Contabilidade Social
Carmen Feijó … [et al.] – 4ª edição

CAPÍTULO 7 – NÚMEROS ÍNDICES

Professor Rodrigo Nobre Fernandez

Pelotas
2014

Introdução

- Este capítulo apresenta a teoria básica dos números-índice
- Se procura estabelecer as ligações entre essas formulações e as operações das contas nacionais a preços correntes e constantes
- Veremos também os procedimentos necessários para a mudança da base de compração de uma série de números-índice
- Assim busca-se desenvolver as formulações necessárias ao cálculo dos números-índice e destacar alguns conceitos básicos e de ordem mais prática que são necessários a uma compreensão mais completa das equações subsequentes

Conceitos Básicos

- Um número-índice é uma medida que sintetiza, em uma expressão quantitativa, a variação média, entre duas situações, de todos os elementos de um conjunto
- As comparações podem se dar em períodos de tempo, regiões geográficas ou conjunto de pessoas
- Por exemplo: a produção da industrial é composta de uma diversidade de produtos, medidos em diferentes unidades. Logo é necessário desenvolver procedimentos que possibilite adicionar quantidades diferentes: número-índices.

UNIDADES MONETÁRIAS → VALOR

UNIDADES FÍSICAS → QUANTIDADE

VALOR UNITÁRIO → PREÇO

VALOR = QUANTIDADE X PREÇO

Conceitos Básicos

- Vamos utilizar a teoria do consumidor para termos uma definição precisa de um índice de custo de vida. Imagine que do período 0 para o 1 o sistema de preços passe de (p_{10}, p_{20}) pra (p_{11}, p_{21}). Seja R_0 a renda inicial do consumidor e R_1 a renda que ele precisaria obter ao sistema de preços final o mesmo nível de utilidade.
- Então definimos o índice de custo de vida como a razão entre R_1 /R_0.
- Para simplificar nossos cálculos suponha que o consumidor possuia a seguinte função de utilidade :

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\ a} x_2^{\ b}$$

- Por simplicidade considere que a+b=1.
- Ao resolvermos o problema de otimização do consumidor encontraremos que:

$$x_1 = \frac{m}{p_1} \frac{a}{a+b} \qquad x_1 = \frac{m}{p_1} \frac{a}{a+b}$$

Conceitos Básicos

- Inserindo os valores das quantidades ótimas na função de utilidade temos que:

$$V(p,m)=\left(\frac{m}{p_1}\frac{a}{a+b}\right)^a\left(\frac{m}{p_2}\frac{a}{a+b}\right)^b=m\left(\frac{a}{p_1}\right)^a\left(\frac{b}{p_2}\right)^b$$

- Logo a renda indireta é dada por:

$$m=V(p,m)\left(\frac{p_1}{a}\right)^a\left(\frac{p_2}{b}\right)^b$$

Conceitos Básicos

- Usaremos os conceitos de $R_0 = m_0$ e $R_1 = m_1$. Note que se os preços evoluem de (p_{10}, p_{20}) para (p_{11}, p_{21}) a relação das rendas nominais que mantém o consumidor sobre o mesmo nível de indiferença é dada por:

$$I_0^1 = \frac{R_1}{R_0} = \left(\frac{p_{11}}{p_{10}}\right)^a \left(\frac{p_{21}}{p_{20}}\right)^b$$

- Essa expressão é o verdadeiro custo de vida do consumidor. Trata-se de um índice geométrico, isto é, da média geométrica das relações de preços do período 1 com o período 0, com os pesos iguais a “a” e “b”.

Produto

- A primeira questão é identificar o que queremos medir o valor, o preço ou a quantidade
- Em economia eles estão associados a bens e serviços transacionados, chamados genericamente de produtos
- Derivam-se da produção, consumo intermediário, consumo final, estoque, exportação, importação e etc

- Exemplo: o valor da produção de uma empresa é calculado pela soma do valor dos produtos que produz, ou seja, o valor da produção de uma atividade não é uma variável que possa ser mensurada diretamente

Período de Coleta

- Um número-índice apresenta a variação de preços, quantidade ou valor de um conjunto de produtos entre dois períodos de tempo

- Podem ser realizadas dois tipos de coletas:
  - **No mesmo dia:** todos os dados são coletados em um mesmo dia. Assim a variação é obtida por um vetor de dados (por produto) referenciado a um dia com um outro vetor referenciado a um dia anterior. Esse índice é chamado ponto a ponto.
  - **Ao longo:** dados coletados durante um período, por exemplo uma semana ou um mês. Para se obter um vetor de dados, calcula-se a média dos dados para cada período e a comparação é feita entre esses vetores.

Conceito de Relativo : Percentual, Multiplicador e Número-Índice

- Suponha que um produto tenha no período t = 0 o preço de \$500 / ton e no período seguinte, t = 1, \$800 / ton. A variação de preços do exercícios, pode ser representada como:

$$\Delta P = \frac{P_{t=1}}{P_{t=0}} = \frac{800}{500} = 1{,}60$$

- Uma variação percentual: (1,60 – 1) x 100 = 60%

- Um número índice: 1,60 x 100 = 160

- Um multiplicador: 1,60

Conceito de Relativo
Percentual, Multiplicador e Número-Índice

- Genéricamente:
- variação percentual = [(p2/p1)-1]x100
- número índice = variação percentual + 100
- número índice = multiplicador x 100
- multiplicador = (variação percentual/100) +1

Conceito de Relativo
Exemplo 2 e 3

- Suponha que o preço de um produto aumentou de \$ 5.000,00 / un para \$ 97.000,00 / un entre dois períodos. Calcule a variação percentual, o número-índice e o multiplicador que representam essa variação

$$\Delta P = \frac{P_{t=1}}{P_{t=0}} = \frac{97000}{5000} = 19,4$$

- Sabendo que um produto teve aumento de 435% entre dos períodos e que seu preço no período inicial era de \$ 720,00 / un, calcule o preço no período final
- 435%: multiplicador de (435 / 100) + 1 = 5,35
- Preço no período final: 720,00 x 5,35 = 3.852

