Kapitel 1

Arbeit im Gange - Grundlagen

1.1 is' klar 'ne?

Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, \|\cdot\|_X)$)
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$. Wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge: (x_n), $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

Definition 1.1 (Halbnorm, Seminorm)**.** Sei X ein $\mathbb{K} - Vektorraum$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung $|||\cdot||| : X \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $|||x||| \geq 0$

(ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$

(iii) $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm efüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

Bemerkung 1.2. (a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$ bildet einen Unterraum von X.

(b) X/N ist ein normierter Raum über(?) $\|x + N\| := |||x|||$

(c) X ist ein vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow$ X/N ist ein Banachraum

Beispiel 1.3 (wichtige Vektorräume)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) $p \in [1, \infty)$ $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar}, \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty\}$ ist ein seminormierter Raum mit $|||f|||_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.
$L^p(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum ($\nearrow$ Ana III).

(b) $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar und essentiell beschränkt}\}$ ist ebenfalls seminormiert mit $|||f|||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$.
$L^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

(c) $p \in [1, \infty]$, $|\cdot|$ sei das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und der Maßraum sei gegeben durch $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$.
$\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$ heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

(d) $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ messbar, λ^n Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$ heißt Lebesgue-Raum.

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $BC(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ versehen mit der Suprenumsnorm ist ein Banachraum.

Bemerkung 1.4 (diverse Fakten). Seien $p, q, r \in [1, \infty)$

(a) $L^p(\Omega, \mu)$ ist ein Banachraum, $L^2(\Omega, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit $(f, g)_2 := \int_\Omega f\overline{g}d\mu$

(b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, $p \geq r \Rightarrow \; L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$

(c) Wenn $p \geq r \Rightarrow \; L^r(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$

(d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu) \;\Rightarrow\; fg \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für $p = 1, q = \infty$ wobei hier $\frac{1}{\infty} := 0$.

(e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $C_0^k := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \,|\, \mathrm{supp} f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, \infty)$. Dies gilt nicht für $p = \infty$, da $f = \mathrm{const}$ oder $f = \mathit{sign}$ sich nicht durch Funktionen aus C_0^k approximieren lassen.

(f) $BC(\Omega)$ ist abgeschlossen in $L^\infty(\Omega)$, aber nicht in $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$, dennoch ist $BC(\Omega)$ in beiden Fällen ein Unterraum.

1.2 Lineare Operatoren

Definition 1.5 (linearer Operator)**.** Seien X, Y $\mathbb{K}-$Vektorräume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\, x, y \in X$$

wir schreiben auch Tx statt $T(x)$.
Wenn $Y = \mathbb{K}$ dann heißt ein linearer Operator $T : X \to \mathbb{K}$ *Funktional*.
Wenn X, Y normierte $\mathbb{K}-$Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator T *beschränkt*, wenn $T(U_1(0)) \subseteq Y$ beschränkt ist. In Quantoren lautet diese Aussage

$$\exists M \geq 0, \text{ so dass } \forall x \in X : \; \|Tx\|_Y \leq M \text{ mit } \|x\|_X < 1$$

Bemerkung. Die Bilder beschränkter Mengen M unter einem beschränkten linearen Operator T sind beschränkt. Denn existiert ein $R > 0$ mit $M \subseteq U_R(0)$, sodass

$$T(M) \subseteq T(U_R(0)) = T(R \cdot U_1(0)) = R \cdot T(U_1(0))$$

und dies ist beschränkt.

Beispiel 1.6. a) $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$, $\{T : X \to Y : T \text{ linearer Operator}\} = \mathbb{K}^{m \times n}$. $T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ist beschränkt. Denn:

$$\|T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |t_{ij}| < \infty, \; t_{ij} \text{ sind die Einträge der Matrix } T.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist T beschränkt.

b) $T : \mathrm{L}^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$, $Tf := \int_\Omega f d\mu$. Es gilt $|Tf| = |\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu = \|f\|_1$. Also ist $|Tf| < 1 \, \forall f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mu) : \|f\|_1 < 1$ und damit ist T beschränkt.

Satz 1.7. *Seien X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) T beschränkt,

(ii) T *ist lipschitz stetig,*

(iii) T *ist gleichmäßig stetig,*

(iv) T *ist stetig,*

(v) T *stetig in* 0,

(vi) $\exists x \in X : T$ *stetig in* x.

Beweis: "$(i) \Rightarrow (ii)$" : Sei $M > 0$, so dass $\|Tx\|_Y \leq M \ \forall x \in U_1(0)$. Es gilt $T0 = 0$. Weiterhin gilt für $x \in X \backslash \{0\}$:

$$\|Tx\|_Y = \| \, 2 \, \|x\|_X \, T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) \| = 2 \, \|x\|_X \|T\underbrace{\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right)}_{\in U_1(0)}\|_Y \leq 2M\|x\|_X.$$

Also gilt $\|Tx\|_Y \leq 2M\|x\|_X \ \forall x \in \|x\|_X$ und daraus folgt die Lipschitz Stetigkeit wegen

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq 2M\|x_1 - x_2\|_X \ \forall x_1, x_2 \in X$$

"$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$" : Der Beweis dieser Implikationskette ist Gegenstand der Grundvorlesungen [1].

"$(vi) \Rightarrow (v)$" : Sei $x \in X$, so dass T stetig in x ist. Sei (x_n) Nullfolge in X

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x + x_n) = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(x + x_n) = Tx \overset{\text{stetig in 0}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0 = T\,0$$

"$(v) \Rightarrow (i)$" : Beweis durch Widerspruch: Angenommen T ist unbeschränkt $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in U_1(0)$, so dass $\|Tx_n\|_Y \geq n$ ($\Rightarrow x_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$). Dann gilt $\frac{x_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, aber $\|T\frac{x_n}{n}\|_Y = \frac{1}{n}\|Tx_n\|_Y \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$ Das hieße aber T ist unstetig in 0. ■

Bemerkung 1.8. a) $\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \to Y : T \text{ beschränkt}\}$

b) $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ beides sind $\mathbb{K} - VR$.

c) $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ topologischer Dualraum von X.

Bemerkung 1.9. c) $Ker\,T$, $Im\,T$ sind UVR.

d) $(i) - (vi)$ äquivalent zu (vii): Jede beschränkte Menge wird auf eine beschränkte Menge abgebildet.

e) Es gibt beschränkte lineare Operatoren, so dass $Im\,T$ nicht abgeschlossen $\nearrow$ Übung

f) $Ker\ T$ abgeschlossen $\forall\, T \in \mathcal{B}(X, Y)$, da T stetig und $Ker T = T^{-1}(\{0\})$, wobei $\{0\}$ abgeschlossen in Y.

Satz 1.10 (Operatornormen). *X, Y normierte Räume. $\mathcal{B}(X, Y)$ normierter Raum mit folgendener Norm*

$$\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y.$$

Beweis: (*Positivität:*) $\|0\| = 0$. Sei $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \ \forall \ x \in U_1(0)$. Sei $x \in X$ beliebig. $\Rightarrow Tx = 2\|x\|_X \ T\left(\frac{x}{2\|x\|_X}\right) = 0 \Rightarrow T = 0$.

(*Homogenität:*) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann $\|\lambda T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(\lambda T)x\|_Y = |\lambda| \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\| = |\lambda|\|T\|$.

(*Dreiecksungleichug:*) Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann $\|T_1 + T_2\| = \sup\limits_{x \in U_1(0)} (\|T_1x + T_2x\|_Y) \leq \sup\limits_{x \in U_1(0)} (\|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y) \leq \sup\limits_{x_1, x_2 \in U_1(0)} (\|T_1x_1\|_Y + \|T_2x_2\|_Y) \leq \sup\limits_{x_1 \in U_1(0)} \|T_1x_1\|_Y + \sup\limits_{x_2 \in U_1(0)} \|T_1x_2\|_Y = \|T_1\| + \|T_2\|$ ■

[1]Damit meinen wir stets Sätze, die in Analysis/LA I,II oder Höhere Analysis bewiesen wurden.

Bemerkung 1.11. Es gilt $\|T\| = \sup\limits_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{x\in\partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$ ($\nearrow$ Ü1, A2).

Beweis: Wir zeigen

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} =: M_3 \;\geq\; \|T\| \;\geq\; M_1 := \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$$

und

$$M_3 \geq M_1 \geq M_2 \geq M_3 \quad \text{mit } M_2 := \sup_{x\in\partial U_1(0)} \|Tx\|_Y$$

Wobei $M_1 \geq M_2$ gilt, da wir das Supremum über eine größere Menge bilden.

"$M_3 \geq \|T\| \geq M_1$:" $\forall\, \|x\| = 1$ und $U_1(0) \ni x_n = x - \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\|Tx_n\| = \|T(x - \frac{1}{n})\| = \|Tx - T\frac{1}{n}\| \to \|Tx - T0\| = \|Tx\|$$

Damit hat man formal gezeigt, dass man für jeden Vektor in $\overline{U_1(0)}$ bezüglich den man ein Supremum bilden kann, auch Folgen in $U_1(0)$ findet. Kurz: $\|T\| \geq M_1$. Weiterhin gilt $\|Tx\| \leq M_3 \cdot \|x\|\ \forall x \in X$, damit folgt

$$\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\|<1} (M_3 \cdot \|x\|) = M_3 \sup_{\|x\|<1} \|x\| = M_3$$

.

