Kapitel 1

Uebungen

1.1 Blatt 1

1.1.1 Reihen und Vollständigkeit

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Behauptung. Es ist äquivalent:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty \Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergiert in X.

(b) X ist ein Banachraum.

Beweis. "a⇒b": Da X bereits ein normierter Raum ist, ist nur noch zu zeigen, dass X vollständig ist. Sei (u_n) eine Cauchyfolge in X, wobei o.B.d.A $u_0 = 0$, sonst betrachten wir $(\tilde{u}_n)$ mit $\tilde{u}_{n+1} := u_n$, $\tilde{u}_0 := 0$ statt (u_n). Es ist $u_n = \sum_{n=0}^{k} u_n - u_{n-1}$. Sei $x_n := \frac{1}{n^2}$. Da u_n eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes x_n ein (kleinstes) $N_n := N(x_n) \in \mathbb{N}$, so dass $\|u_{N(x_n)} - u_m\| \leq x_n \ \forall m \geq N_n$. Das Bemerkenswerte an (N_n) ist, dass diese Folge monoton steigt. Es ist nun für $n' \in \mathbb{N}$ mit der Dreiecksungleichung und der Eigenschaft der Teleskopsumme

$$\left\| \sum_{n=0}^{N(n'+1)} u_n - u_{n-1} \right\| \leq \underbrace{\|u_1 - u_0\| + \|u_2 - u_1\| + \dots}_{=:x_0} + \underbrace{\|u_{N_2} - u_{N_1}\|}_{\leq x_1} + \underbrace{\|u_{N_3} - u_{N_2}\|}_{\leq x_2} + \dots + \underbrace{\|u_{N(n'+1)} - u_{N(n')}\|}_{\leq x_{n'}}$$

Bzw.

$$\left\| \sum_{n=N_2}^{N(n'+1)} u_{N_n} - u_{N_{n-1}} \right\| \leq \sum_{n=N_2}^{N(n'+1)} \left|\left| u_{N_n} - u_{N_{n-1}} \right|\right| \leq \sum_{n=1}^{n'} x_n$$

Damit erfüllt $\sum_{n=N_2}^{N(n'+1)} \left|\left| u_{N_n} - u_{N_{n-1}} \right|\right|$ das Cauchykriterium für Reihen, und somit konvergiert sie. Es gilt also:

$$\sum_{n=N_2}^{\infty} \left|\left| u_{N_n} - u_{N_{n-1}} \right|\right| < \infty.$$

Mit der Eigenschaft a) ist nun: $u_{N_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \in X$. Da (u_k) eine Cauchyfolge ist, und sie eine konvergente Teilfolge hat, bleibt ihr nichts anderes übrig, als selber auch gegen α zu konvergieren. Also konvergiert u_k in X, damit ist X ein Banachraum.

b⇒a: Sei X ein Banachraum und (u_n) eine Folge in X, so dass $s := \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$. Insbesondere erfüllt s das Cauchykriterium für Reihen, und es ist dank der Dreiecksungleichung für $\varepsilon > 0$

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} u_n \right\| \leq \sum_{n=k}^{m} \|u_n\| < \varepsilon \quad \forall m, k \geq N(\varepsilon).$$

ALso erfüllt auch $\sum_{n=k}^{m} u_n$ das Cauchykriterium für Reihen. Damit konvergiert sie in X, also ist (a) gezeigt.

■

1.1.2 Die Operatornorm

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Behauptung. Es gilt:

$$\|T\| := \sup_{x\in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup_{x\in\partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_y}{\|x\|_X}.$$

Beweis. 1.Variante: Wir beweisen jede Gleichheit einzeln. Das erste Gleichheitszeichen ist eine Definition und somit wahr.
"$\sup_{x\in U_1(0)} \|Tx\|_Y \leq \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$": Da $U_1(0) \subseteq \overline{U_1(0)}$ kann das Supremum nicht größer werden.
"$\sup_{x\in U_1(0)} \|Tx\|_Y \geq \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$": Es sei (x_n) eine Folge aus $U_1(0)$ mit $x_n \to x \in \overline{U_1(0)}$. Es ist erstmal $||Tx_n||_Y \leq ||T|| \ \forall n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von T (Satz 1.7) und $||\cdot||_Y$ ist $||Tx_n||_Y \to ||Tx||_Y \Rightarrow ||Tx||_Y \leq ||T||$.
Für die restlichen Gleichheiten wird freundlich auf die 2. Variante verwiesen.

2.Variante: Aus Satz 1.7 folgt, dass T stetig ist.
Dank der Definition von sup und der Stetigkeit von $T, \|\cdot\|_Y$ folgt: $\|T\| = \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y &= \sup_{x\in\overline{U_1(0)}\setminus\{0\}} \|\|x\|_X T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \sup_{x\in\overline{U_1(0)}\setminus\{0\}} \|x\|_X \|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \underbrace{\sup_{x\in\overline{U_1(0)}\setminus\{0\}} \|x\|_X}_{=1} \cdot \sup_{x\in\overline{U_1(0)}\setminus\{0\}} \|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \sup_{x\in\partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}
\end{aligned}$$

Wobei wir genuzt haben, dass $T0 = 0$ (für das erste Gleichheitszeichen) und $\|x\|_X, \|Tx\|_Y \geq 0 \ \forall x \in X$ (für das dritte Gleichheitszeichen). ■

1.1.3 Eigenschaften in endlichdimensionalen Vektorräumen

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.

(a)

Behauptung.

$$m := dim(X) < \infty \text{ und } T : X \to Y \text{ linear} \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X,Y)$$

Beweis. Vorweg eine Vorüberlegung: Es sei $B := (v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von X. Ist $x_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^n v_i$, $\alpha_i^n \in \mathbb{K}$ eine Folge aus X mit $x_n \to x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, so muss gelten $(\alpha_1^n, \dots \alpha_m^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Dies folgt, da im $\mathbb{K}^m$ alle Normen äquivalent sind, und im $\mathbb{K}^m$ komponentenweise Konvergenz äquivalent zur Normkonvergenz ist ($\nearrow$ Folgerung 4.29 im Ana I/II Lindner Skript). Falls einem dies nicht genügt, so bediene er sich der Seiten 102-103 im Buch Funktionalanalysis von H. Heuser 3.Auflage.