Relativos

- O conceitos de relativos está associado à variação do valor, preço ou quantidade de único produto para uma dada operação econômica, entre dois períodos. Por ser a variação de um único produto, pode ser feito diretamente pela razão dos valores entre o período final e o inicial

- Variação nos preços

$$M^{i}_{p0,t} = \frac{p^{i}_{t}}{p^{i}_{0}}$$

$M_{p0,t}$ = multiplicador do produto i entre os períodos 0 e t

p_0 = preço do produto i no período 0

p_t = preço do produto i no período t

- Variação nas quantidades

$$M^{i}_{q0,t} = \frac{q^{i}_{t}}{q^{i}_{0}}$$ multiplicador

$$Q^{i}_{0,t} = \frac{q^{i}_{t}}{q^{i}_{0}} \times 100$$ número-índice

Período-base

- É o período ao qual todos os relativos de uma série estão associados
- Um série com base fixa em 0 é escrita como:
    - p_{01} – número-índice entre o período 0 e 1
    - p_{02} – número-índice entre o período 0 e 2
    - p_{03} – número-índice entre o período 0 e 3

      ...
    - p_{0n} – número-índice entre o período 0 e n

Período-base

- Quando se trabalha com relativos, a variação em valor pode ser obtida de duas maneiras:
  - Pela razão entre o valor dos produtos nos dois períodos

Multiplicador → $M^{i}_{v0,t} = \dfrac{v^{i}_{t}}{v^{i}_{0}}$ número –índice → $v^{i}_{0,t} = \dfrac{v^{i}_{t}}{v^{i}_{0}} \times 100$

  - Pelo produto do índice de preço pelo de quantidade

Multiplicador → $M^{i}_{v0,t} = M^{i}_{p0,t} \times M^{i}_{q0,t}$

Número –índice → $v^{i}_{0,t} = \left(M^{i}_{p0,t} \times M^{i}_{q0,t}\right) \times 100$

Período-base
Exemplo

- Seja o conjunto de informações sobre a quantidade e o preço de computadores em um período de quatro anos. Escolhendo 1985 como base, calcule os número-índices para valor, preço e quantidade

Período	Preço ($/un)	Quantidade (un)	Valor ($)
85	2	2	4
86	3	5	15
87	9	7	63
88	29	15	435

Calculando número-índice para preços:

85 → (2/2) x 100 = 100

86 → (3/2) x 100 = 150

87 → (9/2) x 100 = 450

88 → (29/2) x 100 = 1450

Período-base
Exemplo

- Repetindo o precedimento para as três variáveis, tem-se:

Período	Preço ($/un)	Quantidade (un)	Valor ($)
85	100	100	100
86	150	250	375
87	450	350	1.575
88	1.450	750	10.875

O cálculo correto da variação de valor é realizado com os multiplicadores:

$$M^{i}_{v\bullet 85,88} = (1.450/100)\times(750/100)$$

$$M^{i}_{v\bullet 85,88} = 14{,}5\times 7{,}5 = 108{,}75$$

Período-base
Exemplo

- Suponha agora que o período base seja mudado de 1985 para 1987, calcule a nova série de relativos

Período	Preço ($/un)	Quantidade (un)	Valor ($)
85	22,22	28,57	6,35
86	33,33	71,43	23,81
87	100	100	100
88	322,22	214,29	690,48

- A mudança pode ser feita como no caso anterior, partindo das informações originais ou utilizando a série de números-índices base 1985 já calculada
- Basta dividir toda a série pelo número-índice do novo ano-base

85 → (100/450) x 100 = 22,22

88 → (1.450/450) x 100 = 322,22

Elos de relativos e relativos em cadeia

- Seja uma sequência de relativos de preços, expressos como índices, em intervalos sucessivos:

$$p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{45}, p_{56}, \ldots\ldots\ldots, p_{j,j+1}$$

- Cada uma dessas variações é chamada de elo relativo

- A variação entre o período 4 e o período 1 pode ser calculada pelo encadeamento dos elos (encadeamento da série). Assim:

$$Ip_{14} = (Ip_{12} \times Ip_{23} \times Ip_{34})$$

- Exemplo: são conhecidos os seguintes números-índices: q_{13} e q_{23} . Calcule a variação de quantidade entre 1 e 2

Elos de relativos e relativos em cadeia

$$Iq_{13} = \frac{Iq_{12} \times Iq_{23}}{100}$$

$$\frac{Iq_{13}}{Iq_{23}} = Iq_{12} \times 100$$

Base de uma série de números-índice

- Uma série de números-índices pode ter como referência (base) um período fixo ou um período móvel.

- **BASE FIXA**: a série de números-índices é toda referenciada ao mesmo período (fixo)

$$v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{04}, v_{05}, \dots\dots\dots, v_{0n}$$

- **BASE MÓVEL**: o período de referência (base) muda para cada elo relativo calculado

$$p_{01}, p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{45}, \dots\dots\dots, p_{n-1,n}$$

Critérios de avaliação de um número-índice

- Os critérios são utilizados para avaliar as qualidades e deficiências de um número-índice, foram desenvolvidos por Irving Fisher
- IDENTIDADE → $I_{a,a} = 1{,}0 \text{ ou } 100$
- PROPORCIONALIDADE → $I_{a,b} = \lambda$ quando todos os produtos tiverem variação constantes e igual a λ
- MUDANÇA DE UNIDADE → $I_{a,b}$ é invariante à mudanças na unidade de medida adotada