"$M_3 \geq M_1$:" Sei $\|x\| \leq 1$. Dann gilt $\|Tx\| \leq \|Tx\|/\|x\|$. Also:

$$M_1 = \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\| \leq \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} (\|Tx\|/\|x\|) \leq M_3$$

"$M_2 \geq M_3$:" Einfaches Umformung:

$$M_3 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \|T\frac{x}{\|x\|}\| \leq M_2$$

■

Satz 1.12. *X normierter Raum, Y Banachraum. Dann ist $\mathcal{B}(X,Y)$ Banachraum.*

Beweis: Sei (T_n) CF in $\mathcal{B}(X,Y)$, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Also $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\|\ \forall x \in X$. Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von Y, dass $(T_n x)$ in Y für alle $x \in X$ konvergiert. Wir setzen den Grenzwert auf $T : X \to Y$, $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Die so definierte Abbildung, also dieser Grenzwert, erfüllt folgende Eigenschaften:

a) T ist ein linearer Operator.

b) T ist beschränkt.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ (also Normkonvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz)

Zu a): $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda T_n x_1 + \mu T_n x_2) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} T_n x_1 + \mu \lim\limits_{n\to\infty} T_n x_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2$

zu b): Wegen $\|T_n - T_m\| \geq (\|T_n\| - \|T_m\|)$ gilt $\|T_n\|$ ist CF in $\mathbb{R}$, also beschränkt: $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Für $x \in U_1(0)$ gilt $\|Tx\|_Y = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\| \cdot \|x\|_X \leq M \cdot \|x\|_X \leq M$. (vgl. Def 1.5, " $\Leftrightarrow$ ")

zu c): Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $x \in U_1(0)$ gilt somit

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|T - T_n\| = \sup_{x\in U_1(0)} \|(T - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \forall n \geq N$$

Also ist $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und aufgrund der Beliebigkeit der CF, folgt die Vollständigkeit. ■

Korollar 1.13. *X normierter Raum $\Rightarrow$ X' Banachraum.*

Bemerkung 1.14. a) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y,Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{B}(X,Z)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ (gilt wegen $\|S(Tx)\|_Z \leq \|S\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X \leq M\|x\|_X\ \forall x \in X$ und der Linearität von ST.)

b) $id \in \mathcal{B}(X,X)$, $\|id\| = 1$.

c) Aus punktweiser Konvergenz $T_n x \to Tx$ folgt i.A. <u>nicht</u> $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$).

Bsp: $X = \ell^p, p \in [1,\infty), T_n : \ell^p \to \ell^p$, $T_n(x_k) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ wobei $(x_k) = (x_1, \dots, x_n, \dots)$. Man kann zeigen, dass $T_n \in \mathcal{B}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ ($\nearrow$ Übung). Sei $(x_k) \in \ell^p, \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p)^{1\backslash p} < \epsilon$. $\|T_n(x_k) - x_n\|_X = (\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p)^{1\backslash p}\ \forall n \geq N$. Also $\forall x \in X\ \|T_n - x\|_X \to 0\ (n \to \infty)$. Frage: $\|T_n - T\|_X \to 0$? Nein! Sei $(x_k^n) = (0, \dots, 0, \overset{\text{n+1 Stelle}}{1}, 0, \dots)$, $\|T_n(x_k^n) - x\|_X = \|(0, \dots, 0, -1, 0, \dots)\|)_Y = 1$ $\|T_n - T\| \overset{Def}{=} \sup\limits_{x \in U_1(0)} \|(T_n - T)x\|_X \geq \|(T_n - T)(\frac{1}{2}(x_k^n)\| = \frac{1}{2} \cdot 1\ (T = idx)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|T_n - T\| \not\to 0\ (n \to \infty)$

d) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und T bijektiv. Dann ist T^{-1} i.A. <u>nicht beschränkt</u>.

Bsp. $X \in C[0,1], Y = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$ mit $\|x\|_X = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$ und $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y$ und $T : X \to Y$, $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)ds$.

- $T^{-1} = S : Y \to X, Sy = y'$. (Zeige $ST = id_x$ und $TS = id_Y$)
- $T^{-1} \notin \mathcal{B}(Y,X)$ (Sei $y_n(t) = t^n \in Y$, $(T^{-1}y_n)(t) = n \cdot t^{n-1} \Rightarrow \|y_n\|_Y = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\|T^{-1}y\|_X = n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T^{-1}$ kann nicht beschränkt sein. ($\|T^{-1}\frac{1}{2}y_n\|_X = \frac{1}{2} \cdot n$ mit $\|\frac{1}{2}y_n\| = \frac{1}{2}$)

Bem: Y ist nicht vollständig.

Satz 1.15. *Sei X, Y normierte $\mathbb{K} - VR$, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist injektiv und $T^{-1} \in \mathcal{B}(im(T), X)$ normierter UVR von Y.

(ii) $\exists\, m > 0 : \|Tx\|_Y \geq m\|x\|_X\ \forall x \in X$.

Beweis: "$(i) \Rightarrow (ii)$": $\exists\, M > 0, \|T^{-1}y\| \leq M\|y\|\ \forall y \in imT$. Sei $x \in X\ \exists y \in imT : x = T^{-1}y \Rightarrow \|x\|_Y \leq M\|Tx\|_Y \Rightarrow \|Tx\|_Y \geq \frac{1}{M}\|x\|_X = m\|x\|_X$
"$(ii) \Rightarrow (i)$": Sei $x \in X : Tx = 0$. Aus $\|Tx\| \geq m\|x\|$ folgt $x = 0$ und damit ist $Tinjektiv$. Sei $y \in imT\ \exists x \in X : Tx = y$ und $T^{-1}y = x \overset{(ii)}{\Rightarrow} \|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{m}\|Tx\|_Y = \frac{1}{m}\|y\|_Y$, also $\exists\, M = \frac{1}{m}$, $\|T^{-1}y\|_X \leq M\|y\|_Y\ \forall v \in imT \Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{B}(imT, X)$ ∎

Die Negation dieser Aussage halten wir explizit fest mit folgendem

Korollar 1.16. *$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ (X, Y normierte $\mathbb{K} - VR$. Dann sind äquivalent:*

(i) T besitzt <u>keine</u> stetige Inverser $T^{-1} : imT \to X$.

(ii) $\exists$ Folge (x_n) in X, so dass $\|x_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tx_n\| = 0$

Definition 1.17. $X - \mathbb{K} - VR$ mit Norm $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Dann heißt $\|\cdot\|_1$

(a) stärker als $\|\cdot\|_2$, falls gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2$

(b) schwächer als $\|\cdot\|_2$, falls $\|\cdot\|_2$ stärker ist als $\|\cdot\|_1$.

(c) äquivalent falls $\|\cdot\|_1$ stärker und schwächer ist als $\|\cdot\|_2$

Satz 1.18. *X $\mathbb{K} - VR$ mit Norm $\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$. Dann gilt*

(a) $\|\cdot\|_1$ ist stärker als $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists\, M > 0 : \|x\|_2 \leq M\|x\|_1\ \forall x \in X$

(b) $\|\cdot\|_1$ ist schwächer als $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists\, M > 0 : \|x\|_1 \leq M\|x\|_2\ \forall x \in X$

(c) $\|\cdot\|_1$ *ist äquivalent zu* $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists\, m, M > 0 : m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \; \forall x \in X$

Beweis: zu (a): $\Rightarrow id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ ist stetig wegen Vor. $\overset{S.1.15}{\Rightarrow}$ und weil id linear, id beschränkt, $id \in \mathcal{B}((X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ d.h. $\exists M > 0 : \|id(X)\|_2 \leq M\|x\|_1 \; \forall x \in X$.
$\Leftarrow$ Wissen $\exists M > 0 : \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \; \forall x \in X$. Sei $\|x_n - x\|_1 \to 0 \Rightarrow \|x_n - x\|_2 \leq M\|x_n - x\|_1 \to 0 \; (n \to \infty) \Rightarrow \|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2$. ∎

Definition 1.19. Zwei normierte $\mathbb{K}$-VR X, Y heißen *topologisch isomorph*, falls es ein Isomorphismus $T : X \to Y$ mit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Dann heißt T topologischer Isomorphismus.

Satz 1.20. *X, Y topologisch isomorph* $\Leftrightarrow \exists m, M > 0 : T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *und injektiv* $: m\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \; \forall x \in X$

Beweis: 'Klar' wegen Satz 1.17 und Satz 1.15. ∎

Bemerkung 1.21.
1. Falls, $m = M = 1$, dann nenn wir T Isometrie.
2. Falls $\dim X = \dim Y = n \in \mathbb{N}$: X, Y topologisch isomorph und topologischer Isomorphismus $=$ lineare Bijektion.

Satz 1.22 (Fortsetzung von stetigen Operatoren)**.** *X, Y normierte $\mathbb{K} - VR$, Y ein Banachraum, $Z \subseteq X$, Z dichter UVR. $T \in \mathcal{B}(Z, Y)$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$, so dass $T|_Z = T$.*

Beweis: a) Zeige: $\tilde{T}$ ist wohldefiniert. Da T beschränkt ist, ist (Tz_n) Cauchyfolge in $Y \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} Tz_n$ existiert. Seien $(V_n), (Z_n)$ Folgen in Z mit $\|V_n - x\| \to 0, \|Z_n - x\| \to 0$. Dann gilt:
$$\|TV_n - TZ_n\| \overset{T\ beschr.}{\leq} \|T\| \cdots \|V_n - Z_n\| \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} TV_n = \lim_{n\to\infty} TZ_n.$$
b) Zeige: $\tilde{T}$ ist linear und beschränkt. (Betrachte Summen von Limiten, Limes der Summen, etc.; insbesondere ist $T : X \to Y$ immer beschränkt, wenn $\dim(X) < \infty$)
c) Zeige: $\tilde{T}|_Z = T$ und $\tilde{T}$ ist eindeutig. Sei $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ mit $\tilde{T}|_Z = T$ und $x \in X$. Dann
$$\exists (Z_n) \text{ in } Z \text{ mit } Z_n \to x (\text{da } Z \text{ dicht in } X) \overset{T\ beschr.}{\Rightarrow} \tilde{T}x = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}Z_n = \lim_{n\to\infty} TZ_n.$$
d) Zeige: $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.
em " $\leq$ " Sei $x \in U_1(0) \subset X \Rightarrow \exists (Z_n)$ in Z mit $Z_n \to x$ und damit:
$$\|\tilde{T}\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|\tilde{T}x\| = \lim_{n\to\infty} \|\tilde{T}Z_n\| = \lim_{n\to\infty} \|TZ_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\|\|Z_n\| = \|T\| \lim_{n\to\infty} \|Z_n\| \leq \|T\|.$$
" $\geq$ " Da $Z \subset X$ gilt auch $\sup\limits_{z \in Z} \|Tz\| \leq \sup\limits_{x \in X} \|Tx\|$. ∎

Satz 1.23. *Ist T normerhaltend (in $\mathbb{R}^n$ die unitären Matrizen $\|Tx\| = \|x\|$), so ist $\tilde{T}$ ebenfalls normerhaltend.*