1.Variante: Für den eigentlichen Beweis nutzen wir Satz 1.7 und zeigen, dass T stetig in der Null ist. Dafür sei (x_n) eine Folge aus X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $x_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i^n v_i$, $\alpha_i^n \in \mathbb{K}$.

$$||Tx_n||_Y = \left|\left|T\sum_{i=1}^m \alpha_i^n v_i\right|\right|_Y = \left|\left|\sum_{i=1}^m \alpha_i^n Tv_i\right|\right|_Y \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i^n|\,||Tv_i||_Y \leq \max_{i=1}^m ||Tv_i|| \sum_{i=1}^m |\alpha_i^n|$$

Wegen der Vorüberlegung ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m |\alpha_i^n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$$

2.Variante: Da $dim(X) < \infty$ und T linear ist, ist der Bildraum ein endlichdimensionaler Vektorraum, und es gibt eine Basis C von im T. Es gibt nun, dank der linearen Algebra eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{m\times \dim \operatorname{im} T}$, so dass $T = \phi_C^{-1} \circ M \circ \phi_B$, wir zeigen nun, dass eine Koordinatenabbildung ϕ ein Homöomorphismus ist, denn dann ist T eine Komposition aus stetigen Funktionen und somit selber stetig. Wegen der Vorüberlegung ist $\phi : X \mapsto \mathbb{K}^m$ stetig. Offenbar ist ϕ bijektiv. Da die Addition stetig ist, ist auch ϕ^{-1} stetig. M ist auch stetig denn

$$\forall x \in \mathbb{K}^m,\ ||x|| < 1 \text{ gilt } \|Mx\| \leq a\|Mx\|_\infty \leq a\|M\|_\infty\|x\| \leq a\|M\|_\infty < a\infty.$$

Wobei $a \in \mathbb{R}^+$ die geeignet gewählte nur von der Norm abhängige Konstante ist, die von der Äquivalenz zu jeder anderen Norm entsteht. ■

(b)

Behauptung.

$$dim(X) < \infty \text{ und } T \in \mathcal{B}(X,Y) \Rightarrow \|T\| = \max_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$$

Beweis. Wir greifen vor auf Blatt 4 Aufgabe 3. Es ist nämlich eine Teilmenge eines endlichdimensionalen Vektorraumes genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Deshalb ist schon mal $\overline{U_1(0)}$ kompakt. Aus Aufgabe 2 ist bekannt, dass $\sup_{x\in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$. T, $\|\cdot\|_Y$ sind dank Satz 1.7 stetig, damit auch $||T\cdot||_Y$. Da $\overline{U_1(0)}$ kompakt ist und stetige Funktionen, die auf $\mathbb{R}$ abbilden, auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, ist die Behauptung bewiesen. ■

(c)

Behauptung. Im allgemeinen ist die Aussagen von b) falsch.

Beweis. Wir geben ein Beispiel für $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ derart an, dass

$$\|T\| \notin \left\{\|Tx\|_Y \,|\, x \in \overline{U_1(0)}\right\}.$$

1.Variante: Es sei $X = \operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^1$, $Y = \mathbb{R}$, wobei $e_k = (\delta_{ik})_{i\in\mathbb{N}}$, und

$$T : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Tx := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} x_k$$

T ist offenbar linear und wegen $|Tx| = \left|\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^\infty |x_k| = ||x||_1$ auch beschränkt. Es ist

$$\overline{\{x \in \ell^1 : x \in X, ||x|| < 1\}} =$$

TODO

2.Variante: Sei

$$X = Y = \ell^p(\mathbb{K}) =: \ell^p \text{ (beschr. Folgenraum) und } T : \ell^p \to \ell^p,\ (x_n) \mapsto \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right)$$

Mit der Norm $\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Dann ist $\overline{U_1(0)} = \{(x_n) \in \ell^p | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leq 1\}$

T ist ein beschränkter linearer Operator, denn:

(i) Seien $(x_n), (y_n) \in \ell^p$, $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow T(\alpha x_n + y_n) = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)(\alpha x_n + y_n)\right) = \alpha T x_n + T y_n$

(ii) Sei $x_n \in \overline{U_1(0)}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|T(x_n)\|^p = \|\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right)\|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right)^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - \frac{x_n}{n}|^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + |\frac{x_n}{n}|^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2|x_n|^p < \infty\end{aligned}$$

Mit der Folge (von Folgen) i_n, die an der n. Stelle eine 1 hat, und sonst nur Nullen, ist dann: $T(i_n) \longrightarrow 1$ für $n \longrightarrow \infty$. Dies ist mit Elementen aus $\overline{U_1(0)}$ nicht möglich (Warum?).

Nachtrag:
Geschickter ist es den Folgenraum $M \subset \ell^p$ einzuschränken, so dass für jedes Element aus M gilt, dass nur endlich viele Folgenglieder ungleich null sind. Der Rest folgt flott.

3.Variante mit einem Integraloperator. ■

1.2 Blatt 2

1.2.1 Beispiele

a) $T_1 \in \mathcal{B}(X)$ injektiv mit $\overline{\operatorname{im} T_1} = X$, aber $\operatorname{im} T_1 \neq X$.

Die Eigenschaft bedeutet gerade, dass wir ein unter einem linearen injektiven Operator dichtes Bild haben wollen, dass nicht das ganze Bild umfasst.

1.Variante: Es sei $X := \ell^1$ und

$$T_1(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$$

T_1 ist offenbar linear und wegen $T_1 x = 0 \Rightarrow x = 0$ injektiv. Es ist

$$T_1 n \cdot e_n = e_n \Rightarrow \operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{im} T_1.$$

Wegen Aufgabe 2 ist also $\overline{\operatorname{im} T_1} = \ell^1$. Allerdings ist $\operatorname{im} T_1 \neq \ell^1$, denn zum Beispiel $(x_n) = (\frac{1}{n^2}) \notin \operatorname{im} T_1$. Es ist nämlich $T(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n^2})$, und wegen der Injektivität gibt es keine weiteren Elemente, die das erfüllen. Aber $(\frac{1}{n}) \notin \ell^1$.

2.Variante: Sei $X := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$ mit der Supremumsnorm und

$$T : X \to X, \quad \text{mit } f \in X,\, x \in [0,1],\, T(f)(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Es ist $\operatorname{im} T = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0\}$, und dies liegt dank der höheren Analysis dicht in X, aber ist offenbar nicht ganz X.

b) $T_2 \in \mathcal{B}(X)$ injektiv mit $\overline{\operatorname{im} T} \neq X$.

1. Variante: $X := \ell^1$, $T_2(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$. T erfüllt offenbar alle Bedingungen.

2.Variante: Wie in a) 2.Variante aber wir erweitern X auf die Menge aller Riemann-Integrierbaren Funktionen mit $f(0) = 0$, und bilden geschickt Äquivalenzklassen wie im L^p. Dadurch wird die Injektivität gewährleistet, und das Bild ist dank dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung eine Teilmenge der stetigen Funktionen, welches mit der Supremumsnorm nicht dicht in X liegen kann.

c) $T_3 \in \mathcal{B}(X)$ surjektiv, aber nicht injektiv.

$X := \ell^1$, $T_3(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4 \dots)$. Wegen $T_3 \circ T_2 = id$ ist T_3 surjektiv. Alle anderen Bedingungen sind natürlich auch erfüllt.

