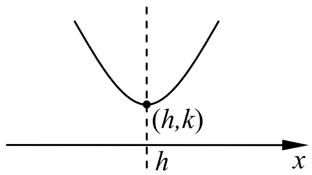
如果原来产值的基础数为 n，平均增长率为 p，则对于时间 x 的总产值 y，有 $y=n(1+p)^x$.

3.14 二次函数

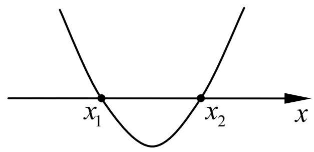
1. 二次函数解析式的三种形式

（1）一般式：$f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）.

（2）顶点式：$f(x)=a(x-h)^2+k$（$a\neq 0$）.



（3）零点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$（$a\neq 0$）.



2. 二次函数的图像与性质

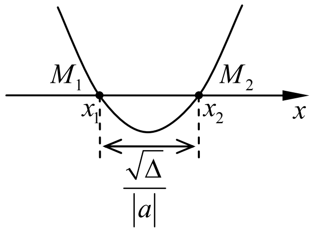
若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），则其对称轴方程是 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

（1）当 $a>0$，抛物线开口向上，函数在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上递减，在 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上递增，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$f(x)_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

（2）当 $a<0$，抛物线开口向下，函数在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 上递增，在 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上递减，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$f(x)_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

3. 二次函数的图像与 x 轴两交点间的距离公式

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时图像与 x 轴有两个交点：$M_1(x_1,0)$，$M_2(x_2,0)$，则 $|M_1M_2|=|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$，可用求根公式证明.



4. 闭区间上的二次函数的最值求解思路

求二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ （$a\neq 0$）在闭区间 $[p,q]$ 上的最值的基本方法是：

（1）若顶点的横坐标在给定的区间上，则：

①$a>0$ 时，在顶点处取得最小值，最大值在距离对称轴较远的端点处取得；

②$a<0$ 时，在顶点处取得最大值，最小值在距离对称轴较远的端点处取得.

（2）若顶点的横坐标不在给定的区间上，则：

①$a>0$ 时，最小值在距离对称轴较近的端点处取得，最大值在距离对称轴较远的端点处取得；

②$a<0$ 时，最大值在距离对称轴较近的端点处取得，最小值在距离对称轴较远的端点处取得.

练习

（1）求 $y=x^2+2ax+3$ 在 $x\in[1,3]$ 上的最大值 $g(a)$. 【参考答案: $g(a)=\begin{cases}4+2a,\ a\le -2\\ 12+6a,\ a>-2\end{cases}$】

（2）求 $y=x^2-ax-3$ 在 $x\in[-1,2]$ 上的最小值 $g(a)$. 【参考答案: $g(a)=\begin{cases}-2+a,\ a\le -2\\ \dfrac{-12-a^2}{4},\ -2<a<4\\ 1-2a,\ a\ge 4\end{cases}$】

5. 二次函数的区间最值问题分类

（1）对称轴、区间都是给定的. 如 $y=x^2+x+1$，$x\in[-1,1]$.

（2）对称轴动，区间固定. 这时要讨论顶点横坐标何时在区间之内，何时在区间之外.

（3）对称轴定，区间变动. 这时要讨论区间中的参数，如 $y=x^2+x+1$，$x\in[a,a+1]$.

注：解决这类问题，关键是抓住“三点一轴”（三点是指区间两个端点和中点，一轴指的是对称轴）数形结合，结合配方法，根据函数的单调性及分类讨论的思想即可完成.

练习

（1）求 $f(x)=x^2-2x-3$ 在 $x\in[t,t+2]$ 上的最大值. 【参考答案: $g(t)=\begin{cases}t^2-2t-3,\ t\le 0\\ t^2+2t+1,\ t>0\end{cases}$】

3.15 二次方程根的分布

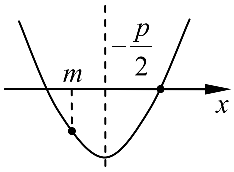
1. 零点定理

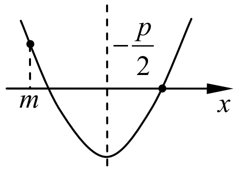
若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内至少有一个实根.

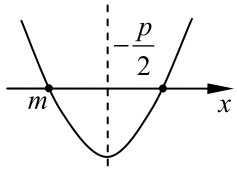
2. 一元二次方程 $f(x)=x^2+px+q=0$ 的实根分布

设 $f(x)=x^2+px+q$，则：

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内有根的充要条件为 $f(m)<0$ 或 $\begin{cases} p^2-4q\ge 0 \\ -\dfrac{p}{2}>m \\ f(m)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p^2-4q>0 \\ -\dfrac{p}{2}>m \\ f(m)=0 \end{cases}$.

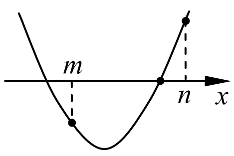


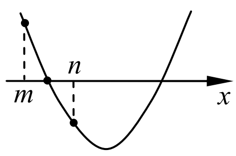


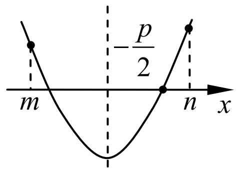


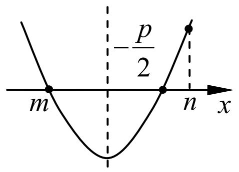
（2）方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内有根的充要条件为 $f(m)f(n)<0$ 或 $\begin{cases} f(m)>0 \\ f(n)>0 \\ p^2-4q\ge 0 \\ m<-\dfrac{p}{2}<n \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(m)=0 \\ f(n)>0 \\ p^2-4q>0 \\ m<-\dfrac{p}{2}<n \end{cases}$ 或

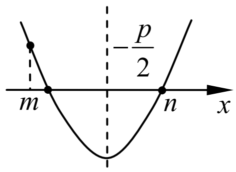
$\begin{cases} f(n)=0 \\ f(m)>0 \\ p^2-4q>0 \\ m<-\dfrac{p}{2}<n \end{cases}$.



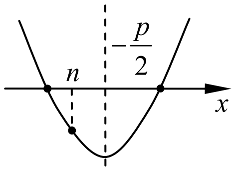


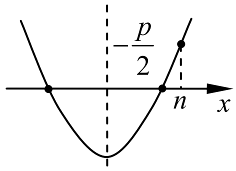


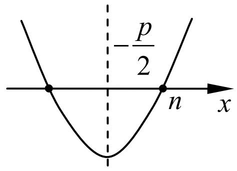




（3）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件为 $f(n)<0$ 或 $\begin{cases} p^2-4q\ge 0 \\ -\dfrac{p}{2}<n \\ f(n)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p^2-4q>0 \\ -\dfrac{p}{2}<n \\ f(n)=0 \end{cases}$.

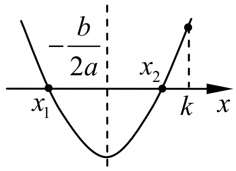




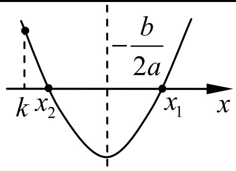


3. 一元二次方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0$（$a>0$）的实根分布

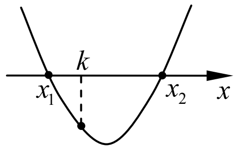
（1）$x_1<x_2<k$ 的充要条件是 $\begin{cases} f(k)>0 \\ -\dfrac{b}{2a}<k \\ \Delta>0 \end{cases}$.



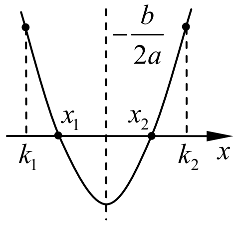
（2）$x_1 > x_2 > k$ 的充要条件是 $\begin{cases} f(k) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > k \\ \Delta > 0 \end{cases}$.



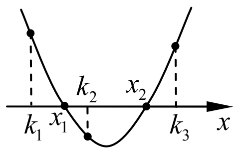
（3）$x_1 < k < x_2$ 的充要条件是 $f(k) < 0$.



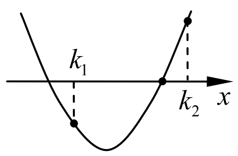
（4）$k_1 < x_1 < x_2 < k_2$ 的充要条件是 $\begin{cases} f(k_1) > 0 \\ f(k_2) > 0 \\ k_1 < -\dfrac{b}{2a} < k_2 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

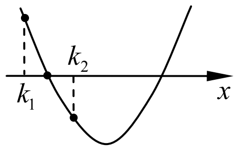


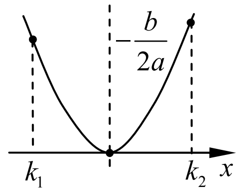
（5）$k_1 < x_1 < k_2 < x_2 < k_3$ 的充要条件是 $\begin{cases} f(k_1) > 0 \\ f(k_2) < 0 \\ f(k_3) > 0 \end{cases}$.

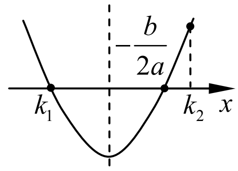


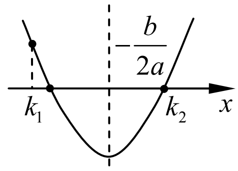
（6）(k_1, k_2) 内有且仅有一根的充要条件是 $f(k_1)f(k_2) < 0$ 或 $\begin{cases} \Delta = 0 \\ k_1 < -\dfrac{b}{2a} < k_2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(k_1) = 0 \\ k_1 < -\dfrac{b}{2a} < \dfrac{k_1 + k_2}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(k_2) = 0 \\ \dfrac{k_1 + k_2}{2} < -\dfrac{b}{2a} < k_2 \end{cases}$.











4. 解数学应用题的一般方法及步骤

（1）审题：分清条件和结论，理顺数量关系，实现实际问题向数学问题的转化.

（2）建模：设自变量为 x，函数为 y，根据已知条件建立函数关系式.

（3）求模：运用所学知识，求解数学模型.

（4）还原：将得到的结论还原为实际问题的意义.

5. 二分法及其求函数 $f(x)$ 的零点近似值的步骤

对于区间 $[a,b]$ 上连续不断，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$ 的函数 $y = f(x)$，通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐渐逼近零点，进而得到零点的近似值的方法叫做“二分法”.

其步骤如下：

（1）确定区间，验证 $f(a)\cdot f(b)<0$，给定精确度 ε.

（2）求区间 (a,b) 的中点 x_1.

（3）计算 $f(x_1)$：若 $f(x_1)=0$，则 x_1 就是函数的零点，若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$，则令 $b=x_1$（此时零点 $x_0\in(a,x_1)$），若 $f(x_1)\cdot f(b)<0$，则令 $a=x_1$（此时零点 $x_0\in(x_1,b)$）.

（4）判断是否达到其精确度 ε，即 $|a-b|<\varepsilon$，则得零点近似值 a（或 b），否则重复以上步骤.

第四章 数　列

※本章内容※

公式定理及常见规律

4.1 一般数列

1. 数列的分类

递增数列，递减数列，常数列，摆动数列等.

2. 数列的表示方法

列举法，通项公式法，图示法，递推公式法等.

3. 数列$\{a_n\}$的前n项的和

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

4. 特殊数列求通项（学完等差等比数列后掌握）

（1）迭加累加（等差型递推公式）.

若$a_n - a_{n-1} = f(n)$（$n \geq 2$），则$a_2 - a_1 = f(2)$，$a_3 - a_2 = f(3)$，…，$a_n - a_{n-1} = f(n)$，两边分别相加，得$a_n - a_1 = f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$.

练习

（1）已知：$a_1 = 2$，$a_{n+1} = a_n + 2n$（$n \in N^*$），则$a_n =$__________.【参考答案：$n^2 - n + 2$】

（2）数列$\{a_n\}$，$a_1 = 1$，$a_n = 3^{n-1} + a_{n-1}$（$n \geq 2$），求a_n.【参考答案：$\dfrac{3^n - 1}{2}$】

（2）迭乘累乘（叠乘法）.

若$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = f(n)$（$n \geq 2$），则$\dfrac{a_2}{a_1} = f(2)$，$\dfrac{a_3}{a_2} = f(3)$，…，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = f(n)$，∴两边分别相乘，得$\dfrac{a_n}{a_1} = f(2)f(3)\cdots f(n)$.

练习

（1）已知：$a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}a_n$（$n \geq 1$），则$a_n =$__________.【参考答案：$2n$】

（3）等比型递推公式.

$a_n = ca_{n-1} + d$（c、d为常数，$c \neq 0$，$c \neq 1$，$d \neq 0$），可转化为等比数列. 设$a_n + x = c(a_{n-1} + x) \Rightarrow$

$a_n = ca_{n-1} + (c-1)x$（待定系数法）．令 $(c-1)x = d$，$\therefore x = \dfrac{d}{c-1}$，$\therefore \left\{a_n + \dfrac{d}{c-1}\right\}$是首项为 $a_1 + \dfrac{d}{c-1}$，c 为公比的等比数列，$\therefore a_n + \dfrac{d}{c-1} = \left(a_1 + \dfrac{d}{c-1}\right) \cdot c^{n-1}$，$\therefore a_n = \left(a_1 + \dfrac{d}{c-1}\right) \cdot c^{n-1} - \dfrac{d}{c-1}$．

练习

（1）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 9$，$3a_{n+1} + a_n = 4$，求 a_n．【参考答案：$a_n = \dfrac{8}{(-3)^{n-1}} + 1$】

（4）数学归纳法．（学完数学归纳法后掌握）

方便找出通项规律的，可以先归纳猜想，接着用数学归纳法证明．

练习

（1）已知函数 $f(x) = \dfrac{x}{3x+1}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = f(a_n)$（$n \in N^*$）．求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式【参考答案：$a_n = \dfrac{1}{3n-2}$】

（5）利用 $a_n = \begin{cases} S_1，n = 1 \\ S_n - S_{n-1}，n \geq 2 \end{cases}$，求差（商）法．

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系式，通常是把已知关系通过 $a_n = \begin{cases} S_1，n = 1 \\ S_n - S_{n-1}，n \geq 2 \end{cases}$ 转化为数列 $\{a_n\}$ 或 S_n 的递推关系然后依据逆关系的类型采用相应的方法求解，至于向 S_n 或 a_n 哪种方向转化，应视题目而定．

注：强调 $n = 1$ 时一定要单独计算．

练习

（1）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n = 2n^2 - 3n$（$n \in N^*$），则它的通项公式 $a_n =$ ________．【参考答案：$a_n = 4n - 5$】

（2）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 4a_n + 1$，则 $a_n =$ ________．【参考答案：$-\dfrac{4^{n-1}}{3^n}$】

（6）无穷递推数列，求差（商）法．

如 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{2}a_1 + \dfrac{1}{2^2}a_2 + \cdots + \dfrac{1}{2^n}a_n = 2n + 5$．①

$n = 1$ 时，$\dfrac{1}{2}a_1 = 2 \times 1 + 5$，$\therefore a_1 = 14$．

$n \geq 2$ 时，$\dfrac{1}{2}a_1 + \dfrac{1}{2^2}a_2 + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}a_{n-1} = 2(n-1) + 5$．②

① − ②得：$\dfrac{1}{2^n}a_n = 2$，$\therefore a_n = 2^{n+1}$，$\therefore a_n = \begin{cases} 14，n = 1 \\ 2^{n+1}，n \geq 2 \end{cases}$．

练习

（1）已知 $a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$（$n \geq 2$），求 a_n．【参考答案：$a_n = 2^{n-1}$（$n \in N^*$）】

（7）倒数法.

如：$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，求 a_n.

直接求通项并不容易. 由已知得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n}$，$\therefore\ \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\ \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是首项为 $\dfrac{1}{a_1}=1$，公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列，$\therefore\ \dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(n+1)$，$\therefore\ a_n=\dfrac{2}{n+1}$.

5. 特殊数列求和（学完等差等比数列后掌握）

（1）常用公式法.

①等差数列求和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$；

②等比数列求和公式：$S_n=\begin{cases}na_1,\ q=1\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q},\ q\neq1\end{cases}$；

③ $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$；

④ $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

⑤ $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2$.

（2）裂项相消法.

裂项法的实质是将数列中的每项（通项）分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的. 常见通项分解（裂项）公式有：

① $a_n=f(n+1)-f(n)$；

② $\dfrac{\sin1^\circ}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}=\tan(n+1)^\circ-\tan n^\circ$；

③ $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；　$a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$；　$a_n=\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$；

④ $a_n=\dfrac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{(2n)^2-1+1}{(2n-1)(2n+1)}=1+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$；

⑤ $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$；

⑥ $a_n=\dfrac{n+2}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2(n+1)-n}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{n\cdot2^{n-1}}-\dfrac{1}{(n+1)2^n}$.

注：裂项应有利于相加大量抵消.

练习

（1）求数列 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$，…，$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，…的前 n 项和. 【参考答案：$S_n=\sqrt{n+1}-1$】

（2）求和：$1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$. 【参考答案：$S_n=\dfrac{2n}{n+1}$】

（3）错位相减法.

$\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，求数列 $\{a_nb_n\}$（差比数列）的前 n 项和，可由 S_n-qS_n 求 S_n，其中 q 为 $\{b_n\}$ 的公比.

如：$S_n=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$ ①

$x\cdot S_n=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$ ②

①－②：$(1-x)S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n$，

当 $x\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x}$；

当 $x=1$ 时，$S_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

（4）通项分组法.

数列既不是等差数列，也不是等比数列，若将这类数列适当拆开，可分为几个等差、等比或常见的数列，然后分别求和，再将其合并即可.

练习

（1）求数列 $\{n(n+1)(2n+1)\}$ 的前 n 项和.【参考答案：$S_n=\dfrac{n(n+1)^2(n+4)}{4}$】

（2）已知 $a_n=2n+3^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.【参考答案：$S_n=n^2+n+\dfrac{3^{n+1}}{2}-\dfrac{3}{2}$】

（5）倒序相加法.

将一个数列倒过来排列（反序），再把它与原数列相加，就可以得到 n 个（a_1+a_n）. 如：

$$\left.\begin{array}{l}S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n\\ S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1\end{array}\right\}\text{相加，得}$$

$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_n+a_1)$.

6. 求数列 $\{a_n\}$ 的最大、最小项的方法

（1）$a_{n+1}-a_n=\cdots\begin{cases}>0\\=0\\<0\end{cases}$，如 $a_n=-2n^2+29n-3$.

（2）$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\cdots\begin{cases}>1\\=1\\<1\end{cases}$（$a_n>0$），如 $a_n=\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}$.

（3）$a_n=f(n)$，研究函数 $f(n)$ 的增减性. 如 $a_n=\dfrac{n}{n^2+156}$.

4.2 等差数列

1. 认识等差数列

	等 差 数 列
定义	（1） $a_{n+1}-a_n=d$ （常数）；（2） $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$.
通项公式	（1） $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d=kn+b$ ；（2） $a_n=a_m+(n-m)d$ ， 变形：$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.
增减性	（1） $d>0\Leftrightarrow$ 递增；（2） $d=0\Leftrightarrow$ 常数列；（3） $d<0\Leftrightarrow$ 递减.
前 n 项和	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{1}{2}d\right)n=An^2+Bn$. （1）当 $a_1>0$ 且 $d<0$ 时，S_n 有最大值；通过解 $\begin{cases}a_n\ge 0\\a_{n+1}\le 0\end{cases}$ 可解得 S_n 取最大值时 n 的取值范围. （2）当 $a_1<0$ 且 $d>0$ 时，S_n 有最大值；通过解 $\begin{cases}a_n\le 0\\a_{n+1}\ge 0\end{cases}$ 可解得 S_n 取最大值时 n 的取值范围.
等差中项	A 为 a 、 b 的等差中项 $\Leftrightarrow 2A=a+b$.
性质	（1） $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow a_n=kn+b$ （ k 、 b 为常数）； **注：**可用一次函数图像来研究 a_n （2） $\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow S_n=An^2+Bn$ ； **注：**可用二次函数图像来研究 S_n （3） $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ ； （4） $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $a_m+a_n=2a_{\frac{m+n}{2}}$ （ m 、 n 同奇或同偶）

2. 衍生等差数列

（1）若 $\{a_n\}$ 是公差 d 的等差数列，则 $\{a_{2n}\}$ 是公差为 $2d$ 的等差数列.

（2）若 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 分别以 d_1 、 d_2 为公差的等差数列，则 $\{pa_n+qb_n\}$ 是公差为 pd_1+qd_2 的等差数列.

（3）若 $\{a_n\}$ 是以 d 为公差的等差数列，则 a_k ， a_{k+m} ， a_{k+2m} ， $\cdots$（ $k,m\in N^*$ ）是公差为 md 的等差数列（即等差数列 $\{a_n\}$ 的任意等距离的项构成的数列仍为等差数列）.

（4） S_n 是以 d 为公差的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 S_n ， $S_{2n}-S_n$ ， $S_{3n}-S_{2n}$ 构成公差为 n^2d 的等差数列.

（5）两个等差数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的和差的数列 $\{a_n+b_n\}$ 、 $\{a_n-b_n\}$ 仍为等差数列.

（6） $\{b_n\}$ （ $b_n>0$ ）是等比数列，则 $\{\log_c b_n\}$ （ $c>0$ 且 $c\ne 1$ ）是等差数列.

3. 等差数列中 $S_{偶}$ 与 $S_{奇}$ 相关性质

设数列$\{a_n\}$是等差数列，$S_{奇}$ 是奇数项的和，$S_{偶}$ 是偶数项的和，S_n 是前 n 项的和，则有如下性质：

（1）前 n 项的和 $S_n=S_{奇}+S_{偶}$.

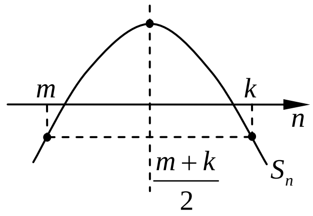
（2）当 n 为偶数时，$S_{偶}-S_{奇}=\frac{n}{2}d$，其中 d 为公差.

（3）当 n 为奇数时，则 $S_{奇}-S_{偶}=a_{中}$，$S_{奇}=\frac{n+1}{2}a_{中}$，$S_{偶}=\frac{n-1}{2}a_{中}$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n+1}{n-1}$，$\frac{S_n}{S_{奇}-S_{偶}}=\frac{S_{奇}+S_{偶}}{S_{奇}-S_{偶}}=n$（其中 $a_{中}$ 是等差数列的中间一项）.

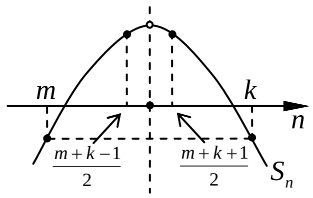
4. 等差数列中其他常见结论

（1）在等差数列$\{a_n\}$中，若 $d<0$，$S_m=S_k$（$m\neq k$），则：

①当 m、k 同奇或同偶时，$n=\frac{m+k}{2}$ 时，$(S_n)_{\max}$；



②当 m、k 一奇一偶时，$n=\frac{m+k\pm 1}{2}$ 时，$(S_n)_{\max}$.



注：对于上述图像，可以结合 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 理解.

（2）等差数列$\{a_n\}$中，$\left.\begin{array}{l}S_p=q\\S_q=p(p\neq q)\end{array}\right\}\Rightarrow S_{p+q}=-(p+q)$.

注：可用多种方法证明，如：①利用$\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$共线，$f(n)=\frac{S_n}{n}=An+B$ 为一次函数；②利用 $S_n=An^2+Bn$.

练习

（1）已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $S_5=8$，$S_8=5$，求 S_{13}.【参考答案：-13】

（3）等差数列$\{a_n\}$中，$\left.\begin{array}{l}a_p=q\\a_q=p(p\neq q)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}d=-1\\a_{p+q}=0\end{cases}$.

练习

（1）等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=8$，$a_8=5$，求 a_{13}.【参考答案：0】

（4）等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中，有$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$（$S_n$与$T_n$分别为$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前$n$项和）.

练习

（1）等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中，S_n、T_n分别为$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前n项和，已知$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{3n+1}$，求$\frac{a_n}{b_n}$.【参考答案：$\because \frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{3n+1}$，$\therefore \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{4n-1}{6n-2}$，则$\frac{a_n}{b_n}=\frac{4n-1}{6n-2}$】

（2）已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为A_n和B_n，且$\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+45}{n+3}$，则使得$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数$n$的个数是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【解析】选D. 此题主要是通过A_n和B_n的关系找到$\frac{a_n}{b_n}$的关系，可以应用等差数列的性质解决.

$\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+45}{n+3}$得$\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+45}{(2n-1)+3}$，而$A_{2n-1}=(2n-1)a_n$，$B_{2n-1}=(2n-1)b_n$，代入$\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+45}{(2n-1)+3}$化简得$\frac{a_n}{b_n}=7+\frac{12}{n+1}$（$n\in N^+$），容易验证当$n=1,2,3,5,11$时，$\frac{a_n}{b_n}$取整数，所以选D.

5. 等差数列$\{a_n\}$的条件下$\{|a_n|\}$的相关问题

等差数列$\{a_n\}$，前n项和为S_n，求$\{|a_n|\}$的前n项和T_n.

（1）$a_1>0$，$d<0$时，则数列为减，设$n>n_0$时，$a_n<0$，$n\le n_0$时，$a_n\ge 0$，则$T_n=\begin{cases}S_n, & n\le n_0\\ 2S_{n_0}-S_n, & n>n_0\end{cases}$.

（2）$a_1<0$，$d>0$时，则数列为增，设$n\le n_0$时，$a_n\le 0$，$n>n_0$时，$a_n>0$，则$T_n=\begin{cases}-S_n, & n\le n_0\\ -2S_{n_0}+S_n, & n>n_0\end{cases}$.

练习

（1）数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=10n-n^2$，求$\{|a_n|\}$的前n项和T_n.【参考答案：$a_n=11-2n$，$T_n=\begin{cases}10n-n^2, & n\le 5\\ n^2-10n+50, & n>5\end{cases}$】

6. 等差数列解题时设元常用方法

（1）在判断三个数成等差数列时，常用$a+c=2b$.

（2）在已知三个数成等差数列时，可设三个数依次为a，$a+d$，$a+2d$或$a-d$，a，$a+d$.

（3）四个数成等差的设法：$a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$.

4.3 等比数列

1. 认识等比数列

	等 比 数 列
定义	（1）$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（$q\neq 0$的常数）；（2）$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$（$a_{n+1},a_n,a_{n+2}\neq 0$）.
通项公式	（1）$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=k\cdot q^n$；（2）$a_n=a_m\cdot q^{n-m}$.
增减性	（1）$\begin{cases}a_1>0\\q>1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\0<q<1\end{cases}\Leftrightarrow$递增； （2）$\begin{cases}a_1>0\\0<q<1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\q>1\end{cases}\Leftrightarrow$递减； （3）$q=1\Leftrightarrow$常数列； （4）$q<0\Leftrightarrow$摆动数列.
前n项和	$S_n=\begin{cases}na_1,\ q=1\\ \frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},\ q\neq 1\end{cases}$.
等比中项	G为a、b的等比中项$\Leftrightarrow G^2=ab$.
性质	（1）$\{a_n\}$为等比数列，$a_n=k\cdot q^n$（$k\neq 0$，$q\neq 0$）； （2）$\{a_n\}$为等比数列，且$q\neq 1\Leftrightarrow S_n=b\cdot q^n+c$，$b+c=0$（$q\neq 0$）； （3）$\{a_n\}$为等比数列，若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$； （4）$\{a_n\}$为等比数列，则$a_m\cdot a_n=\left(a_{\frac{m+n}{2}}\right)^2$（$m$、$n$同奇或同偶）

2. 衍生等比数列

（1）若$\{a_n\}$为等比数列，公比为q，则$\{a_{2n}\}$是公比为q^2的等比数列.

（2）若$\{a_n\}$是以q为公比的等比数列，则a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，⋯（$k,m\in N^*$）是公比为q^m的等比数列（即等比数列$\{a_n\}$的任意等距离的项构成的数列仍为等比数列）.

（3）S_n是以q为公比的等比数列$\{a_n\}$的前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$构成公比为q^n的等比数列.

（4）两个等比数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的积、商、倒数组成的数列$\{a_n\cdot b_n\}$、$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$、$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$仍为等比数列.

（5）$\{a_n\}$为等差数列，则$\{c^{a_n}\}$（$c>0$）是等比数列.

3. 等比数列$\{a_n\}$的$S_{偶}$与$S_{奇}$的性质

（1）若项数为$2n$，则$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$.

（2）若项数为 $2n+1$，则 $\dfrac{S_{奇}-a_1}{S_{偶}}=q$.

4. 等比数列解题时设元常用方法

在已知三个数成等比数列时，可设三个数依次为 a ， aq ， aq^2，也可设为 $\dfrac{a}{q}$， a， aq .

5. 等比差数列 $\{a_n\}$ 的特性

（1） $a_{n+1}=qa_n+d$ ， $a_1=b$ （ $q\neq 0$ ）.

（2）通项公式为 $a_n=\begin{cases} b+(n-1)d,\ q=1 \\ \dfrac{bq^n+(b-d)q^{n-1}-d}{q-1},\ q\neq 1 \end{cases}$.

（3）前 n 项和的公式为 $S_n=\begin{cases} nb+n(n-1)d,\ q=1 \\ \left(b-\dfrac{d}{1-q}\right)\dfrac{1-q^n}{q-1}+\dfrac{d}{1-q}n,\ q\neq 1 \end{cases}$.

6. 分期付款（按揭贷款）每次还款额

（1）零存整取储蓄（单利）本利和计算模型.

若每期存入本金 p 元，每期利率为 r ， n 期后，本利和为：

$$S_n=p(1+r)+p(1+2r)+\cdots+p(1+nr)=p\left[n+\frac{n(n+1)}{2}r\right].$$

（2）若按复利，如贷款问题——按揭贷款的每期还款计算模型（按揭贷款——分期等额归还本息的借款种类）.

若贷款（向银行借款） p 元，采用分期等额还款方式，从借款日算起，一期（如一年）后为第一次还款日，如此下去，第 n 次还清. 如果每期利率为 r （按复利），每期应还 x 元，满足

$$p(1+r)^n=x(1+r)^{n-1}+x(1+r)^{n-2}+\cdots+x(1+r)+x=x\left[\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}\right]=x\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

$\therefore x=\dfrac{pr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ （其中， p 为贷款数， r 为利率， n 为还款期数）

第五章 三角函数与解三角形

※本章内容※

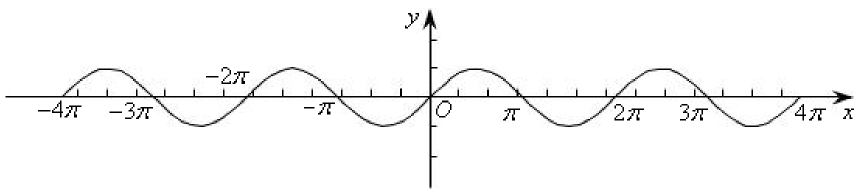
公式定理及常见规律

5.1 三角函数的图像与性质

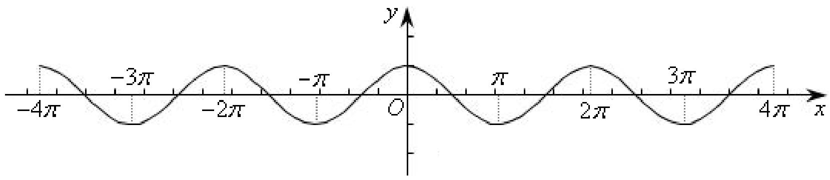
1. 特殊的三角值（要记住）

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

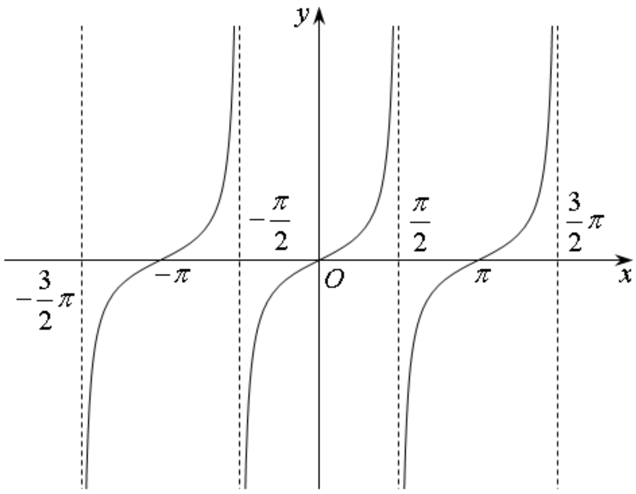
2. $y=\sin x$ 的图像与性质

函数	$y=\sin x$
图　像	
定义域	$x\in\mathbf{R}$
值　域	$[-1,1]$
周期性	$T=2\pi$
奇偶性	奇函数
单调性	$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）递增；$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）递减.
对称性	对称轴：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）. 对称中心：$(k\pi,0)$（$k\in\mathbf{Z}$）.

3. $y=\cos x$ 的图像与性质

函数	$y=\cos x$
图　像	
定义域	$x\in\mathbf{R}$
值　域	$[-1,1]$
周期性	$T=2\pi$
奇偶性	偶函数
单调性	$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$）递增；$[2k\pi,\pi+2k\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$）递减.
对称性	对称轴：$x=k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）. 对称中心：$\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,0\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）.

4. $y=\tan x$ 的图像与性质

函数	$y=\tan x$
图　像	
定义域	$\left\{x\middle\vert x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\right\}$
值　域	$\mathbf{R}$
周期性	$T=\pi$
奇偶性	奇函数
单调性	$\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）递增
对称性	对称中心：$\left(\dfrac{k\pi}{2},0\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）. 不是轴对称图形

5. 三角函数的单调区间

（1）$y=\sin x$ 的递增区间是$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），递减区间是$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

（2）$y=\cos x$ 的递增区间是$\left[2k\pi-\pi,2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），递减区间是$\left[2k\pi,2k\pi+\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

（3）$y=\tan x$ 的递增区间是$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$），$y=\cot x$ 的递增区间是$\left(k\pi,k\pi+\pi\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）.

6. 特殊三角函数周期与图像

（1）$y=\cos|x|$ 的周期是 2π； $y=\sin|x|$、 $y=\tan|x|$ 不是周期函数.

（2）$y=|\cos x|$、 $y=|\sin x|$、 $y=|\tan x|$ 的周期是 π .

7. 三角函数的常见变形技巧

（1）辅助角公式.（化一公式）

$y=a\sin\omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，则 $y_{\max}=\sqrt{a^2+b^2}$，此时 $\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）；$y_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2}$，此时 $\omega x+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）.