Beweis: TODO: Kurze Begründung. Eigentlich Korollar? ∎

Beispiel 1.24 (Konstruktion eines unbeschränkten Funktionals)**.** Sei $X = \ell^1$ (Raum der absolut konvergenten Folgen)
Betrachte: $x_0 = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots) \in \ell^1$, $\|x_0\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^2}| = \frac{\pi^2}{6}$,
Einheitsvektor $e_k = (\delta_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$.
↗ Erzeugnis: <u>endliche</u> linear Kombination der Einheitsvektoren $\Rightarrow \text{span}\{e_k\}_{k_\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots, 0, \dots)\}$ (Folgen, die irgendwann zu 0 werden.)
Die Familie $B := (x_0, e_1, e_2, e_3, \dots)$ ist linear unabhängig. $\Rightarrow B_i$ lässt sich zu Basis $B = (b_i)_{i \in I}$ mit $\mathbb{N}_0 \subseteq I$ und $b_0 = x_0, b_i = e_i \; \forall i \in \mathbb{N}$ erweitern (überabzählbar).
Sei $x \in X = \ell^1 \Rightarrow \exists$ eindeutige Darstellung $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ endlich}} \alpha_n e_n + \sum_{\substack{i \in I \setminus N_0 \\ endlich}} \alpha_i b_i$.
Definiere das Funktional: $f : \ell^1 \to \mathbb{K}\mathbb{N}?$ mit $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ endlich}} \alpha_n e_n + \sum_{\substack{i \in I \setminus N_0 \\ endlich}} \alpha_i b_i \mapsto \alpha_0$
Wir zeigen: $Kerf$ nicht abeschlossen.
Betrachte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \Rightarrow x_n \in Kerf \; \forall n \in \mathbb{N}$, da $x_n \in span\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Es gilt jedoch $x_n \to x_0 \notin Kerf$, da $f(x_0) = 1$. □

Nun versuchen wir mit Erfolgt einer waghalsige Verallgemeinerung der geometrischen Reihe im Reellen für Operatoren und Banachräume. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ $\forall q \in \mathbb{C}$ mit $\|q\| < 1$

Satz 1.25 (Neumananische Reihe)**.** *X Banachraum. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann sind äquivalent:*

i) Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} T^k = I_X + T^1 + T^2 + \ldots$ ist konvergent bzgl. der Operatornorm.

ii) $\lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$

iii) $\exists N \in \mathbb{N} : \|T^N\| < 1$

iv) $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1.$

In diesem Fall besitzt $(I - T)$ eine beschränkte Inverse. Diese erfüllt $(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

Beweis: "*i) ⇒ ii) ⇒ iii)*" : klaro

"*iii) ⇒ iv)*" : Sei $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}, k \in \{q_0, \ldots, N-1\}$, so dass $n = \ell \cdot N + k$ Dann folgt

$$\ell \leq \frac{n}{N} \Rightarrow \|T^n\| = \|(T^n)^\ell T^k\| \leq \|T^N\|^\ell \cdot \|T^k\|.$$

Sei $M := \max\{1, \|T\|, \|T^2\|, \ldots, \|T^{N-1}\|\}$. Dann gilt $\|T^n\| \leq M\|T^N\|^\ell$ und damit folgt

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} = \sqrt[n]{\|T^N\|^\ell}\,\sqrt[n]{M} \leq \sqrt[n]{\|T^N\|^{\frac{n}{N}}} \cdot \sqrt[n]{M} = \underbrace{\sqrt[N]{\|T^N\|}}_{<1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{M}}_{\substack{\to 1 \\ \text{für } n\to\infty}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\|T^N\|}}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ (↗ Wurzelkriterium)

"*iv) ⇒ i)*" : $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1),\ N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} \leq q \;\forall\; n \geq N \Rightarrow \|T^n\| \leq q^n \;\forall\; n \geq N$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $N_1 \geq N$, so dass $q^{n+1} + \cdots + q^m = q^{n+1}\frac{1-q^{m-1}}{1-q} < \varepsilon \;\; \forall n, m \geq N_1$.

$$\text{Für } S_n := \sum_{k=0}^{\infty} T^k \text{ gilt also } : \|S_n - S_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} T^k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|T^k\| \leq q^{m+1} + \cdots + q^n < \varepsilon.$$

Also ist (S_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(X)$. Da X^* vollständig ist, ist auch $\mathcal{B}(X)$ vollständig, also konvergiert die Neumannsche Reihe.

Noch zu zeigen, wenn $(i) - (iv)$ gilt $(I-T) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} T^k = (\sum_{k=0}^{\infty} T^k) \cdot (I-T) = I$. Es gilt:

$$(I-T) \cdot S_n = (I-T) \cdot (\sum_{k=0}^{n} T^k) = \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=1}^{n+1} T^k = I - T^{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} I_K$$

Analog andersherum (↗ linksinvers ≠ rechtsinvers in unendlichdimensionalen Räumen, da inj. $\not\Leftrightarrow$ surj.) ■

Bemerkung 1.26. 1. Wenn $\|T\| < 1$, dann konvergiert die Neumannsche Reihe.

2. $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ ist nur hinreichend für Invertierbarkeit von $I - T$, wie das Gegenbeispiel $T = 2I$ zeigt.

Beispiel 1.27 (Fredholmsche Integralgleichung)**.** Sei $k \in C([a,b]^2)$. Der Fredholmsche Integraloperator

$$K : C([a,b]) \to C([a,b]),\ (Kx)(s) := \int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

ist stetig, wenn x stetig ist. Die Fredholmsche Integralgleichung lautet:

$$(I-K)x = y, \quad y \in C([a,b]).$$

Und es gilt: $\|Kx\|_\infty \leq \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|dt \cdot \|x\|_\infty$.

Wenn nun $\max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|dt < 1$, dann gilt für alle $y \in C([a,b])$: Die Fredholmsche Integralgleichung $(I-K)x = y$ hat genau eine Lösung $x \in C([a,b])$. Diese hängt stetig von $y \in C[a,b]$ ab.

1.3 Metrische und topologische Räume, Satz von Baire

Bemerkung 1.28 (Erinnerung). - (X, d) metrischer Raum mit Metrik d.

- Kompaktheit, Satz von Bolzano-Weierstraß

Lemma 1.29. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt die Vierecksungleichung:*

$$|d(x,y) - d(x_1,y_1)| \leq d(x,x_1) + d(y,y_1) \quad \forall x, x_1, y, y_1 \in X$$

Beweis: $d(x_1,y_1) \leq d(x_1,x) + d(x,y_1) \leq d(x_1,x) + d(x,y) + d(y,y_1)$
$\Rightarrow d(x_1,y_1) - d(x,y) \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$. Analog: $d(x,y) - d(x_1,y_1) \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$
$\Rightarrow |d(x,y) - d(x_1,y_1)| \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$ ■

Bemerkung 1.30. Rekapitulieren Sie folgende Begriffe: $U_r(x)$ Kugel mit Radius r, $\overline{M}$ Abschluss, $\mathring{M}$ Innere, ∂M Rand, Kompakt, offene Überdeckung.

Definition 1.31. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(a) *abstandserhaltend* falls $d_X(x,y) = d_Y(f(x), f(y))$

(b) *Isometrie* falls abstandserhaltend und surjektiv.

Eine abstandserhaltende Abbildung heißt auch *Einbettung*. Eine Einbettung heißt *dicht*, falls $f(X)$ dicht in Y ist.
Notation: Wir schreiben $X \subseteq Y$, falls X in Y eingebettet ist.

Satz 1.32. *Jeder metrische Raum (X, d) lässt sich in einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ dicht einbetten. $(\hat{X}, \hat{d})$ heißt Vervollständigung von (X, d).*

Beweis: (1) Konstruktion von $\hat{X}$
Sei $CF(X)$ die Menge aller Cauchyfolgen in X. Seien $\overline{x} := (x_n),\ \overline{y} := (y_n) \in CF(X)$.
Wir betrachten den „Abstand“

$$d(\overline{x}, \overline{y}) := \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n),$$

der dank Lemma 1.29 wohldefiniert ist, und die Relation $\sim \subseteq CF(X) \times CF(X)$ mit

$$\overline{x} \sim \overline{y} :\Leftrightarrow d(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

„ $\sim$ “ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation und unterteilt $CF(X)$ in Äquivalenzklassen. Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse des Repräsentanten $\overline{x}$ und $\hat{X}$ die Menge aller Äquivalenzklassen.
Für $\overline{x}, \overline{x}' \in [x] \in \hat{X},\ \overline{y}, \overline{y}' \in [y] \in \hat{X}$ gilt:

$$0 = d(\overline{x}, \overline{x}') = \lim_{n\to\infty} d_X((x_n), (x_n'))$$
$$0 = d(\overline{y}, \overline{y}') = \lim_{n\to\infty} d_X((y_n), (y_n')).$$

Wegen $d_x(x_n, y_n') \leq d_X(x_n', x_n') + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y_n')$
$d_x(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x_n') + d_X(x_n', y_n') + d_X(y_n', y_n)$ ist

$$\lim_{n\to\infty} d_X(x_n', y_n') \leq \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d_X(x_n', y_n') \Rightarrow d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{x}', \overline{y}')$$

und wir können wohldefinieren: $\hat{d}([x],[y]) := d(\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow \hat{d}$ ist Metrik auf $\hat{X}$.

(2) Konstruktion einer dichten Einbettung $f : X \to \hat{X}$
Für $x \in X$ sei $f(x) := [(x, x, x, \dots)]$.
Es gilt für $x, y \in X$: $\hat{d}(f(x), f(y)) = \lim_{n\to\infty} d_X(x,y) = d_X(x,y)$.
Wir zeigen nun, dass $f(X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt. Sei $[x] \in \hat{X},\ \overline{x} = (x_n)$, da nun (x_n) eine Cauchyfolge in X ist, ist:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \ \forall n, m \geq N$$

Wir betrachten nun $\overline{x}_N := (x_N, x_N, x_N, \dots)$

$$\Rightarrow \hat{d}(f(x_N), [x]) = \lim_{n\to\infty} d_X(x_N, x_n) \leq \varepsilon$$

Damit ist $f(x_N) \to [x]$ für $\varepsilon \to 0$ (oder $N \to \infty$?).