Critérios de avaliação de um número-índice

- REVERSIBILIDADE → $I_{b,a} \times I_{a,b} = 1{,}0 \text{ ou } 100$
- CIRCULAR → $I_{a,b} \times I_{b,c} \times I_{c,a} = 1{,}0 \text{ ou } 100$
- CIRCULAR MODIFICADA → $I_{a,b} \times I_{b,c} \times I_{c,d} = I_{a,d}$
- **EXEMPLO**
- Prove os critérios de números-índices para a seguinte série de preços

Períodos	**85**	**86**	**87**	**88**
Preços	2	3	9	29

Critérios de avaliação de um número-índice

- Identidade: $$Ip_{85,85} = \frac{Ip_{85,85}}{Ip_{85,85}} = \frac{2}{2} = 1$$
- Proporcionalidade: $$Ip_{85,86} = \frac{\lambda p_{86}}{\lambda p_{85}} = \frac{3}{2}$$
- Admitindo uma mudança de unidade em 1986, com $p_{86}=4$

$$Ip_{85,86} = \frac{p_{86}}{p_{85}} = \frac{4}{2} \neq \frac{3}{2}$$

Portanto esse índice não é invariante.

Critérios de avaliação de um número-índice

- Reversibilidade:

$$Ip_{85,86} \times Ip_{86,85} = \frac{p_{86}}{p_{85}} \frac{p_{85}}{p_{86}} = \frac{3}{2} \frac{2}{3} = 1$$

- Circularidade:

$$Ip_{85,86} \times Ip_{86,87} \times Ip_{87,85} = \frac{p_{86}}{p_{85}} \frac{p_{87}}{p_{86}} \frac{p_{85}}{p_{87}} = \frac{3}{2} \frac{9}{3} \frac{2}{9} = 1$$

Decomposição das Causas

- Essa propriedade estabelece que a variação em valor de determinada variável poderia ser obtida diretamente a partir da sua variação de preço multiplicada por sua variação de quantidade, ambas calculadas pelo mesmo número-índice

$$\Delta P \times \Delta Q = \Delta V$$

$$Ip \times Iq = Iv$$

- **Exemplo**: uma indústria vendeu, em 1987, 17.000 ton de seu produto a um preço médio, no ano, de 1,5 $/ton. No ano seguinte, suas vendas foram de 19.500 ton com um preço médio de 6,0 $/ton. Analise a evolução das vendas dessa empresa sabendo que nesse período a inflação foi de 600%

Decomposição das Causas

	1987	1988	Índice (x100)
Q	17.000	19.500	114,7
P	1,5	6,0	400,0
V=pxq	25.500	117.000	458,8

$$Mv_{87,88} = Mp_{87,88} \times Mq_{87,88}$$

Analisando o índice médio da economia 700 (NÍndice= var% + 100) com o índice do setor temos que: (400/700) = 0,57 ou seja o preço do setor cresceu 43% abaixo da média.

As vendas aumentaram em termos reais em 14,7%

O valor das receitas aumentou de um índice de 458,8, isto é, em termos percentuais 358,8%

Decomposição das Causas

- Para compensar a queda nos preços, quanto deveriam crescer as vendas reais?
- Para que pelo menos as receitas acompanhassem a inflação, o índice de valor da empresa deveria ser igual a inflação, deste modo:
- 7 = 4 x Mq -> Mq = 1,75 ou Iq = 1,75 x 100 = 175
- Portanto, somente um aumento de 75% nas vendas equilibraria esse período em relação à média de preços na economia.

Emprego das médias para cálculo do número-índice

- O cálculo de variações de preços e quantidades pode ser realizado diretamente quando está utilizando apenas um produto
- Quando há a nacessidade de se calcular variações de um conjunto de produtos utilizamos a média, como uma forma de sintetizar a variação de todos os produtos em uma única variação
- Os métodos mais usuais para captar variações na média são os índices agregativos simples (Índice de Bradstreet)
- Outros índices que utilizam base de ponderação, apresentando pesos diferenciados para cada produto também serão visto
- Índices de Laspeyres e Índice de Paasche

Índice Agregativo Simples (Bradstreet)

- A primeira proposta foi simplesmente calcular a razão entre a média aritmética dos preços ou quantidades para cada período
- Seja um conjunto com *n* produtos, de acordo a proposição de Bradstreet, os números índices de preços e quantidades seriam calculados, para *i = 1, 2, 3, ...,*

Preços

$$I_{0,t}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \Big/ n}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \Big/ n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i}$$

Quantidades

$$I_{0,t}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i \Big/ n}{\sum_{i=1}^{n} q_0^i \Big/ n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} q_0^i}$$

Índice Agregativo Simples (Bradstreet)

- A restrição a essa formulação é o fato de adicionar unidades de medida diferentes
- Obtemos um resultado não invariante em relação à unidade de medida adotada
- Exemplo:

Tabela 1. $/kg		
Período	**0**	**1**
Produto A	100	150
Produto B	200	400

Tabela 2. $/tonelada		
Período	**0**	**1**
Produto A	100.000	150.000
Produto B	200	400

- Pela tabela 1: (150+400)/(100+200)=1,83 ou 183,33 ou 86,33%
- Pela tabela 2: (150.000+400)/(100.000+200)= 1,501 ou 150,1
- Uma simples alteração na unidade pode influenciar o resultado em 22% (1,833/1,501)-1.