1.2.2 ℓ^p und seine "Basis "

Wir definieren den k-ten kanonischen Einheitsvektor $e_k \in \ell^p$ durch $e_k := (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$

Behauptung. Für $p \in [1, \infty)$ gilt

$$\overline{\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}} = \ell^p.$$

Für $p = \infty$ hingegen gilt

$$\overline{\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}} = c_0.$$

Beweis. Wir erinnern uns vorerst an die Definition von span:

$$\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k\in M} a_k e_k : a_k \in \mathbb{K},\, k \in M, M \subseteq \mathbb{N},\, |M| < \infty \right\}$$

$\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also die Menge aller *endlichen* Linearkombinationen von $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nun zum eigentlichen Beweis:

Erstmal für $p \in [1, \infty)$
„$\subseteq$ “:
$\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^p$ und ℓ^p ist abgeschlossen.
„$\supseteq$ “:
Sei $(x_k) \in \ell^p$ d.h

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty \text{ (Cauchy-Kriterium)}$$

Wir definieren $(y_k^n) \in \operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $y_k^n := x_k e_k$ für $k = 1, \dots, n$ und $y_k^n = 0$ für $k > n$.

$$\Rightarrow \|(x_k) - (y_k^n)\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k^n|^p = \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty$$

Das bedeutet: $(y_k^n) \longrightarrow (x_k)$. Da $\overline{\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}}$ abgeschlossen ist, ist $(x_k) \in \overline{\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}}$.
$p = \infty$
"$\subseteq$ ":
Wir zeigen die Abgeschlossenheit von c_0. Dafür sei $((x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (aus Folgen) aus c_0, mit $\lim_{n\to\infty}(x_k^{(n)}) = c$. Zu zeigen ist $c \in c_0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\Rightarrow \left|\left|x_k^{(n)} - c\right|\right|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon,\ \forall n \geq N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \left|x_k^{(n)} - c_k\right| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(n)} = 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} : \forall k \geq M \ \left|x_k^{(n)}\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\Rightarrow |c_k| = \left|c_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right| \leq \left|x_k^{(n)} - c_k\right| + \left|x_k^{(n)}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} c_k = 0 \Rightarrow c \in c_0.$$

"$\supseteq$ ":
Analog zu $p < \infty$. ■

1.2.3 Offene Abbildung und seine Äquivalenzen

Es seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ zwei normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

Behauptung. Es ist äquivalent:

(a) $T(U) \subseteq Y$ ist offen für alle offenen $U \subseteq X$.

(b) Für alle $r > 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $V_\varepsilon(0) \subseteq T(U_r(0))$.

(c) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $V_\varepsilon(0) \subseteq T(U_1(0))$.

Falls T bijektiv ist, dann sind die obigen Aussagen äquivalent dazu, dass die Inverse von T beschränkt ist.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) trivial **(Muahahaha)**.
"(c) $\Rightarrow$ (a)": Es sei $U \subseteq X$ offen, und $y \in T(U)$. Es ist zu zeigen, dass es eine Umgebung um y gibt, die in $T(U)$ enthalten ist. Es gibt ein $x \in U$ mit $Tx = y$. Da U offen ist, ist auch $U - x$ offen und eine Nullumgebung. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon := U_\varepsilon(0) \subseteq U - x \Rightarrow T(U_\varepsilon) = T(\varepsilon U_1) = \varepsilon T(U_1) \supseteq \varepsilon V_\delta(0)$ für ein geeignetes $\delta > 0$. Nun ist

$$\varepsilon V_\delta(0) \subseteq T(U_\varepsilon) \subseteq T(U - x) = T(U) - y \Leftrightarrow T(U) \supseteq y + \varepsilon V_\delta(0) = \varepsilon V_\delta(y)$$

also haben wir eine Umgebung um y gefunden.
Sei nun T bijektiv, und $U \subseteq X$ offen:

$$T \text{ offen } \Leftrightarrow T(U) = {T^{-1}}^{-1}(U) \text{ offen } \Leftrightarrow T^{-1} : Y \to X \text{ stetig} \Leftrightarrow T^{-1} \text{ beschränkt.}$$

■

1.3 Blatt 3

1.3.1 Resolventenmenge, Spektrum

Es seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ Banachräume über den Skalarkörper $\mathbb{K}$.

Behauptung. Es gelten die Aussagen

(a) Die Menge $M := \{T \in \mathcal{B}(X,Y) : T$ bijektiv mit $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)\}$ ist offen in $B(X,Y)$.

(b) Für $T \in \mathcal{B}(X)$ ist die *Resolventenmenge*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ bijektiv mit } (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}$$

offen in $\mathbb{K}$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\rho(T^n) = \rho(T)^n := \{\lambda^n : \lambda \in \rho(T)\}$

(d) Für $T \in \mathcal{B}(X)$ gilt, dass $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| > \|T\|\} \subseteq \rho(T)$

(e) $\sigma(T) := \rho(T)^c = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heißt *Spektrum* von T. Der *Spektralradius* $r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ ist endlich und $r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

(f) Es ist $r(T) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$

Beweis. (a) Es sei $T \in M$, $R := \frac{1}{||T^{-1}||}$ und $S \in U_R(T) \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$

$$\Rightarrow \left|\left|T^{-1}(T-S)\right|\right| \leq \left|\left|T^{-1}\right|\right| \, ||T-S|| < 1.$$

Nach Satz 1.25 (Neumannsche Reihe) ist $I - T^{-1}(T-S)$ invertierbar mit stetiger Inverse. Nun ist $S = T(I - T^{-1}(T-S))$ bijektiv als Verkettung bijektiver Funktionen und hat eine stetige Inverse, da auch die einzelnen Funktionen eine stetige Inverse haben $\Rightarrow S \in M$.

(b) Es sei $\lambda \in \rho(T)$. Nach (a) gibt es ein $r > 0$, so dass für alle $S \in U_r(T)$, $\lambda I - T + S$ bijektiv ist und eine stetige Inverse hat. Für $\mu \in \mathbb{R}, |\mu| < r$ ist $||\mu I|| = |\mu| < r$. Da $\lambda I + \mu I - T = \lambda I - T + \mu I$ bijektiv ist und eine stetige Inverse hat, ist $\lambda + \mu \in \rho(T) \Rightarrow (\lambda - r, \, \lambda + r) \subseteq \rho(T)$.

(c) TODO

(d) Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \|\frac{1}{\lambda}T\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1$. Damit ist $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$ nach Satz 1.25 invertierbar und somit $\lambda \in \rho(T)$. Hieraus folgt insbesondere, dass die Resolventenmenge unbeschränkt ist.

(e) $\sigma(T)$ lässt sich wegen (d) nach oben durch $\|T\|$ beschränken. Damit ist auch $r(T)$ endlich. Da $\rho(T)$ nach (b) offen ist, ist $\sigma(T)$ abgeschlossen. Damit wird auch das Maximum angenommen.

(f) TODO

■

1.3.2 Ein Fredholm-Integraloperator

Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $k \in C([a,b]^2)$ und der *Fredholmoperator* $K : C([a,b]) \to C([a,b])$ gegeben durch

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt.$$

Behauptung. Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) $K \in \mathcal{B}([a,b])$ und $\|K\| \leq \max_{s\in[a,b]} \|k(s,\cdot)\|_{L^1(a,b)}$

(b) Es existiert $c_0 > 0$, so dass für $|\lambda| > c_0$ die *Fredholm'sche Integralgleichung*

$$(\lambda I - K)f = g$$

für jedes $g \in C([a,b])$ eine eindeutige Lösung $f \in C([a,b])$ hat. Weiterhin gilt, dass die Abbildung $f \mapsto g$ stetig ist.

Beweis. (a) Es ist für $f \in C([a,b])$, $\|f\|_\infty < 1$

$$\max_{s\in[a,b]} |Kf(s)| = \max_{s\in[a,b]} \left| \int_a^b k(s,t)f(t)dt \right| \leq \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)f(t)|\, dt$$
$$\leq \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)|\, dt = \max_{s\in[a,b]} ||k(s,\cdot)||_{L^1}\,.$$

Woraus die Behauptung folgt.