（2）换元法 1.

$y=a\sin^2 x+b\sin x+c$，设 $t=\sin x$，注意 $t\in[-1,1]$.

练习

（1）已知 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，求 $y=\sin^2 x+3\cos x+2$ 的值域.【参考答案：设 $t=\cos x$，则 $y=-t^2+3t+3$，$t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，$\therefore y\in\left[\frac{5+3\sqrt{2}}{2},5\right]$】

（3）换元法 2.

$y=a\sin x\cos x+b\left(\sin x\pm\cos x\right)+c$，设 $t=\sin x\pm\cos x$，则 $\sin x\cdot\cos x=\pm\frac{t^2-1}{2}$，注意 $t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

练习

（1）求 $y=\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x$ 的最大值.【参考答案：设 $\left.\begin{matrix}\sin x+\cos x=t\\ x\in\mathbf{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\\ t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\end{cases}$，则转化为二次函数的最值问题】

（2）求 $y=(\sin x-2)(\cos x+2)$ 的值域.【参考答案：设 $\left.\begin{matrix}\sin x-\cos x=t\\ x\in\mathbf{R}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}\\ t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\end{cases}$，则转化为二次函数的最值问题】

（4）关于 $\sin x\cdot\cos x$ 的二次齐次式的常规转化思路.

①分母看成 $1=\sin^2 x+\cos^2 x\xrightarrow{\text{化成}}\tan x$；

② $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$， $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$， $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

练习

（1）求函数 $y=\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x$ 的最小值及对应的 x 值. 【参考答案： $2-\sqrt{2}$，此时 $x=-\dfrac{3}{8}\pi+k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$】

（2）已知 $\tan x=2-\sqrt{3}$，求 $\sin^2 x-\sin x\cos x+5\cos^2 x$. 【参考答案：设 $\dfrac{11+4\sqrt{3}}{4}$. 式子除以 $\sin^2 x+\cos^2 x$，分子分母同时除以 $\cos^2 x$，代入 $\tan x$ 即可】

8. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的基本概念

（1）振幅 $|A|$.

（2）周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

（3）频率 $f=\dfrac{1}{T}$.

（4）初相 φ.

（5）相位 $\omega\cdot x+\varphi$.

其中，① A，ω 决定“形变”；② φ，k 决定“位变”；③ A，k 影响值域；④ ω 影响周期；⑤ A，ω，φ 影响单调性.

9. 正余弦函数五点作图法

以 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 为例. 令 $\omega x+\varphi$ 依次为 0，$\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3\pi}{2}$，2π，求出 x 与 y，依点 (x,y) 作图.

10. 根据图像判断函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$）的解析式

（1）首先容易判断 A 与 T.

（2）计算 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.

（3）利用特殊点（比如最高点、最低点、与 x 轴的交点）求出某一 φ.

（4）利用诱导公式变为符合要求的解析式.

11. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的单调区间的确定

（1）若函数中的 $A>0$， $\omega>0$，则直接将 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体，利用正弦函数的单调区间即可求解.

（2）若函数中的 $A>0$， $\omega<0$，可先将 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体，利用正弦函数的单调区间求解，得到的增区间为减区间，得到的减区间为增区间.

练习

（1）求 $y=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的单调区间.【参考答案：增区间 $\left[-\dfrac{7}{40}\pi+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{3}{40}\pi+\dfrac{k\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；减区间 $\left[\dfrac{3}{40}\pi+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{13}{40}\pi+\dfrac{k\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$】

（2）求 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$ 的单调区间.【参考答案：增区间 $\left[-\dfrac{7}{12}\pi-k\pi,-\dfrac{1}{12}\pi-k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；减区间 $\left[-\dfrac{1}{12}\pi-k\pi,\dfrac{5}{12}\pi-k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$】

12. 定义域关于原点对称的函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的奇偶性

（1）若 $\varphi=k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 值为 $A\sin\omega x$ 或 $-A\sin\omega x$，函数为奇函数.

（2）若 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 值为 $A\cos\omega x$ 或 $-A\cos\omega x$，函数为偶函数.

（3）其他情况，非奇非偶.

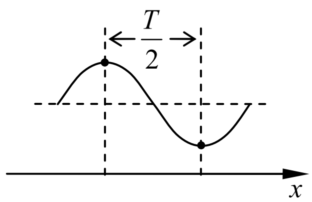
练习

（1）若 $y=\cos(x+k\pi)$ 为奇函数，写出一个合适的 k，说明其规律.【参考答案：k 为 $\dfrac{1}{2}$ 的奇数倍即可】

（2）把函数 $y=\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ 的图像向右平移 φ 个单位，所得的图像正好关于 y 轴对称，则 φ 的最小正值为________.【参考答案：$\dfrac{\pi}{3}$】

13. $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+k$ 的周期 T 的确定

图像中相邻两个最值点的横坐标之差，或者一个单调区间的长度，或者相邻两对称轴（对称中心）间的距离为 $\dfrac{T}{2}$.

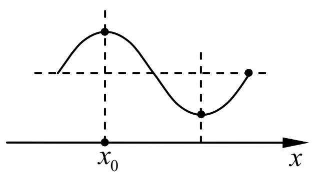


练习

（1）若函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的图像相邻的两个最高点间的横向距离为 4，则函数 $f(x)$ 的周期为________.【参考答案：4】

14. $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+k$ 的对称轴的确定

将 $x=x_0$ 代入解析式能取到最大值或最小值，则 $x=x_0$ 为其对称轴.

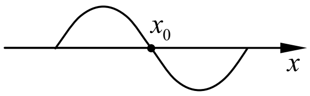


练习

（1）已知 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的一条对称轴，则 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$________. 【参考答案：$\pm 1$】

15. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的对称中心的确定

将 $x=x_0$ 代入解析式能取到 0，则 $(x_0,0)$ 为其对称中心.

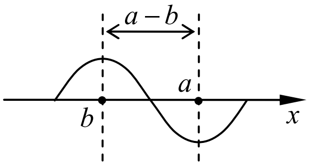


16. 特殊三角函数的周期性

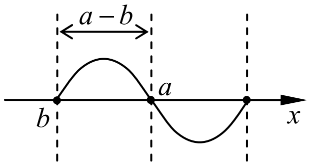
函数 $y=|A\sin(\omega x+\varphi)|$，$y=|A\cos(\omega x+\varphi)|$（$\omega>0$）的周期为 $\dfrac{\pi}{\omega}$.

17. 三角函数的对称性与周期性

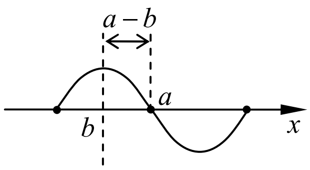
（1）若 $x=a$ 和 $x=b$ 为两条对称轴，则 $2(a-b)$ 为该函数的一个周期.



（2）若 $(a,0)$，$(b,0)$ 为两个对称中心，则 $2(a-b)$ 为该函数的一个周期.



（3）若 $(a,0)$ 为对称中心，$x=b$ 为对称轴，则 $4(a-b)$ 为该函数的一个周期.



18. 求定义域或角的范围的方法

通常要用到数形结合、分类讨论、转化等方法，利用单位圆或三角函数图像求解.

19. 三角函数的图像变换

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图像由函数 $y=\sin x$ 的图像作如下变换：

（1）相位变换：把 $y=\sin x$ 的图像上的所有点向左（$\varphi>0$）或向右（$\varphi<0$）平行移动 $|\varphi|$ 个单位得到 $y=\sin(x+\varphi)$（注：左加右减）；

（2）周期变换：把 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像上所有点的横坐标缩短（$\omega>1$）或伸长（$0<\omega<1$）到原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$，纵坐标不变；

（3）振幅变换：把 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像上所有点的纵坐标缩短（$0<A<1$）或伸长（$A>1$）到原

来的 A 倍得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，横坐标不变.

如：函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 经过怎样的变换才能得到 $y=\sin x$ 的图像？

$$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1 \xrightarrow{\text{横坐标伸长到原来的 2 倍}} y=2\sin\left[2\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{\pi}{4}\right]-1=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$$

$$\xrightarrow{\text{左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位}} y=2\sin x-1 \xrightarrow{\text{向上平移 1 个单位}} y=2\sin x \xrightarrow{\text{纵坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}\text{倍}} y=\sin x$$

注：相位变换与周期变换都只针对自变量 x.

练习

（1）要得到函数 $y=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，只需将 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的图像（　　）. 【参考答案：A】

A. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

（2）若函数 $y=f(x)$ 的图像上每一点的纵坐标保持不变，横坐标伸长到原来的 2 倍，再将整个图像沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，沿 y 轴向下平移 1 个单位，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图像，则 $f(x)$ 是(　　).

【参考答案：B】

A. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1$　　B. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

C. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$　　B. $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$

20. 由 $y=f(x)$ 平移得到 $y=f(\omega x+\varphi)$ （$\omega>0$）

方法一：先将图像向左移动 φ 个单位（或 $\varphi<0$，表示向右移动 $-\varphi$ 个单位）得到 $f(x+\varphi)$，再将图像横坐标伸长到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍得到 $f(\omega x+\varphi)$.

方法二：先将图像横坐标伸长到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍得到 $f(\omega x)$，再将图像向左平移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位（若 $\varphi<0$，表示向右移动 $-\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位），得到 $f\left(\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)\right)$ 即为 $f(\omega x+\varphi)$.

21. 由 $y=f(\omega x+\varphi)$ 平移得到 $y=f(x)$ （$\omega>0$）

方法一：先将图像横坐标伸长到原来的 ω 倍，得到 $f(x+\varphi)$，再将图像向右平移 φ 个单位（$\varphi<0$，表示向左平移 $-\varphi$ 个单位），得到 $f(x)$.

方法二：先将图像向右平移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位（若 $\varphi<0$，表示向左平移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位），得到 $f(\omega x)$，再将横坐标伸长到原来的 ω 倍，得到 $f(x)$.

22. 三角函数模型的应用

（1）根据图像建立解析式或根据解析式作出图像.

（2）将实际问题抽象为与三角函数有关的简单函数模型.

（3）利用收集到的数据作出散点图，并根据散点图进行数据拟合，从而得到函数模型.

23. 解三角函数性质问题的技巧

（1）求三角函数的定义域通常可用三角函数的图像或三角函数线来求解.

（2）求三角函数的值域常通过换元、配方等方法转化为二次函数在有界区间内的最值问题.

（3）三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$（$A > 0$，$\omega < 0$）的周期为 $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$（注：绝对值）.

（4）求三角函数的周期一般要通过辅助角公式、倍角公式、降幂公式或两角和差公式将函数化为单一的并且次数为一次的函数进行求解，有时也可用图像法求解.

24. 三角函数与向量的综合问题

（1）利用向量的知识、公式，通过向量运算，将向量条件转化为三角条件，然后通过三角变换解决三角问题.

（2）从三角与向量的关联点（角与距离）处理问题，把三角函数中的角与向量的夹角统一为一类问题.

5.2 三角恒等变换

1. 终边相同的角度

（1）α 与 $2k\pi + \alpha$（$k \in \mathbf{Z}$）表示终边相同的角度.

（2）终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同.

（3）而 α 与 $k\pi + \alpha$（$k \in \mathbf{Z}$）表示终边共线的角.

2. 角的终边

位　置	角 的 集 合
在 x 轴正半轴上	$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
在 x 轴负半轴上	$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$
在 x 轴上	$\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
在 y 轴上	$\left\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
在第一象限内	$\left\{\alpha \mid 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$
在第二象限内	$\left\{\alpha \mid 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$
在第三象限内	$\left\{\alpha \mid 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \dfrac{3}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$
在第四象限内	$\left\{\alpha \mid 2k\pi + \dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2k\pi + 2\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

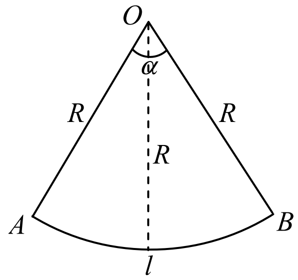
3. 弧度制与角度制互化

1rad（弧度）$=\dfrac{180}{\pi}$度$\approx 53.7^{\circ}$

4. 扇形有关公式

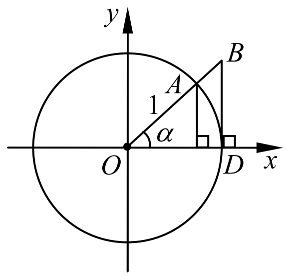
（1）弧长公式：$l=|\alpha|R$．

（2）扇形面积公式：$S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lR=\dfrac{1}{2}|\alpha|R^2$（想象成三角形面积计算公式）．



5. 三角函数线

（1）正弦线 AC．
（2）余弦线 OC．
（3）正切线 BD．



练习

（1）若 $0<\alpha<\pi$，则使 $\sin\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 成立的 x 的取值范围是（　　）．【参考答案：D】

A. $\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$　　C. $\left(\dfrac{5}{3}\pi,2\pi\right)$　　B. $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3}\pi,\pi\right)$

6. 常用三角不等式

（1）若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin x<x<\tan x$．

（2）若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $1<\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$．

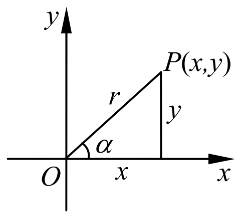
（3）$|\sin x|+|\cos x|\ge 1$．

7. 三角函数值与角终边上的点

以角 α 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴正半轴建立直角坐标系，在角 α 的终边上任取一个异于

原点的点 $P(x,y)$，点 P 到原点的距离记为 r，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$， $\cos\alpha=\frac{x}{r}$， $\tan\alpha=\frac{y}{x}$， $\cot\alpha=\frac{x}{y}$，

$\sec\alpha=\frac{r}{x}$， $\csc\alpha=\frac{r}{y}$.



8. 三角函数的符号判断

（1） α 为一、二象限， $\sin\alpha>0$.

（2） α 为一、四象限， $\cos\alpha>0$.

（3） α 为一、三象限， $\tan\alpha>0$.

9. 三角函数的同角关系

（1）商的关系.

① $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\cdot\sec\theta$

② $\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cos\theta\cdot\csc\theta$

③ $\sin\theta=\frac{y}{r}=\cos\theta\cdot\tan\theta$

④ $\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{1}{\cos\theta}=\tan\theta\cdot\csc\theta$

⑤ $\cos\theta=\frac{x}{r}=\sin\theta\cdot\cot\theta$

⑥ $\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{1}{\sin\theta}=\cot\theta\cdot\sec\theta$

（2）倒数关系.

$\sin\theta\cdot\csc\theta=\cos\theta\cdot\sec\theta=\tan\theta\cdot\cot\theta=1$

（3）平方关系.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\sec^2\theta-\tan^2\theta=\csc^2\theta-\cot^2\theta=1$

10. 三角函数诱导公式 1

	sin	cos	tan	cot
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$\pi-\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$
$2k\pi+\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$

三角函数值等于 α 的同名三角函数值，前面加上一个把 α 看作锐角时，原三角函数值的符号，即函数名不变，符号看象限.

11. 三角函数诱导公式 2

	sin	cos	tan	cot
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$
$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

三角函数值等于 α 的异名三角函数值，前面加上一个把 α 看作锐角时，原三角函数值的符号，即函数名改变，符号看象限.

12. 简单三角方程的解

（1） $\sin\alpha=\sin\beta \Leftrightarrow \alpha=k\pi+(-1)^k\beta$ （$k\in\mathbf{Z}$）.

（2） $\cos\alpha=\cos\beta \Leftrightarrow \alpha=2k\pi\pm\beta$ （$k\in\mathbf{Z}$）.

（3） $\tan\alpha=\tan\beta \Leftrightarrow \alpha=k\pi+\beta$ （$k\in\mathbf{Z}$）.

13. 三角函数和、差角公式（要记住）

（1） $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

（2） $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

（3） $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

14. 三角函数二倍角公式（要记住）

（1） $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

（2） $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

（3） $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

15. 三角函数降幂公式（要记住）

（1） $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$.

（2） $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

（3） $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

16. 三角函数半角公式（要记住）

（1） $\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$.

（2）$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$.

（3）$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$.

（4）$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$.

（5）$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

（6）$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$.

（7）$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

注：符号的选择由$\frac{\theta}{2}$所在的象限确定.

17. 三角函数三倍角公式（仅作参考）

（1）$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)$.

（2）$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta=4\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$.

（3）$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\tan\theta\tan(60^\circ-\theta)\tan(60^\circ+\theta)$.

18. 三角函数万能公式（仅作参考）

设$t=\tan\frac{\alpha}{2}$，

（1）$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$.

（2）$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

（3）$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$.

19. 三角函数积化和差公式（会用即可，不要求记忆）

（1）$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$.

（2）$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$.

（3）$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$.

（4）$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$.

20. 三角函数和差化积公式（会用即可，不要求记忆）

（1）$\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

（2）$\sin\alpha-\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

（3）$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

（4）$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

21. 辅助角公式（化一公式）

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi).$$

注：其中辅助角 φ 与点 (a,b) 在同一象限，且 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$.

特殊情况：$\sin\theta\pm\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\sin\theta\pm\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$.

练习

（1）已知函数 $f(x)=\sin(x+\theta)+\sqrt{3}\cos(x+\theta)$，$\theta\in(0,\pi)$ 为偶函数，则 $\theta=$________. 【参考答案：$\dfrac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$】

22. 三角函数中特殊的等式（了解即可）

（1）$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

（2）$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$.

（3）$\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$.

23. 证明三角恒等式的常用方法

（1）从一边开始证等于另一边，一般由繁到简.
（2）证明左右两边都等于同一个式子.
（3）运用分析法，找寻其充分条件.

24. 三角函数中的参数范围问题

（1）利用函数的有界性.
（2）利用函数的单调性.
（3）利用函数的对称性.
（4）利用函数值域.
（5）利用相互制约关系.
（6）利用判别式.
（7）利用数形结合思想.
（8）利用方程思想.

25. 三角函数求值常见公式变形

（1）$\tan x\pm\tan y=\tan(x\pm y)(1\mp\tan x\tan y)=\dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$.

（2）$\dfrac{1\pm\tan x}{1\mp\tan x}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\pm x\right)$.

（3）$1\pm\sin 2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$.

（4）$\sqrt{1\pm\sin\theta}=\sqrt{\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\pm\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\pm\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$.

（5）$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdots\cos 2^n\alpha=\dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$.

26. 三角变换的一般方法

（1）角的变换：包括角的分解和角的组合，如 $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)$，$\dfrac{\pi}{4}+x=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$，$\alpha=2\cdot\dfrac{\alpha}{2}$ 等.

（2）项的分拆.

（3）名的变换：化弦或化切法. 作化弦或化切可以减少函数种类，化异名为同名；对齐次三角函数式常作化切处理.

（4）次数的变换：升、降幂公式.

（5）形的变换：统一函数形式，注意运用代数运算.

（6）常数代换：如 1 的活用等.

练习

（1）已知 $\beta\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos\left(2\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)$ 的值.【参考答案：$\dfrac{41}{125}\sqrt{5}$】

（2）已知 α，β 为锐角，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\alpha+2\beta$ 的值.【参考答案：$\dfrac{\pi}{4}$】

27. 三角函数式化简、求值或证明的解题原则

基本原则：由繁到简，减名化角.

对三角函数式化简结果的一般要求：

（1）函数种类最少.

（2）项数最少.

（3）函数次数最低.

（4）能求值的求出值.

（5）尽量使分母不含三角函数.

（6）尽量使分母不含根式.

5.3 解三角形

1. 正弦定理

设 R 为 ΔABC 外接圆半径，a、b、c 为 ΔABC 三条边.

（1）$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

（2）正弦定理的变形：$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}$，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

2. 正弦定理

a、b、c 为 ΔABC 三条边.

（1）$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

（2）变形：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

（3）余弦定理的常见结论：

①$\angle C=60^\circ \Leftrightarrow c^2=a^2+b^2-ab$

②$\angle C=120^\circ \Leftrightarrow c^2=a^2+b^2+ab$

③$\angle C=30^\circ \Leftrightarrow c^2=a^2+b^2-\sqrt{3}ab$

④$\angle C=150^\circ \Leftrightarrow c^2=a^2+b^2+\sqrt{3}ab$

⑤$\angle C=45^\circ \Leftrightarrow c^2=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$

⑥$\angle C=145^\circ \Leftrightarrow c^2=a^2+b^2+\sqrt{2}ab$

3. 判断三角形形状

形状包括：正三角形、等腰三角形、直角三角形、等腰直角三角形. 判断形状时，将已知条件转化为边边关系，或将已知条件转化为角角关系.

若 c 为最大边，

（1）$a^2+b^2>c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ 为锐角三角形.

（2）$a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ 为直角三角形.

（3）$a^2+b^2<c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ 为钝角三角形.

注：在 ΔABC 中，$\sin 2A=\sin 2B$，可以得出 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$；而 $\cos 2A=\cos 2B$，可以得出 $2A=2B$，$\therefore A=B$.

4. 三角形面积公式

已知 ΔABC 三条分别为 a、b、c，R 为 ΔABC 外接圆半径，r 为 ΔABC 内接圆半径，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

（1）$S=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$.

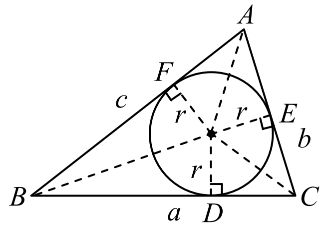
（2）$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

（3）$S=\dfrac{abc}{4R}$.

（4）$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

（5）$S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\dfrac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\dfrac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$.

（6）$S=\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br+\dfrac{1}{2}cr=pr$（**注：**将三角形面积分成三个小三角形面积）.

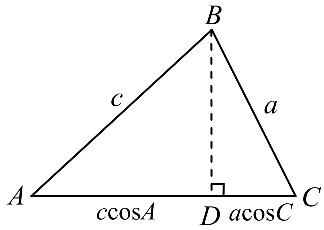


（7）$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

（8）$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

5. 三角形中常见规律

（1）三角形中的射影定理：在ΔABC中，$b=a\cdot\cos C+c\cdot\cos A$，⋯.



（2）在ΔABC中，$A<B\Leftrightarrow\sin A<\sin B$.

（3）在ΔABC中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$成等差数列$\Leftrightarrow B=60^\circ$.（学完等差数列后掌握）

（4）ΔABC为正三角形$\Leftrightarrow\angle A$、$\angle B$、$\angle C$成等差数列，边a、b、c成等比数列.（学完等差等比数列后掌握）

6. 三角形中的恒等式

三角形内角和定理：在ΔABC中，有$A+B+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi-(A+B)\Leftrightarrow\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A+B}{2}\Leftrightarrow$ $2C=2\pi-2(A+B)$.（看似简单，却经常使用）

以下各式一般都由三角形内角和定理推出.

（1）$\sin(A+B)=\sin C$，$\cos(A+B)=-\cos C$，$\tan(A+B)=-\tan C$.

（2）$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$，$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$，$\tan\dfrac{A+B}{2}=\cot\dfrac{C}{2}$.

（3）$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

（4）$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

（5）$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

（6）$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$.

（7）$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

（8）$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$.

（9）$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$. **注：**由$C=\pi-(A+B)$两边取正切.

（10）$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$. **注：**由$\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A+B}{2}$两边取正切.

7. 三角应用问题分类

（1）以直角三角形或斜三角形为模型的问题.

（2）以函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 为模型的问题.

8. 正余弦定理解决的常见实际问题

（1）测量距离问题.

（2）测量高度问题.

（3）测量角度问题.

（4）计算面积问题.

（5）综合问题.

9. 解三角形常见的类型及解法

在三角形的 6 个元素中要知 3 个才能求解.

（1）已知：一边和两角（如 a，B，C），一般解法：由 $A+B+C=\pi$，求 $\angle A$；由正弦定理求出 b，c. 在有解时只有一解.

（2）已知：两边和夹角（如 a，b，C），一般解法：由余弦定理求出第三边；由正弦定理求出小边所对的角；再由 $A+B+C=\pi$ 求出另一角. 在有解时只有一解.

（3）已知：三边（如 a，b，c），一般解法：由余弦定理求出 $\angle A$、$\angle B$；再利用 $A+B+C=\pi$ 求出 $\angle C$. 在有解时只有一解.

（4）已知：两边和其中一边的对角（如 a，b，A），一般解法：由正弦定理求出 $\angle B$；利用 $A+B+C=\pi$ 求出 $\angle C$；再利用正弦定理或余弦定理求 c. 在有解时可有一解、两解或无解.

10. 三角形存在性讨论

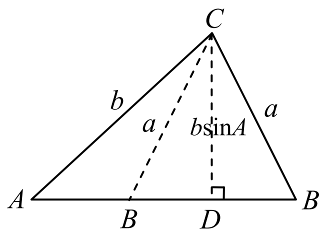
已知两边及其中一边的对角，用正弦定理，可能有一解、两解或无解. 如在三角形中，已知 a，b 和 $\angle A$.

若 $\angle A$ 为锐角，

（1）若 $a=b\sin A$ 或 $a\ge b$ 时，一解.

（2）若 $b\sin A<a<b$ 时，两解.

（3）若 $a<b\sin A$ 时，无解.

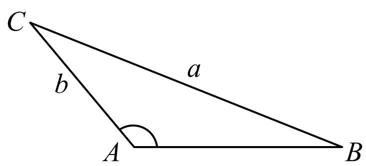


注：此类问题画图时先画已知角.

若 $\angle A$ 为钝角或直角，

（1）若 $a>b$ 时，一解.

（2）若 $a\le b$ 时，无解.



练习

（1）ΔABC 中，已知 $a=1$，$b=2$，$\angle A=30^\circ$，满足条件的三角形共有______个.【参考答案：1】

11. 应用正余弦定理解三角形应用题的一般步骤

（1）分析：理解题意，分清已知与未知，画出示意图.

（2）建模：根据已知条件与求解目标，把已知量与求解量尽量集中在有关的三角形中，建立一个解斜三角形的数学模型.

（3）求解：利用正弦定理或余弦定理有序地解出三角形，求得数学模型的解.

（4）检验：检验上述所求的角是否具有实际意义，从而得出实际问题的解.

12. 仰角与俯角

（1）视线与水平线的夹角，当视线在水平线之上时，称为仰角.

（2）视线与水平线的夹角，当视线在水平线之下时，称为俯角.

13. 解斜三角形应用题的一般步骤

（1）准确理解题意，分清已知与所求.

（2）依题意画出示意图.

（3）分析与问题有关的三角形.

（4）运用正余弦定理，有序地解相关的三角形，逐步求解问题的答案.

（5）注意方程思想的运用.

（6）要把立体几何知识与平面几何知识综合运用.

第六章 平面向量

※本章内容※

公式定理及常见规律

6.1 平面向量

1. 向量相关概念

（1）向量：既有大小，又有方向的量，而与起点无关.

注：相等的向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 长度相等且方向相同.

（2）零向量：模等于 0，与任何非零向量都共线，记为 $\boldsymbol{0}$. 零向量与任一向量平行. 零向量的相反向量仍是零向量.

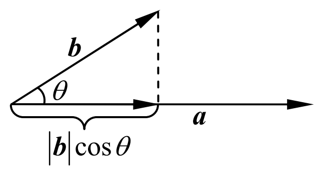
（3）单位向量：模等于 1，即 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

（4）共线向量（平行向量）：方向相同或相反的非零向量.

注：①相等向量一定是共线向量，但共线向量不一定相等；②两个向量平行与两条直线平行是不同的两个概念：两个向量平行包含两个向量共线，但两条直线平行不包含两条直线重合；③平行向量无传递性，因为有 $\boldsymbol{0}$；④三点 A、B、C 共线 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 共线.

（5）方向向量：如果直线 l 的斜率为 k，则 $\boldsymbol{a}=(1,k)$ 是直线 l 的一个方向向量.

（6）向量的投影：$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影是一个实数，但不一定大于 0，值为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义是 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的积.



练习

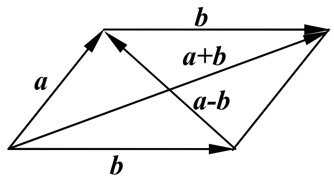
（1）下列命题：①若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；②两个向量相等的充要条件是这两个向量的起点和终点都相同；③若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则 $ABCD$ 是平行四边形；④若 $ABCD$ 是平行四边形，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$；⑤若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；⑥若 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\,//\,\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{c}$. 其中正确的是________. 【参考答案：④，⑤】

（2）已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为________. 【参考答案：$\dfrac{12}{5}$】

2. 向量的加减法

（1）向量加法：可运用三角形法则或平行四边形法（适用于不共线的向量）.

（2）向量的减法：用“三角形法则”. 减向量的终点指向被减向量的终点. **注：**此处减向量与被减向量的起点相同.



练习

（1）化简：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=$________，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=$________，$\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)=$________.

【参考答案：$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CB}$，0】

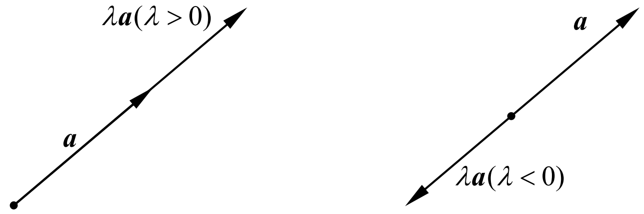
（2）若正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=$________. 【参考答案：$2\sqrt{2}$】

（3）若 O 是 ΔABC 所在平面内一点，且满足 $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}\right|$，则 ΔABC 的形状为________.

【参考答案：直角三角形】

3. 实数与向量的积

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度和方向规定如下：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. **注：**$\lambda\boldsymbol{a}=0$.



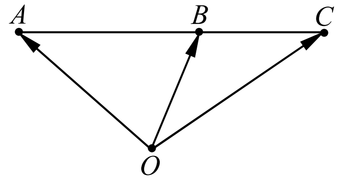
4. 向量相关定理

（1）定理 1：$\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，若存在一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线（注意 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$）.

（2）定理 2：若向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线，则存在一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

（3）平面向量的基本定理：如果 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数 λ_1、λ_2，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

（4）三点共线定理：平面上三个点共线的充要条件是存在实数 α、β，使 $\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}$，其中 $\alpha+\beta=1$.



练习

（1）若 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(-1,2)$，则 $\boldsymbol{c}=$______$\boldsymbol{a}+$______$\boldsymbol{b}$. 【参考答案：$\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$】

（2）已知 ΔABC 中，点 D 在 BC 边上，且 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，则 $r+s=$_____. 【参考答案：0】

5. 平面向量的数量积（内积）定义

两个向量的夹角：对于非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\angle AOB=\theta$（$0\le\theta\le\pi$）称为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角. 当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 反向；当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 垂直.

注： 零向量与任一向量的数量积是 0；数量积是一个实数，不再是一个向量.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$（$0^\circ\le\theta\le180^\circ$）.

练习

（1）ΔABC 中，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，$|\overrightarrow{BC}|=5$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$______. 【参考答案：$-9$】

（2）已知 $\boldsymbol{a}=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则 k 等于_____. 【参考答案：1】

6. 非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角 θ 的计算公式

（1）$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$；

（2）$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

练习

（1）已知 ΔOFQ 的面积为 S，且 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{FQ}=1$，若 $\dfrac{1}{2}<S<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{FQ}$ 的夹角 θ 的取值范围是______. 【参考答案：$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$】

7. 向量的运算律

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

（2）结合律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

（3）分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

注： $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是错误的，即向量的“乘法”不满足结合律；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，即两向量不能相除.

练习

（1）下列命题中：① $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；② $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；③ $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2$；④若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$；⑤若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；⑥ $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$；⑦ $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$；⑧ $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$；⑨ $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$. 其中正确的是______. 【参考答案：①，⑥，⑨】

8. 向量运算中乘方的计算

（1）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+|\boldsymbol{b}|^2$

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+\boldsymbol{c}^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle+2|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle$

9. 向量运算的坐标表示

（1）设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$.

（2）设 $A=(x_1,y_1)$，$B=(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

10. 向量的数量积在解题中的应用

（1）解决平行、垂直问题.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，且 $\boldsymbol{b}\neq 0$，则

$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$，

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}\neq 0$）$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

练习

（1）若向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,x)$，当 $x=$_______时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且方向相同.【参考答案：2】

（2）已知 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(4,x)$，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{u}\parallel\boldsymbol{v}$，则 $x=$_______.【参考答案：4】

（3）已知 $\overrightarrow{PA}=(k,12)$，$\overrightarrow{PB}=(4,5)$，$\overrightarrow{PC}=(10,k)$，则 $k=$_______时，A、B、C 共线.【参考答案：-2 或 11】

（4）已知 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$，$\overrightarrow{OB}=(3,m)$，若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则 $m=$_______.【参考答案：$\frac{3}{2}$】

（5）已知 $\boldsymbol{n}=(a,b)$，向量 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{m}$，且 $|\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{m}|$，则 $\boldsymbol{m}$ 的坐标是_______.【参考答案：$(b,-a)$ 或 $(-b,a)$】

（2）求长度问题.

向量长度：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

两点间的距离：设 $A=(x_1,y_1)$，$B=(x_2,y_2)$，则 $d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

（3）求夹角问题.

若非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为锐角或零角；

②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为钝角或平角；

③$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为直角.

练习

（1）已知 $\boldsymbol{a}=(\lambda,2\lambda)$，$\boldsymbol{b}=(3\lambda,2)$，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，则 λ 的取值范围是_______.【参考答案：$\lambda<-\frac{4}{3}$ 或 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq\frac{1}{3}$】

11. 解向量模的解法

（1）先求向量的坐标 (x,y)，再求向量的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$，$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$.

（2）求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，可以用公式 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$，转化为数量积.

练习

（1）已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，它们的夹角为 60°，那么 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$_______.【参考答案：$\sqrt{13}$】

（2）已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 等于_______.【参考答案：$\sqrt{23}$】

12. 线段的定比分点坐标公式

（1）设 $P(x,y)$，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OP_1}+(1-t)\overrightarrow{OP_2}\left(t=\frac{1}{1+\lambda}\right).$$ （仅供参考）

（2）中点坐标公式：$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$.

练习

（1）若 $M(-3,-2)$，$N(6,-1)$，且 $\overrightarrow{MP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$，则点 P 的坐标为_______.【参考答案: $\left(-6,-\frac{7}{3}\right)$】

（2）已知 $A(a,0)$，$B(3,2+a)$，直线 $y=\frac{1}{2}ax$ 与线段 AB 交于 M，且 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，则 a 等于_______.