(3) Vollständigkeit von $\hat{X}$
Sei $([x]_j)$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Zu jedem $[x]_j \in \hat{X}$ $\exists y_j \in X$ so dass $\hat{d}([x]_j, f(y_j)) < \frac{1}{j}$, da f(X) dicht in $\hat{X}$ ist.

$$\Rightarrow d_X(y_j, y_k) = \hat{d}(f(y_j), f(y_k)) \leq \hat{d}(f(y_j), [x]_j) + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \hat{d}([x]_k, f(y_k)) < \frac{1}{j} + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow (y_j)$ ist eine Cauchyfolge in X, $y := (y_j) \in CF(X) \Rightarrow$ $[y] \in \hat{X}$ ist der Kandidat für den Grenzwert der Cauchyfolge:

$$\hat{d}([x]_j, [y]) \leq \hat{d}([x]_j, f(y_j)) + \hat{d}(f(y_j), [y]) < \frac{1}{j} + \lim_{k\to\infty} d_X(y_j, y_k) \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \hat{d}([x]_j, [y]) = 0$$

das heißt $[x]_j \to [y]$ für $j \to \infty$

(4) Eindeutigkeit von $\hat{X}$ im folgenden Sinne: ist $\tilde{X}$ eine weitere Vervollständigung von X, so sind $\hat{X}, \tilde{X}$ isometrisch zueinander.
Sei also (H, d_H) ein vollständiger metrischer Raum mit $X \subseteq H$, $d_H(x,y) = d_X(x,y)$ $\forall x, y \in X$ und $\overline{X} = H$.
Unser Ziel ist es, eine Isometrie $g : \hat{X} \to H$ zu bauen.
Sei $[x] \in \hat{X}$, $\overline{x} = (x_n) \in [x] \in \hat{X}$, da H vollständig ist $\exists h \in H$ so dass $\lim_{n\to\infty} d_H(x_n, h) = 0$
Wir betrachten $g : \hat{X} \to H$, $[x] \mapsto h$ wie oben.
g ist surjektiv, da für $h \in H \Rightarrow \exists \overline{x} = (x_n) \in CF(X)$ so dass $\lim_{n\to\infty} d_H(x_n, h) = 0$, also $g([x]) = h$
g ist abstandserhaltend, da für $[x], [y] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}([x], [y]) = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_H(x_n, y_n) = d_H(g([x]), g([y])).$$

■

Definition 1.33. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$. Wir definieren den Durchmesser von M durch

$$\delta(M) := \sup \{d(x,y) : x, y \in M\}.$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips aus $\mathbb{R}$.

Satz 1.34 (Cantorscher Durchschnittssatz)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum, der vollständig ist. (F_n) eine Folge von abgeschlossen Teilmengen mit $F_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$*

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in X : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x_0\}$$

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $x_n \in F_n$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\delta(F_n) < \varepsilon$ $\forall n \geq N$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ da } x_n, x_m \in F_N \text{ und } \delta(F_N) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x_n) \text{ ist eine Cauchyfolge } \stackrel{X \text{ vollst.}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in X : \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

Weil $x_k \in F_n$ $\forall k \geq n$ und F_n abgeschlossen ist, ist

$$x_0 \in F_n \Rightarrow x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

Angenommen $\exists y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, mit $x_0 \neq y$

$$\Rightarrow 0 < d(x_0, y) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) \leq 2\delta(F_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ Widerspruch!}$$

■

Eigene Bemerkung. Der Heuser beschreibt den folgenden Satz folgendermaßen:
Es gibt wohl keinen Satz in der Funktionalanalysis, der glanzloser und gleichzeitig kraftvoller wäre als der Bairesche Kategoriensatz. Von seiner Glanzlosigkeit wird sich der Leser *sofort* überzeugen können; für seine Kraft müssen wir ihn auf die folgenden Nummern vertrösten.

Satz 1.35 (Bairescher Kategoriensatz)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$, wobei $F_n \subseteq X$ abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$.*
Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset.$$

Es gibt also ein F_{n_0} dessen Inneres nichtleer ist.

Beweis : Wir bemerken zuerst: $x \in \mathring{M} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq M$.
Angenommen es gelte für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathring{F}_n = \emptyset$, also kein F_n enthalte eine abgeschlossene Kugel.
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $r > 0$ und $x_0 \in X \Rightarrow \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$
Seien nun $x_n \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$. Da F_n kein Inneres hat (offiziell: abgeschlossen?!), existiert ein $r_n \in (0, \frac{r}{2})$ mit $\overline{U_{r_n}(x_0)} \cap F_n = \emptyset$, und für ein $y \in \overline{U_{r_n}(x_n)}$ gilt:

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x_0) \leq r_n + \frac{r}{2} \leq r$$

So erhalten wir $\overline{U_{r_n}(x_n)} \subseteq \overline{U_r(x_0)}$. Wir betrachten nun $\overline{U_1(x_0)}$ und nach obiger Überlegung

$$\exists r_1 > 0, x_1 \in X : \overline{U_{r_1}(x_1)} \subseteq \overline{U_1(x_0)} \text{ mit } r_1 \leq \frac{1}{2} \text{ und } \overline{U_{r_1}(x_1)} \cap F_1 = \emptyset$$

Ebenso

$$\exists r_2 > 0, x_2 \in X : \overline{U_{r_2}(x_2)} \subseteq \overline{U_{r_1}(x_1)} \text{ mit } r_2 \leq \frac{1}{4} \text{ und } \overline{U_{r_2}(x_2)} \cap F_2 = \emptyset$$

Sukzessive erhalten wir so eine Folge $\left(\overline{U_{r_n}(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{U_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq \overline{U_{r_n}(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $r_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $\overline{U_{r_n}(x_n)} \cap F_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wegen (1) und

$$0 \leq \delta\left(\overline{U_{r_n}(x_n)}\right) = 2r_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

sind wir in der Situation des Cantorschen Durchschnittssatzes und es gibt ein eindeutiges $\hat{x} \in X$ mit $\hat{x} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_{r_n}(x_n)$. Dann ist wegen (3) $\hat{x} \notin F_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \hat{x} \in X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ Widerspruch! ■

Korollar. *Hier kommt ziemlich fancy Zeug, von wegen der Polynomraum kann nicht vollständig sein, rein. TODO Behauptung und Beweis erstellen.*

Beweis : klar! (Ja, selbst ohne eine Behauptung) ■

Definition 1.36. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $M \subseteq X$ heißt…

(a) *nirgends dicht*, wenn $\mathring{\overline{M}} = \emptyset$.

(b) *mager* oder *von 1.Kategorie*, wenn M eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist, also $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, A_n nirgends dicht für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt.

(c) *von 2.Kategorie* oder *fett*, wenn M nicht von 1.Kategorie ist.

Eigene Bemerkung (Trivia am Rande). Direkt aus der Definition folgt, das jede nirgends dichte Menge insbesondere von 1.Kategorie ist. Andersrum gilt dies nicht, was das Beispiel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ zeigt. Ein Beispiel für eine nirgends dichte Menge ist die Cantor-Menge.
Anschaulich bedeutet *nirgends dicht*, wenn sie in keiner Teilmenge (mit nichtleeren Innerem) dicht liegt.

Mithilfe dieser Definition können wir den Baireschen Kategoriensatz Umformulieren zu

$$(X,d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum } \Rightarrow X \text{ ist von 2.Kategorie}$$

Korollar 1.37. *(X,d) sei ein vollständiger metrischer Raum, $U \subseteq X$ offen und nichtleer. Dann ist U von 2. Kategorie.*

Beweis (Eigener Beweis) : Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in U$, $\overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq U$ ist. Nun können wir den Baireschen Kategoriensatz auf $\overline{U_\varepsilon(x)}$ anwenden. ■

Korollar 1.38. *(X,d) sei ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:*

$$M \subseteq X \textit{ mager } \Rightarrow X \setminus M \textit{ ist dicht in} X.$$

Beweis : Sei $M \subseteq X$ mager, angenommen $X \setminus M$ sei nicht dicht, also $X \setminus \overline{(X \setminus M)} \neq \emptyset$
$\Rightarrow O := X \setminus \overline{(X \setminus M)}$ ist (als Komplement einer abgeschlossenen Menge) offen und nichtleer.
$\Rightarrow O \subseteq M$ ist von 1. Kategorie, Widerspruch zu Korollar 1.37. ■

Korollar 1.39. *(X,d) sei ein vollständiger metrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n \subseteq X$ so dass $X \setminus B_n$ mager. $B := \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$*

$$\Rightarrow \overline{B} = X$$

Beweis : $X \setminus B = X \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n)^c = X \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c)$ ist wegen Korollar 1.38 dicht in X. ■

Definition 1.40. Der metrische Raum (X,d) heißt ...

(a) *kompakt*, wenn für alle offenen Überdeckungen $(U_i)_{i\in I}$ von X ein endliches $I' \subseteq I$ existiert, so dass $X = \cup_{i\in I'} U_i$

(b) *präkompakt*, wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine endliche Menge $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ existiert, so dass $X = \cup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$. M heißt auch *ε-Netz* von X.

Satz 1.41. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist äquivalent:*

(1) X kompakt.

(2) Jede abzählbare offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilüberdeckung.

(3) Ist (A_n) eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $A_n \supseteq A_{n+1} \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(4) Jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

(5) X ist vollständig und präkompakt.

Beweis : (1) $\Rightarrow$ (2): Man nimmt nur weniger mögliche Vereinigungen.
(2) $\Rightarrow$ (3): Angenommen $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, $A_n = \overline{A_n}$, $\emptyset \neq A_{n+1} \subseteq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow U_n := X \setminus A_n \text{ offen und } \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{\Rightarrow} \exists n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N} : X = \cup_{i=1}^m U_{n_i} &= \cup_{i=1}^m (X \setminus A_{n_i}) \\ &= X \setminus (\cap_{i=1}^m A_{n_i}) \\ &= X \setminus A_k \qquad \text{für } k := \max\{n_1, \dots, n_m\} \\ &\Rightarrow A_k = \emptyset \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Sei (x_n) eine Folge in X. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

Es ist $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $A_n \neq \emptyset$ abgeschlossen $\forall n \in \mathbb{N} \overset{(3)}{\Rightarrow} \exists x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Deshalb ist

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : U_\varepsilon(x_0) \cap \{x_k : k \geq n\} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow x_0$ ist Häufungspunkt der Folge (x_n) und damit Grenzwert einer Teilfolge von (x_n).

(4) $\Rightarrow$ (5): Sei (x_n) eine Cauchyfolge. Wegen (4) hat (x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $x \in X$. Dann ist $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow X$ vollständig.
Angenommen X sei nicht präkompakt

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X \; \exists x_{n+1} \in X \text{ mit } x_{n+1} \notin \cup_{i=1}^n U_{\varepsilon_0}(x_i).$$

Konstruiere so eine Folge (x_n) in X. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon_0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$\Rightarrow (x_n)$ hat keine Cauchy-Teilfolge $\Rightarrow (x_n)$ hat keine konvergente Teilfolge.