(b) Wegen (a) ist K beschränkt. Wählen wir $c_0 := \|K\|$ so ist wegen Aufgabe 1 (d) $(\lambda I - K)$ bijektiv. Damit gibt es insbesondere stets eine eindeutige Lösung. Die Abbildung ist linear, wegen der Beschränktheit also auch stetig.

■

1.3.3 Der "Links-Shift"

Es sei

$$S_l : \ell^p \to \ell^p, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$$

der *Links-Shift.*

Behauptung. Es ist:

$$\|S_l\| = 1, \quad \rho(S_l) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}, \quad r(S_l) = 1$$

Beweis. Für $x \in \ell^p$ ist

$$||S_l(x)||_p = \sqrt[p]{\sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} = ||x||_p \Rightarrow ||S_l|| \leq 1$$

und für $e_2 = (0,1,0,\dots) \Rightarrow \|S_l(e_2)\|_p = \|e_1\|_p = 1 \Rightarrow \|S_l\| \geq 1$. Zusammen ist also $\|S_l\| = 1$.
Wegen Aufgabe 1 d) ist schon mal $\rho(S_l) \supseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$ zeigen wir, dass $\lambda I - S_l$ nicht injektiv sein kann. Es ist nämlich:

$$(\lambda I - S_l)x = 0 \Leftrightarrow \lambda x = S_l x \Leftrightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \Leftrightarrow x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in \ell^p \Leftrightarrow |\lambda| < 1$$

Das heißt $\mathrm{kern}(\lambda I - S_l) \neq \{0\}$ also nicht injektiv. Da $\rho(S_l)$ wegen Aufgabe 1 b) offen ist, ist $\rho(S_l) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Daraus folgt auch direkt:

$$r(S_l) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \rho(T)^c\} = \max\{|\lambda| : |\lambda| \leq 1\} = 1$$

■

1.4 Blatt 4

1.4.1 Norm auf dem Quotientenraum

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $E \subseteq X$ ein Unterraum.

Behauptung. (a) Die Abbildung

$$|||\cdot||| : X/E \to \mathbb{R}, \quad x + E \mapsto \inf_{e\in E} ||x+e||$$

definiert eine Halbnorm auf X/E.

(b) $|||\cdot|||$ definiert eine Norm auf X/E genau dann, wenn E abgeschlossen ist.

(c) $(X/E, |||\cdot|||)$ ist ein Banachraum, wenn X, E vollständig sind.

Beweis. (a) Wir müssen beweisen:

$$(i)\ |||\,0||| = 0, \quad (ii)\ |||\,\alpha x||| = |\alpha|\ |||\,x|||, \quad (iii)\ |||\,x+y||| \leq |||x\,||| + |||\,y|||$$

für $\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in X/E$.

$$(i): \quad |||0||| = \inf_{e\in E} \|0+e\| \leq \|0\| = 0$$

$$(ii): \quad \alpha = 0 \Rightarrow (i),\ \alpha \neq 0 : |||\alpha x||| = \inf_{e\in E} \|\alpha x + e\| = |\alpha| \inf_{e\in E} \|x + \frac{1}{\alpha} e\| \overset{\frac{1}{\alpha}e\in E}{=} |\alpha|\ |||\,x|||$$

$$(iii): \quad |||x+y||| = \inf_{e\in E} \|x+y+e\| \overset{e_1+e_2=e}{=} \inf_{e_1,e_2\in E} \|x+y+e_1+e_2\| \leq$$

$$\inf_{e\in E} \|x+e\| + \inf_{e\in E} \|y+e\| = |||x\,||| + |||\,y|||$$

(b) Angenommen E sei abgeschlossen. Dann müssen wir nur noch $|||x+E||| = 0 \Rightarrow x+E = 0$ zeigen. Dafür erinnern wir uns erstmal, was $0 \in X/E$ bedeutet. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $x + E = y + E \Leftrightarrow x - y \in E$. Es sind also genau die Elemente aus E die Nullelemente, bzw. E ist das Nullelement.
1.Variante
Sei nun $|||x+E||| = 0$. Es gibt also eine Folge (x_n) aus E, mit $x_n \to -x$ für $n \to \infty$, da nur so das Infinum 0 annehmen kann. Da E abgeschlossen ist, ist $-x \in E$ also (nach oben) $x = 0$.

2.Variante
Wie 2. Variante, aber wir wählen eine Folge (x_n) aus $x + E$ mit $x_n \to 0$. Da E abgeschlossen ist, ist auch $x + E$ abgeschlossen, und $0 \in x + E$.

$|||\cdot|||$ definiere nun eine Norm. Sei nun (x_n) eine Folge aus E mit $x_n \to x$. Also

$$0 \leftarrow \inf_{e\in E} ||x - x_n + e|| = \inf_{e\in E} ||x-e||$$

woraus aus der Definitheit schon $x \in E$ folgt.

(c) Diesen Beweis mit *besonderer* Vorsicht genießen

X/E ist wegen der Linearen Algebra schon ein Vektorraum. Wegen b) ist X/E normiert.

Für die Vollständigkeit sei $X/E \ni [x_n] = x_n + E$ eine Cauchyfolge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus

$$\varepsilon > |||x_n - x_m + E||| = \inf_{e\in E} ||x_n - x_m + e||$$

folgt dann, dass es eine Folge $(e_n) \subseteq E$ gibt, so dass $||x_n - x_m + e_n - e_m|| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$ bleibt. Mit $\tilde{x}_n := x_n + e_n$ folgt dann, dass $(\tilde{x}_n)$ eine Cauchyfolge in X ist. Da X vollständig ist, konvergiert $(\tilde{x}_n)$ gegen ein $x \in X$. Nun ist

$$\varepsilon > ||\tilde{x}_n - x|| = ||x_n + e_n - x|| \geq \inf_{e\in E} ||x_n - x + e|| = |||x_n - x + E|||$$

woraus die Konvergenz $[x_n] \to [x]$ folgt, und die Vollständigkeit von X/E gezeigt ist.

∎

1.4.2 Vektorräume mit abzählbaren Basen

Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum mit abzählbar unendlicher Basis $B := \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung. X ist nicht vollständig.

Beweis. Wir nehmen O.B.d.A an, dass $||b_i|| = 1,\ \forall i \in \mathbb{N}$ und definieren $U_n := \text{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

1. U_n ist abgeschlossen
2. $\mathring{U}_n = \emptyset$
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$

1: U_n ist endlichdimensional also abgeschlossen.

2: Per Widerspruch: Angenommen, es gäbe ein $x \in U_n$ und ein $\varepsilon > 0$ so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq U_n$. Dann ist aber

$$v := x - \frac{\varepsilon}{2} b_{n+1} \notin U_n$$

wegen der linearen Unabhängigkeit der b_i, außerdem ist

$$||x - v|| = \left|\left|x - x + \frac{\varepsilon}{2} b_{n+1}\right|\right| = \left|\left|\frac{\varepsilon}{2} b_{n+1}\right|\right| < \varepsilon$$

Also $v \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow U_\varepsilon(x) \nsubseteq U_n$.