【参考答案: 2 或 -4】

13. 向量与平移

（1）设点 $P(x,y)$ 是图形 F 上任意一点，按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$ 平移后，对应点为 $P'(x',y')$，则 $\begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k \end{cases}$.

（2）函数 $y=f(x)$ 的图像 C 按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$ 平移后得到图像 C'，则 C' 的函数解析式为 $y=f(x-h)+k$.

（3）图像 C' 按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$ 平移后得到图像 C，若 C 的解析式 $y=f(x)$，则 C' 的函数解析式为 $y=f(x+h)-k$.

（4）曲线 C：$f(x,y)=0$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$ 平移后得到图像 C'，则 C' 的方程为 $f(x-h,y-k)=0$.

（5）向量 $m=(x,y)$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$ 平移后得到的向量仍然不变. **注：**向量与起点无关.

练习

（1）$y=x^2$ 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移得到 $y=x^2+2x-1$，则 $\boldsymbol{a}=$_________.【参考答案: $(-1,-2)$】

（2）按向量 $\boldsymbol{a}$ 把 $(2,-3)$ 平移到 $(1,-2)$，则按向量 $\boldsymbol{a}$ 把点 $(-7,2)$ 平移到点_______.【参考答案: $(-8,3)$】

（3）函数 $y=\sin 2x$ 的图像按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后，所得函数的解析式是 $y=\cos 2x+1$，则 $\boldsymbol{a}=$_________.

【参考答案: $\left(-\frac{\pi}{4},1\right)$】

14. 向量中一些常用的结论

（1）一个封闭图形的首尾连接而成的向量和为零向量.

（2）$\left||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\right|\le|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

特别地，

当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向或有 $\boldsymbol{0}$ $\Leftrightarrow |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\ge\left||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\right|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 反向或有 $\boldsymbol{0}$ $\Leftrightarrow |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\ge\left||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\right|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线 $\Leftrightarrow \left||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\right|<|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

（3） ΔABC 三个顶点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， $C(x_3,y_3)$，则 ΔABC 重心的坐标为 $G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

练习

（1）若 ΔABC 的三边的中点分别为 $(2,1)$、$(-3,4)$、$(-1,-1)$，则 ΔABC 的重心的坐标为__________.【参考答案：$\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$】

15. 三角形“四心”与向量

设 O 为 ΔABC 所在平面上的一点，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对边分别为 a、b、c，则：

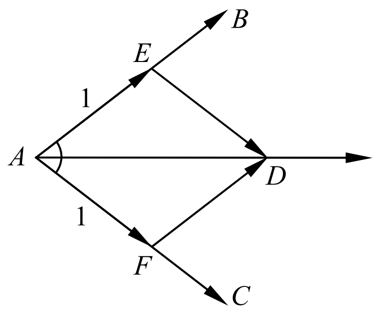
（1）O 为 ΔABC 外心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$.

（2）O 为 ΔABC 重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

（3）O 为 ΔABC 垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

（4）O 为 ΔABC 内心 $\Leftrightarrow a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

（5）向量 $\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$（$\lambda\neq 0$）所在直线过 ΔABC 的内心（是 $\angle BAC$ 的角平分线所在直线）.

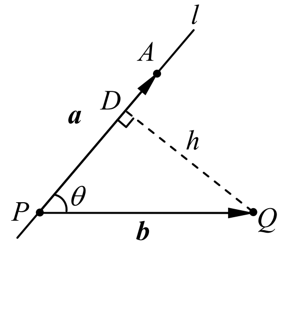


16. 向量表示线段的中点

平面内有任意的三个点 O、A、B，若 C 是线段 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

17. 点 Q 到直线 l 的距离

$\because \begin{cases} h=|\boldsymbol{b}|\sin\theta \\ \cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\end{cases}$，$\therefore h=\dfrac{\sqrt{\left(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\right)^2-\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\right)^2}}{|\boldsymbol{a}|}$，其中，点 P 在直线 l 上，直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PA}$，向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PQ}$.



第七章 不等式

※本章内容※

公式定理及常见规律

7.1 解不等式

1. 不等式的性质

（1）对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

（2）传递性：$a>b$，$b>c \Rightarrow a<c$.

（3）等量可加性：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$.

（4）不等量乘正量：$c>0$，$a>b \Rightarrow ac>bc$.

（5）同向不等式相加：$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

（6）异向不等式相减：$a>b$，$c>d \Rightarrow a-d>b-c$.

（7）同向不等式相乘：$a>b$，$c>d \Rightarrow ac>bd$.

（8）异向不等式相除：$a>b$，$c>d \Rightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

（9）不等式取倒数：$a>b$，$ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.（注：此时 a，b 同号）

（10）不等式的乘方：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$（$n\in N^*$，$n\geq 1$）.

（11）不等式的开方：$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in N^*$，$n\geq 2$）.

2. 一元一次不等式 $ax>b\ (a\neq 0)$ 的解法

（1）若 $a>0$，解集为 $\left\{x\middle|x>\frac{b}{a}\right\}$.

（2）若 $a<0$，解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{b}{a}\right\}$.

3. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0\ (a>0)$ 的解集

解一元二次不等式的步骤：①将二次项系数化为正；②解相应的方程；③画出相应的函数图像；④写出解集.

令 $f(x)=ax^2+bx+c$.

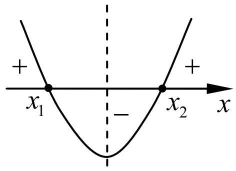
（1）当 $\Delta=b^2-4ac>0$，

若 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1、x_2（其中 $x_1<x_2$），

$ax^2+bx+c>0$ 解集为 $\{x|x<x_1或x>x_2\}$（解在两边），

$ax^2+bx+c<0$ 解集为 $\{x|x_1<x<x_2\}$（解在中间）.

简言之：大于 0 解在两边，小于 0 解在中间.

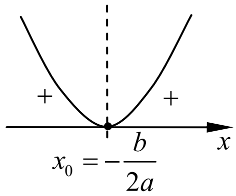


（2）当 $\Delta=b^2-4ac=0$，

若 $ax^2+bx+c=0$ 的两等根为 x_0，

$ax^2+bx+c>0$ 解集为 $\left\{x\middle|x\neq x_0\right\}$，

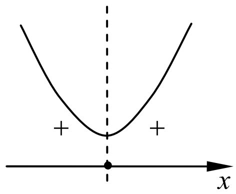
$ax^2+bx+c<0$ 解集为 $\varnothing$.



（3）当 $\Delta=b^2-4ac<0$，

$ax^2+bx+c>0$ 解集为 $\mathbf{R}$，

$ax^2+bx+c<0$ 解集为 $\varnothing$.



注：当 $a<0$ 时，两边同时乘以 -1，不等式转化为 $a>0$ 的情况.

4. 用一元二次不等式解决实际问题的操作步骤

（1）理解题意，搞清量与量之间的关系.

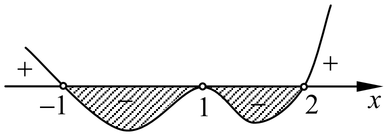
（2）建立相应的不等关系，把实际问题抽象为数学中的一元二次不等式问题.

（3）解这个一元二次不等式得到实际问题的解（要特别注意符合实际意义）.

5. 高次不等式的解法

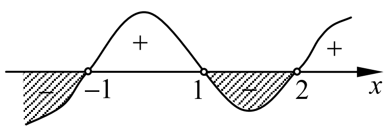
先将最高次的系数化为正数，然后分解因式，将相应方程的所有根画在数轴上，采取“穿针引线”(**注**：“奇穿，偶切”，从最大根的右上方开始）的方法得出不等式的解集. 也称“标根法”、“穿轴法”. 如

（1）$(x+1)(x-1)^2(x-2)^3<0$，图为：



$\therefore$解集为 $(-1,1)\cup(1,2)$

（2）$(x+1)(x-1)(x-2)^3<0$，图为：



∴解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,2)$

练习

（1）解不等式 $\dfrac{(x+1)(x-5)}{x+4}\ge 0$．【参考答案：$(-4,-1]\cup[5,+\infty)$】

（2）解不等式 $(x-1)(x+2)^2\ge 0$．【参考答案：$\{x|x\ge 1或x=-2\}$】

6. 无理不等式

（1）$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$．

（2）$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ f(x)>[g(x)]^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)<0\end{cases}$．

（3）$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)>0\\ f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$．

7. 指数不等式与对数不等式

（1）当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$．

（2）当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$．

8. 分式不等式

（1）$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$．

（2）$\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\ge 0\\ g(x)\ne 0\end{cases}$．

9. 含有绝对值的不等式

当 $a>0$ 时，有

（1）$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$．

（2）$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$．

10. 绝对值不等式的解法

（1）分段讨论法（最后结果应取各段的并集）．

注：含有多个绝对值符号的不等式可用“按零点分区间讨论”的方法来解.

练习

（1）解不等式$\left|2-\frac{3}{4}x\right|\geq 2-\left|x+\frac{1}{2}\right|$．【参考答案：$x\in\mathbf{R}$】

（2）利用绝对值的定义.

（3）数形结合.

练习

（1）解不等式$|x|+|x-1|>3$．【参考答案：$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$】

（4）两边平方.

注：通过两边平方去绝对值，需要注意的是不等号两边为非负值.

练习

（1）若不等式$|3x+2|\geq|2x+a|$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，求实数a的取值范围.【参考答案：$\left\{\frac{4}{3}\right\}$】

11. 不等式大小比较的常用方法

（1）作差：作差后通过分解因式、配方等手段判断差的符号得出结果.

（2）作商：常用于分数指数幂的代数式.

（3）分析法.

（4）平方法.

（5）分子（或分母）有理化.

（6）利用函数的单调性.

（7）寻找中间量或放缩法.

（8）图像法.

其中比较法（作差、作商）是最基本的方法.

12. 解含参数不等式的方法

解含参数的不等式时，首先应注意考查是否需要进行分类讨论.

（1）一元一次不等式的一次项系数含有关于参数a的代数式$f(a)$时，需要对$f(a)>0$、$f(a)=0$、$f(a)<0$进行讨论.

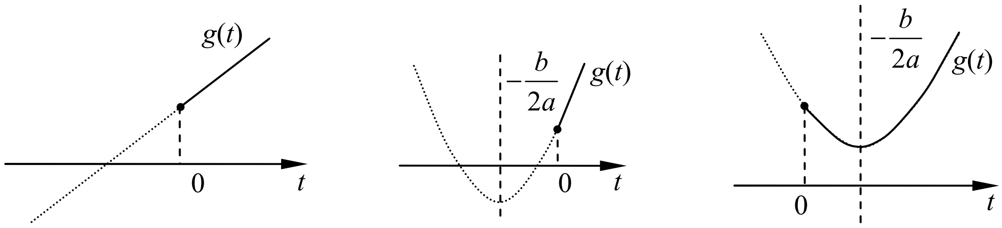
（2）一元二次不等式若二次项含有关于参数a的代数式$f(a)$时，需要对$f(a)=0$与$f(a)\neq 0$进行讨论，而当$f(a)\neq 0$时，又需对判别式讨论，分$\Delta>0$、$\Delta=0$、$\Delta<0$来讨论. 比较两个根的大小，设根为x_1、x_2，若含参数，要分$x_1>x_2$、$x_1=x_2$、$x_1<x_2$讨论.

（3）若对数或指数的底数中含有参数a，需分$a>1$和$0<a<1$讨论.

13. $f(x)=ax^4+bx^2+c>0$恒成立的充要条件

$f(x)=ax^4+bx^2+c>0$恒成立的充要条件为$\begin{cases}a=0\\b\geq 0\\c>0\end{cases}$或$\begin{cases}a>0\\-\frac{b}{2a}\leq 0\\c>0\end{cases}$或$\begin{cases}a>0\\-\frac{b}{2a}>0\\b^2-4ac<0\end{cases}$.

（**提示**：先将问题转化为$g(t)=at^2+bt+c>0$（$t\geq 0$），即$t\geq 0$时，$g(t)$恒大于 0）



14. 不等式恒成立、能成立、恰成立等问题

不等式恒成立问题，常应用函数方程思想和“分离常数法”转化为最值问题. 也可抓住所给不等式的结构特征，利用数形结合法求解.

（1）恒成立问题.

①若不等式 $f(x)>A$ 在区间 D 上恒成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\min}>A$；

②若不等式 $f(x)<B$ 在区间 D 上恒成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max}>B$.

练习

（1）设实数 x、y 满足 $x^2+(y-1)^2=1$，当 $x+y+c\geq 0$ 时，求 c 的取值范围.【参考答案: $\left[\sqrt{2}-1,+\infty\right)$】

（2）若不等式 $|x-4|+|x-3|>a$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 a 的取值范围. 【参考答案: $a<1$】

（3）若不等式 $x^2-2mx+2m+1>0$ 对 $0\leq x\leq 1$ 的所有实数 x 都成立，求 m 的取值范围. 【参考答案: $m>-\frac{1}{2}$】

（2）能成立问题.

①若在区间 D 上存在实数 x 使不等式 $f(x)>A$ 成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max}>A$；

②若在区间 D 上存在实数 x 使不等式 $f(x)<B$ 成立，则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\min}<B$.

练习

（1）已知不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上的解集不是空集，求实数 a 的取值范围.【参考答案: $a>1$】

（3）恰成立问题.

①若不等式 $f(x)>A$ 在区间 D 上恰成立，则等价于不等式 $f(x)>A$ 的解集为 D；

②若不等式 $f(x)<B$ 在区间 D 上恰成立，则等价于不等式 $f(x)<B$ 的解集为 D.

练习

（1）$x^2-5+a<0$ 的解集恰为 $(-1,6)$，求实数 a 的取值范围. 【参考答案: $a=-6$】

7.2 常见不等式

1. 常用不等式

（1）重要不等式：$a,b\in\mathbf{R}\Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”号）.

（2）基本不等式（均值不等式）：$a,b\in\mathbf{R}^+\Rightarrow \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”号）.

注：①用均值不等式求函数的最值时必须同时具备“一正、二定、三相等”三个条件才能应用，尤其要注意定值；②如果等号不能成立，可考虑用导数求最值.

均值不等式基本应用：①放缩、变形；②求函数最值.

常用的方法为：拆、凑、平方.

练习

（1）求函数 $y=4x-\dfrac{9}{2-4x}(x>\dfrac{1}{2})$ 的最小值________. 【参考答案：8】

（2）求 $y=2-3x-\dfrac{4}{x}(x>0)$ 的最大值. 【参考答案：$2-4\sqrt{3}$】

（3）$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$（$a>0$，$b>0$，$c>0$）.

（4）$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$（$a,b\in\mathbf{R}$）（当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号）.

（5）$|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$.

（6）$\big||a|-|b|\big|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$.

（7）加糖不等式：$a>b>0$，$m>0$，$n>0$，则 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}<1<\dfrac{a+n}{b+n}<\dfrac{a}{b}$.

2. 加权平均数、算术平均数、几何平均数、调和平均数之间的关系

$\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}\geq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号.

3. 极值定理

已知 x、y 都是正数，

（1）若积 xy 是定值 p，则当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$.

（2）若和 $x+y$ 是定值 s，则当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\dfrac{1}{4}s^2$.

简言之：一正二定三相等，和定积最大，积定和最小.

推广：已知 $x,y\in\mathbf{R}$，则有 $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$.

（1）若积 xy 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|x+y|$ 最大；当 $|x-y|$ 最小时，$|x+y|$ 最小.

（2）若和 $|x+y|$ 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|xy|$ 最小；当 $|x-y|$ 最小时，$|xy|$ 最大.

4. 柯西不等式

（1）$\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$（当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ 时取“=”号）.

（2）$\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq|a_1b_1+a_2b_2|$.

（3）$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq\sqrt{\left(a_1+b_1\right)^2+\left(a_2+b_2\right)^2}$.

（4）$\sqrt{\left(a_1-b_1\right)^2+\left(a_2-b_2\right)^2}+\sqrt{\left(b_1-c_1\right)^2+\left(b_2-c_2\right)^2}\geq\sqrt{\left(a_1-c_1\right)^2+\left(a_2-c_2\right)^2}$.

（5）$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|\geq|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|$.

练习

（1）若正数 x，y 满足 $x+2y=1$，求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值. 【参考答案：$3+2\sqrt{2}$】

5. 排序不等式

设 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$，$b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$（$a_i, b_i \in \mathbf{R}$）为两组数据，$c_1$、$c_2$、…、$c_n$ 为 b_1、b_2、…、b_n 的任一排列，则有 $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \le a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$．等号成立 $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$．

简记作：反序和≤乱序和≤顺序和.

6. 贝努力不等式

（1）设 $x > -1$，且 $x \ne 0$，n 为大于 1 的自然数，则 $(1+x)^n \ge 1 + nx$，当且仅当 $x = 0$ 时等号成立.

（2）设 a 为有理数，$x > -1$.

①如果 $0 < a < 1$，则 $(1+x)^a \le 1 + ax$；

②如果 $a < 0$ 或者 $a > 1$，则 $(1+x)^a \ge 1 + ax$，当且仅当 $x = 0$ 时等号成立.

7. 不等式证明方法

（1）作差比较法.

练习

（1）已知：$a+b+c=1$，求证：$a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{1}{3}$.

【解析】左－右 $= \dfrac{1}{3}(3a^2+3b^2+3c^2-1) = \dfrac{1}{3}\left[3a^2+3b^2+3c^2-(a+b+c)^2\right]$

$= \dfrac{1}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$.

（2）作商比较法.

练习

（1）设 a、b、$c \in \mathbf{R}^+$，且 $a \ne b \ne c$，求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c} > a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

【解析】 $\dfrac{\text{左}}{\text{右}} = \dfrac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}} = a^{a-b}a^{a-c}b^{b-c}b^{b-a}c^{c-a}c^{c-b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} \cdot \left(\dfrac{b}{c}\right)^{b-c} \cdot \left(\dfrac{c}{a}\right)^{c-a}$. 当 $a > b > 0$ 时，$\dfrac{a}{b} > 1$，$a-b>0 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$；当 $0 < a < b$ 时，$\dfrac{a}{b} \in (0,1)$，$a-b<0 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$. $\therefore$ 不论 $a > b$ 还是 $a < b$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$. 同理可证，$\left(\dfrac{b}{c}\right)^{b-c} > 1$，$\left(\dfrac{c}{a}\right)^{c-a} > 1$，$\therefore \dfrac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}} > 1$，$\therefore a^{2a}b^{2b}c^{2c} > a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

（3）公式法.

练习

（1）设 $a > 0$，$b > 0$，且 $a+b=1$，求证：① $a^4+b^4 \ge \dfrac{1}{8}$；② $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2 \ge \dfrac{25}{2}$.

【解析】①由公式：$\sqrt{\dfrac{A^2+B^2}{2}} \ge \dfrac{A+B}{2} \Rightarrow \dfrac{A^2+B^2}{2} \ge \left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2$ 得：

$\dfrac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \ge \left[\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right]^2 = \dfrac{1}{16} \Rightarrow a^4+b^4 \ge \dfrac{1}{8}$；

② $\dfrac{A^2+B^2}{2} \geq \left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2 \Rightarrow A^2+B^2 \geq \dfrac{(A+B)^2}{2}$，∴左

$\geq \dfrac{1}{2}\left[\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)\right]^2 = \dfrac{1}{2}\left[a+b+\dfrac{a+b}{ab}\right]^2 = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{ab}\right)^2$.

$\because ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{ab} \geq 4$，∴左 $\geq \dfrac{1}{2}(1+4)^2 = \dfrac{25}{2}$.

（4）放缩法.

常用的放缩技巧有：

① $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \dfrac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$；

② $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$， $\dfrac{1}{k^2} > \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$；

③ $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{(k-1)(k+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}\right)$；

④添加或舍去一些项，如： $\sqrt{a^2+1} > |a|$， $\sqrt{n(n+1)} > n$；

⑤将分子或分母放大（或缩小）；

⑥利用基本不等式，如：$\lg 3 \cdot \lg 5 < \left(\dfrac{\lg 3+\lg 5}{2}\right)^2 = \lg^2\sqrt{15} < \lg^2\sqrt{16} = \lg^2 4$，$\sqrt{n(n+1)} < \dfrac{n+(n+1)}{2}$.

注：放缩法的使用应该有利于计算顺利进行. 如 $\sqrt{n^2+n+1} = \sqrt{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}} > n+\dfrac{1}{2}$.

练习

（1）求证： $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$（ $n>1$ ）.

【解析】$\because n>1$，$\therefore \log_n(n+1)>0$，∴只要证： $\log_{n+1} n \cdot \log_{n+1}(n+2) < 1$ 即可.

左 $< \left[\dfrac{1}{2}\left(\log_{n+1} n+\log_{n+1}(n+2)\right)\right]^2 = \left[\dfrac{1}{2}\log_{n+1} n(n+2)\right]^2 < \left[\dfrac{1}{2}\log_{n+1}(n^2+2n+1)\right]^2 = \left[\dfrac{1}{2}\log_{n+1}(n+1)^2\right]^2 = 1$.

（5）分析法.

练习

（1）设 $a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbf{R}^+$，求证： $\sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \geq \sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2}$. 【参考答案：平方，利用分析法】

（6）归纳猜想、数学归纳法.

练习

（1）设 $a \geq 0$， $b \geq 0$，求证： $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leq \dfrac{a^n+b^n}{2}$. 【参考答案：利用数学归纳法加以证明】

（7）换元法.

换元的目的是减少不等式中的变量，以使问题化难为易、化繁为简. 常用的换元有三角换元和代数换元. 如：

①已知 $x^2+y^2=r^2$，可设 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$；

②已知 $x^2+y^2\le 1$，可设 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$（$0\le r\le 1$）；

③已知 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可设 $x=a\cos\theta$， $y=b\sin\theta$；

④已知 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可设 $x=a\sec\theta$， $y=b\tan\theta$.

（8）构造法.

通过构造函数、方程、数列、向量或不等式来证明不等式.

（9）反证法：正难则反.

（10）综合法：由因导果.

7.3 不等式与线性规划

1. 二元一次不等式表示平面区域

（1）二元一次不等式 $Ax+By+C>0$（<0）在平面直角坐标系中表示直线 $Ax+By+C=0$ 某一侧所有点组成的点的集合.

（2）把在直线 $Ax+By+C=0$ 同一侧任意一点 (x,y) 代入 $Ax+By+C$，所得到的实数符号都相同.

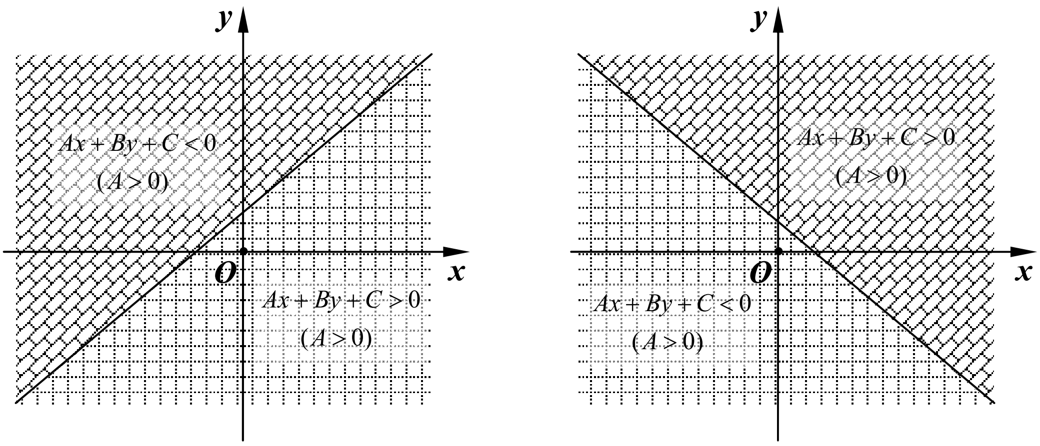
（3）把直线画成虚线以表示区域不包括边界直线，否则画实线.

2. $Ax+By+C>0$（或 <0）所表示的平面区域

设直线 l： $Ax+By+C=0$，

（1）若 $A>0$，则在坐标平面内从左到右的区域依次表示 $Ax+By+C<0$， $Ax+By+C=0$， $Ax+By+C>0$.

注：可这样记忆：直线坐标小于 0，直线右边大于 0.



（2）若 $A<0$，则反之.

注：建议遇到此种情况时，不等式两边同乘以 -1，转化为（1）的情形.

3. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$（或 <0）所表示的平面区域

设曲线 C：$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$A_1>0$， $A_2>0$， $A_1A_2B_1B_2\ne 0$），则

（1）$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$ 所表示的平面区域是左右两部分.

（2）$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0$ 所表示的平面区域是上下两部分.

4. 线性规划概念

（1）线性约束条件：由条件列出的一次不等式组或方程组.

（2）线性目标函数：由条件列出的一次函数表达式.

（3）线性规划问题：求线性目标函数在约束条件下的最值问题.

（4）可行解：满足线性约束条件的解.

（5）可行域：所有可行解组成的集合.

（6）最优解：使线性目标函数取得最大值或最小值的可行解.

5. 线性规划问题的解题方法和步骤

图解法：借助直线（把线性目标函数看作斜率确定的一组平行线）与平面区域（可行域）有交点时，直线在 y 轴上的截距的最大值或最小值即为所求. 解题步骤：

（1）设未知数.

（2）列出约束条件，建立目标函数.

（3）画出可行域.

（4）作平行线，使直线与可行域有交点.

（5）求出最优解，并作答.

6. 求目标函数 $z=ax+by+c$ 的最值步骤

（1）作出可行域.

（2）作出直线 l_0： $ax+by=0$.

（3）确定 l_0 的平移方向，依可行域判断取得最优解的点.

（4）解相关方程，求出最优解，从而得出目标函数的最值.

注：①若 $a>0$，将 l_0 向右平移，$z=ax+by+c$ 值越来越大；向左平移，z 值越来越小；②若 $a<0$，则反之.

练习

（1）设目标函数 $z=2x+y$，变量 x、y 满足 $\begin{cases} x-4y+3<0 \\ 3x+5y\le 25 \\ x\ge 1 \end{cases}$，则有（　　）. 【参考答案：D】

A. $z_{\max}=12$，$z_{\min}=3$　　B. $z_{\max}=12$，z 无最小值

C. $z_{\min}=3$，z 无最大值　　D. 既无最大值，也无最小值

7. 求目标函数的最值

（1）求 $z=mx+ny$ 的最值，就是先求经过可行域内点的平行直线 $y=-\dfrac{m}{n}x+\dfrac{z}{n}$ 在 y 轴上截距的最值，再求出 z 的最值.

（2）求 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最值，就是求可行域内的点 $P(x,y)$ 到坐标原点的距离的最值.

（3）求 $\dfrac{y}{x}$ 的最值，就是求可行域内的点 $P(x,y)$ 和坐标原点连线的斜率的最值.

（4）求 $\dfrac{y-b}{x-a}$ 的最值，就是求可行域内的点 $P(x,y)$ 与点 (a,b) 连线的斜率的最值.

练习

（1）已知变量 x 、 y 满足 $\begin{cases} x-4y\le 0 \\ 3x+4y\le 12 \\ x\ge 0 \end{cases}$，求 $\dfrac{y-5}{x-2}$ 的值域. 【参考答案: $\left(-\infty,-\dfrac{17}{4}\right)\cup[1,+\infty)$ 】

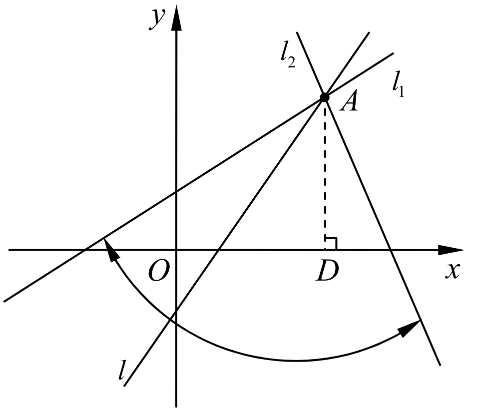
A. $z_{\max}=12$， $z_{\min}=3$　　B. $z_{\max}=12$， z 无最小值

C. $z_{\min}=3$， z 无最大值　　D. 既无最大值，也无最小值

8.斜率范围的确定

过点 A 的直线 l_1、l_2 的斜率分别为 k_1、k_2（ $k_2<k_1$ ），则过点 A 的直线要求在如下图范围内的斜率 k 的范围是 $k>k_1$ 或 $k<k_2$ ，因为指定范围内包含了斜率不存在的情况.

若指定范围内不包含斜率不存在的情况，则 $k_2<k<k_1$.



第八章 直线与圆

※本章内容※

公式定理及常见规律

8.1 直线方程

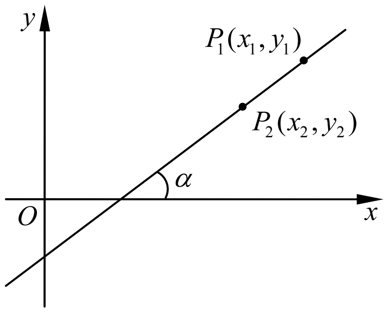
1. 斜率公式

（1）$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，其中 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$.

（2）$k=\tan\alpha$（α 为直线倾斜角，非直角）.

（3）直线的倾斜角与斜率的变化关系：当倾斜角是锐角时，斜率 k 随着倾斜角 α 的增大而增大；当 α 是钝角时，k 与 α 同增减.

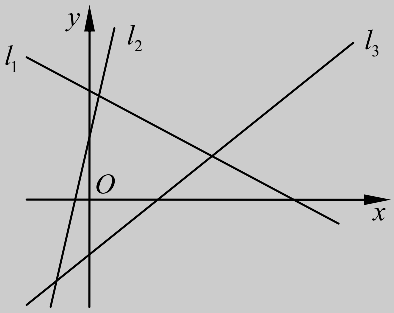
（4）直线越“陡”，斜率的绝对值越大.（比较有用）



练习

（1）下图中若直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别是 k_1，k_2，k_3，则（　　）.【参考答案：D】

A. $k_1<k_2<k_3$　　B. $k_3<k_1<k_2$　　C. $k_3<k_2<k_1$　　D. $k_1<k_3<k_2$



2. 几个重要的角及其范围

（1）直线的倾斜角 α，$\alpha\in[0,\pi)$.

（2）l_1 到 l_2 的角，指从 l_1 按逆时针方向旋转到 l_2 所成的角 β，$\beta\in[0,\pi)$.

（3）l_1 到 l_2 的夹角为 θ，$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. 直线的方向向量与斜率的关系

若直线的斜率为 k，则它的一个方向向量可以表示为 $(1, k)$.

4. 直线的五种方程

（1）点斜式：$y - y_1 = k(x - x_1)$，其中，直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1)$，且斜率为 k.

（2）斜截式：$y = kx + b$，其中，b 为直线 l 在 y 轴上的截距.

（3）两点式：$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$（$y_1 \neq y_2$），其中，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$x_1 \neq x_2$.

（4）截距式：$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$，其中，$a$、$b$ 分别为直线的横、纵截距，a、$b \neq 0$.

注：截距不是距离，截距相等时不要忘了过原点的特殊情形.

（5）一般式：$Ax + By + C = 0$，其中 A、B 不同时为 0.

5. 两条直线的平行和垂直

（1）若 l_1：$y = k_1 x + b_1$，l_2：$y = k_2 x + b_2$，则

①$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$，$b_1 \neq b_2$；

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

（2）若 l_1：$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$，l_2：$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$，且 A_1、A_2、B_1、B_2 都不为 0，则

①$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$；

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

练习

（1）直线 l_1：$x + my + 6 = 0$ 和直线 l_2：$(m-2)x + 3y + 2m = 0$ 互相平行，则 m 的取值为________.【参考答案：-1】

（2）直线 $(3a+2)x + (1-4a)y + 8 = 0$ 与 $(5a-2)x + (a+4)y - 7 = 0$ 互相垂直，则 a 的值为________.【参考答案：0 或 1】

6. l_1 到 l_2 的到角公式

（1）$\tan\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$，其中，$l_1$：$y = k_1 x + b_1$，$l_2$：$y = k_2 x + b_2$，$k_1 k_2 \neq -1$.

（2）$\tan\alpha = \dfrac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$，其中，$l_1$：$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$，$l_2$：$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$，$A_1 A_2 + B_1 B_2 \neq 0$. 直线 $l_1 \perp l_2$ 时，直线 l_1 到 l_2 的到角是 $\frac{\pi}{2}$.

注：两直线的夹角为 θ，$\tan\theta = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$，注意夹角和到角的区别.

练习

（1）已知直线 $2x+y-2=0$ 和 $mx-y+1=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则 m 值为（　　）．【参考答案：A】

A. $-\frac{1}{3}$ 或 3　　B. -3 或 $\frac{1}{3}$　　C. -3 或 3　　D. $\frac{1}{3}$ 或 3

（2）直线 l_1： $ax-2y+2=0$ 和 l_1： $2x+6y+b=0$ 相交于点 $(1,c)$，且从 l_2 到 l_1 的角为 $\frac{\pi}{4}$，则 a、b、c 的值分别是（　　）．【参考答案：A】

A. 1，$\frac{3}{2}$，-11　　B. $\frac{3}{2}$，1，-11　　C. 1，-11，$\frac{3}{2}$　　D. -11，$\frac{3}{2}$，1

7. 四种常用直线系方程

（1）定点直线系方程.

①经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$（除直线 $x=x_0$ 外），其中 k 是待定的系数；

②经过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$，其中 A，B 是待定的系数.

（2）共点直线系方程.

经过两直线 l_1： $A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2： $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程为 $(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（除 l_2），其中 λ 是待定的系数.

（3）平行直线系方程.

直线 $y=kx+b$ 中当斜率 k 一定而 b 变动时，表示平行直线系方程.

与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系方程是 $Ax+By+\lambda=0$，λ 是参变量.

（4）垂直直线系方程.

与直线 $Ax+By+C=0$（$A\neq0$，$B\neq0$）垂直的直线系方程是 $Bx-Ay+\lambda=0$，λ 是参变量.

8. 平面内的距离公式

（1）两点间的距离公式：$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，其中，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

（2）点到直线的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，其中，$P_0(x_0,y_0)$，直线 l： $Ax+By+C=0$.

（3）两平行线间的距离公式：已知直线 l_1： $Ax+By+C_1=0$ 和 l_2： $Ax+By+C_2=0$（$C_1\neq C_2$），则这两条平行直线间的距离公式是 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

练习

（1）求点 $(-1,2)$ 到直线 $2x-7y+8=0$ 的距离．【参考答案：$\frac{8}{53}\sqrt{53}$】

（2）求平行线 $2x-7y+8=0$ 和 $2x-7y-6=0$ 的距离．【参考答案：$\frac{14}{53}\sqrt{53}$】

9. 直线过定点问题

如：无论 a、b 为何值，直线 $(2a+b)x+(a+b)y+a-b=0$ 都通过定点________.