Índice Agregativo Simples

- Para contornar o problema de adicionar unidades diferentes, Sauerbeck propôs que os números-índice fossem obtidos pela média aritmética dos relativos de cada produto
- O cálculo das variações individuais elimina o problema da unidade de medida, pois as variações são adimensionais

Preços

$$I_{0,t}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_t^i}{p_0^i}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{0,t}^i}{n}$$

Quantidades

$$I_{0,t}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_t^i}{q_0^i}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{0,t}^i}{n}$$

Índice Agregativo Simples (Bradstreet)

- As fórmulas apresentadas calculam índices entre um período inicial 0 e um período final t, t=1,...n, ou seja, formam uma série base fixa no período inicial 0 com índices até o período n. Para calcular uma série base móvel, período contra período anterior, basta considerar períodos sucessivos na aplicação das fórmulas:

$$I_{t-1,t}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_t^i}{p_{t-1}^i}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{t-1,t}^i}{n}$$

Índice Agregativo Simples

- Exercício
- Calcule os índices Agregativo Simples e de Sauerbeck para os dados apresentados na tabela a seguir. Prove se o critério da circularidade é atendido pelos dois métodos.

Produto	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
1	1,5	2,0	1,8	3,0
2	2,0	2,0	3,0	4,0
3	5,0	3,0	6,0	6,0

Índice Agregativo Simples

- Calcule os índices Agregativo Simples:
- Ip(1,2) = (2+2+3)/(1,5+2+5)=7/8,5= 0,8235
- Ip(1,3) = (1,8+3+6)/(1,5+2+5)=10,8/8,5= 1,27
- Ip(2,3)= (1,8+3+6)/(2+2+3)=1,543

- Temos que:
- Ip(1,2) x Ip(2,3) = Ip(1,3)
- 0,8235x1,543 = 1,27

- Isto indica que o índice de bradstreet atende a propriedade de circularidade.

Índice de Sauerbeck

- Usando a equação temos que:

$$I_{p1,2} = \left[\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{1{,}5} + \frac{2}{2} + \frac{3}{5}\right)\right] = 97{,}78 \quad I_{p1,3} = \left[\frac{1}{3} \times \left(\frac{1{,}8}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{5}\right)\right] = 130$$

$$I_{p2,3} = \left[\frac{1}{3} \times \left(\frac{1{,}8}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{3}\right)\right] = 146{,}67$$

- Verificando a circularidade:

$$\frac{I_{p1,3}}{I_{p2,3}} = I_{p1,2} \qquad \frac{130}{146{,}67} = 0{,}886$$

Números-Índice Ponderados
Base de Ponderação

- Índice de médias simples desconsideram a importância relativa de um produto em um conjuntos de *n* bens
- A maneira de calcular os números índices deve superar problemas como: análise da evolução dos preços em uma economia sem ponderar a importância de um automóvel e quilos (toneladas) de feijão
- A ponderação proposta pelos métodos mais utilizados é a participação do **valor** de cada produto no **valor total** da operação realizada, como produção, consumo, vendas, compras, etc
- Assim, temos:

$$\omega_t^i = \frac{v_t^i}{\sum_{i=1}^{n} v_t^i} = \frac{p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} \left[p_t^i \times q_t^i \right]}$$

Números-Índice Ponderados
Base de Ponderação

- Exemplo: dados os preços e quantidades para três produtos transacionados nos períodos 0 e 1, calcule a base de ponderação para esses produtos em cada período

	p_0	q_0	p_1	q_1	$p_0 \times q_0$	$p_1 \times q_1$	ω_0	ω_1
Alimentação	7	2	8	2	14	16	0,438	0,286
Vestuário	3	1	4	2	3	8	0,093	0,143
Transporte	5	3	8	4	15	32	0,469	0,571
Total					32	56	1,0	1,0

- Este é o modo como o IBGE pondera os índices de preço ao consumidor. É realizado através de entrevista domiciliares que levantam o peso de cada produto no consumo da família

Índice de Laspeyres

- A metodologia do índice de Laspeyres propõe que os números-índices sejam calculados pela média aritmética ponderada das variações de cada produto
- O índice adota o período inicial para cálculo dos pesos, logo para um conjunto de *n* bens, temos

Preços

$$L_{0,t}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_0^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_0^i}$$

Quantidades

$$L_{0,t}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i \times p_0^i}{\sum_{i=1}^{n} q_0^i \times p_0^i}$$

Índice de Laspeyres
Derivação do índice de preços

- Seja um conjunto de *n* bens e o período de 0 a *t*, temos que:

$$L_{0,t}^{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\omega_0^i\left(\frac{p_t^i}{p_0^i}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{n}\omega_0^i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(p_0^i\times q_0^i\right)\left(\frac{p_t^i}{p_0^i}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{n}p_0^i\times q_0^i}$$

resolvendo o numerador... $\sum_{i=1}^{n}\omega_0^i=1$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(p_0^i\times q_0^i\right)\left(\frac{p_t^i}{p_0^i}\right)\right]=\left(p_0^1\times q_0^1\right)\left(\frac{p_t^1}{p_0^1}\right)+\left(p_0^2\times q_0^2\right)\left(\frac{p_t^2}{p_0^2}\right)+\ldots+\left(p_0^n\times q_0^n\right)\left(\frac{p_t^n}{p_0^n}\right)$$

$$=\left(p_t^1\times q_0^1\right)+\left(p_t^2\times q_0^2\right)+\left(p_t^3\times q_0^3\right)+\left(p_t^4\times q_0^4\right)+\ldots+\left(p_t^n\times q_0^n\right)=\sum_{i=1}^{n}p_t^i\times q_0^i$$

Logo, obtemos... $$L_{0,t}^{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_t^i\times q_0^i}{\sum_{i=1}^{n}p_0^i\times q_0^i}$$

Índice de Laspeyres
Derivação do índice de quantidades

- Seja um conjunto de *n* bens e o período de 0 a *t,* temos que:

$$L_{0,t}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\omega_0^i\left(\frac{q_t^i}{q_0^i}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{n}\omega_0^i} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(q_0^i \times p_0^i\right)\left(\frac{q_t^i}{q_0^i}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{n} q_0^i \times p_0^i}$$ resolvendo o numerador...