(5) $\Rightarrow$ (1): Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen es existiere keine endliche Teilüberdeckung. Wir definieren induktiv Kugeln K_n, $n \in \mathbb{N}$, wie folgt:
Da X präkompakt ist, gibt es zu $\varepsilon = 1$ endliche viele Kugeln $U_1(x_{0,j})$ mit

$$X \subseteq \cap_{j=0}^{m_1} U_1(x_{0,j}).$$

Dann ist mindestens eine dieser Kugeln nicht durch endlich viele Mengen aus $(U_i)_{i\in I}$ überdeckbar.
OBdA sei $U_1(x_{0,0})$ und setze $x_0 := x_{0,0}$. Konstruiere so eine Folge (x_n), so dass $U_{\frac{1}{2^n}}(x_1)$ nicht durch endlich viele Mengen aus $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt werden kann. Sei

$$y \in U_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_{n-1}) \cap U_{\frac{1}{2^n}}(x_1) \neq \emptyset$$

Dann gilt

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-1}, y) + d(y, x_1) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Für $n \leq p \leq q$ gilt dann

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}$$

Daraus folgt, (x_n) ist eine Cauchyfolge in X und wegen der Vollständigkeit von X gibt es ein $\hat{x} \in X$, so dass $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \hat{x}) = 0$. Wegen $X = \cup_{i\in I} U_i$ gilt $\exists i_0 \in I : \hat{x} \in U_{i_0}$. Weil U_{i_0} offen ist: $\exists r > 0$, so dass $U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$ und $d(\hat{x}, x_n) < \frac{r}{2}$. $\Rightarrow U_{\frac{1}{2}}(x_n) \subseteq U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $U_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ nicht durch endliche viele U_i überdeckt werden kann. ∎

Korollar 1.42. *(X, d) sei ein metrischer Raum. Dann gilt:*

a) (X, d) kompakt $\Rightarrow X$ vollständig

b) $M \subseteq X$, so dass jede Folge in M eine in M konvergente Teilfolge hat (M folgenkompakt) $\Leftrightarrow$ $M \subseteq X$ kompakt (M Überdeckungskompakt)

c) $M \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen.

d) X kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt.

Definition 1.43. Sei (X, d) ein metrischer Raum. $M \subseteq X$ heißt *relativ kompakt*, wenn $\overline{M}$ kompakt ist.

Definition 1.44. (X, d) vollständiger metrischer Raum, $M \subseteq X$ relativ kompakt.
$\Leftrightarrow$ jede Folge in M besitzt eine in X konvergente Teilfolge.

Was genau wird hier definiert?

Satz 1.45. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. $M, N \subseteq X$ seien relativ kompakt (bzw. präkompakt). Dann gilt*

(a) $S \subseteq M \Rightarrow S$ relativ kompakt (bzw. präkompakt)

(b) $M \cup N$ relativ kompakt (bzw präkompakt)

(c) M relativ kompakt $\Rightarrow M$ präkompakt

(d) Ist (X, d) vollständig, so gilt M relativ kompakt $\Leftrightarrow M$ präkompakt

Beweis : a) relativ kompakt: Sei (x_n) eine Folge aus S. Da (x_n) ein Folge in M ist, hat es eine konvergente Teilfolge, dessen Grenzwert in $\overline{M}$ ist. Dann ist der Grenzwert auch in $\overline{S}$. Also ist S relativ kompakt. präkompakt: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es eine endliche Menge $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$, so dass $S \subseteq M = \bigcup_{i=0}^{n} U_\varepsilon(x_i)$. Also ist auch S präkompakt.

b) relativ kompakt: Ist (x_n) eine Folge aus $M \cup N$, so gibt es eine Teilfolge, die nur in M oder N ist. Dann hat diese Teilfolge noch eine konvergente Teilfolge. präkompakt: M und N haben jeweils ein ε-Netz. Die Vereinigung ist dann auch ein ε-Netz.

c) Angenommen M sei nicht präkompakt, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass sich M nicht durch endlich viele ε-Kugeln überdecken lässt. Wählen wir aus jedem dieser (mindestens abzählbar vielen) Kugeln ein Element aus, entsteht eine Folge, dessen Folgenglieder alle Mindestabstand $\frac{\varepsilon}{2}$ zueinander haben. $\Rightarrow$ Es gibt keine konvergente Teilfolge $\Rightarrow M$ ist nicht relativ kompakt.

d) $\Rightarrow$ folgt aus c)
$\Leftarrow$ Sei M präkompakt $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}, \{x_1, \ldots, x_p\} \subset X$ mit $M \subset \cup_{j=1}^{p} \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)}$. Wegen $\overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset U_\varepsilon(x_j)$ gilt $\overline{M} \subset \cup_{j=1}^{p} \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset \cup_{j=1}^{r} U_\varepsilon(x_j) \Rightarrow \overline{M}$ ist präkompakt. Da $(\overline{M}, d)$ vollständig ist, ist $\overline{M}$ kompakt. $\overset{\text{Satz 1.41}}{\Rightarrow}$ M relativ kompakt. ■

Bemerkung 1.46 (Fakten). $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

a) Aussagen über metrischer Räume übertragen sich

b) Die Vervollständigung von X ist ein Banachraum.

c) Wenn $\dim X < \infty$, dann

   i) X Banachraum
   ii) $M \subseteq X$ kompakt $\Leftrightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen (Heine-Borel)
   iii) $M \subseteq X$ relativ kompakt $\Leftrightarrow M$ präkompakt $\Leftrightarrow M$ beschränkt

Lemma 1.47 (Lemma von Riesz)**.** $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum, $E \subset X$ abgeschlossener Unterraum mit $E \neq X$, $\eta \in (0, 1)$.*
Dann existiert ein $x_\eta \in X$ mit $\|x_\eta\| = 1$ und $\|x_\eta - y\| \geq \eta\ \forall y \in E$.

Beweis : Sei $x_0 \in X \backslash E$. Definiere $\delta := \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|$, da E abgeschlossen ist, ist $\delta > 0$. Sei (y_n) Folge in E mit $\|x_0 - y_n\| \to \delta$. Sei $\eta \in (0, 1) \Rightarrow \frac{\delta}{\eta} > \delta \Rightarrow \exists z \in E$ mit $\|x_0 - z\| \leq \frac{\delta}{\eta}$. Definiere $x_\eta := \frac{x_0 - z}{\|x_0 - z\|} \Rightarrow \|x_\eta\| = 1$. Für $y \in E$ gilt dann

$$\|x_\eta - y\| = \|y - \frac{x_0 - z}{\|x_0 - z\|}\| = \|y + \frac{z}{\|x_0 - z\|} - \frac{x_0}{\|x_0 - z\|}\| = \frac{\|\overbrace{(\|x_0 - z\|y + z)}^{\in E} - x_0\|}{\|x_0 - z\|} \geq \delta \cdot \frac{1}{\|x_0 - z\|} \geq \frac{\eta}{\delta} \cdot \delta = \eta$$ ■

Korollar 1.48. $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum.*

a) $\overline{U_1(0)}$ kompakt $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

b) Jede beschränkt Folge besitzt konvergente Teilfolge $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

Beweis : a) " $\Leftarrow$ " Folgt aus Heine-Borel
" $\Rightarrow$ " Angenommen, $\dim X = \infty$ (Nicht endlichdimensional). Wir wählen ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$. Nach dem Lemma von Riesz gibt es ein $x_1 \in X$, so dass $\|x_1 - y\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall y \in \operatorname{span}\{x_0\}$. Sukzessiv können wir so eine Folge (x_n) konstruieren für die gilt: $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall y \in \operatorname{span}\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. $\Rightarrow (x_n)$ hat keine konvergente Teilfolge.
b) genauso. ■

1.3.1 Skalarprodukträume

Erinnerung:
Sei X ein $\mathbb{K}$-VR. Ein *Skalarprodukt* ist eine Abb $(\cdot, \cdot) \to \mathbb{K}$ mit

(S1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ $\forall x, y, z \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(S2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(S3) $(x, x) > 0$ $\forall x \in X \backslash \{0\}$.

Bemerkung 1.49. 1) $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ist eine Norm.

2) ein vollständiger Skalarproduktraum heißt *Hilbertraum.*

3) $\|x\| \cdot \|y\| \geq |(x, y)|$ $\forall x, y \in X$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

4) Für $x, y \in X$ mit $(x, y) = 0$ (x und y orthogonal, $x \perp y$) gilt $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Satz des Pythagoras)

5) Für $x, y \in X$ gilt die Parallelogrammgleichung: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

6) Für $(x_n), (y_n)$ mit $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$ gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$, da
$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|$ (Stetigkeit des Skalarprodukts)

Satz 1.50. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ $\forall x, y \in X$. Dann existiert ein Skalarprodukt auf X, welches $\|\cdot\|$ induziert.*

Beweis : Skizze! a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.
b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2)$ ($\nearrow$ Übung, Blatt 6, Aufgabe 1) ■

Definition 1.51. $(X, (\cdot, \cdot))$ Skalarprodukt, $x, y \in X$. $M, N \subseteq X$, $(x_i)_{i \in I}$ Familie.

1. x orthogonal zu y (x $\perp$ y), wenn $(x, y) = 0$.
2. x orthogonal zu N (x $\perp$ M), wenn $x \perp y \quad \forall y \in N$
3. M orthogonal zu N (N $\perp$ M), wenn $x \perp M \quad \forall x \in N$.
4. $M^\perp = \{x \in X : x \perp M\}$ *Orthogonalraum zu M*
5. $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthogonalsystem* (OGS), wenn $x \perp y, \forall i, j \in I, i \neq j$
6. $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), wenn es OGS mit $\|x_i\| = 1$ $\forall i \in I$ ist.
7. $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthogonalbasis* (OGB), wenn es ein linear unabhängiges OGS ist
   und $\overline{span((x_i)_{i \in I})} = X$.
8. $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthonomalbais* (ONB), wenn es OGB und ONS ist.

Beispiel 1.52. a) $e_n = (\delta_{in})_{i\in I} \in \ell^2$ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ONS Es ist auch ONB.

Sei $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \varepsilon > 0. \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}. \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon^2$. Für $v = a_1 e_1 + \cdots + a_N e_N \in span(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\|v - x\|_2 = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$

b) $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$

$u_k \in L^2([0, 2\pi])$ ist ONS, da $\int_0^{2\pi} u_k(x)\overline{u_j(x)}dx = \delta_{kj}$ Auch ONB?