只要将解析式变形为 $a(2x+y+1)+b(x+y-1)=0$，由 $\begin{cases}2x+y+1=0\\x+y-1=0\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$，则定点为 $(-2,3)$.

8.2 直线相关的对称问题

1. 对称点

（1）两点 A 、 B 关于点 M 对称 $\Leftrightarrow$ M 为线段 AB 的中点.

（2）两点 A 、 B 关于直线 l 对称 $\Leftrightarrow$ l 为线段 AB 的垂直平分线.

2. 对称曲线

（1）两曲线 C_1 、 C_2 关于直线 l （或点 M ）对称 $\Leftrightarrow$ C_1 上任一点 P 关于直线 l （或点 M ）的对称点都在 C_2 上.

（2）曲线 C 关于点 M （或直线 l ）对称 $\Leftrightarrow$ C 上任一点 P 关于点 M （或直线 l ）的对称点仍在曲线 C 上.

3. 对称点的求法

（1）设 $A(x_0,y_0)$ 关于 $M(a,b)$ 的对称点为 $B(x,y)$ ，则 $\begin{cases}\dfrac{x_0+x}{2}=a\\ \dfrac{y_0+y}{2}=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2a-x_0\\ y=2b-y_0\end{cases} \Rightarrow B(2a-x_0,2b-y_0)$.

（2）设 $A(x_0,y_0)$ 关于直线 l ： $y=kx+b$ （ $k\neq 0$ ）的对称点为 $B(x,y)$ ，则 $\begin{cases}\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=-\dfrac{1}{k}\\ \dfrac{y_0+y}{2}=k\cdot\dfrac{x+x_0}{2}+b\end{cases}$ ，解出 x 、 y ，可得到 B 点的坐标 (x,y) .

练习

（1）求 $(1,2)$ 关于 $x+y+5=0$ 的对称点. 【参考答案： $(-7,-6)$ 】

4. 对称曲线的求法

已知曲线 C ： $f(x,y)=0$ ，求 C 关于某直线 l 或某点 M 的对称曲线 C' 的方程. 求法如下：在 C' 上任取一点 $P(x,y)$ ，设 P 关于直线 l （或点 M ）的对称点 $Q(m,n)$ ，用上面类似的方法可得 $m=u(x,y)$ ， $n=v(x,y)$ ；因为 Q 在 C 上，所以 $f(u(x,y),v(x,y))=0$ ，即得到 C' 的方程.

5. 应熟记的对称规律

（1）设 $A(x,y)$ 的对称点为 B ，则

① A 、 B 两点关于原点对称 $\Leftrightarrow$ $B(-x,-y)$ ；

② A 、 B 两点关于 x 轴对称 $\Leftrightarrow$ $B(x,-y)$ ；

③ A 、 B 两点关于 y 轴对称 $\Leftrightarrow$ $B(-x,y)$ ；

④ A 、 B 两点关于 $y=x$ 对称 $\Leftrightarrow$ $B(y,x)$ ；

⑤ A 、 B 两点关于 $y=-x$ 对称 $\Leftrightarrow$ $B(-y,-x)$ ；

⑥ A 、 B 两点关于 (x_0,y_0) 对称 $\Leftrightarrow$ $B(2x_0-x,2y_0-y)$ ；

⑦ A 、 B 两点关于 $y=x+a$ 对称 $\Leftrightarrow$ $B(y-a,x+a)$ （仅作参考）；

⑧ A 、 B 两点关于 $y=-x+a$ 对称 $\Leftrightarrow$ $B(-y+a,-x+a)$ （仅作参考）；

⑨A、B 两点关于 $Ax+By+C=0$ 对称 $\Leftrightarrow B\left(x-\dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},y-\dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)$（仅作参考）.

（2）设曲线 C：$F(x,y)=0$ 的对称曲线为 C'，则

①C 和 C' 关于原点对称 $\Leftrightarrow C'$：$F(-x,-y)=0$；

②C 和 C' 关于 x 轴对称 $\Leftrightarrow C'$：$F(x,-y)=0$；

③C 和 C' 关于 y 轴对称 $\Leftrightarrow C'$：$F(-x,y)=0$；

④C 和 C' 关于 $y=x$ 对称 $\Leftrightarrow C'$：$F(y,x)=0$；

⑤C 和 C' 关于 $y=-x$ 对称 $\Leftrightarrow C'$：$F(-y,-x)=0$；

⑥C 和 C' 关于 (x_0,y_0) 对称 $\Leftrightarrow C'$：$F(2x_0-x,2y_0-y)=0$；

⑦C 和 C' 关于 $y=x+a$ 对称 $\Leftrightarrow C'$：$F(y-a,x+a)=0$（仅作参考）;

⑧C 和 C' 关于 $y=-x+a$ 对称 $\Leftrightarrow C'$：$F(-y+a,-x+a)=0$（仅作参考）;

⑨C 和 C' 关于 $Ax+By+C=0$ 对称 $\Leftrightarrow C'$：$F\left(x-\dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},y-\dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right)=0$（仅作参考）.

练习

（1）如果直线 $y=ax+2$ 与直线 $y=3x-b$ 关于直线 $y=x$ 对称，那么 a、b 的值分别是（　　）.【参考答案：A】

A. $\dfrac{1}{3}$，6　　B. $\dfrac{1}{3}$，-6　　C. 3，-2　　D. 3，6

（2）与直线 $2x+3y-6=0$ 关于点 $(1,-1)$ 对称的直线方程是（　　）.【参考答案：A】

A. $2x+3y+8=0$　　B. $2x+3y+7=0$　　C. $3x-2y-12=0$　　D. $3x-2y+2=0$

6. 反射问题

反射问题都可以转化为直线问题，主要有三种形式：

（1）将入射角与反射角相等转化为两直线所成的角问题，可以确定所求直线斜率.

（2）通过求点关于直线的对称点坐标，再利用两点式方程求解.

（3）利用轨迹思想求对称直线的方程.

8.3 圆

1. 圆的定义

平面内与定点距离等于定长的点的集合是圆，定点是圆心，定长是半径.

2. 圆的几种方程

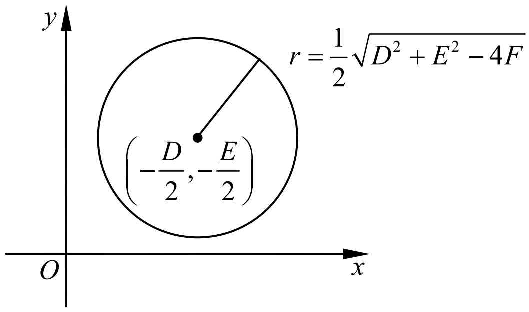
（1）圆的标准方程.

设 $C(a,b)$ 为圆心，r 为半径，则 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

（2）圆的一般方程.

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，经过配方法得 $\left(x+\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{2}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}$.

①当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程为圆的一般方程，其圆心为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$；



②当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$；

③当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程不表示任何图形.

注：此处公式 x^2 、 y^2 系数全部为 1，若不为 1，请变为 1.

（3）圆的参数方程： $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$.

（4）圆的直径式方程：$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$，其中，直径的端点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

练习

（1）已知两点 $P_1(3,8)$ 和 $P_2(4,7)$，求以 P_1P_2 为直径的圆的方程.【参考答案：$x^2+y^2-7x-15y+68=0$】

（5）圆的切线方程.

A. 已知圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

①已知切点 (x_0,y_0) 在圆上，则切线只有一条，其方程是 $x_0x+y_0y+\frac{D}{2}(x_0+x)+\frac{E}{2}(y_0+y)+F=0$.

当 (x_0,y_0) 在圆外时， $x_0x+y_0y+\frac{D}{2}(x_0+x)+\frac{E}{2}(y_0+y)+F=0$ 表示过两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点 (x_0,y_0) 的方程可设为 $y-y_0=k(x-x_0)$，再根据相切条件求 k，此时必有两条切线.

③已知斜率为 k 的切线方程可设为 $y=kx+b$，再利用相切条件求 b，必有两条切线.

注：过圆外一点作圆的切线，一定有两条，如果只求出了一条，那么另外一条一定是与 x 轴垂直的直线.

B. 已知圆 $x^2+y^2=r^2$.

①过圆上 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

②已知斜率为 k 的切线方程为 $y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}$.

3. 求圆的方程的两类方法

（1）几何法. 通过研究圆的性质、直线和圆、圆与圆的位置关系，进而求得圆的基本量和方程.

（2）代数法. 即用“待定系数法”求圆的方程. 一般步骤是：①根据题意选择方程的形式（标准式或一般式）；②利用条件列出关于 a 、 b 、 r 或 D 、 E 、 F 的方程组；③解出方程组.

（3）充分利用平面几何的知识：弦心距与半径长的平方和等于半径的平方，相切两圆的圆心与切点共线等.

4. 点与圆的位置关系

已知点$P(x_0,y_0)$，圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，点到圆心的距离为d，$d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则

（1）$d>r\Leftrightarrow$点P在圆外.

（2）$d=r\Leftrightarrow$点P在圆上.

（3）$d<r\Leftrightarrow$点P在圆内.

5. 直线与圆的位置关系

已知直线$Ax+By+C=0$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圆心(a,b)到直线的距离为d，则$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

（1）判断d与r的关系即可判断直线和圆的位置关系.

（2）消去x（或y），得一元二次方程，根据其判别式Δ是否为0也可判断直线和圆的位置关系.

（3）直线与圆相交时，注意利用圆的“垂径定理”.

练习

（1）直线$(x+1)a+(y+1)b=0$与圆$x^2+y^2=2$的位置关系是（　　）.【参考答案：D】

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 相交或相切

（2）若曲线$y=1+\sqrt{4-x^2}$与直线l：$y=k(x-2)+4$有两个不同的交点，则实数k的取值范围是（　　）.【参考答案：B】

A. $\left(\dfrac{5}{12},+\infty\right)$　　B. $\left(\dfrac{5}{12},\dfrac{3}{4}\right]$　　C. $\left(0,\dfrac{5}{12}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}\right]$

6. 圆与圆的位置关系

设两圆圆心分别为O_1、O_2，半径分别为R、r，且$|O_1O_2|=d$，则

（1）$d>R+r\Leftrightarrow$外离$\Leftrightarrow$4条公切线.

（2）$d=R+r\Leftrightarrow$外切$\Leftrightarrow$3条公切线.

（3）$|R-r|<d<R+r\Leftrightarrow$相交$\Leftrightarrow$2条公切线.

（4）$d=|R-r|\Leftrightarrow$内切$\Leftrightarrow$1条公切线.

（5）$0<d<|R-r|\Leftrightarrow$内含$\Leftrightarrow$0条公切线.

也可将两个圆的方程联立起来，通过观察解的情况判断两圆的位置关系.

练习

（1）圆C_1：$x^2+y^2-4x=0$圆C_2：$x^2+y^2+6x+10y+16=0$的公切线有（　　）.【参考答案：D】

A. 1条　　B. 2条　　C. 3条　　D. 4条

7. 圆系

（1）经过两个圆$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$的交点的圆系方程是$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda\left(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2\right)=0$，$\lambda$为待定系数.

注：两圆相交弦所在直线方程的求法：把两式相减得相交弦所在直线方程为：$\left(D_1-D_2\right)x+\left(E_1-E_2\right)y+\left(C_1-C_2\right)=0$.

（2）经过直线l：$Ax+By+C=0$与圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的交点的圆系方程是

$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda\left(Ax+By+C\right)=0$，$\lambda$ 为待定系数.

（3）过点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的圆系方程是

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda\left[(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda\left(ax+by+c\right)=0$，其中 $ax+by+c=0$ 是直线 AB 的方程，λ 为待定系数.

8.4 空间直角坐标系

1. 点的对称问题

（1）点 (x_0,y_0,z_0) 关于原点对称点为 $(-x_0,-y_0,-z_0)$.

（2）点 (x_0,y_0,z_0) 关于 (a,b,c) 对称点为 $(2a-x_0,2b-y_0,2c-z_0)$.

（3）点 (x_0,y_0,z_0) 关于 x 轴对称点为 $(x_0,-y_0,-z_0)$.

（4）点 (x_0,y_0,z_0) 关于 y 轴对称点为 $(-x_0,y_0,-z_0)$.

（5）点 (x_0,y_0,z_0) 关于 z 轴对称点为 $(-x_0,-y_0,z_0)$.

（6）点 (x_0,y_0,z_0) 关于 xOy 对称点为 $(x_0,y_0,-z_0)$.

（7）点 (x_0,y_0,z_0) 关于 xOz 对称点为 $(x_0,-y_0,z_0)$.

（8）点 (x_0,y_0,z_0) 关于 yOz 对称点为 $(-x_0,y_0,z_0)$.

2. 空间两点间的距离公式

点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $d_{A,B}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

第九章 圆锥曲线

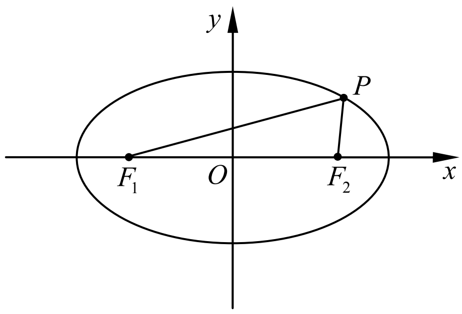
※本章内容※

公式定理及常见规律

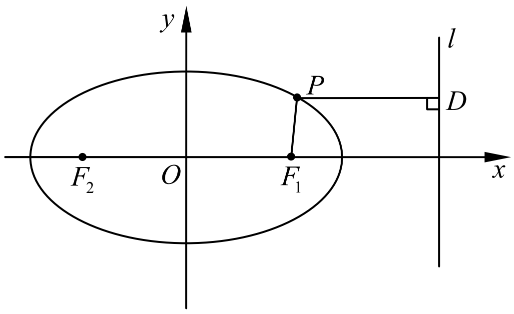
9.1 椭圆

1. 椭圆的定义

（1）定义Ⅰ：若 F_1、F_2 是两定点，P 为动点，且 $|PF_1|+|PF_2|=2a>|F_1F_2|$（$a$ 为常数），则 P 点的轨迹是椭圆.



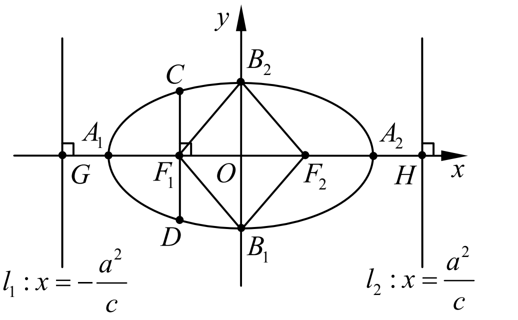
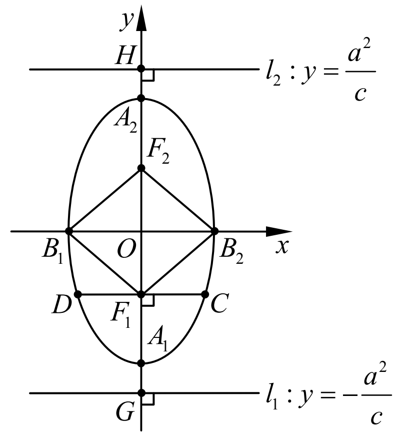
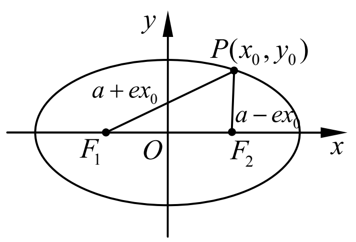
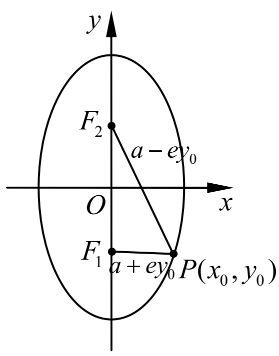
（2）定义Ⅱ：若 F_1 为定点，l 为定直线，动点 P 到 F_1 的距离与到定直线 l 的距离之比为常数 e（$0<e<1$），则 P 点的轨迹是椭圆.（注：右焦点与右准线对应）

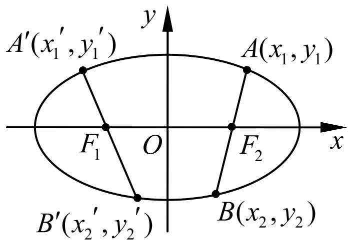
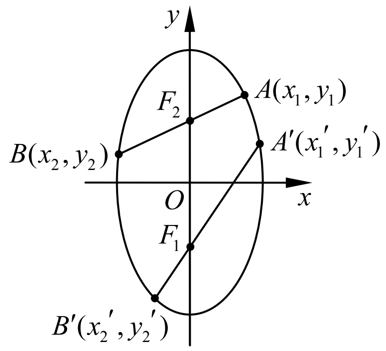
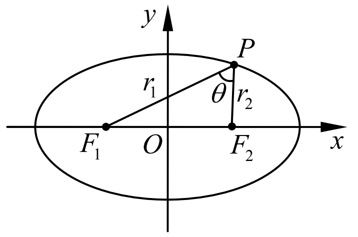
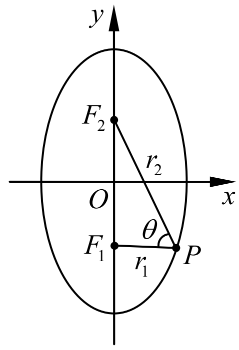


$$\frac{|PF_1|}{|PD|}=e$$

2. 椭圆的相关特性

	焦点在 x 轴	焦点在 y 轴
方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）

<table>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">椭圆基本概念</td><td colspan="2">（1）长轴长$\left|A_1A_2\right|=2a$
（2）短轴长$\left|B_1B_2\right|=2b$
（3）焦距$\left|F_1F_2\right|=2c$
（4）椭圆的通径（过焦点且与x轴（或y）垂直的最短弦）：$\left|CD\right|=\dfrac{2b^2}{a}$
（5）焦准距（焦点到对应准线的距离）：$\left|F_1G\right|=\left|F_2H\right|=\dfrac{b^2}{c}$
（6）离心率：$e=\dfrac{c}{a}$或$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$，$e\in(0,1)$</td></tr>
<tr><td>准线方程：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$</td><td>准线方程：$y=\pm\dfrac{a^2}{c}$</td></tr>
<tr><td>椭圆中线段的几何特征</td><td colspan="2">（1）$\left|A_1F_1\right|=\left|A_2F_2\right|=a-c$
（2）$\left|A_1F_2\right|=\left|A_2F_1\right|=a+c$
（3）$\left|B_1F_1\right|=\left|B_1F_2\right|=\left|B_2F_2\right|=\left|B_2F_1\right|=a$
（4）$\left|A_2B_2\right|=\left|A_1B_2\right|=\sqrt{a^2+b^2}$ 等</td></tr>
<tr><td>椭圆焦半径公式</td><td>焦半径公式$\left|PF_1\right|=a+ex_0$，$\left|PF_2\right|=a-ex_0$，F_1、F_2分别为左右焦点，其中$P(x_0,y_0)$为椭圆上一点

</td><td>焦半径公式$\left|PF_1\right|=a+ey_0$，$\left|PF_2\right|=a-ey_0$，F_2、F_1分别为上下焦点，其中$P(x_0,y_0)$为椭圆上一点

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>椭圆焦点弦</td>
<td>
$\left|A'B'\right| = a + ex_1' + a + ex_2'$
$\left|AB\right| = a - ex_1 + a - ex_2$</td>
<td>
$\left|A'B'\right| = a + ey_1' + a + ey_2'$
$\left|AB\right| = a - ey_1 + a - ey_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>椭圆焦点三角形</td>
<td colspan="2">（1）认识焦点三角形


（2）焦点三角形的计算方法
经常利用余弦定理、勾股定理、三角形面积公式将有关线段$\left|PF_1\right|$、$\left|PF_2\right|$、$2c$与$\angle F_1PF_2$结合起来，建立$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|$、$\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|$等关系，设$\left|PF_1\right|=r_1$，$\left|PF_2\right|=r_2$，$\angle F_1PF_2=\theta$，即
$$\begin{cases} r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta = (2c)^2 \\ r_1 + r_2 = 2a \\ S_{\triangle} = \dfrac{1}{2}r_1r_2\sin\theta \end{cases}.$$
（3）焦点三角形面积的计算
焦点三角形PF_1F_2的面积$S = b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$. 特别地，若$PF_1 \perp PF_2$，此三角形面积为$b^2$.</td>
</tr>
<tr>
<td>椭圆的内外部</td>
<td>（1）点$P(x_0, y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的内部$\Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$
（2）点$P(x_0, y_0)$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的外部$\Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$</td>
<td>（1）点$P(x_0, y_0)$在椭圆$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$的内部$\Leftrightarrow \dfrac{y_0^2}{a^2}+\dfrac{x_0^2}{b^2}<1$
（2）点$P(x_0, y_0)$在椭圆$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$的外部$\Leftrightarrow \dfrac{y_0^2}{a^2}+\dfrac{x_0^2}{b^2}>1$</td>
</tr>
<tr>
<td>椭圆的切线方程</td>
<td>（1）椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一点$P(x_0, y_0)$处的切线方程是$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$</td>
<td>（1）椭圆$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$上一点$P(x_0, y_0)$处的切线方程是$\dfrac{y_0y}{a^2}+\dfrac{x_0x}{b^2}=1$</td>
</tr>
</table>

	（2）过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ （3）椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $A^2a^2+B^2b^2=c^2$	（2）过椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\dfrac{y_0y}{a^2}+\dfrac{x_0x}{b^2}=1$ （3）椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $B^2a^2+A^2b^2=c^2$
椭圆的参数方程	$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi)$. 形式不惟一，可用来表示椭圆上的点	$\begin{cases}y=b\cos\theta\\x=a\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi)$. 形式不惟一，可用来表示椭圆上的点

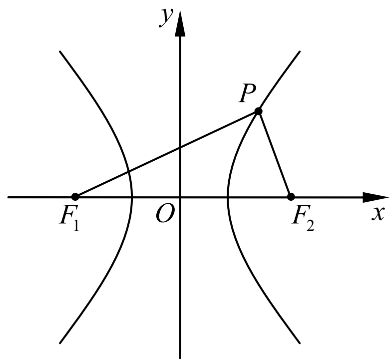
3. 未知椭圆的假设方法

当椭圆的焦点不确定在哪个坐标轴上时，可设方程为 $mx^2+ny^2=1$（$m>0$，$n>0$）.

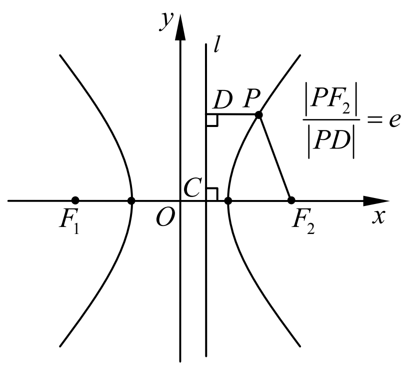
9.2 双曲线

1. 双曲线的定义

（1）定义Ⅰ：平面内，F_1、F_2 是两定点，动点 P 到两个定点的距离之差的绝对值是常数（小于定点间距离），即 $\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a<|F_1F_2|$（$a$ 为常数），则动点 P 的轨迹是双曲线.

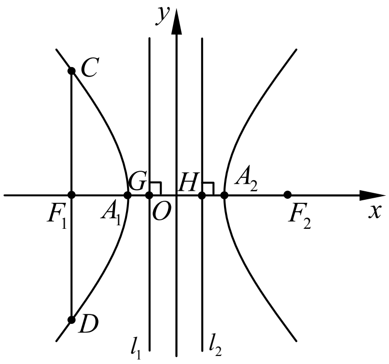
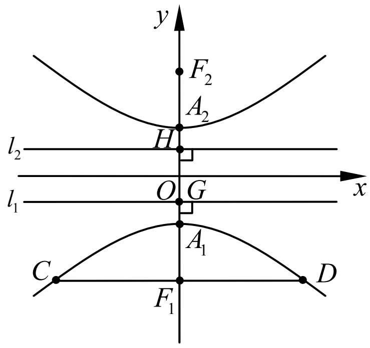
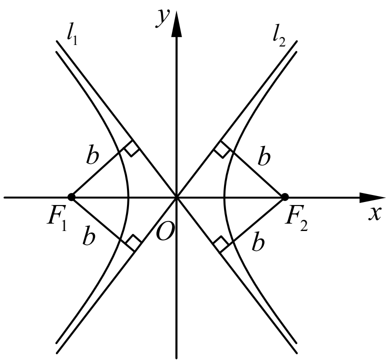


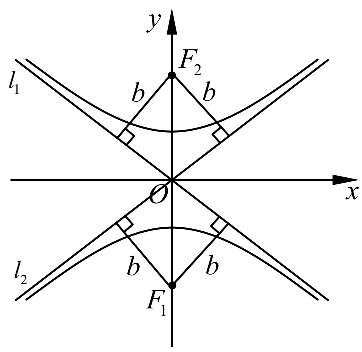
（2）定义Ⅱ：若动点 P 到定点 F 与到定直线 l 的距离之比为常数 e（$e>1$），则动点 P 的轨迹是双曲线.（注：右焦点与右准线对应）

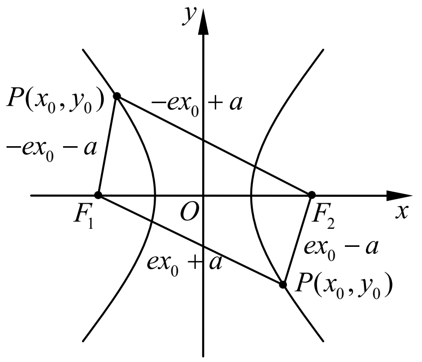
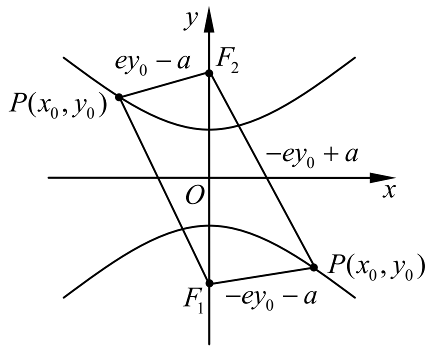
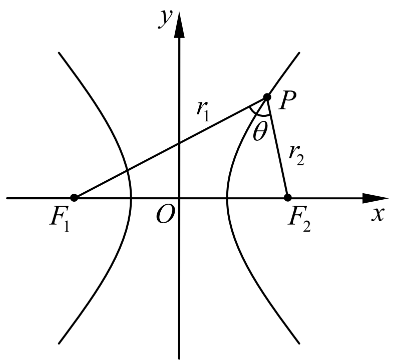


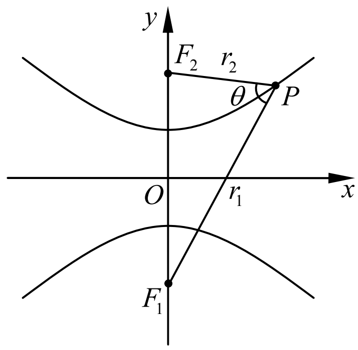
2. 双曲线的相关特性

	焦点在 x 轴	焦点在 y 轴

<table>
<tr><td>方程</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）</td><td>$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">双曲线基本概念</td><td colspan="2">（1）实轴长$\left|A_1A_2\right|=2a$
（2）虚轴长$=2b$
（3）焦距$\left|F_1F_2\right|=2c$
（4）双曲线的通径（过焦点且与x轴（或y）垂直的最短弦）：$\left|CD\right|=\dfrac{2b^2}{a}$
（5）焦准距（焦点到对应准线的距离）：$\left|F_1G\right|=\left|F_2H\right|=\dfrac{b^2}{c}$
（6）离心率：$e=\dfrac{c}{a}$或$e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$，$e\in(1,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>准线方程：$x=\pm\dfrac{a^2}{c}$</td><td>准线方程：$y=\pm\dfrac{a^2}{c}$</td></tr>
<tr><td>双曲线中线段的几何特征</td><td colspan="2">（1）$\left|A_1F_1\right|=\left|A_2F_2\right|=c-a$
（2）$\left|A_1F_2\right|=\left|A_2F_1\right|=a+c$
（3）顶点到准线的距离：$a-\dfrac{a^2}{c}$或$a+\dfrac{a^2}{c}$
（4）两准线间的距离：$\dfrac{2a^2}{c}$
（5）焦点到渐近线的距离等于虚半轴的长度（即b值）



</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>双曲线焦半径公式</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>双曲线焦点三角形</td>
<td colspan="2">（1）认识焦点三角形




（2）焦点三角形的计算方法
在焦点三角形中，设两个焦半径为 r_1、r_2，利用正余弦定理或勾股定理以及双曲线的定义解题
$$\begin{cases} r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=(2c)^2 \\ |r_1-r_2|=2a \\ S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}r_1r_2\sin\theta \end{cases}.$$
（3）焦点三角形面积的计算
焦点三角形 PF_1F_2 的面积 $S=b^2\cot\dfrac{\theta}{2}$．特别地，若 $PF_1\perp PF_2$，此三角形面积为 b^2．</td>
</tr>
<tr>
<td>双曲线的内外部</td>
<td>（1）点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的内部 $\Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$
（2）点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的外部 $\Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$</td>
<td>（1）点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 的内部 $\Leftrightarrow \dfrac{y_0^2}{a^2}-\dfrac{x_0^2}{b^2}>1$
（2）点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 的外部 $\Leftrightarrow \dfrac{y_0^2}{a^2}-\dfrac{x_0^2}{b^2}<1$</td>
</tr>
<tr>
<td>双曲线的方程与渐近线方程</td>
<td>（1）若双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ 渐近线方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow y=\pm\dfrac{b}{a}x$
（2）若渐近线方程为</td>
<td>（1）若双曲线方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ 渐近线方程：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=0 \Rightarrow y=\pm\dfrac{a}{b}x$
（2）若渐近线方程为</td>
</tr>
</table>

的关系	$y=\pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0 \Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ （3）若双曲线与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有公共渐近线，可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ **注：**$\lambda>0$，焦点在 x 轴上，$\lambda<0$，焦点在 y 轴上	$y=\pm\frac{a}{b}x \Leftrightarrow \frac{y}{a}\pm\frac{x}{b}=0 \Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=\lambda$ （3）若双曲线与 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 有公共渐近线，可设为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=\lambda$ **注：**$\lambda>0$，焦点在 y 轴上，$\lambda<0$，焦点在 x 轴上
双曲线的切线方程	（1）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ （2）过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ （3）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $A^2a^2-B^2b^2=c^2$	（1）双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{y_0y}{a^2}-\frac{x_0x}{b^2}=1$ （2）过双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{y_0y}{a^2}-\frac{x_0x}{b^2}=1$ （3）双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $B^2a^2-A^2b^2=c^2$
双曲线的参数方程	$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi)$. 形式不惟一，可用来表示双曲线上的点	$\begin{cases}y=b\sec\theta\\x=a\tan\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi)$. 形式不惟一，可用来表示双曲线上的点

3. 等轴双曲线

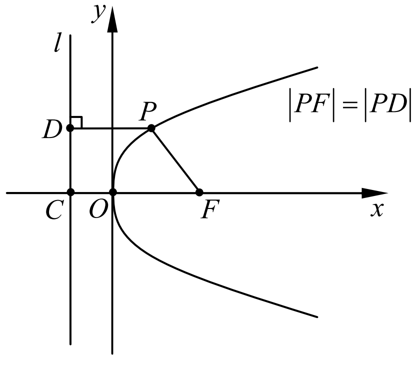
$a=b$ 时 $\Leftrightarrow$ 离心率 $e=\sqrt{2} \Leftrightarrow$ 两渐近线互相垂直，分别为 $y=\pm x$. 可设等轴双曲线为：$x^2-y^2=\lambda$.

9.3 抛物线

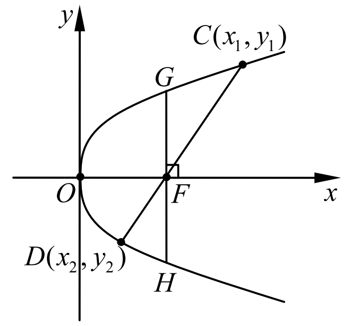
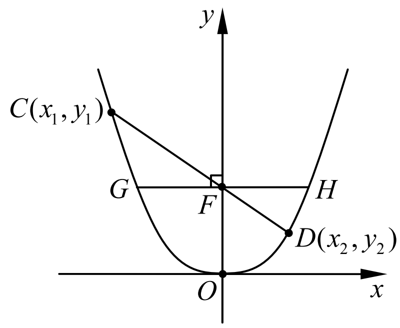
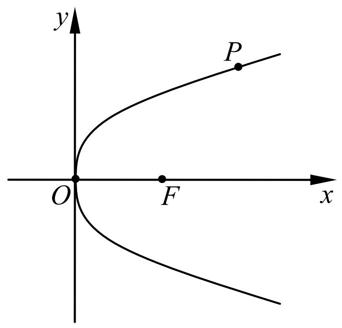
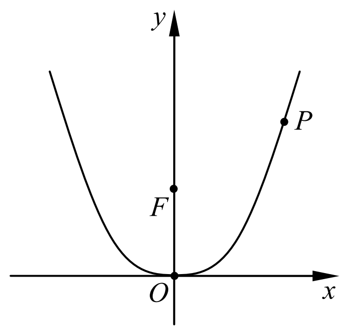
1. 抛物线的定义

在平面内，与一个定点的距离和一条定直线的距离相等的点的轨迹就是抛物线.

注：定点不能在定直线上，否则轨迹是直线.