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(q_0^i \times p_0^i\right)\left(\frac{q_t^i}{q_0^i}\right)\right] = \left(q_0^1 \times p_0^1\right)\left(\frac{q_t^1}{q_0^1}\right) + \left(q_0^2 \times p_0^2\right)\left(\frac{q_t^2}{q_0^2}\right) + \ldots + \left(q_0^n \times p_0^n\right)\left(\frac{q_t^n}{q_0^n}\right)$$

$$= \left(q_t^1 \times p_0^1\right) + \left(q_t^2 \times p_0^2\right) + \left(q_t^3 \times p_0^3\right) + \left(q_t^4 \times p_0^4\right) + \ldots + \left(q_t^n \times p_0^n\right) = \sum_{i=1}^{n} q_t^i \times p_0^i$$

Logo, obtemos... $$L_{0,t}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i \times p_0^i}{\sum_{i=1}^{n} q_0^i \times p_0^i}$$

Índice de Paasche

- A metodologia do índice de Paasche utiliza a média harmônica ponderada para o cálculo dos números-índice e adota o período final como referência para a base de ponderação
- Para um conjunto de *n* bens, temos

Preços

$$P_{0,t}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_t^i}$$

Quantidades

$$P_{0,t}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_0^i}$$

- Responde a seguinte questão: de quanto $ a preços correntes um indivíduo necessita para comprar uma cesta de bens e serviços no ano corrente, dividido pelo custo de aquisição da mesma cesta a preços do ano-base?

Índice de Paasche
Derivação do índice de preços

- Seja um conjunto de *n* bens e o período de 0 a *t,* temos que:

$$P_{0,t}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_t^i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_t^i \left(\frac{p_0^i}{p_t^i} \right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_t^i \left(\frac{p_0^i}{p_t^i} \right)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_t^i \left(\frac{p_0^i}{p_t^i} \right) = \left(p_t^1 \times q_t^1\right)\left(\frac{p_0^1}{p_t^1} \right) + \left(p_t^2 \times q_t^2\right)\left(\frac{p_0^2}{p_t^2} \right) + \ldots + \left(p_t^n \times q_t^n\right)\left(\frac{p_0^n}{p_t^n} \right)$$

$$= \left(p_0^1 \times q_t^1\right) + \left(p_0^2 \times q_t^2\right) + \left(p_0^3 \times q_t^3\right) + \left(p_0^4 \times q_t^4\right) + \ldots + \left(p_0^n \times q_t^n\right) = \sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_t^i$$

Logo, obtemos... $$P_{0,t}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_t^i}$$ Note que o peso será w1

Índice de Paasche
Derivação do índice de quantidades

- Seja um conjunto de *n* bens e o período de 0 a *t*, temos que:

$$P_{0,t}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_t^i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_t^i \left(\frac{q_0^i}{q_t^i} \right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_t^i \left(\frac{q_0^i}{q_t^i} \right)}$$

resolvendo o denominador...

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_t^i \left(\frac{q_0^i}{q_t^i} \right) = \left(p_t^1 \times q_t^1 \right) \left(\frac{q_0^1}{q_t^1} \right) + \left(p_t^2 \times q_t^2 \right) \left(\frac{q_0^2}{q_t^2} \right) + \ldots + \left(p_t^n \times q_t^n \right) \left(\frac{q_0^n}{q_t^n} \right)$$

$$= \left(p_t^1 \times q_0^1 \right) + \left(p_t^2 \times q_0^2 \right) + \left(p_t^3 \times q_0^3 \right) + \left(p_t^4 \times q_0^4 \right) + \ldots + \left(p_t^n \times q_0^n \right) = \sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_0^i$$

Logo, obtemos... $$P_{0,t}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_0^i}$$

Relação entre Laspeyres e Paasche

- Os índices de Laspeyres e Paasche apresentam relações interessantes, uma vez que utilizando a média ponderada, preços e quantidades para suas respectivas metodologias
- O índice de Paasche é maior do que o de Laspeyres se os preços e quantidades tenderem a se mover na mesma direção entre os períodos 0 e *t*
- O índice de Laspeyres é maior se os preços e quantidades tenderem a se mover em direções contrárias

$$P_{0,t}^{p,q} > L_{0,t}^{p,q} \Leftrightarrow \rho_{p,q} > 0$$

$$L_{0,t}^{p,q} > P_{0,t}^{p,q} \Leftrightarrow \rho_{p,q} < 0$$

Relação entre Laspeyres e Paasche

$$\rho_{p,q} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i - \overline{p})(q_i - \overline{q})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - \overline{p})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(q_i - \overline{q})^2}} = \frac{COV(p,q)}{\sigma_p \sigma_q}$$

Laspeyres modificado

- Para formar o índice de Laspeyres é exigido sempre a ponderação pelo período inicial, obrigando sempre o cálculo de uma nova estrutura de ponderação
- Ao se alterar essa estrutura para cada período, a referência para a séries de índices, faz com que a série encadeada não seja circular
- A solução para essa questão é estabelecer uma estrutura de ponderação fixa qualquer que seja o período calculado

$$LM^{p}_{t-1,t} = \sum_{i=1}^{n} \omega_0^i \left(\frac{p_t^i}{p_{t-1}^i} \right) \qquad LM^{q}_{t-1,t} = \sum_{i=1}^{n} \omega_0^i \left(\frac{q_t^i}{q_{t-1}^i} \right)$$

- A vantagem do *LM* é garantir que:

$$LM_{0,2} = LM_{0,1} \text{ x } LM_{1,2}$$

Interpretação econômica dos Índices de Laspeyres e Paasche

- Os índices de Laspeyres e Paasche podem ser interpretados como indicadores que fazem a passagem de valores nominais para valores reais
- Valor nominal: é o valor das transações econômicas calculado com a quantidade transacionada e seu preço no mesmo período
- Valor constante: é o valor das transações econômicas calculado com as quantidades transacionadas no período considerado (t), porém os preços adotados no cálculo do valor fixados em um ponto do período (1).
- Exemplo: uma família compra uma única vez a carne, feijão que consumirá durante um mês. Para analisar crescimento do consumo, temos:

	p_1	q_1	p_2	q_2	p_3	q_3
Carne	100	2,0	190	1,5	130	2,3
Feijão	55	1,0	60	1,8	70	2,5