3: Offenbar gilt " $\subseteq$ ". " $\supseteq$ ": Für $x \in X$, ist $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i b_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K}$, also $x \in \bigcup_{n=1}^k U_n$

Nun folgt mit dem Baireschen Kategoriensatz 1.35 die Nicht-Vollständigkeit von X. Wäre nämlich X vollständig, müsste wegen 1. und 3. der Satz gelten, und ein U_n hätte kein leeres Inneres, was im Widerspruch zu 2. steht $\lightning$ ■

1.4.3 Kompaktheit in endlichdimensionalen Vektorräumen

$(V, ||\cdot||)$ sei ein endlichdimensionaler Vektorraum über den Körper $\mathbb{K}$ und $K \subseteq V$. Und es gelten die Resultate:

(1.) Je zwei Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent.

(2.) Eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ versehen mit der Euklidischen Norm ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Behauptung.

$$K \text{ kompakt} \Leftrightarrow K \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Beweis. " $\Rightarrow$ ": Kompakte Mengen sind beschränkt und abgeschlossen.
" $\Leftarrow$ ": Da auf dem $\mathbb{K}^n$ je zwei Normen äquivalent sind (1.) und bzgl. einer Normänderung die topologischen Eigeschaften Kompaktheit, Abgeschlossenheit und Beschränktheit nicht geändert werden [1] , gilt (2.) auch für alle anderen Normen. Sei $n := \dim V$, wegen der Linearen Algebra gibt es einen Isomorphismus $\varphi : V \to \mathbb{K}^n$, insbesondere ist φ^{-1} stetig. Da $\varphi(K) \subseteq \mathbb{K}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist, ist es kompakt. Also auch $\varphi^{-1}(\varphi(K)) = K$. ■

[1] Die Übertragung der Abgeschlossenheit und Beschränktheit ergibt sich direkt aus der Definition und Satz 1.18. Die Kompaktheit ergibt sich auch, denn eine beschränkte Folge hat bzgl. der Euklidischen Norm stets einen partiellen Grenzwert, dank der Übetragung der Konvergenz bleibt der partielle Grenzwert erhalten.

1.5 Blatt 5

1.5.1 Beispiel für einen Hilbertraum

Es sei J eine beliebige nichtleere Menge und

$$X := \{f : J \to \mathbb{R} : f(j) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } j \in J, \sum_{j\in J} |f(j)|^2 < \infty\}.$$

Behauptung. (a) Sei $f, g \in X$

$$(f, g) := \sum_{j\in J} f(j)g(j)$$

ist ein Skalarprodukt auf X, mit dem X zu einem Hilbertraum über $\mathbb{R}$ wird.

(b) Die Familie $(e_j)_{j\in J}$ mit $e_j(k) := \delta_{jk}$ für $j, k \in J$ bildet eine Orthonormalbasis von X.

(c) X ist separabel $\Leftrightarrow$ J ist höchstens abzählbar.

Beweis. (a) (1. Variante) Die Eigenschaften des Skalarproduktes ergeben sich sofort. X ist auch ein Vektorraum. Denn sei $N(f) := \{x \in J : f(x) \neq 0\}$, dann ist für $f, g \in X$ $N(f + g) \subseteq N(f) \cup N(g)$ und $N(\alpha f) \subseteq N(f)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, also $f + g \in X$ und $\alpha f \in X$.
Es ist noch die Vollständigkeit zu zeigen. Sei dafür (f_n) eine Cauchyfolge aus X. Da für $j \in J$, $f_n(j)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, existiert der Grenzwert. Wir definieren

$$f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j).$$

Es ist nun für $\varepsilon > 0$ wegen der absoluten Konvergenz der Reihe

$$||f_m - f||^2 = \sum_{j\in J}(f_m(j) - f(j))^2 = \sum_{j\in J}(f_m(j) - \lim_{n\to\infty} f_n(j))^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J}(f_m(j) - f_n(j))^2 < \varepsilon$$

für alle $n > N(\varepsilon)$. Das f nur für höchstens abzählbar viele $j \in J \neq 0$ sein kann, folgt aus seiner Definition. Denn $\cup_{n\in\mathbb{N}} N(f_n)$ ist höchstens abzählbar und gäbe es ein $j_0 \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} N(f_n)$, so dass $f(j_0) \neq 0$, so muss $f_n(j_0)$ auch irgendwann von Null verschieden bleiben, ein Widerspruch zu $j_0 \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} N(f_n)$. Außerdem ist natürlich $\sum_{j\in J} |f(j)|^2 < \infty$. Also ist tatsächlich $f \in X$.

(2. Variante - Skizze) Eine wesentlich elegantere Methode ist es zu zeigen, dass $L^2(J, |\cdot|) = X$ gilt. Die Vollständigkeit und das Skalarprodukt übernimmt dann die Theorie der Höheren Analysis.

(b) Offensichtlich ist $|e_j| = 1$ und $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Sei nun $f \in (\text{span}(e_j)_{j\in J})^\perp$. Dann ist

$$0 = (f, e_k) = \sum_{j\in J} f(j)e_k(j) = f(k) \quad \forall k \in J$$

Woraus $f = 0$ folgt, und gezeigt ist, dass durch $(e_k)_{k\in J}$ ein Orthonormalsystem gegeben ist (da $\{0\} = (\text{span}(e_j)_{j\in J})^\perp$).

(c) "$\Leftarrow$ "Ist J abzählbar, so ist durch (b) eine abzählbare dichte Orthonormalbasis von X gegeben. Durch $\text{span}_{\mathbb{Q}}(e_i)_{i\in J}$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge gegeben ($\nearrow$ $\mathbb{Q}$-Aufspann).

"$\Rightarrow$ "Sei $M := \{x_1, x_2, \dots\}$, so dass $X = \overline{M}$. Es lässt sich eine linear unabhängige Menge $\tilde{M}$ aus M wählen, so dass die lineare Hülle dicht in X liegt. Dank **??** können wir nun die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung auf $\tilde{M}$ anwenden, und wir erhalten eine Orthonormalbasis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nun ist

$$J = \cup_{n\in\mathbb{N}} N(x_n)$$

denn angenommen es gibt ein $j_0 \in J$, so dass $j_0 \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} N(x_n)$, dann ist $x_n(j_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dementsprechend $(x_n, e_{j_0}) = 0$. Dann ist aber $0 \neq e_{j_0} \in (\text{span}(x_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp$, dies ist ein Widerspruch dazu, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis bildet. Also gilt obige Gleichheit. Daraus folgt auch schon, dass J höchstens abzählbar ist.

$\blacksquare$

1.5.2 separable Hilberträume und der ℓ^2

Jeder separable unendlich-dimensionale Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu ℓ^2

Beweis. Es sei H ein separabler unendlich-dimensionaler Hilbertraum. Wir wählen aus der abzählbaren dichten Teilmenge eine Menge an linear unabhängigen Vektoren, dessen lineare Hülle dicht in X liegt. Mit **??** erhalten wir eine Orthonormalbasis $(u_i)_{j\in\mathbb{N}}$ von X Wir betrachten nun die Abbildung

$$J : H \to \ell^2, \quad \sum_{i=1}^{\infty}(x, u_i)u_i \mapsto \sum_{i=1}^{\infty}(x, u_i)e_i = (x, u_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

Wobei e_i natürlich der i-te Einheitsvektor aus ℓ^2 ist. Die Normerhaltung folgt aus der Bessel-Gleichung, und die Surjektivität aus der Fourrierreihe. ■

1.5.3 Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

H sei ein Hilbertraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren in H. Dann existiert ein Orthonormalsystem $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

(a) $\operatorname{span}\{y_k : k = 1, \dots, n\} = \operatorname{span}\{x_k : k = 1, \dots, n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis $\Leftrightarrow$ $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$

Beweis. Aus der linearen Algebra und der endlich-dimensionalen Gram-Schmidt-Orthogonalisierung folgt sofort (a). (b) folgt sofort aus (a). ■

1.6 Blatt 6

1.6.1 Parallelogrammgleichung und Skalarprodukt

$(X, ||\cdot||)$ sei ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammgleichung

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2 \quad \forall x, y \in X$$

gilt.