2. 抛物线的相关特性

<table>
<tr><td></td><td>焦点在 x 轴</td><td>焦点在 y 轴</td></tr>
<tr><td>方程</td><td>$y^2=2px$（$p>0$）（$p<0$ 图像开口向左）</td><td>$x^2=2py$（$p>0$）（$p<0$ 图像开口向下）</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">抛物线中的基本概念</td><td>（1）焦点是 $\left(\frac{p}{2},0\right)$
（2）准线 $x=-\frac{p}{2}$
（3）焦半径 $\lvert CF\rvert=x_1+\frac{p}{2}$
（4）焦点弦 $\lvert CD\rvert=x_1+x_2+p$
（5）$y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，即 $k_{OC}\cdot k_{OD}=-4$</td><td>（1）焦点是 $\left(0,\frac{p}{2}\right)$
（2）准线 $y=-\frac{p}{2}$
（3）焦半径 $\lvert CF\rvert=y_1+\frac{p}{2}$
（4）焦点弦 $\lvert CD\rvert=y_1+y_2+p$
（5）$y_1y_2=\frac{p^2}{4}$，$x_1x_2=-p^2$，即 $k_{OC}\cdot k_{OD}=-\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">（6）通径（过焦点最短的弦，即 GH）为 $2p$
（7）焦准距（焦点和准线的距离）为 p
（8）离心率：$e=1$</td></tr>
<tr><td>抛物线上的设点方法</td><td>可设 $P\left(\frac{y_0^2}{2p},y_0\right)$，或 $P\left(2pt^2,2pt\right)$，或 $P(x_0,y_0)$（其中 $y_0^2=2px_0$）

</td><td>可设 $P\left(x_0,\frac{x_0^2}{2p}\right)$，或 $P\left(2pt,2pt^2\right)$，或 $P(x_0,y_0)$（其中 $x_0^2=2py_0$）

</td></tr>
<tr><td>抛物线的内外部</td><td>（1）点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的内部 $\Leftrightarrow$ $y^2<2px$（$p>0$）
（2）点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的外部 $\Leftrightarrow$ $y^2>2px$（$p>0$）</td><td>（1）点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py$（$p>0$）的内部 $\Leftrightarrow$ $x^2<2py$（$p>0$）
（2）点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $x^2=2py$（$p>0$）的外部 $\Leftrightarrow$ $x^2>2py$（$p>0$）</td></tr>
<tr><td>抛物线的</td><td>（1）抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $y_0y=p(x+x_0)$</td><td>（1）抛物线 $x^2=2py$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $x_0x=p(y+y_0)$</td></tr>
</table>

切线方程	（2）过抛物线 $y^2=2px$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0y=p(x+x_0)$ （3）抛物线 $y^2=2px$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $pB^2=2AC$	（2）过抛物线 $x^2=2py$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $x_0x=p(y+y_0)$ （3）抛物线 $x^2=2py$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $pA^2=2BC$

3. 二次函数与抛物线（仅作参考）

$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ （$a\neq 0$）的图像是抛物线：

（1）顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

（2）焦点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2+1}{4a}\right)$.

（3）准线方程是 $y=\dfrac{4ac-b^2+1}{4a}$.

9.4 直线和圆锥曲线的位置关系

1. 直线与圆锥曲线的交点的判断

由圆锥曲线方程 $f(x,y)=0$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 联立解方程组.

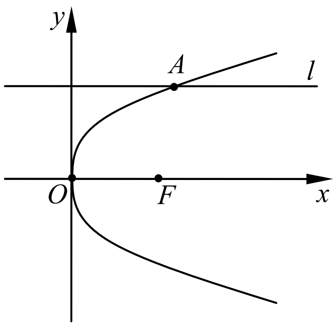
（1）若消元后得到一元二次方程，可根据 Δ 来判断交点个数，最多只有 2 个交点.

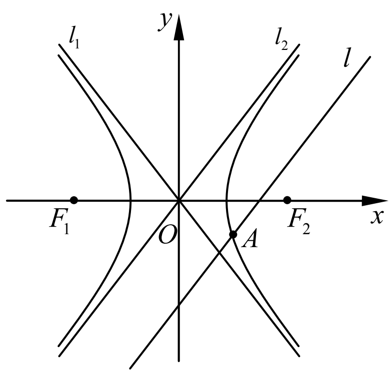
（2）若消元后得到一元一次方程，则只有一个交点.

2. 直线与二次曲线只有一个交点，未必一定相切

（1）抛物线与平行其对称轴的直线.

（2）双曲线与平行于其渐近线的直线.





3. 弦长计算

（1）经过圆锥曲线的焦点的弦（也称焦点弦）的长度，应用圆锥曲线的定义，转化为两个焦半径之和（参看前面介绍），往往比用弦长公式简单.

（2）若设直线 l 与圆锥曲线 $F(x,y)=0$ 交于两点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则

1）当直线 l 垂直与 x 轴时，弦长容易求得.

2）当直线 l 不垂直与 x 轴时，设直线 l： $y=kx+b$ ，则直线与圆锥曲线相交，交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则弦长公式为：

①$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$；

②$|AB| = \sqrt{1+k^2}|x_2 - x_1| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$；

③$|AB| = \sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}|y_2 - y_1| = \sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2}$；

④$|AB| = |x_1 - x_2|\sqrt{1+\tan^2\alpha} = |y_1 - y_2|\sqrt{1+\cot^2\alpha}$，$\alpha$ 为直线 AB 的倾斜角.

注：由方程$\begin{cases} y = kx + b \\ F(x,y) = 0 \end{cases}$消去 y 得到 $ax^2 + bx + c = 0$：①计算时利用根与系数关系；②若 A、B 为两个不同的点，要计算 $\Delta > 0$.

3）也可直接设直线 l：$x = my + n$，不用象上面分两种情况讨论，但此时直线不包括与 x 轴平行的情形，弦长 $|AB| = \sqrt{(1+m^2)(y_1 - y_2)^2}$.

4. 两个常见的曲线系方程

（1）过曲线 $f_1(x,y) = 0$，$f_2(x,y) = 0$ 的交点的曲线系方程是 $f_1(x,y) + \lambda f_2(x,y) = 0$.

（2）共焦点的有心圆锥曲线系方程为 $\dfrac{x^2}{a^2 - k} + \dfrac{y^2}{b^2 - k} = 1$，其中 $k < \max(a^2, b^2)$. 当 $k < \min(a^2, b^2)$ 时，表示椭圆；当 $\min(a^2, b^2) < k < \max(a^2, b^2)$ 时，表示双曲线.

5. 直线和圆锥曲线中的常见技巧

（1）为了不去刻意讨论直线斜率不存在的问题，若直线不过原点，通常也设直线为 $mx + ny = 1$.

（2）涉及到曲线上的点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 及线段 AB 的中点 M 的关系时，可以采用“点差法”——两点坐标代入曲线方程相减.

6. 求动点轨迹方程的步骤

（1）建立适当的坐标系，设出轨迹上任一点的坐标 (x, y).

（2）寻找动点与已知点满足的关系：几何关系.

（3）将动点与已知点坐标代入：几何关系代数化.

（4）化简轨迹方程.

7. 求轨迹方程的常用方法

（1）直译法：若动点运动过程中量的关系简明，那么直接将此量的关系建系转化为方程即可，多见于距离的和、差、积、商的关系.

（2）定义法（基本轨迹法）：若动点运动的几何条件符合某方程为已知的曲线的定义，那么便可先设出其标准方程的形式，然后运用待定系数法解之.

（3）代点法（动点转移法、相关式代入法）：要求动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程，已知动点 $Q(x_0, y_0)$ 的轨迹方程，如果能找到关系式$\begin{cases} x_0 = f(x,y) \\ y_0 = g(x,y) \end{cases}$，则可代入点 Q 满足的方程中，从而求得动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程.

（4）点差法（又叫平方差法或设而不求）：求弦的中点的轨迹方程用此方法比较方便.

基本思想是：利用弦的两端点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，在已知的二次曲线上，将 P_1、P_2 点的坐标

代入方程，然后相减，利用平方差公式可得x_1+x_2、y_1+y_2、x_1-x_2、y_1-y_2等，由于弦P_1P_2的中点$P(x,y)$的坐标满足$2x=x_1+x_2$，$2y=y_1+y_2$，且直线P_1P_2的斜率$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，于是设法换掉$x_1+x_2$、$y_1+y_2$、$x_1-x_2$、$y_1-y_2$等即可得$P_1P_2$的中点$P(x,y)$的轨迹方程.

（5）交轨法：若动点P是由两动曲线相交所得，那么可先求两曲线交点的方法解P的轨迹方程，一般先表示出两动曲线的方程，这时的方程多为参数方程，消去参数，转化为普通方程.

（6）参数法：动点P的坐标x，y间不便直接联系时，可考虑先取参数t作桥，先建立参数方程，然后消去参数得到普通方程，用此法要注意参数的实际意义和取值范围.

8.“四线”一方程

对于一般的二次曲线$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，用x_0x代x^2，用y_0y代y^2，用$\dfrac{x_0y+xy_0}{2}$代xy，用$\dfrac{x_0+x}{2}$代x，用$\dfrac{y_0+y}{2}$代y即得方程

$$Ax_0x+B\cdot\frac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\cdot\frac{x_0+x}{2}+E\cdot\frac{y_0+y}{2}+F=0,$$

曲线的切线、切点弦、中点弦、弦中点方程均可由此方程得到.

第十章 立体几何

※本章内容※

公式定理及常见规律

10.1 空间几何体

1. 棱柱的结构特征

（1）有两个面相互平行.

（2）其余各个面都是平行四边形.

（3）每相邻两个四边形的公共边互相平行.

相关概念：直棱柱、斜棱柱、平行六面体、正棱柱.

注：①正棱柱的底面为正多边形的直棱柱；②注意平行六面体→直平行六面体→长方体→正四棱柱→正方体这些几何体之间的联系和区别.

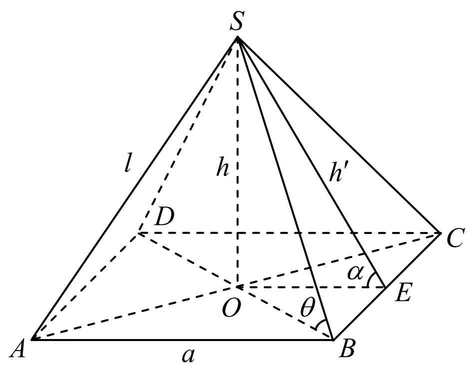
2. 棱锥的结构特征

（1）有一个面是多边形.

（2）其余各个面都是三角形.

相关概念：正棱锥、正四面体.

注：①正棱锥的底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面的中心；②正三棱锥的侧面是等腰三角形；③正四面体的四个面都是等边三角形；④正四棱锥的计算集中在四个直角三角形中：$\mathrm{Rt}\triangle SOB$、$\mathrm{Rt}\triangle SOE$、$\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle SBE$.



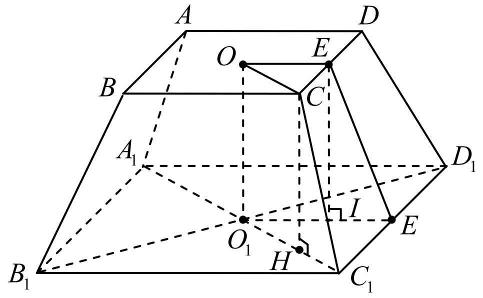
3. 棱台的结构特征

（1）棱台是用平行于棱锥底面的平面去截棱锥，两平行平面之间的部分.

（2）棱台的各侧棱延长线交于一点.

相关概念：正棱台.

注：正棱台的计算集中在直角梯形 OO_1E_1E、OO_1C_1C 以及它们包含的直角三角形上.



4. 圆柱、圆锥、圆台的结构特征

（1）圆柱、圆锥、圆台是分别以矩形一边、直角三角形直角边、直角梯形直角边所在直线为轴，其余各边旋转形成的面所围成的几何体.

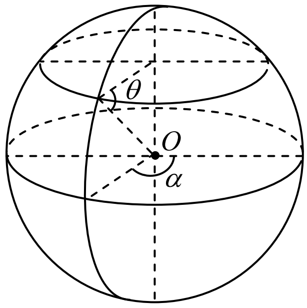
（2）圆柱、圆锥、圆台的轴截面分别为矩形、等腰三角形、等腰梯形.

5. 球

（1）球心和截面圆心的连线垂直于截面，$r=\sqrt{R^2-d^2}$.

（2）球面上两点的距离是经过这两点的大圆的劣弧长.

（3）如下图，θ 为纬度角，它是线面成角；α 为经度角，它是面面成角.



6. 球的组合体

（1）球与长方体的组合体：长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长.

（2）球与正方体的组合体：正方体的内切球的直径是正方体的棱长 a，正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长 $\sqrt{2}a$，正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长 $\sqrt{3}a$.

（3）球与正四面体的组合体：棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$，外接球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$，其比值为 $1:3$.

7. 柱体、锥体、台体和球的表面积

（1）直棱柱侧面积：$S=c\cdot h$.

（2）正棱锥侧面积：$S=\frac{1}{2}c\cdot h'$.

（3）正棱台侧面积：$S=\frac{1}{2}\left(c+c'\right)h'$.

（4）圆柱侧面积：$S=c\cdot h=2\pi rh$.

（5）圆锥侧面积：$S=\frac{1}{2}c\cdot l=\pi rl$.

（6）圆台侧面积：$S=\frac{1}{2}\left(c+c'\right)l=\pi(R+r)l$.

（7）球的表面积：$S=4\pi r^2$.

注： c 、c' 为相应的周长，h' 为相应的斜高，h 为相应体的高.

8. 柱体、锥体、台体和球的体积

（1）柱体：$V=S\cdot h$.

（2）圆柱体：$V=\pi r^2\cdot h$.

（3）锥体：$V=\frac{1}{3}S\cdot h$.

（4）圆锥体：$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$.

（5）台体：$V=\frac{1}{3}\left(S+\sqrt{S\cdot S'}+S'\right)\cdot h$.

（6）圆台体：$V=\frac{1}{3}\pi\left(R^2+R\cdot r+r^2\right)\cdot h$.

（7）球体：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

注： h 为相应体的高.

9. 几个基本公式

（1）弧长公式：$l=\alpha\cdot r$（α 是圆心角的弧度数，$\alpha>0$）.

（2）扇形面积公式：$S=\frac{1}{2}l\cdot r$.（可以类似看成三角形面积公式）

（3）圆锥侧面展开图（扇形）的圆心角公式：$\theta=\frac{r}{l}\cdot 2\pi$.

（4）圆台侧面展开图（扇环）的圆心角公式：$\theta=\frac{R-r}{l}\cdot 2\pi$.

（5）圆锥的母线长为 l，轴截面顶角是 θ，经过圆锥顶点的最大截面的面积为：

$$S=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot l^2\sin\theta,\ 0<\theta\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}l^2,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases}.$$

10. 空间几何体体积的求法

（1）公式法：根据题意直接套用相关几何体的体积计算公式，求出体积.

（2）作差法：将原几何体转化为两个易求体积的几何体体积的差，通过体积差来计算原几何体的体积.

（3）割补法：通过分割或补形，将原几何体分割或补成较易计算体积的几何体，从而求出原几何体的体积.

（4）等积变换法：从不同的角度看待原几何体，通过改变顶点和底面，利用体积不变的原理来求原几何体的体积.

11. 空间几何体的部分计算技巧

（1）涉及球与棱柱、棱锥的切、接问题时，一般过球心及多面体中的特殊点或线作截面，把空间问题化归为平面问题.

（2）若球面四点 P、A、B、C 构成的线段 PA、PB、PC 两两互相垂直，且 $PA=a$、$PB=b$、$PC=c$，则 $4R^2=a^2+b^2+c^2$. 把三棱锥 $P-ABC$ “补形”成为一个长方体，可以看出三棱锥的外接球与这个长方体的外接球是一样的.

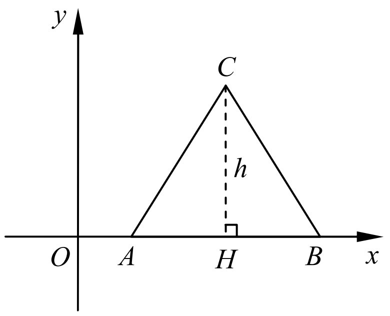
12. 三视图

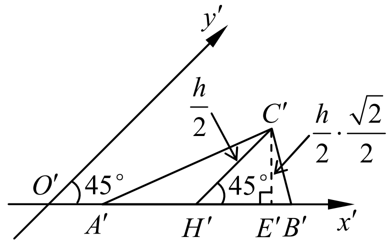
包括：主（正）视图、左（侧）视图、俯视图.

画三视图时要检验是否符合“长对正、宽相等、高平齐”. 同一物体位置不同，三视图可能不同.

13. 斜二测画法中的面积比

若 $\triangle ABC$ 通过斜二测画法得到 $\triangle A'B'C'$，则 $\dfrac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.





10.2 点直线平面之间的关系

1. 平面的基本性质

（1）公理 1：一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

（2）公理 2：一个点在两个不同的平面内，则一定在两平面的交线上.

（3）公理 3：经过不在一条直线上的三个点确定一个平面.

推论 1：直线外一点与这条直线确定一个平面.

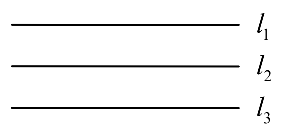
推论 2：两条相交直线确定一个平面.

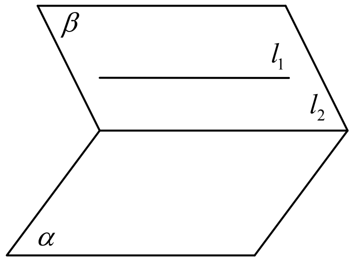
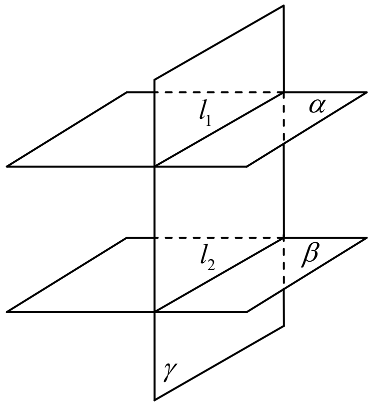
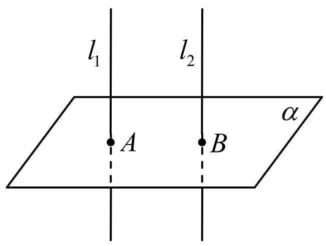
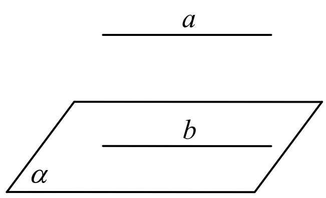
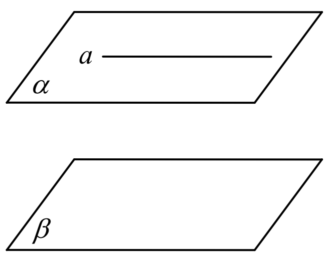
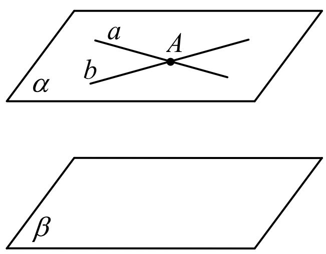
推论 3：两条平行直线确定一个平面.

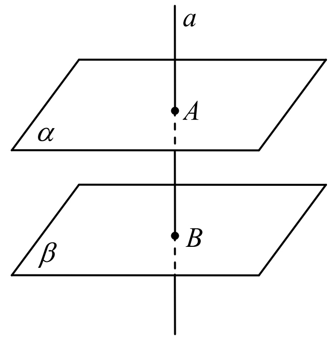
（4）公理 4：对于空间的三条直线，平行于同一条直线的两直线平行.

（5）等角定理：空间中如果两个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补.

2. 有关平行问题的常用方法

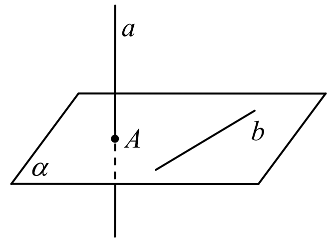
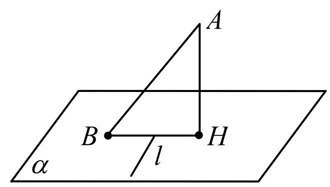
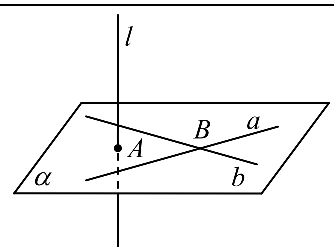
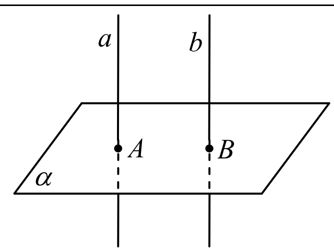
1. 线∥线	（1）$\left.\begin{matrix} l_1 \parallel l_2 \\ l_3 \parallel l_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow l_1 \parallel l_3$ 线∥线 ⇒ 线∥线	

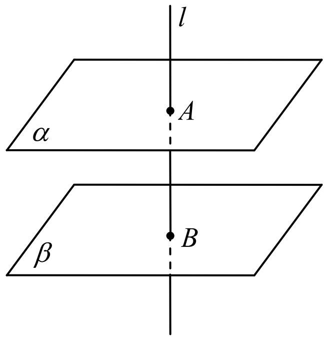
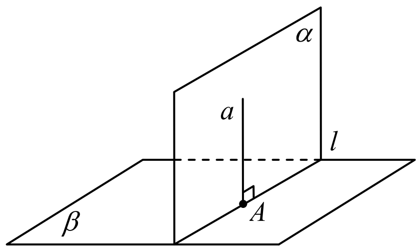
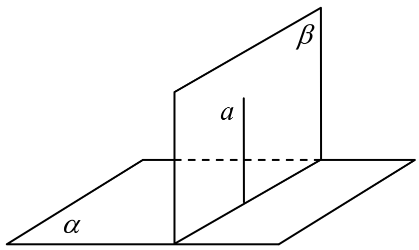
	（2）$\left.\begin{array}{l} l_1 \parallel \alpha \\ l_1 \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$ 线∥面⇒线∥线	
	（3）$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \gamma \cap \alpha = l_1 \\ \gamma \cap \beta = l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$ 面∥面⇒线∥线	
	（4）$\left.\begin{array}{l} l_1 \perp \alpha \\ l_2 \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$ 同垂直于一个平面⇒线∥线	
	（5）利用定义证明，两直线共面但无公共点	
	（1）$\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$ 线∥线⇒线∥面	
2. 线∥面	（2）$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \beta$ 面∥面⇒线∥面	
	（3）利用定义证明，若 $a \cap \alpha = \varnothing$，则 $a \parallel \alpha$	
3. 面∥面	（1）$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = A \\ a \parallel \beta \\ b \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ （两）线∥面⇒面∥面	

	（2）$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha \\ a\perp\beta \end{array}\right\}\Rightarrow \alpha /\!/ \beta$ 同垂直于一直线⇒面∥面 
	（3）利用定义证明，若 $\alpha\cap\beta=\varnothing$，则 $\alpha /\!/ \beta$

注：在证明平行问题时，认真体会“转化”这一数学思想，领悟三种平行关系的转化：线线平行⇔线面平行⇔面面平行.

3. 有关垂直问题的常用方法

1. 线⊥线	（1）$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha \\ b\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp b$ 线⊥面⇒线⊥线 
	（2）三垂线定理与逆定理： ⊥射影⇒⊥斜线，⊥斜线⇒⊥射影 线⊥线⇒线⊥线 
	（3）利用线线垂直的定义可以证明：如果两条直线所成的角为直角，则这两条直线垂直
2. 线⊥面	（1）$\left.\begin{array}{l} a\subset\alpha \\ b\subset\alpha \\ a\cap b=A \\ l\perp a \\ l\perp b \end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$ 
	（2）$\left.\begin{array}{l} a /\!/ b \\ a\perp\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$ 

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>（3）$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ l \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow l \perp \beta$
</td></tr>
<tr><td>（4）$\left.\begin{array}{l}\alpha \perp \beta \\ a \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = l \\ a \perp l\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \beta$
线⊥线（交线）⇒线⊥面
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. 面⊥面</td><td>（1）$\left.\begin{array}{l}a \subset \beta \\ a \perp \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$
线⊥面⇒面⊥面
</td></tr>
<tr><td>（2）证明二面角为直角</td></tr>
</table>

注：在证明垂直问题时，认真体会“转化”这一数学思想，领悟三种垂直关系的转化：线线垂直⇔线面垂直⇔面面垂直.

4. 有关角的问题

角的求法：①找出或作出有关的角；②证明其符合定义，并指出所求作的角；③计算大小（解直角三角形，或用余弦定理）.

注：异面直线所成的角、直线和平面所成的角、二面角，都化归为平面几何中两条相交直线所成的角.

（1）异面直线所成角：范围是$\left(0^{\circ}, 90^{\circ}\right]$，求法是作平行线，将异面转化成相交，具体途径有：中位线、补形法等.

（2）线、面所成角：范围是$\left[0^{\circ}, 90^{\circ}\right]$，求法是作垂线，找射影，即通过作直线射影的作图法得到.

（3）面、面所成角：范围是$\left[0^{\circ}, 180^{\circ}\right]$，求法是找二面角的平面角. 化归途径有：定义法、三垂线定理法、棱的垂面法及面积射影法.

二面角的常用求法：

（1）定义法：在二面角的棱上任取一点，过这点在二面角的两个半平面内分别引垂直于棱的射线，这两条射线所成的角，就是二面角的平面角.

（2）利用线面垂直关系来确定平面角：自二面角的一个面内一点 A 向另一面引垂线，再由垂足 A' 向棱作垂线，得到棱上一点 O，则 $\angle AOA'$ 即为二面角的平面角（或补角）.

（3）利用棱的垂面来确定二面角的平面角：自空间一点作与棱垂直的平面，截二面角得两条射线，

这两条射线所成的角就是二面角的平面角.

（4）利用求二面角的射影公式$\cos\theta=\dfrac{S'}{S}$. 其中各个符号的含义是：S是二面角的一个面内图形F的面积，S'是图形F在二面角的另一个面内的射影，θ是二面角的大小.

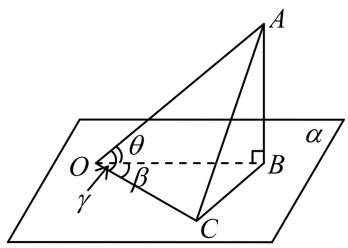
注：利用线面垂直关系来确定平面角时，要注意所作角是二面角的平面角还是其补角.

5. 应用三垂线定理的难点

应用三垂线定理的难点主要体现在对非水平放置的图形的辨认上. 在解证中可按照“一定平面，二定垂线，三找斜线，射影可见，直线随便”的原则去认定图形.

6. 三余弦定理（爪子定理）（仅作参考）

如下图，OB为OA在α内射影，OC为α内过O点任一直线，则$\cos\gamma=\cos\theta\cdot\cos\beta$，其中，$\theta$为线面成角，$\angle AOC=\gamma$，$\angle BOC=\beta$.



7. 三射影定理（仅作参考）

长度为l的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为l_1、l_2、l_3，夹角分别为θ_1、θ_2、θ_3，则有$l^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2\Leftrightarrow\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1\Leftrightarrow\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2$.（立体几何中长方体对角线长的公式是其特例）

8. 二面角所夹线段的相关结论（仅作参考）

若夹在平面角为φ的二面角间的线段与二面角的两个半平面所成的角是θ_1、θ_2，与二面角的棱所成的角是θ，则有$\sin^2\varphi\sin^2\theta=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$.

9. 作截面的依据

三个平面两两相交，有三条交线，则这三条交线交于一点或互相平行.

10. 棱锥的平行截面的性质

如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比（对应角相等，对应边对应成比例的多边形是相似多边形，相似多边形面积的比等于对应边的比的平方）；小棱锥与大棱锥的侧面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比.

11. 欧拉定理（欧拉公式）（仅作参考）

$V+F-E=2$（简单多面体的顶点数V、棱数E和面数F）.

（1）$E=$各面多边形边数和的一半. 特别地，若每个面的边数为n的多边形，则面数F与棱数E的

关系：$E=\frac{1}{2}nF$.

（2）若每个顶点引出的棱数为 m，则顶点数 V 与棱数 E 的关系：$E=\frac{1}{2}mV$.

12. 四面体的对棱所成的角（仅作参考）

四面体 $ABCD$ 中，AC 与 BD 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\left|\left(AB^2+CD^2\right)-\left(BC^2+DA^2\right)\right|}{2AC\cdot BD}$.

13. 有关距离距离

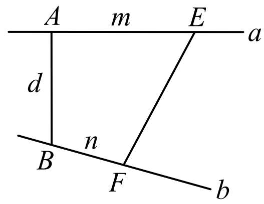
空间距离包括：①两点之间的距离；②经点到直线的距离；③点到平面的距离；④两条平行线间的距离；⑤两条异面直线间的距离；⑥平面的平行直线与平面之间的距离；⑦两个平行平面之间的距离. 七种距离之间有密切联系：有些可以相互转化，如两条平行线的距离可转化为求点到直线的距离；平行线面间的距离或平行平面间的距离都可转化成点到平面的距离等. 计算方法如下：

（1）线面距离、两平面间的距离问题转化为点到面的距离问题，将空间距离转化为两点的距离.

（2）求点到平面的距离：①直接法，即直接由点作垂线，求垂线段的长；②转移法，转化成求另一点到该平面的距离；③体积法.

（3）求异面直线的距离：①定义法，即求公垂线段的长；②转化成求直线与平面的距离；③函数极值法，依据是两条异面直线的距离是分别在两条异面直线上两点间距离中最小的.

（4）异面直线上两点间距离公式：设异面直线 a、b 所成角为 θ，则 $EF^2=m^2+n^2+d^2\pm 2mn\cos\theta$.（若 E、F 在直线 AB 的同侧，去负号，反之取正号）



练习

（1）正方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 a，则：①点 C 到面 AB_1C_1 的距离为________；②点 B 到面 ACB_1 的距离为________；③直线 A_1D_1 到面 AB_1C_1 的距离为________；④面 AB_1C 与面 A_1DC_1 的距离为________；⑤点 B 到直线 A_1C_1 的距离为________.【参考答案：① a；② $\frac{\sqrt{3}}{3}a$；③ $\frac{\sqrt{2}}{2}a$；④ $\frac{\sqrt{3}}{3}a$；⑤ $\frac{\sqrt{6}}{2}a$】

14. 平面图形的翻折

平面图形的翻折要注意翻折前后的长度、角度、位置的变化，翻折前后在同一个三角形中的角度、长度不变.

15. 解决立体几何有关问题时应注意使用转化的思想

（1）构造矩形、直角三角形、直角梯形，将有关棱柱、棱锥的问题转化成平面图形去解决.

（2）将空间图形展开，把立体几何问题转化成为平面图形问题.

（3）把不规则的图形转化成规则图形，把复杂图形转化成简单图形.

（4）利用三棱锥体积的自等性，将求点到平面的距离等问题转化成求三棱锥的高.

（5）平行转化.

线线平行 $\rightleftharpoons$ 线面平行 $\rightleftharpoons$ 面面平行

（6）垂直转化.

线线垂直 $\rightleftharpoons$ 线面垂直 $\rightleftharpoons$ 面面垂直

第十一章 空间向量

※本章内容※

公式定理及常见规律

11.1 空间向量

1. 向量加法与数乘向量的基本性质

（1） $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

（2） $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

（3） $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

2. 向量数量积的性质

（1） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta(0^\circ\le\theta\le180^\circ)$.

（2） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

（3） $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

3. 空间向量的基本定理

给定空间的一个基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ ，且对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$ ，存在惟一的有序实数组 (x,y,z) 使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ ， (x,y,z) 叫做向量 $\boldsymbol{p}$ 在基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 上的坐标.

推论：设 O 、A 、B 、C 是不共面的四点，则对空间任一点 P ，都存在惟一的有序实数组 x ， y ， z ，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

4. 空间四点共面定理

对空间任一点 O 和不共线的三点 A 、 B 、 C ，满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ （ $x+y+z=k$ ）. 当 $k=1$ 时，对于空间任一点 O ，总有 P 、 A 、 B 、 C 四点共面；当 $k\ne1$ 时，若 $O\in$ 平面 ABC ，则 P 、 A 、 B 、 C 四点共面，若 $O\notin$ 平面 ABC ，则 P 、 A 、 B 、 C 四点不共面.

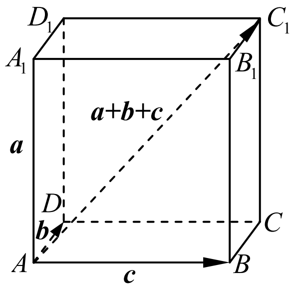
A 、 B 、 C 、 D 四点共面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 共面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OD}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$ （ $O\notin$ 平面 ABC ）.

5. 平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广

始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和，等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量.

如图， $\overrightarrow{AC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.



6. 共线向量定理（与平面向量中对应定理一样）

对空间任意两个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}\neq 0$），$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在实数$\lambda$使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

P、A、B三点共线$\Leftrightarrow AP\parallel AB\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$.

$AB\parallel CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$共线且$AB$、$CD$不共线$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{CD}$且$AB$、$CD$不共线.

7. 共面向量定理

向量$\boldsymbol{p}$与两个不共线的向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共面$\Leftrightarrow$存在实数对x、y，使$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

推论：空间一点P位于平面MAB内$\Leftrightarrow$存在有序实数对x、y，使$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，或对空间任一定点$O$，存在有序实数对$x$、$y$，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$.

8. 向量的直角坐标运算

设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.

（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$.

（3）$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$（$\lambda\in\mathbf{R}$）.

（4）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

（5）$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

（6）夹角公式：$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

推理：（三维柯西不等式）$\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)$.

（7）$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1$，$a_2=\lambda b_2$，$a_3=\lambda b_3$（$\lambda\in\mathbf{R}$）.

（8）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

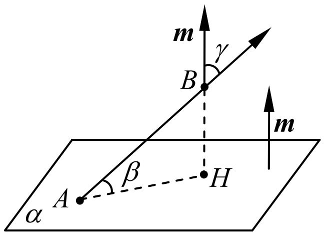
（9）设$A=(x_1,y_1,z_1)$，$B=(x_2,y_2,z_2)$，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

9. 异面直线所成角

$\cos\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\right|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$，其中$\theta$（$0^\circ<\theta\leq 90^\circ$）为异面直线$a$、$b$所成角，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$分别表示异面直线$a$、$b$的方向向量.

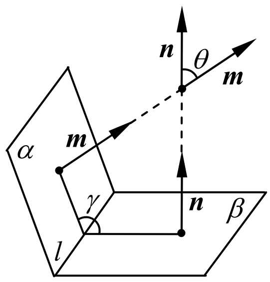
10. 直线 AB 与平面所成角 β

$\sin\beta=\cos\gamma=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{m}|}$（$\boldsymbol{m}$ 为平面 α 的一个法向量）.



11. 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角 γ

先计算 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$，$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$ 为平面 α、β 的法向量. θ 与 γ 相等还是互补要根据法向量的选取方向而定.