Interpretação econômica dos Índices de Laspeyres e Paasche

- Valor nominal dos gastos mensais com carne:

Mês 1 → 100 x 2,0 = 200

Mês 2 → 190 x 1,5 = 285 crescimento: (285/200) = 1,425 ou 42,50%

Mês 3 → 130 x 2,3 = 299 crescimento: (299/285) = 1,049 ou 4,9%

- Nota-se que ocorreu um aumento dos GASTOS no mês 2 e uma queda no mês 3. Porém, somente com dados nominais nada mais pode ser dito
- Analisa-se a variação REAL dos gastos estabelecendo o mês 1 como referência:

Mês 1 → 100 x 2,0 = 200

Mês 2 → 100 x 1,5 = 150 decréscimo: (150/200) = 0,75 ou -25%

Mês 3 → 100 x 2,3 = 230 crescimento: (230/150) = 1,533 ou 53,33%

Interpretação econômica dos Índices de Laspeyres e Paasche

- Análises econômicas necessitam de informações que permitam identificar, nas variações em valor nominal, o papel das variações de preço e de quantidade
- Assim, podemos estabelecer as seguintes relações, considerando 0 período inicial e 1 período final...
- Valor nominal em 0 x índice de quantidade entre 0 e 1 = valor real em 1

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_0^i\right] \times I_{0,1}^q = \sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_1^i \qquad (1)$$

- Valor real em 1 x índice de preço 0,1 = valor nominal em 1

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_1^i\right] \times I_{0,1}^p = \sum_{i=1}^{n} p_1^i \times q_1^i \qquad (2)$$

Interpretação econômica dos Índices de Laspeyres e Paasche

- Podemos reescrever (1), como:

$$I_{0,1}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_1^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_0^i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_0^i} = L_{0,t}^{q} \qquad (3)$$

- Reescrevendo (2), temos:

$$I_{0,1}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_1^i \times q_1^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_1^i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_t^i} = P_{0,t}^{p} \qquad (4)$$

Interpretação econômica dos Índices de Laspeyres e Paasche

- Podemos perceber que as relações nos levam a um índice de quantidade de Laspeyres e índice de preços de Paasche
- Assim, verifica-se que o índice de valor, entre os períodos 0 e 1, é obtido pela multiplicação de um índice de quantidade de Laspeyres por um índice de preço de Paasche
- Temos, então:

$$I_{0,1}^{v} = L_{0,1}^{p} \times P_{0,1}^{q} \qquad ou \qquad I_{0,1}^{v} = L_{0,1}^{q} \times P_{0,1}^{p}$$

- **IMPORTANTE**: os índices de Laspeyres e Paasche não atendem ao princípio de decomposição das causas, pois:

$$L_{0,1}^{p} \times L_{0,1}^{q} \geq I_{0,1}^{v} \geq P_{0,1}^{p} \times P_{0,1}^{q}$$

Índice de Fischer

- Também chamado de índice ideal, o índice de Fischer foi proposto para tentar diminuir as distorções entre os índices de Laspeyres e Paasche. Para tal, foi definido como a média geométrica desses dois índices

$$F_{0,t}^{p} = \sqrt{L_{0,t}^{p} \times P_{0,t}^{p}} \qquad F_{0,t}^{q} = \sqrt{L_{0,t}^{q} \times P_{0,t}^{q}}$$

- Este índice não atende ao critério da circularidade, mas atende à decomposição das causas, que era o objetivo central de sua formulação
- Desvantagens:
  - Há necessidade de se calcular previamente os índices de Laspeyres e Paasche, provocando aumento nos custos e no tempo necessário para seus cálculos e divulgação
  - Não é um índice de compreensão fácil

Exercício

- Uma pesquisa sobre gastos das famílias obteve os seguintes dados para três períodos

	q_0	p_0	q_1	p_1	q_2	p_2
Alimentação	5,0	1,0	6,0	1,2	4,5	1,7
Vestuário	0,5	3,0	1,0	3,0	0,5	4,0
Energia	1,0	0,5	0,8	0,8	1,0	1,2
Transporte	3,0	1,0	2,0	1,5	3,0	1,8

- Calcule as estruturas de ponderação
- Calcule o índice de Laspeyres (0,1) preço e quantidade pela estrutura de ponderação e fórmula geral
- Calcule Laspeyres preços para 0,2 – 0,1 e 1,2 verifique se o critério de circularidade é atendido
- Calcule Paasche quantidade e preço para o período 1,2

Exercício

Produção	V_0	V_1	V_2	w_0	w_1	w_2
Alimentação	5,0	7,2	7,65	0,50	0,52	0,47
Vestuário	1,5	3	2,0	0,15	0,22	0,12
Energia	0,5	0,64	1,2	0,05	0,04	0,08
Transporte	3,0	3	5,4	0,30	0,22	0,33
Total	10	13,84	16,25	1	1	1

Exercício

$$L_{0,1}^{P} = 0,5 \times \left(\frac{1,2}{1} \right) + 0,15 \times \left(\frac{3}{3} \right) + 0,05 \times \left(\frac{0,8}{0,5} \right) + 0,3 \times \left(\frac{1,5}{1} \right) = 128$$

$$L_{0,2}^{p} = 0,5 \times \left(\frac{1,7}{1} \right) + 0,15 \times \left(\frac{4}{3} \right) + 0,05 \times \left(\frac{1,2}{0,5} \right) + 0,3 \times \left(\frac{1,8}{1} \right) = 1,710$$

$$L_{1,2}^{P} = 0,52 \times \left(\frac{1,7}{1,2} \right) + 0,22 \times \left(\frac{4}{3} \right) + 0,04 \times \left(\frac{1,2}{0,8} \right) + 0,22 \times \left(\frac{1,8}{1,5} \right) = 1,354$$