Behauptung. Durch

$$(x,y) := \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i\,||x+iy||^2 - ||x-iy||^2\right)$$

wird ein Skalarprodukt definiert, welches die Norm $||\cdot||$ induziert.

Beweis. Für diese Aufgabe gibt es auch eine Lösung.
Wir zeigen die Aussage nur für das reelle Skalarprodukt

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right).$$

Die Aussage über das komplexe Skalarprodukt lässt sich analog mit wesentlich mehr Rechenaufwand aber den gleichen Ideen zeigen. Die positive Definitheit ergibt sich sofort aus der Definition, sowie dass das definierte Skalarprodukt die Norm $||\cdot||$ induziert. Genauso flott folgt $(0,x) = 0$, $(-x,y) = -(x,y)$ und $(x,y) = (y,x)$.
Die Aussage $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ ist etwas schwieriger zu zeigen. Es gilt erstmal wegen der Parallelogrammgleichung für $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} ||x+y+z||^2 &= 2\,||x||^2 + 2\,||y+z||^2 - ||x-y-z||^2 \\ ||x+z+y||^2 &= 2\,||x+z||^2 + ||y||^2 - ||x-y+z||^2 \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$||x+y+z||^2 = ||x||^2 + ||y+z||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y-z||^2 + ||x+z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y-z||^2$$

indem wir $-z$ statt z einsetzen, erhalten wir

$$||x+y-z||^2 = ||x||^2 + ||y-z||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2 + ||x-z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} (x+y,z) &= \frac{1}{4}\left(||x+y+z||^2 - ||x+y-z||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(||x||^2 + ||y+z||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y-z||^2 + ||x+z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2 \\ &- ||x||^2 + ||y-z||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2 + ||x-z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2) \\ &= \frac{1}{4}\left(||x+z||^2 - ||x-z||^2\right) + \frac{1}{4}\left(||y+z||^2 - ||y-z||^2\right) \\ &= (x,z) + (y,z) \end{aligned}$$

Woraus die Additivität in beiden Komponenten folgt. Um $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ zu zeigen, zeigen wir die Aussage zuerst für $\alpha \in \mathbb{N}$, dann für $\alpha \in \mathbb{Q}$ und nutzen anschließend, dass $\alpha \mapsto (\alpha x, y)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Dann lässt sich, wenn die Aussage für $\mathbb{Q}$ gilt, der Eindeutigkeitssatz für stetige Funktionen ($\nearrow$ Glossar) anwenden, woraus die Aussage folgt. Wenn $\alpha \in \mathbb{N}$ ist, folgt die Aussage sofort aus der Additivität. Dann gilt das auch schon für $\alpha \in \mathbb{Z}$. Nun ist

$$\mathbb{Q} \ni \alpha = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\frac{p}{q}x, y) = p \cdot \frac{q}{q}(\frac{1}{q}x, y) = \frac{p}{q}(x,y)$$

Womit alles gezeigt ist. ∎

1.6.2 Orthogonales Komplement

$(X,(\cdot,\cdot))$ sei ein Hilbertraum und $M \subseteq X$ ein Unterraum.

Behauptung. Es gilt

$$(i) \quad \left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{M}.$$

(ii) Die Aussage gilt nicht, wenn man die Vollständigkeit weglässt

Beweis zu (i). "$\subseteq$ " Es sei $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Da $\overline{M}$ ein abgeschlossener Unterraum ist und X ein Hilbertraum ist, ist $X = \overline{M} \oplus \overline{M}^{\perp}$. Also $x = v + v_{\perp},\ v \in \overline{M},\ v_{\perp} \in \overline{M}^{\perp}$. Sei nun $y \in M^{\perp}$

$$\Rightarrow 0 = (x, v_{\perp}) = (v + v_{\perp}, v_{\perp}) = (v, v_{\perp}) + (v_{\perp}, v_{\perp}) \Rightarrow v_{\perp} = 0 \Rightarrow x = v \in \overline{M}$$

"$\supseteq$ " Für $x \in \overline{M}$ ist $x_n \to x$ für eine Folge (x_n) aus M. Für $y \in M^{\perp}$ ist nun

$$0 = (y, x_n) \to (y, x) \Rightarrow x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$$

■

Beweis zu (ii).

42

■

1.6.3 Orthogonale Projektion

X sei ein normierter Raum und $P : X \to X$ ein linearer Operator mit $P^2 = P$.

Behauptung. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(a) $X = \operatorname{im} P \oplus \ker P$

(b) Ist P beschränkt, dann sind $\operatorname{im} P,\ \ker P$ abgeschlossen und $||P|| \geq 1$ oder $||P|| = 0$.

(c) Ist X vollständig, so folgt aus der Abgeschlossenheit von $\ker P$ und $\operatorname{im} P$, dass P beschränkt ist.

(d) Sei X ein Hilbertraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

  (i) P ist eine orthogonale Projektion (d.h. $\operatorname{im} P \perp \ker P$)

  (ii) $||P|| \leq 1$

  (iii) $(Px, y) = (x, Py) \quad \forall x, y \in X$

(e) Für jeden abgeschlossenen Unterraum U eines Hilbertraumes existiert eine eindeutige orthogonale Projektion P mit $\operatorname{im} P = U$.

Beweis. (a) Für $x \in X$ ist $x = x - P(x) + P(x)$ und $x - P(x) \in \ker P,\ P(x) \in \operatorname{im} P$ Außerdem ist für $x \in \ker P \cap \operatorname{im} P,\ x = P(x) = 0$.

(b) Es ist $\ker P = P^{-1}(\{0\}$, also ist der Kern wegen der Stetigkeit abgeschlossen. Sei (v_n) eine Folge aus $\operatorname{im} P$ mit $v_n \to v$. Wegen der Stetigkeit ist $v \leftarrow v_n = P(v_n) \to P(v)$ also $v \in \operatorname{im} P$, und damit ist auch das Bild abgeschlossen. Außerdem ist für $P \neq 0$

$$||P|| = \left|\left|P^2\right|\right| \leq ||P||^2 \Leftrightarrow 1 \leq ||P||\,.$$

(c) Wir nutzen den Satz über die Graphenabgeschlossenheit um die Stetigkeit zu zeigen. Sei dazu

$$x_n \to x,\ P(x_n) \to y,$$

nun ist

$$\ker P \ni x_n - P(x_n) \to x - y$$

wegen der Abgeschlossenheit des Kerns gilt also $x - y \in \ker P$ woraus $P(x) = P(y)$ folgt. Da das Bild abgeschlossen ist, gilt $y \in \operatorname{im} P$ woraus sich schlussendlich $P(x) = P(y) = y$ ergibt.