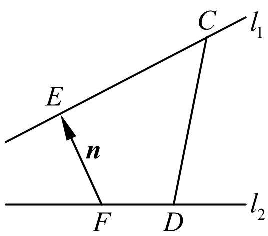
12. 空间两点间的距离公式

若 $A=(x_1,y_1,z_1)$，$B=(x_2,y_2,z_2)$，则 $d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

13. 异面直线间的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

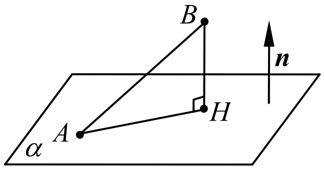
l_1、l_2 是两异面直线，其公垂向量为 $\boldsymbol{n}$，C、D 分别是 l_1、l_2 上任一点，d 为 l_1、l_2 间的距离.



14. 点 B 到平面 α 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，AB 是不包含于面 α 的一条斜线，$A\in\alpha$.

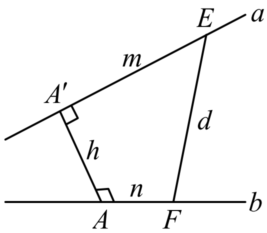


15. 异面直线上两点距离公式

$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$

两条异面直线 a、b 所成的角 θ，其公垂线段 AA' 的长度为 h．在直线 a、b 上分别取两点 E、F，$A'E=m$， $AF=n$， $EF=d$．

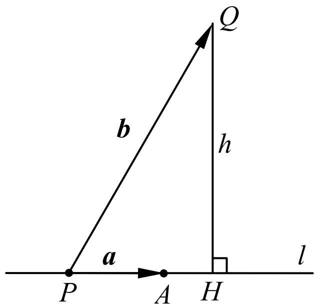
注： E、F 在 AA' 同侧，公式中“±”取“−”，否则取“+”．



16. 点 Q 到直线 l 的距离

$h=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\sqrt{(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

点 P 在直线 l 上，直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PA}$， $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{PQ}$．



第十二章 导数与定积分

※本章内容※

公式定理及常见规律

12.1 导数

1. 导数的实际意义

（1）函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率[即 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数]，即

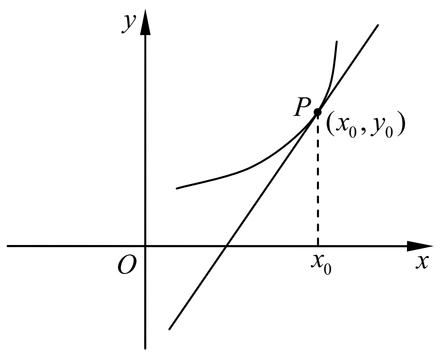
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

（2）瞬时速度：$v=s'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

（3）瞬时加速度：$a=v'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$.

2. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率 $f'(x_0)$，相应的切线方程是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.



3. 基本初等函数的导数公式（请熟记）

（1）若 $f(x)=c$，则 $f'(x)=0$.

（2）若 $f(x)=x^n$，则 $f'(x)=nx^{n-1}$.

（3）若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$.

（4）若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=-\sin x$.

（5）若 $f(x)=a^x$，则 $f'(x)=a^x\ln a$.

（6）若 $f(x)=e^x$，则 $f'(x)=e^x$.

（7）若 $f(x)=\log_a x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$.

（8）若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

4. 导数的运算法则（请熟记）

（1）$\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)$.

（2）$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

（3）$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$（$g(x)\neq 0$）.

5. 复合函数的求导方法（请熟记）

（1）复合函数 $f\left[g(x)\right]$ 的导数 $f'\left[g(x)\right]=f'(u)\cdot g'(x)$（$u=g(x)$）.

（2）设三个函数 f、g、h，则 $\left(f\cdot g\cdot h\right)'=f'gh+fg'h+fgh'$.

6. 函数的单调性与导数

设 $x_1\cdot x_2\in[a,b]$，$x_1\neq x_2$，那么

（1）$(x_1-x_2)\left[f(x_1)-f(x_2)\right]>0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数.

（2）$(x_1-x_2)\left[f(x_1)-f(x_2)\right]<0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数.

（3）在区间 (a,b) 内，若 $f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递增.

（4）在区间 (a,b) 内，若 $f'(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递减.

7. 函数的极值与导数

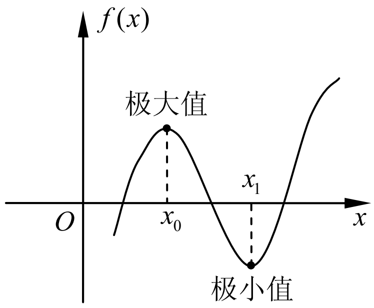
当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续且 $f'(x_0)=0$ 时，

（1）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是极大值.

（2）如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是极小值.

（3）在区间 (a,b) 内，若 $f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递增.

（4）在区间 (a,b) 内，若 $f'(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递减.



8. 用可导函数 $f(x)$ 求极值的步骤

（1）求导数 $f'(x)$.

（2）求方程 $f'(x)=0$ 的根 x_1，x_2，…，x_n.

（3）检验 $f'(x)$ 在方程的根的附近左右值的符号：若左正右负，则在这个根处取极大值；若左负右正，则在这个根处取极小值.

9. 求可导函数单调区间的一般方法和步骤

（1）确定定义域区间.

（2）求 $f'(x)$，令 $f'(x)=0$，求出一切实根.

（3）把函数 $f(x)$ 的间断点的横坐标，和上面各实数根按从小到大的顺序排列起来，然后用这些点将 $f(x)$ 的定义域区间分成若干个小区间.

（4）确定 $f'(x)$ 在各小区间内的符号，从而判断函数 $f(x)$ 在每个相应小开区间内的增减性.

10. 连续函数在闭区间上最值的计算步骤

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则求 $f(x)$ 最大值、最小值的步骤与格式为：

（1）求导数 $f'(x)$.

（2）求方程 $f'(x)=0$ 的根 x_1， x_2，…， x_n.

（3）结合在 $[a,b]$ 上的根及闭区间 $[a,b]$ 的端点数值，列出表格（ $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ ）.

x	a	(a,x_1)	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$\cdots$	x_n	(x_n,b)	b
y'		正负号	0	正负号	0		0	正负号	
y	值	单调性	值	单调性	值		值	单调性	值

（4）根据上述表格的单调性及值的大小，确定最大值与最小值.

一般地，求函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下：①求函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的极值；②将函数 $y=f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$ 、$f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

11. 解决优化问题的基本思路

（1）将优化问题转化为用函数表示的数学问题.

（2）用导数解决数学问题.

（3）将用导数解决的数学问题转化为优化问题作答.

12. 利用导数求过定点的切线方程时应注意的事项

（1）判断定点是否在曲线上，若不在曲线上，设切点 $P(x_0,f(x_0))$.

注：求曲线上某点处的切线与过某点的切线是不同的，过某点的切线方程的求法是先设出切点坐标，然后利用导数求出斜率，再将已知点代入切线方程，解出切点的横坐标. 如果已知点在曲线上，则说明方程已有一个解（这个解就是已知点的横坐标），再求得其他解，然后求出符合条件的所有切线方程.

（2）如果过点 $P(x_0,f(x_0))$ 的切线平行于 y 轴，则切线为 $x=x_0$.

（3）若非情况（2），求过点 $P(x_0,f(x_0))$ 的切线，可利用三个关系，即 P 点坐标适合曲线方程、P 点坐标适合切线方程、 P 点处的切线斜率为 $f'(x_0)$.

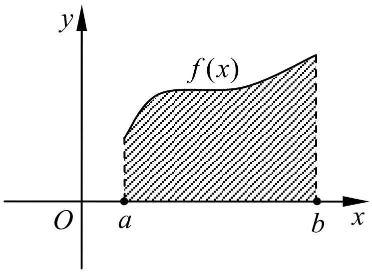
10.2 定积分

1. 定积分的概念

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$.

2. 定积分的几何意义

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示介于 x 轴、曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$、$x=b$ 之间的各部分曲边梯形面积的代数和，在 x 轴上方的面积取正号，在 x 轴下方的取负号.



3. 定积分的性质

（1）$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为常数）.

（2）$\int_a^b\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$.

（3）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$（其中 $a<c<b$）.

4. 微积分基本定理（牛顿-莱布尼兹公式）

一般地，如果 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，并且 $F'(x)=f(x)$，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a)$.

5. 定积分的求法

（1）定义法（用微分思想求曲边梯形的面积，分割，近似代替，求和，取极限）.

（2）牛顿-莱布尼兹公式.

（3）几何意义法：若 $y=f(x)$、x 轴与直线 $x=a$、$x=b$ 之间围成区域是可求面积的，则可直接求其面积作为定积分的值.

练习

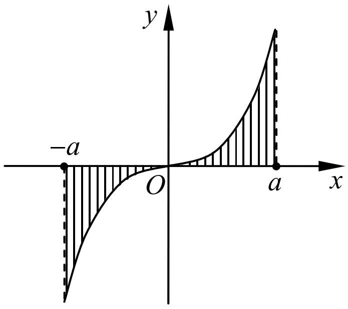
（1）求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 围成图形的面积.

【解析】$\because y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$（第一象限），令 $\sqrt{a^2-x^2}=y$，$\therefore x^2+y^2=a^2$，将积分看成圆的面积的 $\frac{1}{4}$，

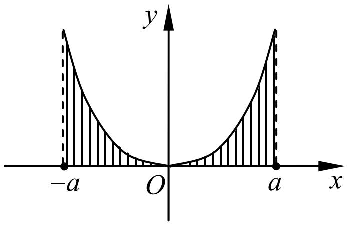
$\therefore S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=4\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=\pi ab$.

（4）利用奇偶函数的性质求.

①若 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$；

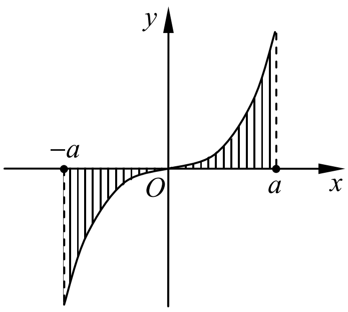


②若 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.



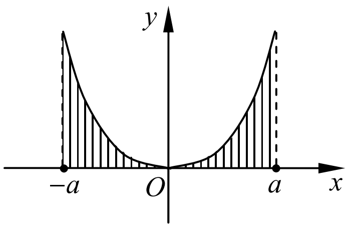
6. 利用定积分求面积举例

（1）



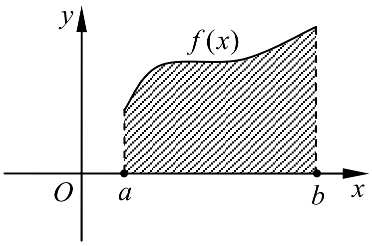
$S_{\text{YY}} = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

（2）



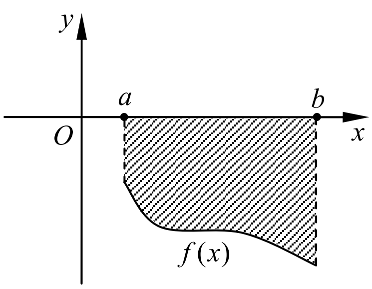
$S_{\text{YY}} = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$

（3）



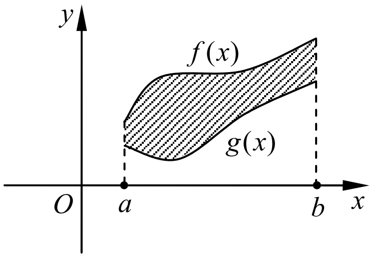
$S_{\text{YY}} = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

（4）



$S_{\text{YY}} = -\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

（5）



$$S_{YY}=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$$

第十三章 概　率

※本章内容※

公式定理及常见规律

13.1 概率

1. 随机事件的两个特征

（1）试验的所有可能结果只有有限个，每次试验只出现其中的一个.

（2）每一个试验的结果出现的可能性相同.

2. 随机事件的概率

随机事件的概率的取值范围是$0 \le P(A) \le 1$.

若事件A为必然事件，则$P(A)=1$；若事件A为不可能时间，则$P(A)=0$.

3. 古典概型

在古典概型中，事件的概率为$P(A)=\dfrac{m}{n}$. 利用此公式关键是求试验的基本事件总数n及事件A所包含的基本事件个数m.

（1）如果基本事件的个数比较少，可用列举法把基本事件一一列出，列举时应按某种规律一一列举，做到不重不漏，可借助于树状图、表格、坐标系等.

（2）基本事件个数比较多，可以借助两个计数原理及排列组合知识直接计算m、n，再运用公式求解.

练习

（1）投掷两粒均匀的骰子，出现两个5点的概率为（　　）. 【参考答案：A】

A. $\dfrac{1}{36}$　　B. $\dfrac{1}{18}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

4. 几何概型

在几何概型中，事件A的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{的度量}}{\text{基本事件的度量}}.$$

解几何概率问题的步骤如下：

（1）把样本空间和所求概率的事件使用关系式表示出来. 样本空间具有明显的几何意义. 样本点所在的几何区域有的题目中已给出. 若样本点所在的几何区域题目中没有直接给出，找出它们成为解这类几何概率题的关键，具体步骤是：

①根据题设引入适当变量；

②利用所引进的变量，把题设中的有关条件转化成变量所满足的代数条件；

③根据所得到的代数条件找出相应的几何区域.

（2）在坐标系中把几何图形画出来.

（3）把样本空间和所求概率的事件所在的几何图形的度量（就是如前所说的长度、面积或者体积）求出来，然后代入公式即可.

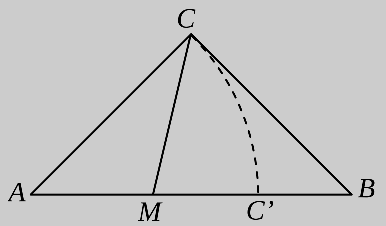
练习

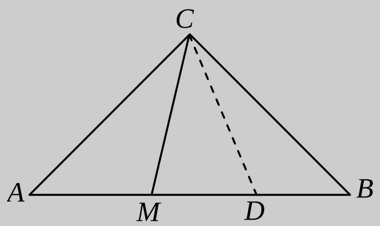
（1）在等腰直角三角形 ABC 中，直角顶点为 C，在 $\triangle ABC$ 的内部任作一条射线 CM，与线段 AB 交于点 M，求 $AM < AC$ 的概率.

（2）在等腰直角三角形 ABC 中，在斜边 AB 上任取一点 M，求 AM 小于 AC 的概率.

【解析】（1）由于在 $\angle ACB$ 内作射线 CM，等可能分布的是 CM 在 $\angle ACB$ 内的任一位置(如左图)，

因此基本事件的区域应是 $\angle ACB$，所以 $P(AM < AC) = \dfrac{\angle ACC'}{\angle ACB} = \dfrac{\dfrac{\pi - \dfrac{\pi}{4}}{2}}{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{3}{4}$.





（2）$P(AM < AC) = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

注意：第（1）题容易和第（2）题相混淆．第（1）题易错的原因是对几何概型的概念把握不准，理解模糊，将角度型的几何概型错误地用长度型几何概型求解（即第（2）题）．要解决好这两道题目，关键是把握好第（1）题是角度型的几何概型，而第（2）题是长度型几何概型.

5. 互斥事件

$A+B$ 或 $A \cup B$，表明“A 与 B 至少有一个发生”，叫做 A 与 B 的和（并）.

（1）互斥事件 A、B 分别发生的概率的和 $P(A+B) = P(A) + P(B)$，其中 $P(AB) = 0$.

（2）n 个互斥事件分别发生的概率的和 $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

（3）求复杂互斥事件的概率的方法：

①直接求解法，即将所求事件的概率分解为一些彼此互斥的事件的概率的和，然后利用互斥事件的求和公式计算；

②间接求法，即先求出此事件的对立事件的概率，再用公式 $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 求解，特别是求解“至少”或“至多”类型的概率问题.

注：当 A、B 不互斥（即相容）时，事件 $A+B$ 的概率计算公式为 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

练习

（1）某市足球一队与足球二队都参加全省足球冠军赛，一队夺冠的概率为 $\dfrac{2}{5}$，二队夺冠的概率为 $\dfrac{1}{4}$，则该市得冠军的概率为________．【参考答案：$\dfrac{13}{20}$】

6. 对立事件

事件 A 与它的对立事件 $\overline{A}$ 的概率和为 1，即 $P(A)+P(\overline{A})=1$，在求解“至少”或“至多”类型的概率问题时常用此关系.

练习

（1）下列各组事件中，对立事件是（　　）. 【参考答案：C】

A. 从 50 件产品中（其中有两件是废品），抽出 2 件产品，其中恰有一件是废品与两件是废品

B. 从 1、2、3、4 这四个数字中任取 3 个组成三位数，这个三位数大于 234 与这个三位数小于 324

C. 抛掷一粒骰子，出现奇数点与出现偶数点

D. 抛掷两枚硬币，都是正面与都是反面

7. 独立事件

A 发生与否对 B 发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件.

$A\cdot B$ 或 $A\cap B$，表示“ A 与 B 同时发生”，叫做 A 与 B 的积.

（1）独立事件 A、B 同时发生的概率 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

（2）n 个独立事件同时发生的概率 $P(A_1\cdot A_2\cdots\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots\cdots P(A_n)$.

设 A、B 为两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立. 如果事件 A 与事件 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

练习

（1）甲、乙两人独立地解同一个问题，甲解决这个问题的概率为 p_1，乙解决这个问题的概率为 p_2，那么两人都没能解决这个问题的概率是（　　）. 【参考答案：C】

A. $2-p_1-p_2$　　B. $1-p_1p_2$　　C. $1-p_1-p_2+p_1p_2$　　D. $1-(1-p_1)(1-p_2)$

8. 条件概率

（1）设 A、B 为两个事件，且 $P(A)>0$，则在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$. 特别地，对于古典概型，由于组成事件 A 的各个基本事件发生的概率相等，因此其条件概率也可表示为 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}$.

（2）若 $C\cap B=\varnothing$，则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

（3）若 A、B 为两个独立事件，则 $P(B|A)=P(B)$.

练习

（1）5 个乒乓球（3 个新球，2 个旧球），每次取 1 个，无放回地取 2 次. 求：①第一次取得新球的概率；②第二次取得新球的概率；③在第一次取得新球的条件下第二次取得新球的概率.

【参考答案：① $\dfrac{3}{5}$；② $\dfrac{3}{5}$；③ $\dfrac{1}{2}$】

（2）5 个乒乓球（3 个新球，2 个旧球），每次取 1 个，有放回地取 2 次. 求：①第一次取得新球的概率；②第二次取得新球的概率；③在第一次取得新球的条件下第二次取得新球的概率.

【参考答案：① $\dfrac{3}{5}$；② $\dfrac{3}{5}$；③ $\dfrac{3}{5}$】

13.2 随机变量及其分布

1. 离散型随机变量ξ的分布列

若离散型随机变量ξ可能取的值为X_1、X_2、…、X_i、…、X_n，相应的概率为p_1、p_2、…、p_i、…、p_n，即$P(\xi=X_i)=p_i$，则随机变量ξ的分布列为

ξ	X_1	X_2	…	X_i	…	X_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

2. 离散型随机变量ξ的分布列的性质

（1） $p_i \ge 0$， $i=1,2,\cdots$；

（2） $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

3. 两点分布（0−1 分布）

如果随机变量ξ的分布列为

ξ	0	1
P	$1-p$	p

就称ξ服从两点分布，而称$P=P(\xi=1)$为成功概率.

4. 独立重复试验与二项分布

n次独立重复试验中某事件恰好发生k次的概率为$P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，此时称随机变量$\xi$服从二项分布，记作$\xi\sim B(n,p)$.

练习

（1）在某一试验中事件A出现的概率为p，则在n次试验中$\overline{A}$出现k次的概率为（ ）. 【参考答案：D】

A. $1-p^k$ B. $(1-p)^k p^{n-k}$ C. $1-(1-p)^k$ D. $C_n^k(1-p)^k p^{n-k}$

5. 二项分布的识别方法

（1）只有两个可能结果A和$\overline{A}$，试验可n次独立重复，则n次试验A发生的次数ξ就服从二项分布.

（2）凡是服从二项分布的随机变量一定只取有限个实数为其值，否则，随机变量不服从二项分布.

（3）凡服从二项分布的随机变量在被看作观察n次试验中某事件发生的次数时，此事件在每次观察中出现的概率相等，否则不服从二项分布.

6. 解二项分布问题时的注意事项

（1）注意区分“恰有k次发生”（概率为$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$）和“某指定的k次发生，其余次的试验则不发生” （概率为$p^k(1-p)^{n-k}$）.

（2）注意区分“A恰好发生k次”（概率为$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$）和“A恰好发生k次，且最后一次是事件A发生”（概率为$C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}p$）.

7. 超几何分布

在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 ξ 件次品的概率为：$P(\xi=k)=\dfrac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，称离散型随机变量 X 服从超几何分布.

练习

（1）设 10 件产品中有 4 件次品，6 件正品，求从中任取 5 件恰有 2 件次品的概率.【参考答案：$\dfrac{C_4^2C_6^3}{C_{10}^5}$】

8. 离散型随机变量 ξ 的均值（数学期望）

若离散型随机变量 ξ 的分布列为

ξ	X_1	X_2	$\cdots$	X_i	$\cdots$	X_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

则 ξ 的数学期望为：$E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$.

练习

（1）同时抛掷两枚相同的均匀硬币，随机变量 $\xi=1$ 表示结果中有正面向上，$\xi=0$ 表示结果中没有正面向上，则 $E\xi=$________. 【参考答案：$\dfrac{3}{4}$】

9. 离散型随机变量 ξ 的方差

$D\xi=(x_1-E\xi)^2\cdot p_1+(x_2-E\xi)^2\cdot p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2\cdot p_n$.

10. 离散型随机变量 ξ 的数学期望、方差公式

（1）设 a、b 为常数，则 $E(a\xi+b)=aE\xi+b$，$D(a\xi+b)=a^2D\xi$.

（2）若 ξ 服从 $0-1$ 分布，则 $E\xi=p$，$D\xi=p(1-p)$.

（3）若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $E\xi=np$，$D\xi=np(1-p)$.

（4）若 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)=q^{k-1}p$，则 $E\xi=\dfrac{1}{p}$，$D\xi=\dfrac{q}{p^2}$，其中 $q=1-p$.

（5）若 ξ 服从超几何分布，且 $P(\xi=k)=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，则 $E\xi=\dfrac{M}{N}n$，$D\xi=E(\xi^2)-(E\xi)^2$.

练习

（1）已知随机变量 ξ 服从二项分布，且 $E\xi=2.4$，$D\xi=1.44$，则二项分布的参数 n,p 的值为（　　）.

【参考答案：B】

A. $n=4,p=0.6$　　B. $n=6,p=0.4$　　C. $n=8,p=0.3$　　D. $n=24,p=0.1$

11. 方差与期望的关系

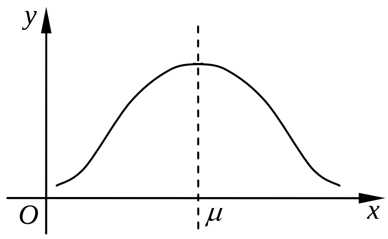
$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$.

12. 标准差

$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$.

13. 正态分布

正态分布密度函数 $x \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 表示平均数，σ 表示标准差，则正态总体函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in(-\infty,\infty)$，其分布叫做正态分布，记作 $N(\mu,\sigma^2)$. 函数的图像叫正态曲线.



14. 正态曲线的性质

（1）曲线位于 x 轴的上方，与 x 轴不相交.

（2）曲线是单峰的，它关于直线 $x=\mu$ 对称.

（3）曲线在 $x=\mu$ 处达到峰值 $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

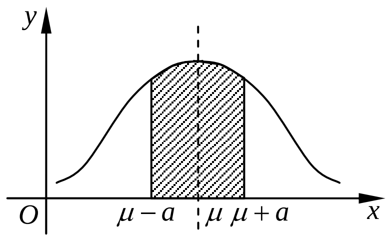
（4）曲线与 x 轴之间的面积为 1.

（5）当 σ 一定时，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移.

（6）当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定. σ 越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中；σ 越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越分散.

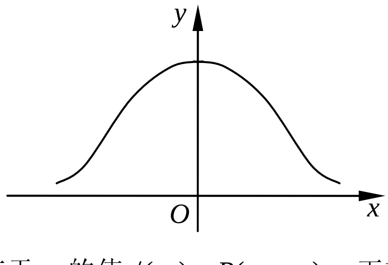
15. 正态分布概率的计算

若 $x\sim N(\mu,\sigma^2)$，则对于任何实数 $a>0$，概率 $P(\mu-a\le x\le\mu+a)=\int_{\mu-a}^{\mu+a}f(x)\mathrm{d}x$.



16. 标准正态分布

（1）在正态分布中，当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，叫做标准正态分布，记作 $N(0,1)$. 标准正态分布密度函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$x\in(-\infty,\infty)$.



（2）在标准正态分布表中，相应于 x_0 的值 $\phi(x_0)=P(x<x_0)$；正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 取值小于 x 的概率 $F(x)=\phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$；若 $x_0<0$，则 $\phi(x_0)=1-\phi(-x_0)$，从而可利用标准正态分布表. 若正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

$P(x_1 < x_0 < x_2) = P(x < x_2) - P(x < x_1) = F(x_2) - F(x_1) = \phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$.

17. 正态分布的 3σ 原则

若 $x \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ 表示标准差，则

$P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) \approx 0.6826$，

$P(\mu-2\sigma < x < \mu+2\sigma) \approx 0.9544$，

$P(\mu-3\sigma < x < \mu+3\sigma) \approx 0.9974$.

第十四章 统 计

※本章内容※

公式定理及常见规律

14.1 普查与抽样

	优点	缺点
普查	所取得的数据比较全面系统，能较好地把握调查对象的总体数量	当普查的对象数量很大时，普查的工作量就很大，要耗费大量的人力、物力及财力，并且组织工作繁重，时间长，缺乏时效性
抽样调查	能及时迅速地获取所需数据，并且节约大量的人力、物力、财力，由于调查对象少，可以对被调查个体的信息了解得更为详细，从而使获得的数据更加科学、可靠	所获取的数据不够全面和系统，并且不易把握调查对象的总体数量

14.2 分层抽样

（1）将总体按其属性特征分成若干类型（有时称作层），然后在每个类型中随机抽取一定的样本，这种抽样方法叫做分层抽样.

（2）分层抽样适用于总体由差异明显的几部分组成的情况. 分层抽样时，分层所抽取的个数等于该层个体总数与抽样比的乘积，抽样比=抽取样本容量÷总体个体数.

14.3 系统抽样

（1）将总体的个体进行编号，按照简单随机抽样抽取一个样本，然后按相同的间隔抽取其他样本. 这种抽样叫做系统抽样，有时也叫等距抽样或机械抽样.

（2）系统抽样的步骤：

①编号：采用随机的方式将总体中的个体编号（设 N 个），编号的方式可按情况决定.

②分段：为将整个的编号进行分段（即分成几个部分），要确定分段的间隔k．当$\frac{N}{n}$（N为总体中的个体数，n为样本容量）是整数时，$k=\frac{N}{n}$；当$\frac{N}{n}$不是整数时，通过从总体中随机剔除一些个体，使剩下的总体中个体个数N'能被n整除，这时$k=\frac{N'}{n}$．

③确定起始个体编号：在第 1 段用简单随机抽样确定起始的个体编号S．

④按照事先确定的规则抽取样本：通常是将S加上间隔k，得到第 2 个个体编号$S+k$，再加上k得到第 3 个个体编号$S+2k$，…，这样继续下去，获得的编号依次为S，$S+k$，$S+2k$，…，$S+(n-1)k$．

14.4 三种抽样方法的比较

共同点：抽样过程中每个个体被抽取的概率相等.

抽样方法	各自特点	相互联系	适用范围
简单随机抽样	从总体中逐个抽取	最基本的抽样方式	总体中个体数较少
系统抽样	将总体均分成几部分，按事先确定的规律在各部分抽取	在起始部分抽样时采用简单随机抽样	总体中个体数较多
分层抽样	将总体分成几层	各层抽样时采用简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几部分组成

14.5 统计图表

包括条形图、折线图、饼图、茎叶图等.

14.6 刻画一组数据集中趋势的统计量

有平均数、中位数、众数等.

14.7 频率分布直方图

（1）各小长方形的面积之和为 1.

（2）每个小长方形的面积为相应的概率.

样本频率直方图的作法：

（1）计算数据极差$x_{\max}-x_{\min}$．

（2）决定组距和组数.

（3）决定分点.

（4）列频率分布表.

（5）画频率直方图.

14.8 方差

（1）样本数据为x_1、x_2、…、x_n，$\overline{x}$表示这组数据的平均数，则方差$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2$．

（2）将数据同时减去同一个数，得到 x_1' 、 x_2' 、…、 x_n' ，也有方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_1'-\overline{x'}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i'^2-\overline{x'}^2$ ，这种方法称为加权方差公式.

14.9 统计的有关规律

（1）若 x_1 、 x_2 、…、 x_n 的平均数为 $\overline{x}$ ，那么 mx_1+a 、 mx_2+a 、…、 mx_n+a 的平均数为 $m\overline{x}+a$.

（2）数据 x_1 、 x_2 、…、 x_n 的方差与 x_1+a 、 x_2+a 、…、 x_n+a 的方差相等.

（3）数据 x_1 、 x_2 、…、 x_n 的方差为 s^2 ，则 ax_1 、 ax_2 、…、 ax_n 的方差为 a^2s^2 .

14.10 求回归方程并进行回归分析的一般步骤

（1）作散点图，判断散点是否在同一条直线附件.

（2）如果不作散点图，也可计算相关系数，根据计算结果判断两个变量是否具有相关关系.

注：相关系数 r 的计算： $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-n\overline{x}^2)\sum_{i=1}^{n}(y_i^2-n\overline{y}^2)}}$.

①计算 $|r|$ ，且 $|r|$ 越接近 1，相关程度越大； $|r|$ 越接近 0，相关程度越小；

②一般地， $|r|>0.75$ 认为两个变量强相关；

③ $r>0$ ，表明两个变量正相关； $r<0$ ，表明两个变量负相关； $r=0$ ，表明两个变量基本不相关.

（3）如果散点在同一条直线附近，利用公式计算出 a 、 b ，并写出回归直线方程 $\hat{y}=a+bx$ ，其中

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2} \\ a=\overline{y}-b\overline{x} \end{cases}.$$

（4）用相关指数刻画回归效果.

注：相关指数 R^2 的计算： $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$.

R^2 取值越大，也就是说模型的拟合效果越好； R^2 越接近 1，表示回归的效果越好.

也可用残差分析来判断模型的拟合效果是否良好. 残差平方和越小，则效果越好. 残差平方和为 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ ，总偏差平方和为 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$.

回归平方和=总偏差平方和－残差平方和.

14.11 回归分析的基本步骤

回归分析是对有相关关系的两个变量进行统计分析.

回归分析有线性回归问题与非线性回归问题. 对于非线性回归问题，往往利用转换变量的方法进行转化，转变为线性回归问题.

（1）确定研究对象，明确变量是解释变量还是预测变量.

（2）画出确定好的解释变量和预报变量的散点图，观察它们之间的关系.

（3）由经验确定回归方程的类型.

（4）估计回归方程中的参数.

（5）得出结果后分析残差图是否有异常，若存在异常，则检查数据是否有误，或模型是否合适等.

14.12 独立性检验分析问题的基本步骤

独立性检验是对两个分类变量间是否存在相关关系的一种案例分析方法.

假设有两个分类变量 X 和 Y，它们的值域分别为 $\{x_1,x_2\}$ 和 $\{y_1,y_2\}$.

（1）作样本频数列联表（称为 2×2 列联表）：

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

（2）画三维柱形图或二维条形图，粗略判断分类变量间是否有无关系.

也可假设分类变量之间无关系，计算 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$K^2$ 值越大，说明“X 与 Y 有关系”成立的可能性越大.

如对两个分类变量：

①如果 $K^2>6.635$，就约有 99%的把握认为“x 与 y 有关系”.

②如果 $K^2>3.841$，就约有 95%的把握认为“x 与 y 有关系”.

③如果 $K^2>2.706$，就约有 90%的把握认为“x 与 y 有关系”.

④如果 $K^2\le 2.706$，就认为没有充分的证据显示“x 与 y 有关系”.

练习

（1）在对人们休闲方式的一次调查中，共调查了 124 人，其中女性 70 人，男性 54 人，女性中有 43 人主要的休闲方式是看电视，另外 27 人主要的休闲方式是运动，男性中有 21 人主要的休闲方式是看电视，另外 33 人的主要休闲方式是运动. ①根据以上数据建立一个 2×2 的列联表；②判断性别与休闲是否有关系. **【参考答案：略】**

第十五章 排列组合与二项式定理

※本章内容※

公式定理及常见规律

15.1 排列组合

1. 分类加法原理

（1）分类加法原理：完成一件事有两类不同方案，在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同方法.

（2）分类计数原理的核心：每法皆可完，方法可分类. 应用分类计数原理要求分类的每一种方法都能把事件独立完成（注意分类做到不重不漏）.

（3）分类计数原理（加法原理）： $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

2. 分步乘法原理

（1）分步乘法原理：完成一件事需要两个不同步骤，在第 1 步中有 m 种不同的方法，在第 2 步中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=mn$ 种不同方法.

（2）分步计数原理的核心：每法皆分步，每步皆未完. 应用分步计数原理要求各步均是完成事件必须经过的若干彼此独立的步骤.

（3）分步计数原理（乘法原理）： $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$.

3. 分类与分步的差别

如果每种方法都能将事情完成则是分类；如果必须要连续若干步才能将事情完成，则是分步. 分类要用分类加法计数原理，分步要用分步乘法计数原理.

4. 排列

（1）定义：从 n 个不同元素中取出 m （ $m\le n$ ）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

（2）排列数公式： $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ ，其中 $m,n\in N^*$ ， $m\le n$. 规定 $0!=1$.

5. 组合

（1）定义：从 n 个不同元素中取出 m （ $m\le n$ ）个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

（2）组合数公式： $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times2\times\cdots\times m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ ，其中 $m,n\in N^*$ ，且 $m\le n$.

6. 排列恒等式（不用记住，但要知道推导，且要能运用）

（1）$A_n^m=(n-m+1)A_n^{m-1}$.

（2）$A_n^m=\dfrac{n}{n-m}A_{n-1}^m$.

（3）$A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$.

（4）$nA_n^n=A_{n+1}^{n+1}-A_n^n$.