Note que o critério da circularidade não é atendido: $L_{1,2}^{P} \times L_{0,1}^{P} = L_{0,2}^{P}$

Exercício

Utilizando o Índice de Laspeyres modificado:

$$L_{1,2}^{P} = 0{,}5\times\left(\frac{1{,}7}{1{,}2}\right)+0{,}15\times\left(\frac{4}{3}\right)+0{,}05\times\left(\frac{1{,}2}{0{,}8}\right)+0{,}3\times\left(\frac{1{,}8}{1{,}5}\right)=1{,}343$$

Deste modo o critério é atendido.

O Índice de Paasche de quantidade direta e implicitamente para o período 1-2:

$$P_{1,2}^{Q} = \frac{(4{,}5\times1{,}7)+(0{,}5\times4)+(1\times1{,}2)+(3\times1{,}8)}{(6\times1{,}7)+(1\times4)+(0{,}8\times1{,}2)+(2\times1{,}8)} = 0{,}8662$$

Calculando implicitamente:

$$P_{1,2}^{Q} = \frac{I_{1,2}^{v}}{L_{1,2}^{P}} = \frac{\frac{V_2}{V_1}}{1{,}354} = \frac{\frac{16{,}25}{13{,}84}}{1{,}354} = \frac{1{,}1741}{1{,}354} = 0{,}8672$$

Índice de Volume

- Um índice de volume é uma média de variações relativas nas quantidades de um determinado conjunto de bens e serviços entre dois períodos temporais
- Seja o exemplo: uma indústria automobilística com dois tipos de automóvel, o popular e o luxo,e os dados de preço e quantidade produzida, em dois períodos, são apresentados na tabela a seguir

	p_0	q_0	p_1	q_1
Popular	1	50	2	0
Luxo	4	50	8	100
Automóvel	2,5	100	8	100

- Calculando para automóvel...

Índice de preço → (8/2,5) x 100 = 320

Índice de quantidade → (100/100) x 100 = 100

Índice de valor → (8x100)/(2,5x100) x 100 = 320

Índice de Volume

- No caso de serem disponíveis informaçõe detalhadas, é necessário utilizar as equações de Laspeyres e Paasche
- Índice preço – Paasche

$$P_{0,1}^{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \times q_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \times q_t^i} = \frac{(2\times 0)+(8\times 100)}{(1\times 0)+(4\times 100)}\times 100 = 200$$

- Índice quantidade - Laspeyres

$$L_{0,1}^{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_t^i \times p_0^i}{\sum_{i=1}^{n} q_0^i \times p_0^i} = \frac{(0\times 1)+(100\times 4)}{(50\times 1)+(50\times 4)}\times 100 = 160$$

Índice de Volume

- Índice de valor $I_{0,1}^{v} = P_{0,1}^{p} \times L_{0,1}^{q} = (2{,}0 \times 1{,}6) \times 100 = 320$
- Dessa forma, as variações do produto automóvel, calculadas por um agregado ou por dados mais detalhados, têm o mesmo resultado para o valor, porém há uma mudança quando se consideram quantidade e preço
- Apesar das quantidades permanecerem inalteradas em seu total, há um aumento do valor adicionado por cada veículo ao parar de produzir um bem popular para se concentrar em um de luxo
- Assim, o índice de Laspeyres quando temos informações detalhadas, calcula não a variação da quantidade mas sim a variação de volume, ou seja, um aumento real no valor adicionado por cada bem chamado automóvel

Mudança da base de comparação em uma série de números-índice

- A escolha de um período para base de comparação de uma série de números-índice de ve considerar, principalmente:
  - Períodos considerados normais
  - Proximidade entre as bases de ponderação e comparação
- Qualquer que seja a base de ponderação adotada para um índice de Laspeyres a sua base permanece inalterada
- A mudança de uma base consiste em recalcular a série com um novo período como referência. Consideram-se três mudanças:
  - Base móvel para base fixa
  - Base fixa para base fixa
  - Base fixa para base móvel

Base móvel para base fixa

- Seja a seguinte série de índices base móvel

$$I_{0,1} - I_{1,2} - I_{2,3} - \ldots - I_{t-1,t}$$

- A mudança é feita admitindo-se que o critério de circularidade seja atendido pela série considerada, assim uma base fixa no período 0 seria calculada por

$$I_{0,1} = I_{0,1}$$

$$I_{0,2} = I_{0,1} \times I_{1,2}$$

$$I_{0,3} = I_{0,1} \times I_{1,2} \times I_{2,3}$$

$$\ldots$$

$$I_{0,t} = I_{0,1} \times I_{1,2} \times I_{2,3} \times \ldots \times I_{t-1,t} = I_{0,t-1} \times I_{t-1,t}$$

Base móvel para base fixa

- Supondo agora uma nova série com base diferente de 0, ou seja, em um período genérico i no meio da série, temos

Para perído anterior a base

$$I_{0,i} = \left(1/\left(I_{0,1} \times I_{1,2} \times \ldots \times I_{i-1,i}\right)\right)$$
$$I_{1,i} = \left(1/\left(I_{1,2} \times I_{2,3} \times \ldots \times I_{i-1,i}\right)\right)$$
$$I_{j,i} = \left(1/\left(I_{j,j+1} \times I_{j+1,j+2} \times \ldots \times I_{i-1,i}\right)\right)$$
$$I_{i,i} = 1$$