(d) TODO

(e) U ist abgeschlossen, also $X = U \oplus U^{\perp}$ möglich. Wir definieren

$$P_U : X \to X, \quad x = u + u_{\perp} \mapsto u.$$

P_U ist offensichtlich eine Projektion.

■

1.6.4 Unbeschränkter Projektor

Die Vollständigkeit in Aufgabe 3 c) ist notwendig. Denn:

1. Es gibt zwei abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraumes, so dass $M \cap N = \{0\}$ und $M + N$ ist nicht abgeschlossen.
2. Es gibt eine unstetige Projektion P auf einem Skalarproduktraum, so dass im P, ker P abgeschlossen sind.

Beweis. Nein. ■

1.7 Blatt 7

1.7.1 Abgeschlossenes Bild eines beschränkten Operators

X, Y seien Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Es ist äquivalent:

1. im T ist abgeschlossen.
2. $\inf_{x \in X \setminus \ker T} \frac{||Tx||}{\delta(x, \ker T)} > 0$, wobei $\delta(x, \ker T) = \inf_{z \in \ker T} ||x - z||$

Beweis. "$\Rightarrow$ " Es sei $x \in X \setminus \ker T$. Da im T abgeschlossen ist, ist

$$\hat{T} : X/\ker T \to \text{im } T, \quad x + \ker T \mapsto Tx$$

eine bijektive Abbildung zwischen Banachräumen, also wegen des Satzes der offenen Abbildung offen, und damit ist die Inverse $\hat{T}^{-1}$ stetig. Also können wir den Satz .15] nutzen. Es existiert also ein $m > 0$ mit

$$m \, ||| \, x + \ker T ||| \leq \left|\left|\hat{T}x\right|\right| = ||Tx|| \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{||Tx||}{|||x + \ker T|||} = \frac{||Tx||}{\delta(x, \ker T)}$$

gilt. Aber genau das war zu zeigen!
"$\Leftarrow$ " Es gelte

$$\inf_{x \in X \setminus \ker T} \frac{||Tx||}{\delta(x, \ker T)} > 0 \Leftrightarrow \frac{||Tx||}{\delta(x, \ker T)} \geq m \quad \forall x \in X \setminus \ker T \text{ für ein } m > 0.$$

Um nun die Abgeschlossenheit des Bildes zu zeigen, sei (y_n) eine gegen y konvergente Folge aus im T. Es gibt für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $Tx_n = y_n$. Nun ist

$$||Tx_n - Tx_m|| \geq m \, ||| \, x_n - x_m + \ker T|||$$

woraus folgt, dass $(x_n + \ker T)$ eine Cauchyfolge ist, da $\ker T$ abgeschlossen ist, ist wegen **??** $X/\ker T$ ein Banachraum und die Cauchyfolge konvergiert gegen ein $x + \ker T$. Dann ist aber $\hat{T}(x + \ker T) = Tx = y$, wegen der Stetigkeit. Womit nun alles gezeigt ist. ∎

1.7.2 Beispiel eines graphenabgeschlossenen, nicht stetigen Operators

Der Operator

$$T : (C^1([0,1]), ||\cdot||_\infty) \to (C([0,1]), ||\cdot||_\infty), \quad f \mapsto f'$$

ist graphenabgeschlossen, aber nicht stetig.

Beweis. Es sei f_n eine Folge aus $C^1([0,1])$ mit $f_n \to f$ und $f_n' \to g \in C([0,1])$. Da Konvergenz bzgl. $||\cdot||_\infty$ gleichmäßige Kionvergenz bedeutet, sind die Voraussetzungen des Satzes gleichmäßige Konvergenz und Ableitung ($\nearrow$ Glossar) erfüllt. Also gilt tatsächlich $f' = g$.
Für die Nichtstetigkeit von T betrachten wir die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cos(n^2 x), \quad f_n'(x) = n \sin(n^2 x)$$

Es ist $||f_n||_\infty = \frac{1}{n} \to 0$, aber $||f_n'||_\infty = n \to \infty$.

∎

1.7.3 Notwendigkeit der Vollständigkeit im Satz der offenen Abbildung

Im Satz der offenen Abbildung ist die Vollständigkeit notwendig.

Beweis. Trivial ... ∎

1.7.4 Sowas wie die verallgemeinerte Exponentialfunktion ???????

X sei ein Banachraum und $T : [0, \infty) \to \mathcal{B}(X)$ eine Abbildung mit

1. $\forall t, s \geq 0 : T(t + s) = T(t)T(s)$
2. $\forall x \in X : \lim_{t \searrow 0} T(t)x = x$

Es gelten die Eigenschaften

(a) $\forall x \in X : [0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x$ ist stetig.

(b) $T(0) = I_X$

(c) $\exists M \geq 0 \; \exists \omega \in \mathbb{R} \; \forall t \geq 0 : ||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$

1.7.5 Satz von Hellinger-Toeplitz

In einem Hilbertraum X ist ein selbstadjungierter Operator $T : X \to X$ beschränkt.

Beweis. Fast trivial ∎

1.8 Blatt 8

1.8.1 Funktional und Beschränktheit

X sei ein Vektorraum, $x' : X \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional. Es gilt

$$x' \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \ker x' \text{ abgeschlossen}$$

Beweis. Betrachte $X/kerx' := \{\hat{x} := x + N : x \in X\}$ und die lineare Abbildung

$$\hat{H} : X/ker\, x' \to \mathbb{R},\ \hat{H}\hat{x} := x'(x).$$

Weil x' linear ist und $\hat{H}$ injektiv und $\hat{H}(X/ker\, x') = x'(X)$, folgt

$$X/ker\, x \text{ und } x'(X) \text{ isomorph zueinander} \quad \textit{und} \quad \dim(X \ker\, x') = \dim(\mathbb{R}) = 1.$$

Nun ist ein linearer Operator von einem endlich dimensionalen Raum in einen beliebigen normierten Raum stetig. Und damit ist $\hat{H}$ stetig. Nun wird gezeigt, dass daraus auch folgt, dass x' stetig sein muss. Sei $\hat{x}$ die Restklasse von x, dann gilt

$$||x'(x)|| = \left|\left|\hat{H}\hat{x}\right|\right| \leq \left|\left|\hat{H}\right|\right| \cdot ||\hat{x}|| \leq \left|\left|\hat{H}\right|\right| \cdot ||x|| \leq M\, ||x||\,.$$

Mit der in **??** eingeführten Norm auf Quotientenräumen. ■

1.8.2 Hmm

X sei ein normierter Raum, $E \subseteq X$ ein Unterraum und $x \in X$ mit $\delta(x, E) > 0$.
Es existiert ein $x' \in X$ mit $\langle x, x' \rangle = 1$ und $||x'|| = \frac{1}{\delta(x,E)}$.

Beweis. ■

1.8.3 Der Banach-Limes

$S : \ell_\infty \to \ell_\infty$ sei der Links-Shift. Es existiert ein $x' \in \ell'_\infty$ mit

1. $\forall x \in \ell_\infty : \langle Sx, x' \rangle \, \langle x, x' \rangle$
2. $\forall \in \ell_\infty : \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \langle x, x' \rangle \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$

Es ist $||x'|| = 1$

1.8.4 Orthogonalräume oder so

X sei ein normierter Raum und E ein abgeschlossener Unterraum von X.