（5）$A_{n+1}^m=A_n^m+mA_n^{m-1}$.

（6）$1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

7. 组合数的两个性质

（1）$C_n^m=C_n^{n-m}$.

（2）$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$. （注：规定 $C_n^0=1$）

8. 组合恒等式（不用记住，但要知道推导，且要能运用）

（1）$C_n^m=\dfrac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$.

（2）$C_n^m=\dfrac{n}{n-m}C_{n-1}^m$.

（3）$C_n^m=\dfrac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$.

（4）$rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$.

（5）$C_r^r+C_{r+1}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$.

（6）$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

（7）$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$.

（8）$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$.

（9）$C_m^rC_n^0+C_m^{r-1}C_n^1+\cdots+C_m^0C_n^r=C_{m+n}^r$.

（10）$\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$.

9. 排列数与组合数的关系

$A_n^m=m!\cdot C_n^m$

10. 解决计数问题的基本原则

在应用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解决问题时，一般是先分类（注：分类标准要一致）在分步，每一步当中又可能用到分类加法计数原理.

11. 对于有附加条件的排列组合应用题考虑途径

（1）以元素为主考虑，即先满足特殊元素的要求，再考虑其他元素.

（2）以位置为主考虑，即先满足特殊位置的要求，再考虑其他位置.

（3）先不考虑附加条件，计算出排列或组合数，再减去不合要求的排列或组合数.

（4）按事件发生的过程进行分步.

12. 处理排列组合应用题的规律

（1）两种思路：直接法、间接法.

（2）两种途径：元素分析法、位置分析法.

（3）对排列组合的混合题，一般先选再排，即先组合在排列. 弄清要完成什么样的事件是前提.

（4）基本题型及方法：捆绑法、插空法、错位法、分组分配法、均匀分组法、逆向思考法等.

13. 排列、组合问题的求解应掌握的基本方法与技巧

（1）特殊元素优先安排（定位问题优先法）.

（2）合理分类与准确分步（多元问题分类法）.

（3）定序问题排除法处理.

（4）排列、组合混合问题先选后排.

（5）相邻问题捆绑处理（“小集团”排列问题先整体和局部）.

（6）不相邻问题插空处理.

（7）相同元素分组可采用隔板法（插竿法）.

（8）分排问题直接处理.

（9）构造模型.

（10）正难则反，等价转化（即间接法和去杂法，至多至少问题间接法）.

（11）数量不大时可以逐一排出结果（穷举法）.

14. 单条件排列

以下各条的大前提是从 n 个元素中取 m 个元素的排列.

（1）“在位”与“不在位”.

①某（特）元必在某位有 A_{n-1}^{m-1} 种；

练习

（1）5 名学生排队，甲必须排在队尾，共有多少种排队方法？ 【参考答案： $A_4^4=4\times3\times2=24$】

②某（特）元不在某位有 $A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$（补集思想）$=A_{n-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼位置）$=A_{n-1}^m+A_{m-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼元素）种.

练习

（1）5 名学生排队，甲不排在队尾，共有多少种排队方法？ 【参考答案： $A_5^5-A_4^4=96$】

（2）紧贴与插空（即相邻与不相邻）.

①定位紧贴：k（$k\le n$）个元在固定位的排列有 $A_k^kA_{n-k}^{n-k}$ 种；

练习

（1）5 名学生排队，甲乙都必须排在第 2 位或第 3 位，共有多少种排队方法？【参考答案：$A_2^2A_3^3=12$】

②浮动紧贴：n 个元素的全排列把 k 个元排在一起的排法有 $A_k^kA_{n-k+1}^{n-k+1}$ 种；**注：**此类问题常用捆绑法，即把捆绑后的整体作为一个元素参与排列.

练习

（1）5 名学生排队，甲乙都必须相邻，共有多少种排队方法？ 【参考答案： $A_2^2A_4^4=48$】

③插空：两组元素分别有 k、h 个（$k\le h+1$），把它们合在一起来作全排列，k 个的一组不能

挨近的所有排列数有 $A_h^h A_{h+1}^k = A_h^h C_{h+1}^k A_k^k$ 种. **注**：此类问题先用插空法再排列.

练习

（1）蓝队 5 名学生，红队 8 名学生，排成一排，要求蓝队学生互不相邻，共有多少种排队方法？【参考答案：$A_8^8 A_9^5$】

（3）两组元素各相同的插空.

m 个大球 n 个小球排成一列，小球必分开，问有多少种排法？当 $n > m+1$ 时，无解；当 $n \le m+1$ 时，有 C_{m+1}^n 种排法.

练习

（1）5 个相同的篮球，8 个相同的红球，篮球必须分开，共有多少种排队方法？【参考答案：C_9^5】

（4）两组元素各相同的排列.

两组元素有 m 个和 n 个，各组元素分别相同的排列数为 C_{m+n}^m.

练习

（1）机器人须向东走 5 步并且向南走 3 步即完成指令，已知机器人每步行进要么向东要么向南，问共有多少种行进方法？【参考答案：C_8^5】

15. 分配问题

（1）平均分组有归属问题.

将相异的 mn 个物体等分给 m 个人，各得 n 件，其分配方法数共有

$$N = C_{mn}^n \cdot C_{mn-n}^n \cdot C_{mn-2n}^n \cdots C_{2n}^n \cdot C_n^n = \frac{(mn)!}{(n!)^m}.$$

练习

（1）将 8 名教师平分到 4 所学校，分配方法有多少种？【参考答案：$C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2$】

（2）平均分组无归属问题.

将相异的 $m \cdot n$ 个物体等分为无记号或无顺序的 m 堆，其分配方法数共有

$$N = \frac{C_{mn}^n \cdot C_{mn-n}^n \cdot C_{mn-2n}^n \cdots C_{2n}^n \cdot C_n^n}{m!} = \frac{(mn)!}{m!(n!)^m}.$$

练习

（1）将 8 名学生平分成 4 组，共有多少种分配方案？【参考答案：$\dfrac{C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2}{4!}$】

（3）非平均分组有归属问题.

将相异的 P（$P = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$）个物体分给 m 个人，物体必须被分完，分别得到 n_1、n_2、…、n_m 件，且 n_1、n_2、…、n_m 这 m 个数彼此不相等，则其分配方法数共有

$$N = C_P^{n_1} C_{P-n_1}^{n_2} C_{P-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n_m}^{n_m} \cdot m! = \frac{P!m!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

练习

（1）将 8 名教师以 1，2，5 分成三组，派到三间学校，共有多少种方案？【参考答案：$C_8^1 C_7^2 C_5^5 \cdot 3!$】

（4）非完全平均分组有归属问题.

将相异的 P（$P=n_1+n_2+\cdots+n_m$）个物体分给 m 个人，物体必须被分完，分别得到 n_1、n_2、…、n_m 件，且 n_1、n_2、…、n_m 这 m 个数中分别有 a，b，c …个相等，则其分配方法数共有

$$N=\frac{C_P^{n_1}C_{P-n_1}^{n_2}C_{P-n_1-n_2}^{n_3}\cdots C_{n_m}^{n_m}\cdot m!}{a!b!c!\cdots}=\frac{P!m!}{n_1!n_2!\cdots n_m!(a!b!c!\cdots)}.$$

练习

（1）将 8 名教师以 2，2，4 分成三组，派到三所学校，共有多少种方案？【参考答案：$\frac{C_8^2C_6^2C_4^4\cdot 3!}{2!}$】

（5）非平均分组无归属问题.

将相异的 P（$P=n_1+n_2+\cdots+n_m$）个物体分给任意的 n_1、n_2、…、n_m 件无记号的 m 堆，且 n_1、n_2、…、n_m 这 m 个数彼此不相等，则其分配方法数共有 $N=\frac{P!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$.

练习

（1）将 8 名教师以 1，3，4 分成三组，共有多少种方案？【参考答案：$\frac{8!}{1!3!4!}$】

（6）非完全平均分组无归属问题.

将相异的 P（$P=n_1+n_2+\cdots+n_m$）个物体分为任意的 n_1、n_2、…、n_m 件无记号的 m 堆，且 n_1、n_2、…、n_m 这 m 个数中分别有 a，b，c …个相等，则其分配方法数共有

$$N=C_P^{n_1}C_{P-n_1}^{n_2}C_{P-n_1-n_2}^{n_3}\cdots C_{n_m}^{n_m}=\frac{P!}{n_1!n_2!\cdots n_m!(a!b!c!\cdots)}.$$

练习

（1）将 8 名教师以 2，2，4 分成三组，共有多少种方案？【参考答案：$\frac{C_8^2C_6^2C_4^4}{A_2^2}$】

（7）限定分组有归属问题.

将相异的 P（$P=n_1+n_2+\cdots+n_m$）个物体分给甲、乙、丙、…、m 个人，物体必须被分完，如果指定甲得 n_1 件，乙得 n_2 件，丙得 n_3 件，…时，则无论 n_1、n_2、…、n_m 等 m 个数是否完全相异或不全相异，其分配方法数恒有 $N=C_P^{n_1}C_{P-n_1}^{n_2}C_{P-n_1-n_2}^{n_3}\cdots C_{n_m}^{n_m}=\frac{P!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$.

练习

（1）将 8 名教师中选 1 名派往甲学校，3 名派往乙学校，4 名派往丙学校，共有多少种方案？【参考答案：$C_8^1C_7^3C_4^4$】

（8）相同元素分组问题.

将相同的 P 个物体分为 m 堆分配方法共有 C_{P-1}^{m-1} 种（插竿法或隔板法）.

练习

（1）将 8 个参赛名额分给 3 所学校，每所学校至少有一个名额，共有多少种分配方案？【参考答案：C_7^2】

16.“错位问题”及其推广（仅作参考）

贝努利装错信笺问题：n 封信与 n 个信封全部错位的组合数为 $f(n)=n!\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$.

推广：n 个元素与 n 个位置，其中至少有 m 个元素错位的不同组合总数为

$$f(n,m)=n!-C_m^1(n-1)!+C_m^2(n-2)!-\cdots+(-1)^pC_m^p(n-p)!+\cdots+(-1)^mC_m^m(n-m)!$$

$$=n!\cdot\left[1-\frac{C_m^1}{A_n^1}+\frac{C_m^2}{A_n^2}-\frac{C_m^3}{A_n^3}+\cdots+(-1)^p\frac{C_m^p}{A_m^p}+\cdots+(-1)^m\frac{C_m^m}{A_m^m}\right].$$

练习

（1）4 封信全部装错共有多少种可能？ 【参考答案：用穷举法，9】

15.2 二项式定理

1. 二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$. 注：展开式有 $n+1$ 项.

2. 二项式展开式的通项公式

$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$（$r=0,1,2,\cdots,n$）

练习

（1）在 $\left(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2}\right)^{100}$ 展开式所得的 x 的多项式中，系数为有理数的项有（　　）. 【参考答案：B】

A. 50 项　　B. 17 项　　C. 16 项　　D. 15 项

（2）在 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中第 32 项与第 72 项的系数相同，那么展开式的中间一项的系数为（　　）. 【参考答案：D】

A. C_{104}^{52}　　B. C_{103}^{52}　　C. C_{102}^{52}　　D. C_{102}^{51}

（3）$(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{50}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{50}x^{50}$，其中 a_3 的值是（　　）. 【参考答案：A】

A. C_{51}^4　　B. C_{50}^4　　C. C_{51}^3　　D. $2C_{50}^3$

3. 二项式展开式的特点

（1）与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等.

（2）当 n 为偶数时，中间的一项即第 $\frac{n}{2}$ 项的二项式系数最大；当 n 为奇数时，中间的两项即第 $\frac{n-1}{2}$、$\frac{n+1}{2}$ 项的二项式系数相等，且同时取得最大值.

（3）二项式系数和等于 2^n，即 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

（4）偶数项的系数和等于奇数项二项式系数和，即 $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$.

4. 二项式展开式中最大系数的求法

如：求 $(3x+4y)^9$ 中最大系数是第几项？

令系数 $T_{r+1}=C_9^r 3^{9-r}4^r$，计算 $\begin{cases}T_{r+1}\ge T_r\\T_{r+1}\ge T_{r+2}\end{cases}$，得出 r 的范围，可知是第 $r+1$ 项的系数最大.

5. 系数与二项式系数的差别

$(2-x)^{100}$ 的第 6 项的系数为 $C_{100}^5\cdot 2^{100-5}\cdot(-1)^5$ 即 $-C_{100}^5\cdot 2^{95}$，二项式系数是 C_{100}^5.

6. 二项式定理的应用

（1）二项式定理求余数或证明整除性问题时常采用"配凑"、"消去"方法.

（2）用二项式定理证明不等式常用放缩法.

7. 赋值法在二项式定理中的应用

一般令 $x=0$ 可得常数项；$x=1$ 可得所有系数之和；$x=-1$ 可得奇次项系数之和与偶次项系数之和的差；当二项展开式中含有负值时，$x=-1$ 可得各项系数绝对值之和.

练习

（1）若 $(1-2x)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8+a_9x^9$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_8$ 的值为________.【参考答案：510】

第十六章 推理与证明

※本章内容※

公式定理及常见规律

16.1 推理

推理包含合情推理与演绎推理. 合情推理包括归纳推理与类比推理等.

1. 归纳推理

由某类事物的部分对象具有某些特征，推出该类事物也具有这些特征的推理，或者由个别事实概括出一般结论的推理，简称归纳推理.

2. 类比推理

由两类对象具有某些类似属性和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理，简称类比推理.

归纳推理和类比推理都是根据已有的事实，经过观察、分析、比较、联想，再进行归纳、类比，然后提出猜想的推理，统称为合情推理.

合情推理的过程概括为：

从具体问题出发 → 观察、分析、比较、联想 → 归纳、类比 → 提出猜想

3. 演绎推理

从一般性的原理出发，推出某个特殊情况下的结论，这种推理称为演绎推理. 简言之，演绎推理是一般到特殊的推理.

“三段论”是演绎推理的一般模式，包括：大前提——已知的一般原理；小前提——所研究的特殊情况；结论——根据一般原理，对特殊情况做出的判断.

“三段论”可以表示为：

大前提：M 是 P；小前提：S 是 M；结论：S 是 P.

16.2 合情推理与演绎推理的主要区别

项目＼内容	合情推理		演绎推理
	归纳	类比	
推理形式	部分到整体、个别到一般	特殊到特殊	一般到特殊
推理所得结论	结论不一定正确，有待进一步证明		在大前提、小前提和推理形式都正确的前提下，得到的结论一定正确

16.3 综合法

综合法是利用已知条件和某些已经学过的定义、定理、公理等，经过一系列的推理、论证，最后推导出所要证明的结论成立的证明方法，其思维特征是“执因导果”.

用 P 表示已知条件，已有的定义、定理、公理等，Q 表示所要证明的结论，则综合法可用框图表示为：

$$\boxed{P \Rightarrow Q_1} \longrightarrow \boxed{Q_1 \Rightarrow Q_2} \longrightarrow \boxed{Q_2 \Rightarrow Q_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{Q_4 \Rightarrow Q}$$

16.4 分析法

在研究或证明一个命题时，从要证明的结论出发，逐步寻求推证过程中使每一步结论成立的充分条件，直至最后把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件（已知条件、定理、定义、公理等）为止. 这种证明的方法叫做分析法. 这种思维过程通常称为“执因索果”.

分析法在思考过程和证题过程中略有不同，前者是一个探索过程，因此不可避免得要对不同的思路进行研究、选择通道，而后者是把前者研究的通道简明地表达出来.

用 Q 表示要证明的结论，则分析法可用框图表示为：

$$\boxed{Q \Rightarrow P_1} \longrightarrow \boxed{P_1 \Rightarrow P_2} \longrightarrow \boxed{P_2 \Rightarrow P_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{\text{得到一个明显成立的条件}}$$

16.5 反证法

反证法是间接证明的一种基本方法，假设原命题错误，经过正确的推理，最后得出矛盾，因此说明假设矛盾，从而证明原命题成立的证明方法叫做反证法.

反证法证题的四个步骤：①否定命题的结论；②进行合逻辑的推理；③导出任何一种矛盾；④肯定原命题的结论.

所谓矛盾主要包括：①与假设矛盾；②与数学公理、定理、公式、定义或已被证明了的结论矛盾；③与公认的简单事实矛盾.

16.6 数学归纳法

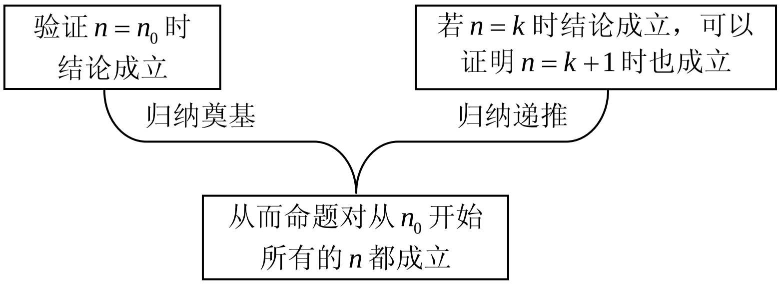
证明一个与正整数 n 的有关的命题，可用数学归纳法证明. 按以下步骤进行：

（Ⅰ）（归纳奠基）证明当 n 取第一个值 n_0 时，结论成立；

（Ⅱ）（归纳递推）假设 $n=k$（$k \geq n_0$，$k \in \mathbf{N}^*$）时，结论成立，证明当 $n=k+1$ 时，结论也成立. 完

成这两个步骤，就可以断定命题从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立.

用框图表示为：



16.7 数学归纳法使用注意事项

（1）数学归纳法的两个步骤是一个统一的整体，缺一不可.

（2）数学归纳用步骤（Ⅰ）和（Ⅱ）的证明代替了无穷多个命题的证明，这里体现了有穷与无穷的辩证关系.

（3）用数学归纳法证题时，“从 k 推到 $k+1$”时，不一定是添加一项，有些时候可能要添加若干项.

（4）用数学归纳法证题时，利用归纳假设证明 $n=k+1$ 时命题成立是关键的一步. 要证好这一步，首先要明确以下两点：一是要证什么，即 $n=k+1$ 时的命题是什么；二是 $n=k+1$ 时命题与归纳假设的区别是什么. 明确了这两点也就明确了这一步证明的方向和基本方法. 在证明这一步时，特别应注意要把归纳假设当做已知条件使用，而且必须使用归纳假设，否则就不是数学归纳法.

（5）在步骤（Ⅱ）的证明过程中，突出了两个“凑”字，一“凑”假设、二“凑”结论，关键是明确 $n=k+1$ 时证明的目标，充分考虑由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时命题形式之间的区别和联系.

第十七章 算法初步

※本章内容※

公式定理及常见规律

17.1 算法的特征

概括性、逻辑性、有序性、不惟一性.

17.2 流程图

一些通用图形符号构成的图可以用流程图表示算法.

17.3 构成流程图的图形符号和作用

（1）起止框：在流程图中不可或缺，表示程序的开始或结束.

（2）输入输出框：表示流程图的输入和输出信息.

（3）处理框：表示流程图的计算和赋值等信息.

（4）判断框：用来表示对某一个条件是否成立进行判断.

17.4 算法的三种基本逻辑结构

（1）顺序结构：由若干个依次执行的处理步骤组成. 这是一种最简单的算法结构，也是任何一个算法都离不开的基本结构. 顺序结构只能解决一些简单的不包含判断和重复操作的问题.

（2）选择结构：在算法中，有时要对一些条件进行判断，判断的结果直接决定后面的执行步骤. 这种先根据条件作出判断，再决定执行哪一种操作的结构称为选择结构. 一般地，在数学中需要分类讨论的问题都要用到选择结构.

（3）循环结构：在算法中从某处开始，按照一定的条件反复执行某一处理步骤的结构. 反复执行的部分称为循环体，控制着循环体开始和结束的那个变量叫做循环变量，决定是否继续执行循环体的条件称为循环的终止条件.

循环变量、循环体、循环的终止条件是循环结构的三要素. 在设计算法的循环结构时，要先确定循环结构的三要素.

17.5 排序的定义

为了便于查询和检索，常常需要根据某种要求将被查询的对象按顺序排列，通常称为排序.

17.6 排序方法

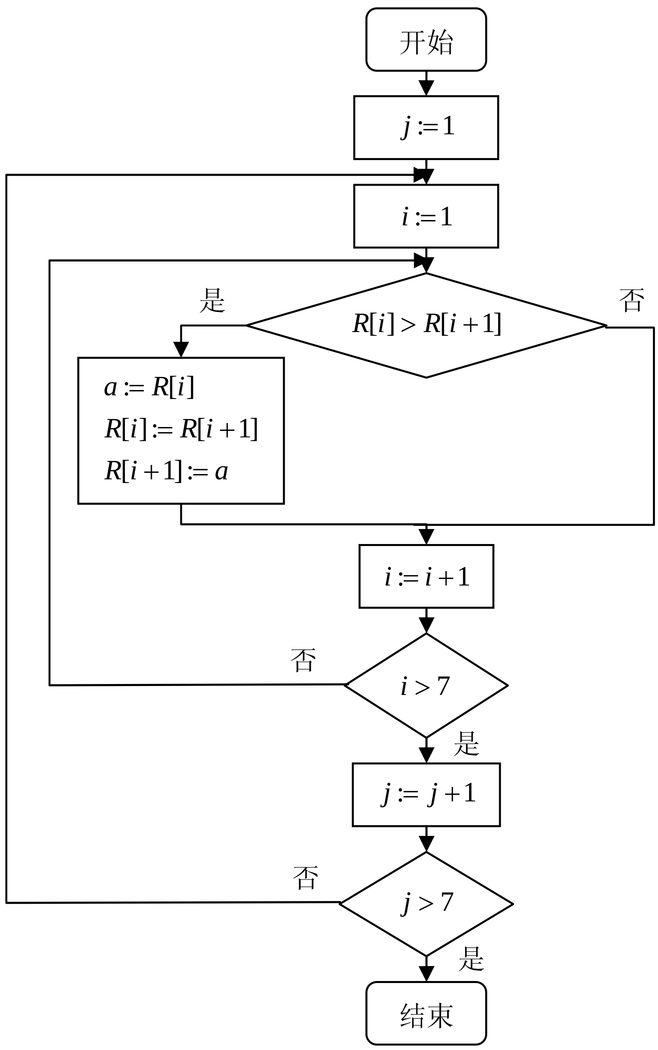
（1）直接插入排序方法. 把一个新的数据插入到已经排好顺序的数据列中，这种方法称为有序列直接插入排序法.

练习

（1）将 54 插入到有序数据列 2，10，14，35，45，53，67，87，90，99 中，若采用直接插入排序法，经过________次从左到右的数据比较就可以完成. 【参考答案：7】

（2）冒泡排序方法. 冒泡排序，就是在将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列. 小的数据视为质量轻，大的数据视为质量沉. 一个小的数据就好比水中的气泡，往上方移动，一个较大的数据就好比石头，往下方移动. 显然，最重的会沉到底，最轻的会浮到顶，反复进行，直到将数据列排成有序列.

其流程图如下：



注：冒泡排序的注意事项：①如果数据列由 n 个数据组成，至多经过 $n-1$ 趟排序，就能完成整个排序过程；②流程图中是 $R[i]<R[i+1]$ 还是 $R[i]>R[i+1]$. 若是 $R[i]<R[i+1]$，说明左边数据小就交换前后两个数据，即表明本次排序达到从大到小排列的目的.

练习

（1）一列数原来的排列如下：11，45，43，23，89，87，80，41，64，23，90. 若采用冒泡排序法，将它们按从小到大的顺序排列，第 2 趟排序后数 41 在第________个位置上. 【参考答案：6】

17.7 算法语句

算法语句有：

（1）输入语句.

（2）输出语句.

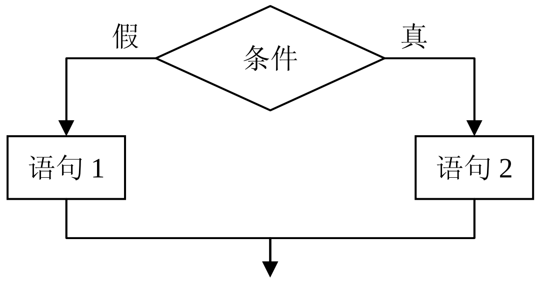
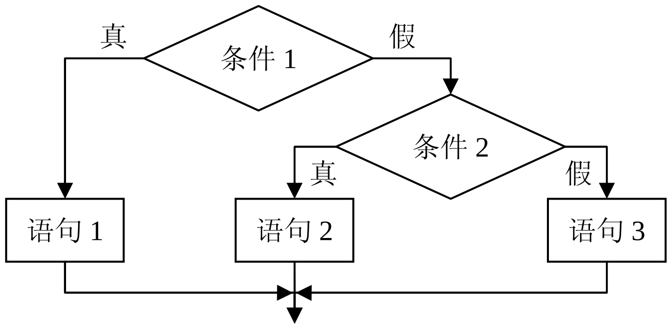
（3）赋值语句.

（4）条件语句.

（5）循环语句等.

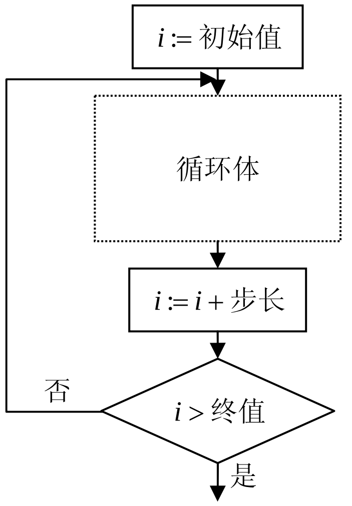
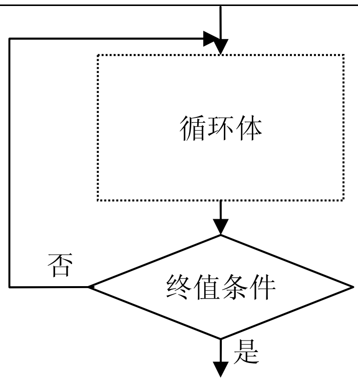
17.8 条件语句

条件语句是表达选择结构最常用的语句.

	一般形式	流程图
简单 if 语句	if <条件> then <语句 1> else <语句 2>	
复合 if 语句	if <条件 1> then <语句 1> else if <条件 2> then <语句 2> else <语句 3>	

17.9 循环语句

循环语句是算法中的基本结构，for 语句和 repeat 语句是表达循环结构最常见的语句.

	一般形式	流程图	使用条件
for 语句	for <循环变量> ：= <初始值> to <终值> do begin <循环体> end		预先知道循环次数的循环结构
repeat 语句	repeat <循环体> until <终值条件为真>		预先不知道循环次数的循环结构

17.10 画程序框图的规则

（1）使用标准的框图符号.

（2）框图一般按从上到下，从左到右的方向画.

（3）大多数流程图只有一个进入点，一个退出点. 判断框是具有超过一个退出点的惟一符号.

（4）一种判断框是“是”与“不是”两分支的判断，而且有且仅有两个结果；另一种是多分支判断，有几种不同结果.

第十八章 复　数

※本章内容※

公式定理及常见规律

18.1 复数的概念

（1）$z=a+bi$（$a,b\in\mathbf{R}$），a 为实部，b 为虚部，$i^2=-1$.

（2）当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数.

（3）i 和 $-i$ 互为倒数和相反数.

（4）$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$（$a,b,c,d\in\mathbf{R}$）.

（5）复数为实数，必须虚部为 0；若为纯虚数，必须实部为 0 且虚部不为 0.

练习

（1）已知复数 $z=(m^2+m-6)+(m^2-2m)i$. 当实数 m 取什么值时，复数 z 是纯虚数？ 【参考答案：-3】

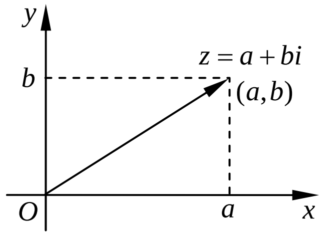
（2）若 $(m+i)^3$ 为实数，则正实数 m 的值为（　　）. 【参考答案：B】

A. $1+2\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

18.2 复数的几何意义

（1）复数 $z=a+bi$ 一一对应于复平面内的点 $Z(a,b)$.

（2）复数 $z=a+bi$ 一一对应于平面向量 $\overrightarrow{OZ}$.



（3）非零复数 $z_1=a+bi$， $z_2=c+di$ 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OZ_1}$ 、 $\overrightarrow{OZ_2}$ ，则 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}\Leftrightarrow\overline{z_1}\cdot z_2$ 的实部为零 $\Leftrightarrow\dfrac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数 $\Leftrightarrow|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\Leftrightarrow|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\Leftrightarrow|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow ac+bd=0\Leftrightarrow z_1=\lambda iz_2$（$\lambda$ 为非零实数）.

练习

（1）设 $z_1=3-4i$， $z_2=-2+3i$，则 z_1+z_2 在复平面内对应的点位于（　　）. 【参考答案：D】

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

（2）设 O 为原点，向量 $\overline{OA}$、 $\overline{OB}$ 对应的复数分别为 $2-3i$ 、 $-3+2i$，那么，向量 $\overline{BA}$ 对应的复数是（　　）. 【参考答案：D】

A. $-5+5i$　B. $-5-5i$　C. $5+5i$　D. $5-5i$

18.3 复数的四则运算

（1） $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

（2） $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

（3） $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

（3） $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ （ $c+di\neq0$ ）.

练习

（1）已知 $3-\sqrt{3}i=z(-2\sqrt{3}i)$，那么复数 z 在复平面内对应的点位于（　　）. 【参考答案：D】

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

18.4 复数的运算律

对任意 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$，有

（1） $z_1+z_2=z_2+z_1$.

（2） $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

（3） $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

（4） $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

（5） $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

18.5 共轭复数的计算法则

（1） $z\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$.

（2） $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$.

（3）$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

（4）$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

18.6 复数模的计算法则

（1）复数的模：$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

（2）$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

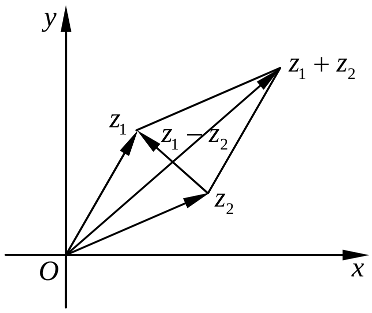
（3）$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

（4）$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

（5）$|z^n| = |z|^n$.

18.7 复数集内的三角形不等式

不等式$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le \big||z_1|+|z_2|\big|$是复数集内的三角形不等式，其中左边在复数$z_1$、$z_2$对应的向量共线且反向（同向）时取等号，右边在复数$z_1$、$z_2$对应的向量共线且同向（反向）时取等号.



18.8 i^n的周期性

（1）$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$（$n\in \mathbf{Z}$）. 注：i^n的周期为 4.

（2）$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$，$n\in \mathbf{Z}$.

练习

（1）复数$1+i+i^2+\cdots+i^{10}$等于（　　）　【参考答案：A】

A. i　　B. -1　　C. $-i$　　D. 1

18.9 $1\pm i$的特性

（1）$(1\pm i)^2 = \pm 2i$.

（2）$\dfrac{1+i}{1-i} = i$.

（3）$\dfrac{1-i}{1+i} = -i$.

18.10 ω、$\overline{\omega}$与 1

（1）$\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^2=\overline{\omega}=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^3=1$．（注：$\omega^n$ 的周期为 3）

（2）$1+\omega+\omega^2=0$．

（3）$\omega+\overline{\omega}=-1$，$\omega\cdot\overline{\omega}=1$．

（4）$\omega^{3n}=1$，$\omega^{3n+1}=\omega$，$\omega^{3n+2}=\overline{\omega}$（$n\in\mathbf{Z}$）．

（5）$\omega^n+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0$．

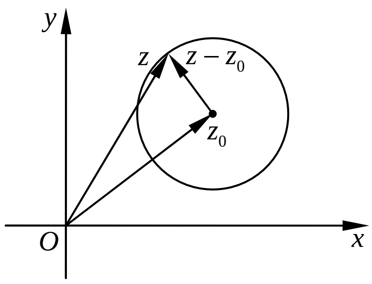
18.11 棣莫佛定理（仅作参考）

（1）$\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$（$n\in\mathbf{Z}$）．

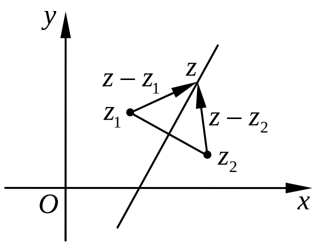
（2）$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$．

18.12 复平面内几个复数z对应的点的轨迹

（1）$|z-z_0|=r$（r 是正常数）$\Leftrightarrow$ 轨迹是一个圆.



（2）$|z-z_1|=|z-z_2|$（z_1，z_2 是复常数）$\Leftrightarrow$ 轨迹是一条直线.



（3）$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$（z_1，z_2 是复常数，a 是正常数）$\Leftrightarrow$ 轨迹有三种可能情形：①当 $2a>|z_1-z_2|$ 时，轨迹为椭圆；②当 $2a=|z_1-z_2|$ 时，轨迹为一条线段；③当 $2a<|z_1-z_2|$ 时，轨迹不存在.

（4）$\left||z-z_1|-|z-z_2|\right|=2a$（$z_1$，$z_2$ 是复常数，a 是正常数）$\Leftrightarrow$ 轨迹有三种可能情形：①当 $2a<|z_1-z_2|$ 时，轨迹为双曲线；②当 $2a=|z_1-z_2|$ 时，轨迹为两条射线；③当 $2a>|z_1-z_2|$ 时，轨迹不存在.

18.13 复数的设元

在解含复数的方程时，经常设复数为 $z=a+bi$．

练习

（1）已知 $f(z)=|1+z|-\overline{z}$，$f(-z)=10+3i$，求复数 z．【参考答案：$z=5-3i$】

（2）设 $z=x+yi$（$x,y\in\mathbf{R}$），满足 $z\cdot\overline{z}+(1-2i)z+(1+2i)\overline{z}=3$，求 z 对应点的轨迹方程．【参考答案：$x^2+y^2+2x+4y-3=0$】

18.14 实系数一元二次方程的解

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$.

①若 $\Delta=b^2-4ac>0$，则 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

②若 $\Delta=b^2-4ac=0$，则 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；

③若 $\Delta=b^2-4ac<0$，它在实数集 **R** 内没有实数根；在复数集 **C** 内有且仅有两个共轭复数根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{-\left(b^2-4ac\right)}\,i}{2a}$.