Para período posterior

$$I_{i,i+1} = I_{i,i+1}$$
$$I_{i,i+2} = I_{i,i+1} \times I_{i+1,i+2}$$
$$\ldots$$
$$I_{i,t} = I_{i,i+1} \times I_{i+1,i+2} \times \ldots \times I_{t-1,t}$$

Base fixa para base fixa

- A passagem de uma série base fixa para uma outra base fixa resume-se à mudança do período de referência através de uma regra de três. Seja a seguinte série com base no período 0

$$I_{0,0} - I_{0,1} - I_{0,2} - I_{0,3} - \ldots - I_{0,t}$$

- Uma série base fixa no período 3 ficaria

$$I_{3,1} - I_{3,2} - I_{3,3} - I_{3,4} - \ldots - I_{3,t}$$

- Supondo conhecida a série no período 0, sua mudança para uma série com base fixa no período 3 ficaria

$$I_{3,1} = I_{0,1} / I_{0,3}$$

$$I_{3,2} = I_{0,2} / I_{0,3}$$

$$I_{3,3} = I_{0,3} / I_{0,3}$$

$$I_{3,4} = I_{0,4} / I_{0,3}$$

A passagem de uma base fixa para outra resume-se a simplesmente dividir a série inicial pelo valor do multiplicador no novo período-base e depois multiplicar por 100

Base fixa para base móvel

- Seja uma série de multiplicadores para uma série base fixa no período 0

$$I_{0,0} - I_{0,1} - I_{0,2} - I_{0,3} - \ldots - I_{0,t}$$

- Uma base móvel período contra período anterior é calculada por

$$I_{0,1} = I_{0,1}$$

$$I_{1,2} = I_{0,2} / I_{0,1}$$

$$I_{2,3} = I_{0,3} / I_{0,2}$$

$$\ldots$$

$$I_{t-1,t} = I_{0,t} / I_{0,t-1}$$

Período	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
Índice	100	107	98	102	115

Para 0,1 → é o mesmo índice

Para 1,2 → (98/107) = 0,9159 → 91,59

Para 2,3 → (102/98) = 1,0408 → 104,08

Para 3,4 → (115/102) = 1,1275 → 112,75

Cálculo do valor adicionado a preços constantes

- O cálculo do valor adicionado para cada atividade econômica é realizado pela diferença entre o seu valor da produção e o seu consumo intermediário
- São três os procedimentos recomendados no *System of National Accounts* como os de maior confiabilidade
- (i) Dupla deflação: consiste em deflacionar o valor da produção e o consumo intermediário através de índices de preços específicos

$$y_i^t = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}^t - \sum_{j=1}^{n} u_{ij}^t$$

y = valor adicionado pela atividade *i* no tempo *t*

v = valor da produção do produto *j* na atividade *i* no tempo *t*

u = valor do consumo intermediário total (nacional mais importado) do produto *j* pela atividade *i* no tempo *t*

Cálculo do valor adicionado a preços constantes

- Rearrajando para valores constantes sempre ao preço do ano anterior

$$y_i^{t/t-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{ij}^t}{Ip_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{ij}^t}{Ic_j}$$

y = valor adicionado pela atividade *i* no tempo *t* a preços de *t-1*

Ip = índice de preços ao produtor entre *t* e *t-1* para o produto *j*

Ic = índice de preços ao consumidor entre *t* e *t-1* para o produto *j*

Cálculo do valor adicionado a preços constantes

- (ii) Índice de Laspeyres para o volume: o valor adicionado de *t* a preços *t-1* é obtido pela multiplicação do valor adicionado a preços correntes de *t* pelo seguinte índice de volume

$$L_q^{VA} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Pp_j^{t-1} \times vq_{ij}^{t} - \sum_{j=1}^{n} Pc_j^{t-1} \times uq_{ij}^{t}}{\sum_{j=1}^{n} Pp_j^{t-1} \times vq_{ij}^{t-1} - \sum_{j=1}^{n} Pc_j^{t-1} \times uq_{ij}^{t-1}}$$

L = índice de Laspeyres de volume para o VA entre *t-1* e *t*

vq = quantidade do produto *j* produzida na atividade *i* no período *t*

uq = quantidade do produto *j* cosumida na atividade *i* no período *t*

Pp = preços de produção do produto *j* no período *t*

Pc = preço ao consumidor (intermediário) do produto *j* no período *t*

Assim...

$$y^{t/t-1} = y^{t-1} \times L_q^{VA}$$

Cálculo do valor adicionado a preços constantes

- (iii) Índice de Paasche para preços: o valor adicionado de *t* a preços de *t-1* é obtido pelo deflacionamento de valor adicionado a preços correntes de *t* pel oseguinte índice de preços

$$P_p^{VA} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Pp_j^{t-1} \times vq_{ij}^{t} - \sum_{j=1}^{n} Pc_j^{t} \times uq_{ij}^{t}}{\sum_{j=1}^{n} Pp_j^{t} \times vq_{ij}^{t-1} - \sum_{j=1}^{n} Pc_j^{t} \times uq_{ij}^{t-1}}$$

P = índice de Paasche de preços para o valor adicionado entre *t-1* e *t*

Assim...

$$y^{t/t-1} = \frac{y^t}{P_p^{VA}}$$

Cálculo do valor adicionado a preços constantes

- Recomendações
  - A forma mais correta de se calcular variações em volume do PIB é através de um índice de Fischer entre dois períodos consecutivos; as variações para períodos mais longos são obtidas pelo encadeamento desses índices (elos da cadeia)
  - A forma mais correta de se calcular inflação anual que afeta o PIB é através do índice de preço de Fischer; as variações de períodos mais longos são obtidas pelo encadeamento dos elos
  - Os índices em cadeia que utilizam os índices de volume de Laspeyres para medir as variações anuais do PIB em volume e os índices de preços de Paasche para medir a inflação anual consistem alternativas aceitáveis aos índices de Fischer