Beachte: $V^\perp$ ist immer abgeschlossen, da für eine Folge (v_i) in $V^\perp$ mit $v_i \to v$ gilt $(x, v) \leftarrow (x, v_i) = 0\ \forall x \in V \Rightarrow v \in V^\perp$

Satz 1.53 (Besselsche Ungleichung)**.** *Sei X ein Skalarproduktraum, $(u_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem, $x \in X$, $i_1, \ldots, i_n \in I$. Dann ist*

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2 \leq \|x\|^2$$

Beweis: Sei $x_n := x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_{ik})u_{ik}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$(x_n, u_{ij}) = (x, u_{ij}) - \sum_{k=1}^{n} (x, u_{i_k}) \underbrace{(u_{i_k}, u_{i_j})}_{\delta_{kj}} = (x, u_{i_j}) - (x, u_{i_j}) = 0$$

Also ist $\sum_{k=1}^{n} (x, u_{i_k})u_{i_k} \perp x_n$ und mit dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|\sum_{k=1}^{n} (x, u_{i_j})u_k\|^2 = \|x_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2$$

■

Korollar 1.54. *Voraussetzungen wie oben. Dann gilt*

(a) $(x, u_i) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $i \in I$.

(b) $\sum_{i\in I} |(x, u_i)|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselsche Ungleichung II)

(c) Die Reihe $\sum_{i\in I} (x, u_i)u_i$ (Fourierreihe) ist eine Cauchyfolge in X.

Beweis: (a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Bessel (I), dass für $S_{x,n} := \{i \in I : |(x, u_i)|^2 > \frac{1}{n}\}$ gilt $|S_{x.n}| \leq n\|x\|^2$, also endlich.

Dann ist $\{i \in I : (x, u_i) \neq 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_{x,n}$ abzählbar, als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen.

(b) Seien $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt mit $\{i_n : n \in \mathbb{N}\} = \{i \in I : (x, u_i) \neq 0\}$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:
$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2 \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |(x, u_{i_k})|^2 = \sum_{i\in I} |(x, u_i)|^2$.

(c) (i_n) wie oben, $\varepsilon > 0 \overset{b)}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq m \geq N$ gilt $\sum_{k=m+1}^{n} |(x, u_k)|^2 < \varepsilon^2$
$\Rightarrow \|\sum_{k=1}^{n} (x, u_{i_k})u_{i_k} - \sum_{k=1}^{m} (x, u_{i_k})u_{i_k}\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} (x, u_{i_k} u_{i_k}\|^2 \overset{Pyth.}{=} \sum_{k=m+1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2 < \varepsilon^2$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (x, u_{i_k})u_{i_k}$ ist eine Cauchyfolge. ■

Satz 1.55 (Projektionssatz)**.** *X Skalarproduktraum, V vollständig UVR, $x \in X$. Dann existiert ein eindeutiges $v_0 \in V$, so dass $\|x - v_0\| = \inf_{v\in U} \|x - v\|$. Dieses v_0 erfüllt $x - v_0 \in V^\perp$*

Beweis: Sei (v_n) eine Folge in V mit $d_n := \|x - v_n\| \to \inf_{v\in V} \|x - v\| =: d$. Wegen der Parallelogrammgleichung ist

$$\underbrace{\|x - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2}_{\geq d^2} + \|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\|x - v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x - v_m\|^2 = \frac{1}{2}d_n^2 + \frac{1}{2}d_m^2$$

$$\Rightarrow \|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \to 0 \text{ für } n, m \to \infty$$

$\Rightarrow$ (v_n) ist eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von V konvergiert sie gegen ein $v_0 \in V \Rightarrow$ $\|x - v_0\| = \inf_{v \in V} \|x - v\|$
Eindeutigkeit: Sei $v_1 \in V$ ein weiterer Vektor mit $\|x - v_1\| = \|x - v_0\| = d = \inf_{v \in V} \|x - v\|$. Wegen der Parallelogrammgleichung ist

$$\|v_1 - v_0\|^2 = 2\left(\|x - v_0\|^2 + \|x - v_1\|^2 - 2d^2\right) = 0 \Rightarrow v_0 = v_1.$$

Es bleibt noch zu zeigen: $x - v_0 \in V^\perp$.
Für $\lambda \in \mathbb{K},\ v \in V$ ist

$$\|x-v_0\|^2 \leq \|x-(v_0+\lambda v)\|^2 = ((x-v_0)-\lambda v, (x-v_0)-\lambda v) = \|x-v_0\|^2 - \overline{\lambda}(x-v_0, v) - \lambda(v, x-v_0) + |\lambda|^2\|v\|^2.$$

Sei also $\lambda := \frac{(x-v_0,v)}{\|v\|^2}$

$$\Rightarrow \|x - v_0\|^2 \leq \|x - v_0\|^2 - \underbrace{\frac{|(x - v_0, v)|^2}{\|v\|^2}}_{\leq 0} \leq \|x - v_0\|^2 \Rightarrow |(x - v_0, v)|^2 = 0 \Rightarrow x - v_0 \perp v.$$

■

Korollar 1.56. *Sei X ein Hilbertraum und V ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt*

1. $X = V \perp V^\perp$, *also* $V \perp V^\perp$ *und* $X = V \oplus V^\perp$
   Insbesondere gilt wegen $V \cap V^\perp = \{0\}$, *dass* $\forall x \in X$ *die Zerlegung* $x = v + w$ *mit* $v \in V,\ w \in V^\perp$ *eindeutig ist.*
2. *Sei* $(u_i)_{i \in I}$ *eine Orthonormalbasis von* $V, x \in X$. *Dann ist* $v := \sum_{i \in I}(x, u_i)u_i$ *die Bestapproximation von* x *in* V.

Beweis: 1. $x \in X$. Sei $v \in V$, so dass, $\|x-v\| = \inf_{u \in V} \|x-u\| \Rightarrow x = v+(x-v)$ und $v \in V,\ x-v \in V^\perp$
2. Für $v := \sum_{i \in I}(x, u_i)u_i$ (konvergent) ist $x - v \in V^\perp$ (wie im Beweis der Besselschen Ungleichung) $\Rightarrow v$ ist Bestapproximation von x in V. ■

Lemma 1.57. *Sei X ein Skalarproduktraum, V ein Unterraum. Dann ist $V^\perp = \overline{V}^\perp$*

Beweis: " $\supseteq$ " Da $V \subseteq \overline{V} \Rightarrow \overline{V}^\perp \subseteq V^\perp$
" $\subseteq$ " Sei $x \in V^\perp, v \in V \Rightarrow \exists$ Folge (v_n) in V mit $v_n \to v \Rightarrow (x, v) \leftarrow (x, v_n) = 0$ ■

Satz 1.58. *X Skalarproduktraum. $(u_i)_{i \in I}$ ONS.*
Betrachte folgende Aussagen

(i) $(u_i)_{i \in I}$ *ist eine Orthonormalbasis*

(ii) $x = \sum_{i \in I}(x, u_i)u\ \forall x \in X$ *(Fourierreihe)*

(iii) $(x, y) = \sum_{i \in I}(x, u_i)(u_i, y)\ \forall x, y \in X$ *(Parseval-Identität)*

(iv) $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x, u_i)|^2\ \forall x \in X$ *(Bessel-Gleichung)*

(v) $(span(u_i)_{i \in I})^\perp = \{0\}$

Dann gilt $i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iii \Leftrightarrow iv \Rightarrow v$.
Wenn X zusätzlich noch ein Hilbertraum ist, dann gilt auch $v \Rightarrow iv$.

Beweis: "*(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*" : Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(u_i)_{i \in I}$ eine ONB ist, gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I,\ \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ so dass $\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{i_k}\| < \varepsilon$ wegen Korollar 1.56 ist

nochmal anschauen!

$$\|x - \sum_{k=1}^n (x, u_{i_k})\| \leq \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{i_k}\| < \varepsilon$$

“$(ii) \Rightarrow (iii)$“ : Es ist:

$$x = \sum_{i\in I}(x,u_i)u \overset{(\cdot,y)}{\Rightarrow} (x,y) = \left(\sum_{i\in I}(x,u_i)u_i, y\right) = \sum_{i\in I}(x,u_i)(u_i,y) \quad \forall x,y \in X$$

“$(iii) \Rightarrow (iv)$“: Setze in die Formel $y = x$ ein.

“$(iv) \Rightarrow (i)$“: Mit Pythagoras und Korollar 1.56 gilt:

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x_i,u_i)|^2 + \|x - \sum_{i\in I}(x,u_i)u_i\|^2 \Rightarrow x - \sum_{i\in I}(x,u_i)u_i = 0 \Rightarrow x \in \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}.$$

“$(i) \Rightarrow (v)$“: Wegen Lemma 1.57 ist $(\operatorname{span}(u_i)_{i\in I})^\perp = \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}^\perp = X^\perp = \{0\}$.

“$(v) \Rightarrow (i)$“: Sei X ein Hilbertraum $\Rightarrow$ $\overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}$ ist vollständig. Sei $x \in X$ mit $x = x_1 + x_2$, wobei $x_1 \in \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}$, $x_2 \in \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}^\perp = \operatorname{span}(u_i)_{i\in I}^\perp = \{0\} \Rightarrow x = x_1$. ■

Nun zurück zu $L^2([0,2\pi])$. Wir erinnern uns vorerst:

1. Der Raum der stetigen Funktionen liegt dicht in $L^2([0,2\pi])$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, f \in L^2([0,2\pi])\ \exists g \in C([0,2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi) = 0$ und $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.
2. Zu $g \in C([0,2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi), \varepsilon > 0\ \exists h \in \operatorname{span}(u_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \|g-h\|_\infty$

Satz 1.59. *Die Familie $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $u_k(x) = \frac{1}{2\pi}e^{ikx}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2([0,2\pi])$ Wir benutzen:*

a) $\forall \varepsilon > 0, f \in L^2([0,2\pi])\ \exists g \in C([0,2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi) = 0$ und $\|f-g\|_2 < \varepsilon$,

b) Zu $g \in C([0,2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi), \varepsilon > 0\ \exists h \in span(U_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \|g-h\|_\infty < \varepsilon$.