第十九章 几何证明选讲

※本章内容※

公式定理及常见规律

19.1 相似三角形

1. 平行线等分线段定理

（1）定理：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么任一条（与这组平行线相交）直线上截得的线段也相等.

推论 1：经过三角形一边的中点且与另一边平行的直线必平分第三边.

推论 2：经过梯形一腰的中点且与底面平行的直线必平分另一腰.

（2）中位线定理

三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半.

梯形中位线定理：梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.

两定理即为推理 1、推理 2 的逆定理.

2. 平行线分线段成比例定理

（1）定理：三条平行线段截两条直线，所得的对应线段成比例.

推论 1：平行于三角形一边的直线截其他两边的直线（或两边的延长线）所得的对应线段成比例.

推论 2：用平行于三角形一边且和其他两边相交的直线截三角形，所得的三角形三边与原三角形的三边对应成比例.

推理 1 的逆定理：如果一条直线截三角形两边或两边的延长线所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

（2）三角形内角平分线定理

定理：三角形的内角平分线分对边所得的两条线段与这个角的两边对应成比例.

3. 相似三角形的判定

（1）相似三角形的概念

定义：对应角相等，对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形. 对应边的比例称为相似比或相似系数.

（2）预备定理

定理 1：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似.

利用本定理可以证明相似三角形的判定定理.

定理 2（共边定理）：若直线 PQ 、AB 交于点 M ，则 $\dfrac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\dfrac{PM}{QM}$.

定理 3（共角定理）：若 $\angle ABC$ 与 $\angle XYZ$ 相等或互补，则 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}}=\dfrac{AB\cdot BC}{XY\cdot YZ}$.

利用定理 2 和定理 3 也可以证明相似三角形的判断定理.

（3）相似三角形的判定定理

判定定理 1：对于任意两个三角形，如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似. 即：两角对应相等，两个三角形相似.

判定定理 2：对于任意两个三角形，如果一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似. 即：两对应边成比例且夹角相等，两个三角形相似.

判定定理 3：对于任意两个三角形，如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似. 即：三边对应成比例，两个三角形相似.

（4）直角三角形相似的判定定理

定理 1：如果两个直角三角形有一个锐角相等，那么它们相似.

定理 2：如果两个直角三角形的两条直角边对应成比例，那么它们相似.

定理 3：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么它们相似.

4. 相似三角形的性质

性质定理 1：相似三角形对应角相等，对应边成比例.

性质定理 2：相似三角形对应边上的高、中线和它们的周长的比都等于相似比.

性质定理 3：相似三角形的面积比等于相似比的平方.

性质定理 4：相似三角形外接圆或内切圆的直径比、周长比等于相似比，外接圆或内切圆的面积比等于相似比的平方.

5. 直角三角形的射影定理

（1）射影的概念

从一点向一条直线作垂线，垂足称作这点在这条直线上的正射影，简称射影.

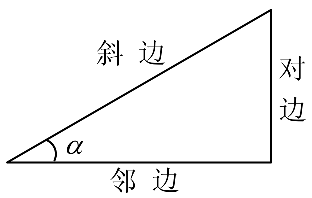
一般地，一个点集（如线段或其他几何图形）中所有的点在某条直线上的射影集合，称为这个点集在这条直线上的射影. 如一条线段在一条直线上的射影就是线段的两个端点在这条直线上的射影间的线段.

（2）锐角三角函数定义

$\sin\alpha=\dfrac{\alpha\text{的对边}}{\text{斜边}}$,

$\cos\alpha=\dfrac{\alpha\text{的邻边}}{\text{斜边}}$,

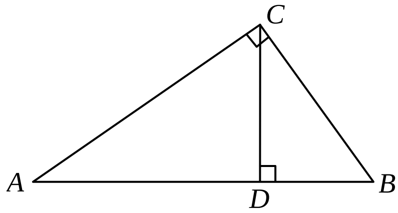
$\tan\alpha=\dfrac{\alpha\text{的对边}}{\alpha\text{的邻边}}$.



（3）直角三角形的射影定理和逆定理

定理：在直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项，即 $CD^2=AD\cdot DB$ ；两条直角边分别是它们在斜边上的射影与斜边的比例中项，即 $AC^2=AD\cdot AB$ ，

$BC^2 = BD \cdot AB$.

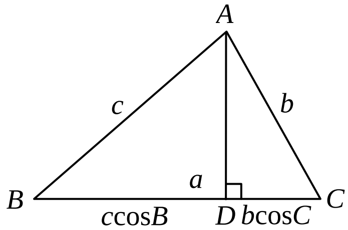


逆定理：如果一个三角形一边上的高是另两边在这条边上的射影的比例中项，那么这个三角形是直角三角形.

勾股定理：直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

（4）任意三角形的射影定理

定理：平面三角中，设一个三角形的三边分别为 a、b、c，它们所对的三个内角分别为 A、B、C，则有：$a = b\cos C + c\cos B$，$b = a\cos C + c\cos A$，$c = a\cos B + b\cos A$.



6. 判定三角形相似的方法

（1）定义法：对应角相等，对应边成比例的两个三角形相似.

（2）平行法：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似.

（3）相似三角形的三个判定定理

①判定定理 1：两角对应相等，两个三角形相似；

②判定定理 2：两对应边成比例且夹角相等，两个三角形相似；

③判定定理 3：三边对应成比例，两个三角形相似.

（4）直角三角形相似的条件

①以上定理都适用；

②如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么它们相似；

③直角三角形被斜边上的高分成两个直角三角形和原三角形相似.

（5）相似三角形的判定定理的选择

①已知有一角相等时，可选择判定定理 1 与判定定理 2；

②已知有两边对应成比例时，可选择判定定理 2 与判定定理 3；

③判定直角三角形相似时，首先看是否可以用判定直角三角形的方法来判定，如不能再考虑用判定一般三角形相似的方法来判定.

7. 相似三角形性质的运用

利用相似三角形的性质，常可以：

（1）用来证明线段成比例、角相等；

（2）用来计算周长、边长等；

（3）用来证明线段的平方比.

运用相似三角形性质解题的关键在于求出相似比. 在具体论证过程中，往往是相似三角形的判定定理和性质定理结合运用，由判定三角形相似得到角相等或对应线段成比例的过程反复运用，从而达到解决问题的目的.

8. 利用相似三角形解决实际问题

利用相似三角形，我们可以解决某些实际问题，如测量物体的高度，余料的利用、材料最优利用的问题.

19.2 圆

1. 圆周角定理

（1）圆周角的概念

顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做圆周角.

圆周角应满足两个条件：一是顶点在圆上；二是两边都和圆相交，二者缺一不可.

（2）圆周角定理

定理：圆上一条弦所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半，其度数等于它所对的弧的度数的一半.

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等.

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.

相交弦所成角定理：圆的两条相交弦所成的度数等于它所夹的弧与它的对顶角所夹的弧的度数和的一半.

（3）直角三角形中线定理的逆定理

定理：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

2. 圆内接四边形的性质与判定

（1）圆内接多边形的概念

如果一个多边形的所有顶点都在同一圆上，那么这个多边形叫做圆内接多边形，这个圆叫做多边形的外接圆.

任一个三角形都有外接圆，但任一个四边形并不一定有外接圆.

（2）圆内接四边形的性质

定理 1：圆内接四边形对角互补.

定理 2：圆内接四边形的外角等于它的内对角.

托勒密定理：圆内接四边形的两对边乘积之和等于两对角线的乘积.

（3）圆内接四边形的判定

定理：如果一个四边形的一组对角互补，那么这个四边形内接于圆.

推论 1：如果四边形的一个外角等于它的内对角，那么这个四边形内接于圆.

推论 2：如果两个三角形有一条公共边，这条边所对的角相等，并且在公共边的同侧，那么这两个三角形有公共的外接圆.

3. 圆的切线的性质与判定

（1）直线与圆的位置关系

根据直线与圆的公共点个数可将直线与圆的位置关系划分为：直线与圆相交（两个公共点）、相切（一个公共点）和相离（没有公共点）. 直线与圆的位置关系的判定可通过比较圆心到直线的距

离和圆的半径的大小来实现.

（2）圆的切线的性质

定理：圆的切线垂直于过切点的半径.

推论 1：经过圆心且垂直于切线的直线必过切点.

推论 2：经过切点且垂直与切线的直线必过圆心.

（3）圆的切线的判定

定理：经过半径的外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

（4）切线长定理

定理：从圆外一点引圆的两条切线长相等.

推论：经过圆外的一个已知点和圆心的直线，平分从这点向圆所作的两条切线所夹的角.

4. 弦切角

（1）弦切角的概念

顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫弦切角.

弦切角必须具备三个条件：①顶点在圆上；②一边是圆的切线；③一边是过切点的弦. 三者缺一不可.

（2）弦切角定理

定理：弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角，其度数等于它所夹弧的度数的一半.

推理：同弧（或等弧）上的弦切角相等；同弧（或等弧）上的弦切角与圆周角相等.

5. 圆幂定理

（1）相交弦定理

定理：圆的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等.

推论：如果弦与直径垂直相交，那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项.

（2）割线定理

定理：从圆外一点引圆的两条割线，这点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等.

（3）切割线定理

定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆的交点的两条线段长的比例中项.

逆定理：从圆外一点引圆的割线，如果圆上一点与这点的连线是这点到割线与圆的交点的两条线段的比例中项，那么这点与圆上点的连线是圆的切线.

（4）圆幂定理

定理：过定点的直线与圆交于两点，则此定点到两交点距离的乘积等于它到此定圆的幂的绝对值.

6. 圆幂定理的应用

圆幂定理的一般应用主要体现在以下两个方面.

（1）利用圆幂定理求线段的长

圆幂定理是相交弦定理、割线定理、切割线定理和切线长定理的统一形式，它涉及到与圆有关的比例线段问题，因而利用相交弦定理和割线定理能做到知三求一，利用切割线定理能做到知二求一.

（2）利用圆幂定理证明线段相等

圆幂定理的结论是线段的关系，因而在特殊图形中，常常从圆幂定理入手，结合三角形及三角形相似等知识来证明线段相等的问题.

圆幂定理是圆最重要的定理，在解决与圆有关的问题中，圆幂定理常常被用到，这是因为圆幂定理得到的是线段的比例关系，而圆周角定理、弦切角定理以及圆内接四边形的性质定理得到的是角的关系，而这两者的结合，往往能综合讨论与圆有关的相似三角形的问题.

因此，在实际应用中，见到圆的两条相交弦就要想到相交弦定理；见到两条割线就要想到割线定理；见到切线和割线时就要想到切割线定理.

7. 判断四点共圆的常用方法

（1）如果四个点与一定点的距离相等，那么这四个点共圆.

（2）如果一个四边形的一组对角互补，那么这个四边形的四个顶点共圆.

（3）如果一个四边形的一个外角等于它的内对角，那么这个四边形的四个顶点共圆.

（4）如果两个三角形有公共边，公共边所对的角相等且在公共边的同侧，那么这两个三角形的四个顶点共圆.

8. 弦切角的运用

在运用弦切角时，首先应根据弦切角的概念准确地找到弦切角，然后运用弦切角进行有关的计算、论证. 弦切角的运用主要体现在以下几个方面：

（1）证明角相等：由弦切角定理可直接得到角相等，在与弦切角有关的几何问题中，往往还需借助其他几何知识来综合解答，由弦切角得到角相等只是推理论证中的一个条件.

（2）证明直线平行：弦切角定理构建了角与角的相等关系，而直线的平行是以角的关系为基本条件的，因而在圆中我们可以利用弦切角定理来推理论证直线的平行.

（3）证明线段相等：借助于弦切角定理和圆的其他性质（如等弧所对的弦相等）以及三角形有关知识，我们可以得到特殊三角形或全等三角形，从而证得线段相等.

（4）证明三角形相似：在圆中有丰富的相等的角，利用这些相等的角我们能找到许多与圆有关的相似三角形，进而得到许多线段的数量关系. 因而，充分利用圆的（如圆周角定理、圆内接平行四边形性质定理、弦切角定理等）结论，架设与三角形有关问题的桥梁，达到解决问题的目的.

由此可见，弦切角是很重要的与圆相关的角. 其主要功能在于协调与圆相关的各种角（如圆心角、圆周角等），是架设圆与三角形全等、三角形相似、与圆相关的各种直线（如弦、割线、切线）位置关系的桥梁，因而弦切角也是确定圆中一些重要几何定理的关键环节（如证明切割线定理）.

9. 几何证明题的常用方法

（1）综合法

从题设（已知）出发，通过有关公理、定义、定理，逐步推演，以导出结论，这种“由因导果”的思维方法叫做综合法.

（2）分析法

由结论向已知回溯，即假设命题的结论成立，然后追求成立的原因，再以这些原因分别分析，看看它们的成立各需要什么条件，这样逐步追究，渐渐到达已知条件上来，这种“执果索因”的方法叫分析法.

（3）证明命题的一般步骤：

①弄清题意，辨明题设和结论；

②用分析法探明证明思路和方法；

③若已知条件不足，可添设适当的辅助线以暴露隐含的已知条件；

④用综合法有条理地写出证明过程；

⑤检查证明过程，看有无矛盾或不合理的地方.

（4）学会从不同角度考虑问题

许多问题往往有不同的解法，这就是我们常说的“一题多解”. 若是善于从不同的角度去考虑问题，不仅可以开拓思路，而且还可以使各个知识点相互渗透，这对掌握知识、提高能力是大有帮助的.

（5）学会解与圆有关的综合题

综合题是对知识与能力综合考查的问题，而与圆有关的综合题，主要考查圆和其他数学知识的综合运用. 解题时，首先要熟练掌握题中所涉及的基础知识，熟悉有关的数学思想方法，注意探索、沟通已知条件与结论之间的联系，不断转化，将问题由繁变简，以获得所需要的解题思路.

19.3 圆柱、圆锥和圆锥曲线

1. 球的性质

（1）旋转体

一条平面曲线绕它所在的平面内的一条定直线旋转一周所得到的曲面叫做旋转面. 定直线叫旋转面的轴，定曲线叫旋转面的线. 如果旋转面是一个封闭图形，则旋转面所围成的几何体叫旋转体.

由一条射线绕过其端点的一条直线旋转一周而得到的曲面叫圆锥面.

半圆绕其直径所在的直线旋转一周而得到的旋转面称为球面，球面围成的几何体叫球体，简称球.

（2）点与球的位置关系

点与球的位置关系包括点在球内、点在球上、点在球外，其关系可通过点到球心的距离与球的半径大小进行判定.

（3）平面与球的位置关系

平面与球的位置关系包括平面与球相离、相切、相交，其关系可通过球心到平面的距离与球的半径的大小进行判定.

球心与截面圆心的连线垂直于截面，且球心到截面的距离 d 、球的半径 R 与截面圆的半径 r 之间满足 $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

经过半径的外端且与此半径垂直的平面与球相切是球的切面的判定定理.

（4）直线与球的位置关系

直线与球的位置关系包括直线与球相离、相切和相交，其关系可通过球心到直线的距离与球的半径的大小关系进行判定.

球的切线的判定定理：经过半径的外端且与球半径垂直的直线与球相切.

球的切线的性质：①从球外一点可以引球的无数条切线，所有的切点组成球的一个小圆；②球外一点向球引的切线长相等.

（5）与圆柱面相切的球

圆柱面与球相切，切点组成球的大圆，该大圆所在平面与圆柱的轴垂直.

（6）与圆锥面相切的球

圆锥面与球相切，切点组成球的一个小圆，该小圆所在平面与圆锥的轴垂直.

2. 平行投影

（1）平行投影的概念

如果直线l与平面α相交，过任意图形F上任一点M作直线平行于l，交平面α于点M'，则点M'叫做点M在平面α内关于直线l的平行投影（或像）. 如果图形F上所有点在平面α内关于直线l的平行投影构成图形F'，则F'叫做图形F在α内关于直线l的平行投影. 平面α叫做投影面，l叫做投影线.

（2）平行投影基本定理

定理：不平行于投影线的线段，在平面上的投影仍为线段，线段上的点分线段的比保持不变，端点仍为端点.

（3）平行投影变换的基本性质

在平行投影的变换下，线段变为线段，平行线变为平行线，平行或共线的线段比不变，图形面积比不变.

（4）正投影的性质

若正投影变换的原平面和像平面相交，则垂直于基线的直线的像仍垂直与基线.

（5）中心投影

投影线交汇于一点的投影法称为中心投影法，根据中心投影法得到的投影称为中心投影.

3. 平面与圆柱面的截线

（1）圆柱面

一条直线绕着与它平行的定直线旋转一周而得到的曲面叫圆柱面，动直线叫圆柱面的母线，定直线叫圆柱面的轴.

（2）圆柱面的截线性质

圆柱面的两个正截面之间所截的母线上的线段相等；正截面截圆柱面的截线是圆，其半径等于圆柱面的半径.

（3）圆柱面的截线定理

定理：不平行于圆柱面母线的平面截割圆柱面，其截线是一个椭圆，椭圆的短半轴等于圆柱面的半径r，椭圆的长半轴等于$\dfrac{r}{\sin\alpha}$，这里α是截割平面与圆柱面母线所成的角. 椭圆的离心率为$e=\cos\alpha$.

（4）圆柱面截面的焦球

圆柱面的截割面的两侧各有一个焦球. 若截割面是圆柱面的斜截面时，两焦球与斜截面的切点恰好是截线椭圆的两个焦球，这两个焦球称 Dandelin 双球.

焦球与圆柱面交线所在平面与斜截面的两条交线是截线椭圆的两条准线.

（5）圆锥曲线的统一定义

平面内，动点M到顶点F的距离和它到一条定直线的距离之比为常数e的点的轨迹统称为圆锥曲线. 当$e\in(0,1)$时，点M的轨迹是椭圆；当$e=1$时，点M的轨迹是抛物线；当$e\in(1,+\infty)$时，点M的轨迹是双曲线.

4. 平面与圆锥面的截线

（1）圆锥面

一条直线绕着与它相交成定角$\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$的另一条直线旋转一周，形成的曲面叫圆锥面.

性质：圆锥面的轴线和每一条母线的夹角相等；轴线上任一点到每条母线的距离相等.

（2）垂直截面

性质：圆锥面的顶点到正截面之间所截的母线上的线段相等；正截面截圆锥的截线是圆，其半

径等于$d\tan\alpha$，这里d是圆锥面的顶点到正截面的距离，α是圆锥面的半顶角.

（3）圆锥面截线定理

定理：设圆锥面的半顶角为α，平面π不经过圆锥面的顶点，且和圆锥面的轴线交角为β，则：

①$\beta>\alpha$，平面π与圆锥的截线为椭圆；

②$\beta=\alpha$，平面π与圆锥的截线为抛物线；

③$\beta<\alpha$，平面π与圆锥的截线为双曲线.

此时截线的离心率$e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

（4）圆锥面截面的焦球

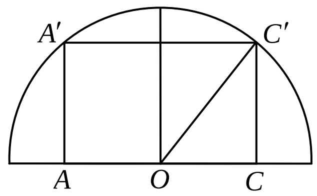
圆锥面斜截面的焦球与截面的切点为所截得圆锥曲线的焦点，焦球与圆锥面切点圆所在的平面与斜截面的交线为该焦点的准线.

5. 如何解决球的组合问题

解决与球有关的组合体问题，其关键在于作出它的某些特殊的截面.

例如：已知半球内有一个内接正方体，求这个半球的体积与正方体的体积之比.

解析：下图是过正方体对角面作的截面. 设半球的半径为R，正方体的棱长为a，则$CC'=a$，$OC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$OC'=R$. 在$\mathrm{Rt}\triangle C'CO$中，由勾股定理，得$CC'^2+OC^2=OC'^2$，即$a^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2=R^2$. ∴ $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，∴ $V_{半球}=\dfrac{2}{3}\pi R^3=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3$，$V_{正方体}=a^3$. ∴ $V_{半球}:V_{正方体}=\sqrt{6}\pi:2$.



6. 通过圆锥面截线判定圆锥曲线的类型

由圆锥面的截线定理知我们若知道圆锥面的半顶角α和截面与轴的交角β，就能通过α和β的大小关系来判定截线是椭圆、双曲线还是抛物线，也可利用$e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$与1的大小来判定.

第二十章 矩阵与变换

※本章内容※

公式定理及常见规律

20.1 矩阵与变换

1. 矩阵的概念

在数学中，我们把形如$\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\2 & 3 & 3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2 & t\\3 & -2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$这样的矩形数字（或字母）阵列称为矩阵（matrix）.

记法：矩阵通常用大写的黑体拉丁字母来表示，比如$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、……或$\left(a_{ij}\right)$（其中i，j分别为元素a_{ij}所在的行和列）.

要素：行——列——元素.

矩阵相等：设有两个矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，如它们适合条件：①$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的行数与列数分别相等；②$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$对应位置的元素也分别相等. 则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相等并记为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

说明：①$2\times1$矩阵，2×2矩阵（二阶矩阵），2×3矩阵；②零矩阵；③行矩阵：$\left[a_{11},a_{12}\right]$，也叫做行向量，列向量：$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}$，一般用$\alpha$、$\beta$等表示，也叫做列向量；④如果$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$中行数与列数相等，即$m=n$，比如$\begin{bmatrix}2 & t\\3 & -2\end{bmatrix}$，则称$\boldsymbol{A}$为$m$阶方矩阵或$m$阶方阵，方阵在矩阵理论中占有重要的地位.

2. 矩阵乘法定义

一般地，我们规定行矩阵$\left[a_{11},a_{12}\right]$与列矩阵$\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\end{bmatrix}$的乘法规则为：$\left[a_{11},a_{12}\right]\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\end{bmatrix}=\left[a_{11}\times b_{11}+a_{12}\times b_{21}\right]$，二阶矩阵$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$与列矩阵$\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$的乘法规则为：$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_0+a_{12}y_0\\a_{21}x_0+a_{22}y_0\end{bmatrix}$.

说明：矩阵乘法$\boldsymbol{MN}$的几何意义为对向量连续实施的两次几何变换（先T_N后T_M）的复合变换.

一般地，对于平面上的任意一个点（向量）$P(x,y)$，若按照对应法则T，总能对应唯一的一个平面点（向量）$P'(x',y')$，则称T为一个变换（transformation），简记为：

$T:(x,y)\to(x',y')$或$T:\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$.

3. 几种常见的平面变换

（1）恒等变换：对平面上任何一点（向量）或图形施以矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$对应的变换，都把自己变成自己.因此，我们把这种特殊的矩阵称为恒等变换矩阵或单位矩阵，所实施的对应变换称做恒等变换.

（2）伸压变换：像$\begin{bmatrix}1&0\\0&n\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}m&0\\0&1\end{bmatrix}$（$m,n\neq0$，$|m|,|n|\neq1$）……这种将平面图形作沿 y 轴方向伸长或者压缩，或作 x 轴方向伸长或者压缩的变换矩阵，通常称做沿 y 轴或 x 轴的垂直伸压变换矩阵，对应的变换称为垂直伸压变换，简称伸压变换.

（3）反射变换：像$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1&0\\0&n\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$……这样将一个平面图形 F 变为关于定直线或定点对称的平面图形的变换矩阵，称为反射变换矩阵，相应的变换称为反射变换. $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$对应于轴反射，$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$对应于中心反射.

（4）旋转变换：矩阵$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$通常叫做旋转变换矩阵，对应的变换称做旋转变换，其中的角 θ 叫做旋转角，点 O 叫做旋转中心.

（5）投影变换：像$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$……这类将平面内图形投影到某条直线（或某个点）上的矩阵，我们称之为投影变换矩阵，相应的变换称做投影变换.

（6）切变变换：矩阵$\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$把平面上的点 $P(x,y)$ 沿 x 轴方向平移 $|ky|$ 个单位；当 $ky>0$ 时，沿 x 轴正方向移动；当 $ky<0$ 时，沿 x 轴负方向移动；当 $ky=0$ 时，原地不动. 上述这种变换通常叫做切变变换，对应的矩阵叫做切变变换矩阵.

4. 矩阵的逆矩阵

有的变换能够“找到回家的路”，称为原变换的逆变换，逆变换也对应着一个矩阵. 但并不是所有的二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，都存在二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

定义：若二阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ （ $\boldsymbol{E}$ 为二阶单位阵），则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的. $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

说明：①若 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 同时也为 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{-1}$，所以 $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}$；②若二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在逆矩阵，则逆矩阵唯一.

5. 二元一次方程组与二阶行列式

对关于 x,y 的二元一次方程组$\begin{cases}ax+by=m\\cx+dy=n\end{cases}$.

（1）方程组的解的分母是系数矩阵$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$的主对角线上的数的乘积减去副对角线上数的乘积.

（2）二阶行列式的定义：我们把$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$称为二阶行列式，它的运算结果是一个数，记为

$\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

则方程组的解的分母就是$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

$an-cm=\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$，再将$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$记为$D$，$\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$记为$D_x$，$\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$记为$D_y$，所以方程组的解为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}. \end{cases}$$

6. 二阶矩阵的特征值和特征向量

（1）特征值与特征向量的概念

设$\boldsymbol{A}$是一个二阶矩阵，如果对于实数λ，存在一个非零向量α，使得$\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$，那么$\lambda$称为$\boldsymbol{A}$的一个特征值（eigenvalue of a matrix），而α称为$\boldsymbol{A}$的一个属于特征值λ的一个特征向量（eigenvector）.

（2）特征向量的几何意义

特征向量的方向经过变换矩阵$\boldsymbol{A}$的作用后，保持在同一条直线上，这时特征向量或者方向不变（$\lambda>0$），或者方向相反（$\lambda<0$）. 特别地，当$\lambda=0$时，特征向量就变成了$\mathbf{0}$向量.

（3）特征多项式

设λ是二阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的一个特征值，它的一个特征向量为$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，即$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$满足二元一次方程组$\begin{cases} ax+by=\lambda x \\ cx+dy=\lambda y \end{cases}$，故$\begin{cases} (\lambda-a)x-by=0 \\ -cx+(\lambda-d)y=0 \end{cases}$. 由特征向量的定义知$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，因此$x,y$不全为 0，此时$D_x=0$，$D_y=0$. 因此，若要上述二元一次方程组有不全为 0 的解，则必须有$D=0$，即$\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}=0$.

定义：设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$是一个二阶矩阵，$\lambda\in\mathbf{R}$，我们把行列式

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$$

称为$\boldsymbol{A}$的特征多项式.

（4）求矩阵的特征值与特征向量

如果λ是二阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，则λ一定是二阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式的一个根，它满足$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$. 此时，将$\lambda$代入二元一次方程组$\begin{cases} (\lambda-a)x-by=0 \\ -cx+(\lambda-d)y=0 \end{cases}$，就可以得到一组非零解$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$，于是，非零向量$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$即为$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda$的一个特征向量.

第二十一章 极坐标与参数方程

※本章内容※

公式定理及常见规律

21.1 极坐标

1. 几种坐标系

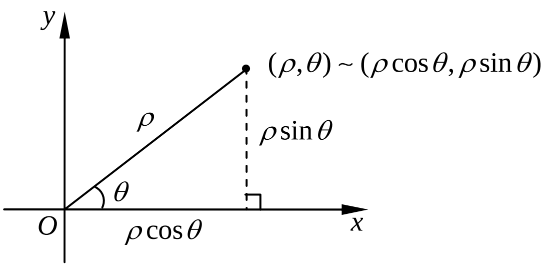
（1）直线上的点的坐标：x.

（2）平面直角坐标系：(x,y).

（3）极坐标系：(ρ,θ).

其中，$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，若以直角坐标系的原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，点$P$的极坐标为$(\rho,\theta)$，直角坐标为$(x,y)$，则$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$（注：这是换算公式）.

除非特别申明，一般默认$\rho>0$.



（4）柱坐标系：(ρ,θ,z)，其中，$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\z=z\end{cases}$.

（5）球坐标系：(r,φ,θ)，其中，$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\y=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$.

2. 极坐标系中两点间的距离公式

（1）方法一：$|MN|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$.

（2）方法二：求出M、N的平面直角坐标，$M(\rho_1\cos\theta_1,\rho_1\sin\theta_1)$，$N(\rho_2\cos\theta_2,\rho_2\sin\theta_2)$，利用平面直角坐标系中的两点间的距离公式即可.

练习

（1）求两点$M\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$、$N\left(4,\dfrac{\pi}{6}\right)$的距离.【参考答案：$\sqrt{13}$】

3. 直线的极坐标方程

（1）经过极点，倾斜角为 α 的直线的极坐标方程是：$\theta=\alpha$ 或 $\theta=\pi+\alpha$.

（2）经过点 $(a,0)$，且垂直于极轴的直线的极坐标方程是：$\rho\cos\theta=a$.

（3）经过点 $\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且平行于极轴的直线的极坐标方程是：$\rho\sin\theta=a$.

（4）经过点 (ρ_0,θ_0) 且倾斜角为 α 的直线的极坐标方程是：$\rho\sin(\theta-\alpha)=\rho_0\sin(\theta_0-\alpha)$.

4. 圆的极坐标方程

（1）圆心在极点，半径为 r 的圆的极坐标方程是 $\rho=r$.

（2）圆心在点 $(a,0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程是 $\rho=2a\cos\theta$.

（3）圆心在点 $\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$，半径为 a 的圆的极坐标方程是 $\rho=2a\sin\theta$.

（4）圆心在点 (ρ_0,θ_0)，半径为 r 的圆的极坐标方程是 $\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta_0)=r^2$（用余弦定理解决）.

练习

（1）圆 $\rho=\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)$ 的圆心的极坐标是（　　）. 【参考答案：A】

A. $\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$　　C. $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$　　D. $\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$

5. 常见圆锥曲线的极坐标方程（仅作参考）

（1）椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\rho^2=\dfrac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}$.

（2）双曲线：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\rho^2=\dfrac{b^2}{e^2\cos^2\theta-1}$.

（3）抛物线：$y^2=2px\Leftrightarrow\rho=2p\cdot\dfrac{\cot\theta}{\sin\theta}$.

6. 平面直角坐标系中的平移变换

在平面直角坐标系中，设图形 F 上任意一点 P 的坐标为 (x,y)，向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$，平移后的对应点 $P'(x',y')$，则有 $\begin{cases}x+h=x'\\y+k=y'\end{cases}$，解出 $\begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}$ 代入原曲线方程即可得到新方程.

7. 平面直角坐标系中的伸缩变换

在平面直角坐标系中，设图形 F 上任意一点 P 的坐标为 (x,y)，在变换 $\begin{cases}x'=\lambda x\\y'=\mu y\end{cases}$ 下得到对应点 $P'(x',y')$.

8. 极坐标系中的旋转变换

设图形 F 上任意一点 P 的坐标为 (ρ,θ)，按逆时针旋转角度为 α 得到对应点为 (ρ',θ')，则有 $\begin{cases}\rho=\rho'\\\theta+\alpha=\theta'\end{cases}$.

9. 判断一个极坐标方程表示怎样的轨迹的方法

（1）在极坐标系中画图.

（2）将方程转化为平面直角方程形式.

练习

（1）极坐标方程 $4\rho\sin^2\dfrac{\theta}{2}=5$ 表示的曲线是（　　）.【参考答案：D】

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线的一支　　D. 抛物线

21.2 参数方程

1. 常用的圆锥曲线的参数方程

	平面直角系方程	参数方程
圆	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\y=y_0+r\sin\theta\end{cases}$
椭圆	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）	$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$
双曲线	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$
抛物线	$y^2=2px$（$p>0$）	$\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$

注：曲线上的点可用参数方程的 x， y 的值表示.

练习

（1）实数 x、y 满足 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，则 x^2+y^2 的最大值为（　　）.【参考答案：B】

A. 4　　B. 9　　C. $\dfrac{9}{2}$　　D. 10

2. 直线的参数方程

（1）点斜式：经过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线参数方程的一般形式是：$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$（$t$ 是参数）.

（2）标准式：若直线经过点 $P_0(x_0,y_0)$，倾斜角为 α，则直线参数方程的标准形式是：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 是参数）. 其中点 P 对应的参数 t 的几何意义是：有向线段 $\overline{P_0P}$ 的数量.

注：①若点 P_1、P_2、P 是直线 l 上的点，它们在上述参数方程中对应的参数分别是 t_1、t_2 和 t，则 $P_1P_2=|t_1-t_2|$；当点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 成定比 λ 时，$t=\dfrac{t_1+\lambda t_2}{1+\lambda}$；当点 P 是线段 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时，$t=\dfrac{t_1+t_2}{2}$.

②有时将参数方程转化为一般形式更便于计算.

练习

（1）经过点 $M(1,5)$ 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线，以定点 M 到动点 P 的位移 t 为参数的参数方程是（ ）.

【参考答案：D】

A. $\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t \\ y=5-\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$　B. $\begin{cases} x=1-\frac{1}{2}t \\ y=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$　C. $\begin{cases} x=1-\frac{1}{2}t \\ y=5-\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$　D. $\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t \\ y=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$

（2）直线 $\begin{cases} x=-2-\sqrt{2}t \\ y=3+\sqrt{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）上与点 $P(-2,3)$ 距离等于 $\sqrt{2}$ 的点的坐标是________. 【参考答案：$(-3,4)$ 或 $(-1,2)$】

3. 圆的参数方程

圆心在点 $C(a,b)$，半径为 r 的圆的参数方程是：$\begin{cases} x=a+r\cos\alpha \\ y=b+r\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 是参数）.

练习

（1）直线：$3x-4y-9=0$ 与圆 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）的位置关系是（ ）. 【参考答案：D】

A. 相切　B. 相离　C. 直线过圆心　D. 相交但直线不过圆心

（2）已知过曲线 $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\le\theta\le\pi$）上一点 P，原点为 O，直线 PO 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，则 P 点坐标是（ ）. 【参考答案：D】

A. $(3,4)$　B. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},2\sqrt{2}\right)$　C. $(-3,-4)$　D. $\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right)$

4. 圆的渐开线的参数方程

$$\begin{cases} x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi) \\ y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi) \end{cases}$$

5. 摆线的参数方程

$$\begin{cases} x=r(\varphi-\sin\varphi) \\ y=r(1-\cos\varphi) \end{cases}$$

6. 参数方程变为普通方程

将参数消去，可将参数方程变为普通方程.

练习

（1）曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=3t^2+2 \\ y=t^2-1 \end{cases}$（$t$ 是参数），则曲线是（ ）. 【参考答案：D】

A. 线段　B. 双曲线的一支　C. 圆　D. 射线

参考文献

[1] 宛军民. 高中数学基础知识及常见规律[M]. 中山大学出版社.

[2] 王兴旺，田祥高. 课标导航高中基础知识手册-数学[M]. 接力出版社，2008.