(a) E' und $X'/E^\perp$ sind isometrisch isomorph.

(b) $E^\perp$ und $(X/E)'$ sind isometrisch isomorph.

Beweis. easy peasy ■

1.9 Blatt 9

1.9.1 ℓ^1 ist nicht reflexiv

ℓ^1 ist nicht reflexiv.

Beweis. ℓ^1 ist nicht reflexiv. ■

1.9.2 Schwache Cauchy-Folgen

Sei X ein normierter Raum.

(a) Schwache Cauchy-Folgen in X sind beschränkt.

(b) Ist X reflexiv, so ist eine schwache Cauchy-Folge in X schwach konvergent.

Beweis. Man nehme eine Portion Vollständigkeitssätze mit einer Prise Banach-Steinhaus, und fertig ist die Laube! ■

1.9.3 Nicht-Existenz von T^*

Es gibt Skalarprodukträume X, Y, und einen Operator $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, so dass $T^* : Y \to X$ nicht existiert.

Beweis. :P ■

1.9.4 Die Adjungierte des Rechts-Shifts

Die Adjungierte des Rechts-Shifts $R : \ell^2 \to \ell^2$ ist der Links-Shift.

Beweis. Nachrechnen! ■

1.9.5 Spektrum der Adjungierten und Dualen

X sei ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Die Spektren von T und T' stimmen überein. In einem Hilbertraum ist das Spektrum von T^* das komplex konjugierte Spektrum von T. (Wobei wir hier komplex konjugierte der Menge als komplex konjugierte der Elemente verstehen.)

1.10 Blatt 10

1.10.1 selbstadjungiert oder so

X sei ein Skalarproduktraum (vollständig ?!) und $A \in \mathcal{B}(X)$.

$$A \text{ selbstadjungiert} \Leftrightarrow \forall x \in X : \langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}$$

Beweis. ■

1.10.2 Advanced Aufgabe 1

X sei ein komplexer Skalarproduktraum und $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(X)$, so dass $\langle x, A_1 x \rangle = \langle x, A_2 x \rangle$ für alle $x \in X$.

(a) $A_1 = A_2$

(b) (a) gilt nicht bei reellen Skalarprodukträumen.

(c) (a) gilt bei reellen Skalarprodukträumen, wenn A_1, A_2 selbstadjungiert sind.

1.10.3 Normale Operatoren

X sei ein Hilbertraum, $A \in \mathcal{B}(X)$

$$A \text{ normal} \Leftrightarrow ||Ax|| = ||A^* x|| \quad \forall x \in X.$$

Wobei A normal ist, wenn $AA^* = A^* A$.

Beweis. zu 78% trivial. ■

1.10.4 Hmm

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Hilbertraum und $p, q \in [1, \infty]$, so dass $1/p + 1/q = 1$. Für $f \in L^p(\Omega, \mu)$ gilt

$$||f||_p = \sup\{\left| \int_\Omega f g \, d\mu \right| : g \in L^q(\Omega, \mu) \text{ mit } ||g||_q \leq 1\}.$$

1.10.5 Der Dualraum von c_0

c_0 sei versehen mit der Maximumsnorm. Der Dualraum von c_0 ist isometrisch isomorph zu ℓ^1.

Beweis. Ähem... ■

1.11 Blatt 11

1.11.1 Der Fredholm-Operator

Sei $k[a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$T : L^p[c,d] \to L^p[a,b], \quad f \mapsto T(f), \text{ mit } T(f)(s) = \int_c^d k(s,t)f(t)dt$$

1.11.2 Spektrumseigenschaften

TODO

Beweis. Leicht zu zeigen. ■

1.11.3 Verallgemeinerter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

1. $f \in W^{1,1}(I)$ dann gilt für fast alle $x_1, x_2 \in I$

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt$$

2. $f, g \in L^1(I)$ und gilt

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} g(s)ds$$

für fast alle $x_1, x_2 \in I$, so folgt, dass $f \in W^{1,1}(I)$ und $f' = g$.

1.12 Blatt 12

1.12.1 Satz von Lax-Milgram

Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $a : X \times X \to \mathbb{K}$ sequilinear. D.h. für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$(a) \quad a(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \cdot a(x, z) + \mu \cdot a(y, z), \qquad (b) \quad a(z, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} \cdot a(z, x) + \overline{\mu} \cdot a(z, y)$$

Außerdem seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < c_1 \leq c_2$ derart, dass für alle $x, y \in X$ gilt:

(i) $|a(x, y)| \leq c_2 \, ||x|| \, ||y||$

(ii) $\Re \, a(x, x) \geq c_1 \, ||x||^2$.

Dann existiert genau eine Abbildung $A : X \to X$ mit

$$a(y, x) = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x, y \in X$$

Des Weiteren ist $A \in \mathcal{B}(X)$ invertierbar mit

$$||A|| \leq c_2 \text{ und } \left|\left|A^{-1}\right|\right| \leq \frac{1}{c_1}.$$

1.12.2 Ein elliptisches Randwertproblem

Diese Aufgabe wird boykottiert.

1.12.3 Zeug für die Schwache Ableitung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^\infty(\Omega)$, so dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, dass

$$\int_\Omega f \varphi d\lambda^n = 0.$$

Dann gilt $f = 0$ (fü) .

1.12.4 Hmm

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir betrachten die Abbildung

$$J_1 : L^\infty(\Omega, \mu) \to L^1(\Omega, \mu)' \quad g \mapsto J_1(g), \quad J_1(g)(f) = \int_\Omega f g d\mu.$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. J_1 ist normerhaltend,
2. J_1 ist injektiv,
3. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist semi-endlich.

1.13 Blatt 13

1.13.1 Kompakter Operator - Eigenschaften

Sei X ein Banachraum und $K \in K(X)$. Es gilt:

1. K bijektiv $\Rightarrow X$ ist endlichdimensional.
2. X unendlichdimensional $\Rightarrow d(I, K(X)) = \inf\{||I - K|| : K \in K(X)\} = 1$

1.13.2 Abschätzung der Norm kompakter Operatoren

X, Y, Z seien Banachräume und $T \in K(X, Y)$. $J \in \mathcal{B}(Y, Z)$ sei injektiv. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante C_ε, so dass

$$||Tx|| \leq \varepsilon \, ||x|| + C_\varepsilon \, ||JTx|| \, , \qquad x \in X.$$

1.13.3 Kompakter Operator - Eigenschaft

Sei $p \in [1, \infty]$, $z \in \ell^\infty$ und $T_z : \ell^p \to \ell^p$ sei durch

$$(T_z x)(n) = z(n)x(n)$$

$z(n) = z_n$??

Dann gilt: T_z ist kompakt $\Leftrightarrow z \in c_0$

1.13.4 Beispiele kompakter Operatoren

1. $C_1([0, 1])$ sei mit der Norm $||f|| := ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ versehen. Die Einbettung

   $$J : (C^1([0, 1]), ||\cdot||) \to (C([0, 1]), ||\cdot||_\infty), \quad f \mapsto f'$$

   ist kompakt
2. $k : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig. Der Integraloperator $T_k : C([0, 1]) \to C([0, 1])$,

   $$(T_k x)(s) = \int_0^s k(s, t)x(t)dt$$

   ist wohldefiniert und kompakt.