Beweis: Sei $f \in L^2([0,2\pi]), \varepsilon > 0$. Dann existiert $g \in C([0,2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi) = 0$ und $\|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $h \in \overline{span(u_i)_{i\in I}}$, so dass $\|g-h\| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$

$$\Rightarrow \|f-h\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-h\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \sqrt{2\pi}\|g-h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} = \varepsilon$$

wobei wir $\|f\|_2^2 = \int_I |f|^2 d\lambda \leq \int_I \operatorname{ess\,sup}_{x\in I}|f(x)|^2 d\lambda = \|f\|_\infty^2 \int_I d\lambda = \|f\|_\infty^2 \lambda(I)$ für $f \in L^2(I)$ genutzt haben. ■

Korollar. *Sei $f \in L^2([0,2\pi])$*

1. *$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ ist bestapprox. trig. Polynom vom Grad n für f (mit $c_k = (f, e^{ik\cdot}) = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$)*
2. *$f = \sum_{k=-\infty}^\infty \sum_{-n}^n c_k e^{ik\cdot}$*
3. *$(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $v_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, v_k = \cos(k\cdot)\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für $k > 0, v_k = sin(k\cdot)\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für $k < 0$*

Definition 1.60 (Halbordnung, Totalordnung)**.** Sei M eine Menge. Eine Relation $\leq\ \subseteq M \times M$, heißt *Halbordnung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad \forall a,b,c \in M$

(ii) $a \leq a \quad \forall a \in M$

(iii) $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \quad \forall a,b \in M$

$d \in M$ heißt *obere Schranke*, wenn $a \leq d\ \forall a \in M$

Die Relation heißt *Totalordnung*, wenn sie eine Halbordnung ist und $\forall a, b \in M : a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

Lemma 1.61 (Lemma von Zorn)**.** *M sei eine halbgeordnete Menge. Besitzt jede totalgeordnete Teilmenge $Z \subseteq M$ eine obere Schranke in M, dann besitzt M eine obere Schranke.*

Satz 1.62. *$(X, (\cdot, \cdot))$ sei ein Hilbertraum. Dann existiert eine Orthonormalbasis.*

Beweis : Sei $M = \{(u_i)_{i\in I} : (u_i)_{i\in I}$ ist Orthonormalsystem$\}$
Wir definieren die Halbordnung $(u_i)_{i\in I} \subseteq (y_i)_{i\in J} :\Leftrightarrow I \subseteq J$ und $x_i = y_i\ \forall i \in I$.
Sei $Z := \{(x)_{i\in I_j} : j \in J\} \subseteq M$ eine totalgeordnete Teilmenge, $(x_i)_{i\in I}$ ist eine obere Schranke von Z. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also eine obere Schranke $(\hat{x}_i)_{i\in J}$ von M.
Mit anderen Worten: $\nexists$ ONS $(\hat{y}_i)_{i\in \hat{J}}$ mit $J \subsetneq \hat{J}$ und $\hat{x}_i = \hat{y}_i\ \forall i \in J$.
$\Rightarrow \forall x \in X$ mit $x \perp \hat{x}_i\ \forall i \in I$ gilt $x = 0$
$\Rightarrow (span(\hat{x}_i)_{i\in I})^{\perp} = \{0\}$ ■

Übung. Blatt 5,6.

1. Gram-Schmidt-Orthonormalisierung
   Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ ein Skalarproduktraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig. Dann existiert ein ONS $(y_n)_{y\in\mathbb{N}}$ mit $span(y_1, \ldots, y_k) = span(x_1, \ldots, x_k)$.
   Mit (y_n) wie vorhin, gilt (y_n) ist ONB $\forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow span(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = X$.
2. $M \subset X$ ist UVR $\Rightarrow (M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$

Satz 1.63. *Seien X ein Hilbertraum, $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in J}$ Orthonormalbasen. Dann haben I und J die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis : Für endliches I ist die Aussage klar.
Seien also $|I|$ und $|J|$ unendlich.
Für $x \in X$, definiere $S_x = \{i \in I : (x, x_i) \neq 0\} \Rightarrow |S_X| \leq |\mathbb{N}|$ sowie $\bigcup_{j\in J} S_{y_j} = I$ und $S_{y_j} \neq \emptyset$. Denn: Ist $S_{y_j} = \emptyset$, dann $y_j \perp x_i \forall i \in I \Rightarrow y_j = 0$ Lightning!
Ist $i \in I$ mit $i \notin \bigcup_{j\in J} S_{y_j}$, dann $x_i \perp y_j \forall j \in J \Rightarrow x_i = 0$ Lightning!
Also $|I| = |\bigcup_{j\in J} S_{x_j}| \subseteq |J| \cdot |\mathbb{N}| = |J|$.
Analog $|J| \subseteq |I|$ ■

Kapitel 2

Einige Hauptsätze aus der Funktionalanalysis

2.1 Satz von der offenen Abbildung, Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz von der stetigen Inversen

Definition 2.1. Seien X, Y topologische Räume. $f : X \to Y$ heißt *offen*, falls für alle offenen $U \subseteq X$, $f(U) \subseteq Y$ offen ist.

Satz 2.2. *Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ injektiv. Dann sind äquivalent*

(i) $f : X \to f(X)$ *offen (Relativtopologie von Y auf $f(x)$)*

(ii) $f^{-1} : f(X) \to X$ *stetig.*

Beweis: "*(i)* ⇒ *(ii)*" : Sei $U \subseteq X$ offen, dann ist $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ offen, also ist f^{-1} stetig.
"*(ii)* ⇒ *(i)*" : Sei $U \subseteq X$ offen, f^{-1} stetig $\Rightarrow f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ offen $\Rightarrow f$ offen. ■

Lemma 2.3. *Seien X, Y normierte Räume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) T *ist offen.*

(ii) $\forall r > 0 : T(U_r(0))$ *ist eine Nullumgebung.*

(iii) $\exists r > 0 : T(U_r(0))$ *ist eine Nullumgebung.*

(iv) $\exists r > 0 : T(U_1(0))$ *ist eine Nullumgebung.*

Beweis: Vergleiche ÜA3, Blatt 2. ■

Satz 2.4 (Satz von der offenen Abbildung, Satz von Banach-Schauder, open-mapping theorem)**.** *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.*

Beweis: Wir zeigen, dass *(ii)* aus Lemma 2.3 gilt.

1. Schritt Wir zeigen $\exists \varepsilon_0 > 0$, so dass $U_{\varepsilon_0}(0) \subseteq \overline{T(U_1(0))}$. Weil T surjektiv gilt $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(U_n(0))$. Da Y Banachraum, so gilt nach Baire $\exists N \in \mathbb{N} : \overline{T(U_N(0))} \neq \emptyset\ \exists y_0 \in \overline{T(U_N(0))}, \varepsilon > 0$, so dass $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \overline{T(U_N(0))}$. Aus $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \frac{1}{2}U_1(\varepsilon)y_0 + \frac{1}{2}U_1(\varepsilon) - y_0$ und $\overline{T(U_N(0))} = \frac{1}{2}\overline{T(U_N(0))} + \frac{1}{2}\overline{T(U_N(0))}$ folgt $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \overline{T(U_N(0))} \Rightarrow U_1(\frac{\varepsilon}{N})0 \subseteq \overline{T(U_1(0))}$. $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{N}$.

2. Schritt Wir zeigen $U_1(\varepsilon_0)0 \subseteq T(U_1(0))$ Sei $y \in U_1(\varepsilon_0)0$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\|y\| < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\overline{y} := \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} y \Rightarrow$ $\|\overline{y}\| < \varepsilon_0 \Rightarrow \overline{y} \in \overline{T(U_1(0))} \Rightarrow \exists y_0 = Tx_0 \in T(U_1(0))$ mit $\|\overline{y} - y_0\| < \alpha\varepsilon_0$, wobei $0 < \alpha < 1$ mit $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1-\alpha} < 1$ Betrachte nun $\frac{\overline{y}-y_0}{\alpha} \in U_1(\varepsilon_0)0 \Rightarrow \exists y_1 = Tx_1 \in T(U_1(0))$ mit $\|\frac{\overline{y}-y_0}{\alpha} - y_1\| < \alpha\varepsilon_0 \Rightarrow$ $\|\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1)\| < \alpha^2\varepsilon_0$ Behandle $\frac{\overline{y}-(y_0+\alpha y_1)}{\alpha^2}$ mit derselben Methoden, erhalte, $y_2 = Tx_2 \in T(U_1(0))$ mit $\|\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2)\| < \alpha^3\varepsilon_0$ Erhalte so induktiv eine Folge (x_n) in $U_1(0)$ mit $\|\overline{y} - T(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k x_k)\| < \alpha^{n+1} \cdot \varepsilon_0$. Weegen $\alpha < 1$ gilt $\overline{x} := \sum_{\alpha=0}^{\infty} \alpha^k x_k$ konver. $\overset{T beschrnkt}{\Rightarrow} T\overline{x} = \overline{y}$ Für $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\overline{x}$ gilt $Tx = y$ und $\|x\| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\|\overline{x}\| \le \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \underbrace{\|x_k\|}_{<1} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1-\alpha} < 1$

$\Rightarrow y \in T(U_1(0))$. Also $U_1(\varepsilon)0 \subseteq T(U_1(0))$. ■

ÜA: X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ist offen (relativ in im$T$) $\Leftrightarrow imT$ abgeschlossen.

Beweis Idee: " $\Leftarrow$ " gilt nach Satz 2.4. (imT abgeschlossen $\Rightarrow imT$ ist Banachraum)
" $\Rightarrow$ " betrachte injektive Abbildung $\hat{T} : X \setminus KerT \to imT, x + KerT \mapsto Tx$ ■

Satz 2.5 (Satz von der stetigen Inversen, inverse mapping theorem)**.** *X, Y Banachräume. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijektiv $\Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$*

Beweis: Folgt aus open mapping thm und Satz 2.2 (wichtig Banachraum!) ■

Definition 2.6 (Graph)**.** X, Y Mengen, $f : X \to Y$ Abbildung. Der Graph von f ist $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

Definition 2.7. X, Y metrische Räume. Dann ist auf $X \times Y$ eine Metrik via $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) :$ $(d(x_1, x_2)^2 + d(y_1, y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$ definiert. (erhält Parallelogrammgleichung und damit Skalarproduktstruktur)

Beachte

(i) $X \times Y$ vollständig $\Leftrightarrow X, Y$ vollständig

(ii) $X \times Y$ normierter Raum $\Leftrightarrow X, Y$ nomierte Räume

(iii) $X \times Y$ Skalarproduktraum $\Leftrightarrow X, Y$ Skalarproduktraum.

(iv) abgeschlossene Metrik ist äquivalent zu $\max\{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}$ und $(d(x_1, x_2)^p + d(y_1, y_2)^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in (1, \infty)$

Definition 2.8 (Graphenabgeschlossenheit)**.** X, Y metrische Räume, $f : X \to Y$ heißt *graphenabgeschlossen*, wenn $G(f) \subseteq X \times Y$ abgeschlossen ist.

Bemerkung 2.9. 1. f graphenabgeschlossen $\Leftrightarrow (x_n)$ in X mit $x_n \to x$ und $f(x_1) \to y \Rightarrow f(x) = y)$

2. $T : X \to Y$ lineare Operator $\Rightarrow G(T) \subseteq X \times Y$ UVR.

3. f stetig $\Rightarrow f$ graphenabgeschlossen.

4. Umkehrung von (iii) gilt i.A. nicht: Gegensbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & sonst \end{cases}$

Satz 2.10 (Satz vom abgeschlossem Graphen, closed graph theorem)**.** *X, Y Banachräume, $T : X \to Y$, lineare Operatoren. Dann sind äquivalent:*

(i) T graphenabgeschlossen

(ii) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

Beweis TODO:
- $ii \Rightarrow i$ Klar, weil ...
- Definiere Abbildung, $S : G(T) \to X, (x, Tx) \mapsto X \Rightarrow S$ bijektiv und linear. Wegen $\|S(x,Tx)\|_X = \|X\| \le (\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}})$ gilt $S \in \mathcal{B}(G(T), X)$ mit $\|S\| \le 1$. Weil $G(T) \subseteq X \times Y$ und X, Y Banachräume, ist $G(T)$ Banachraum. $\overset{S2.4}{\Rightarrow} S^{-1} \in \mathcal{B}(X, G(T)) \Rightarrow (\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}} = \|(x,Tx)\|_{X \times Y} = \|S^{-1}(x)\| \le \|S^{-1}\| \cdot \|x\|_X \Rightarrow \|Tx\|_Y \le (\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}} \le \|S^{-1}\| \cdot \|x\|_X \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X,Y)$ ■

Bemerkung 2.11. Ein paar Anwendungen

1. Aus Inverse mapping thm folgt: $(X, \|\cdot\|_1, (X, \|\cdot\|_2)$ BRe, $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_2$ stärker $\|\cdot\|_1$.

   Beweis: Sei $I_X : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2) \overset{Vor.}{\Rightarrow} I_x$ beschränkt $\overset{IMT}{\Rightarrow} I_X^{-1} : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ beschränkt $\Rightarrow \|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1$. ■

2. Betrachte $X = C([a,b])$, $Y = C^1([a,b])$ mit Normen $\|x\|_X = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = \|x\|_\infty$, $\|x\|_Y = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$, X, Y Banachräume.

   Ist $T \in \mathcal{B}(C([a,b]))$ mit $imT \subset C^1([a,b])$. Dann ist $T \in \mathcal{B}(C([a,b]), C^1([a,b]))$

   Beweis: $x, x_n \in Xy \in Y$ mit $\|x_n - x\|_X \to 0$, $\|Tx_n - y\|_Y \to 0 \Rightarrow \|x_n - x\|_X \to 0$ und $\|Tx_n - y\|_X \to 0$, da $\|z\|_X \le \|z\|_Y \ \forall z \in Y$. $\overset{T \in \mathcal{B}(X)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = 0 \Rightarrow y = Tx \Rightarrow T$ graphenabgeschlossen $\overset{X,Y \ BRe}{\Rightarrow} T \in \mathcal{B}(X,Y)$. ■

Bemerkung 2.12. $T : X \to Y$ lineare Operatoren. Dann sind äquivalent:

(i) T graphenabgeschlossen

(ii) $\forall (x_n)$ in X mit $x_n \to 0$, $y \in Y$ mit $(Tx_1) \to y$ folgt $y = 0$

Beweis: Nutze Linearität:
"$\Rightarrow$" klar (Spezialisierung auf Nullfolgen)
"$\Leftarrow$" angenommen $(x_n) \to x, T(x_n) \to y \Rightarrow (x_n - x)$ ist Nullfolge ■

2.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit, Satz von Banach-Steinhaus

Satz 2.13 (Satz von Osgood). *X normierte Raum, $E \subset X$ Teilmenge von 2. Kategorie. Sei $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \in A\}$ eine Menge von FUnktionen. $\mathcal{F}$ sei auf E punktweise beschränkt, d.h. $\forall x \in E \ \exists M_x > 0$, so dass $f_\alpha(x) \le M_x \ \forall \alpha \in A$. Dann existiert abgeschlossene Kugel $K \subseteq X$, auf der $\mathcal{F}$ glm nach oben beschränkt ist. D.h.*

$$\exists M > 0 \ s.d \ f_\alpha(x) \le M \ \forall \alpha \in A, x \in K.$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$, def $E_n : \{x \in X : f_\alpha(x) \le n \forall \alpha \in A\} = \bigcap_{\alpha \in A} \underbrace{\{x \in X : f_\alpha(x) \le n\}}_{\text{abgeschlossen, da f stetig}} \Rightarrow E_n$ abgeschlossen. Ferne gilt $E \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ wegen Annahme (punktweise Beschränkt). $\overset{2.Kate}{\Rightarrow} \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ von 2. Kategoriere $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\circ E_{n_0} = \circ\overline{E_{n_0}} \neq \emptyset$. $\Rightarrow$ Für $U = \circ E_{n_o}$: $\sup_{\alpha \in A, x \in U} f_\alpha(x) \le n_0 =: M$ Insbesondere $\exists x_0 \in U, \delta > 0$, so dass $K := \overline{U_\delta(x_0)} \subseteq U$. Dann gilt $\forall \alpha \in A, x \in \overline{U_\delta(x_0)} : f_\alpha(x) \le M$. ■

Korollar 2.14 (Prinzip der glm Beschränkheit). *X, Y normierter Räume, $E \subset X$ von 2. Kategorie, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ mit $\forall x \in \exists M_x > 0$ so dass $\|Tx\| \le M_x \forall T \in \mathcal{F}$. Dann gilt:*

$$\exists M > 0 \ so \ dass \ \|T\| \le M \forall T \in \mathcal{F}$$

Beweis: Für $T \in \mathcal{F}$ definiere $f_T : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \|Tx\| \Rightarrow f_T$ ist stetig $\forall T \in \mathcal{F}, \{f_T : T \in \mathcal{F}\}$ ist pw. beschränkt $\overset{Osgood}{\Rightarrow} \exists M, r > 0, x_0 \in E : \sup_{\substack{x \in \overline{U_r(x_0)} \\ T \in \mathcal{F}}} \|Tx\| \in M$. Für $x \in U_1(0)$ gilt dann

$$\|Tx\| = \|\frac{1}{r}T(rx + x_0) - \frac{1}{r}Tx_0\| \leq \frac{1}{r}\underbrace{\|T(rx + x_0)\|}_{\leq M} + \frac{1}{r}\underbrace{\|Tx_0\|}_{\leq M} \leq \frac{2M}{r} \Rightarrow \|T\| \leq \frac{2M}{r} \ \forall T \in \mathcal{F}.$$

■

Korollar 2.15. *X Banachraum, Y normierter Raum. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$, so dass $\forall x \in X \ \exists M_x > 0 : \|T_x\| \leq M_x \ \forall T \in \mathcal{F}$. Dann existiert ein $M > 0$, so dass $\|T\| \leq M \ \forall T \in \mathcal{F}$.*

Beweis: X Banachraum $\overset{Baire}{\Rightarrow}$ X von 2. Kategorier. Resultat folgt aus Kor. 2.14. ■

Korollar 2.16. *X Banachraum, Y normierter Raum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$, so dass*

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| = \infty$$

. Dann gilt

(i) $\exists x_0 \in X$*:* $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx_0\| = \infty$

(ii) Die Menge $\{x_0 \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx_0\| = \infty\}$ *ist dicht.*

Beweis: *Angenommen* $Z \subseteq X$ *nicht dicht* $\Rightarrow \exists r > 0, x \in X$ *:*

$$\overline{U_r(x_0)} \subseteq X \backslash Z \Rightarrow \forall x \in \overline{U_r(x_0)} : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$$

$\overset{2.14}{\Rightarrow} \sup T \in \mathcal{F}\|T\| < \infty$ *Widerspruch!* ■

TODO: Ein Beispiel für starke Konvergenz aber keine Konvergenz von Operatoren oder sowas.

Satz 2.17. *X Banachraum, Y normierter Raum. (T_n) Folge in $\mathcal{B}(X, Y)$, so dass*

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x \ \forall x \in X.$$

Dann gilt $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und $\|T\| \leq \lim_{n \to \infty} \inf \|T_n\|$.

Beweis: Linearität von T ist klar. Weiter gilt

$$\lim_{n \to \infty} |\|T_n x\| - \|Tx\|| \leq \lim_{n \to \infty} \|T_n x - Tx\| = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow \ \forall x \in X \ \exists M_x > 0, \text{sodass} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| \leq M_x$$

$\Rightarrow \exists M > 0$, so dass $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T\| \leq M < \infty$. Für $x \in X$ und jede TF (X_{n_k}), sodass $\|T_{n_k}\|$ konvergiert, gilt

$$\|Tx\| = \lim_{k \to \infty} \|T_{n_k} x\| \leq \lim_{k \to \infty} \|T_{n_k}\|\|x\| \Rightarrow \|Tx\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|Tn\|\|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|T_n\|.$$

■

Satz 2.18 (Satz von Banach-Steinhaus)**.** *X, Y Banachräume, (T_n) Folge in $\mathcal{B}(X, Y)$. Dann konvergiert (T_n) punktweise gegen ein $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, genau dann wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) $\exists M > 0$*, so dass* $\|T_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\exists D \subset X$ *dicht, so dass* $(T_n x)$ *CF* $\forall x \in D$*.*

Beweis: "⇒" 1. folgt aus Satz 2.17., 2. ist klar (nehme $D = X$)
"⇐" Sei $x \in X, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in D : \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3M}, \exists N \in \mathbb{N} : \|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall n, m \leq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \forall n, m \leq N : \|T_m x - T_n x\| &\leq \|T_m x - T_m y\| + \|T_m y - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\| \\ &\leq \|T_m\|\|x - y\| + \|T_m y - T_n x\| + \|T_n\|\|x - y\| \\ &\leq M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow (T_n x)$ ist Cauchyfolge in $Y \Rightarrow (T_n x)$ konvergiert in $Y \overset{2.17.}{\Rightarrow} T \in B(X, Y)$. ■

Kapitel 3

Lineare Funktionale und duale Abbildungen

X normierter $\mathbb{K}$-VR.
Erinnerung: $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, $x' \in X'$,$\|x'\| = \|x'\|_{\mathcal{B}(X,\mathbb{K})} = \sup_{x \in U_1(0) \leq X} |x'(x)| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |x'(x)| = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} |x'(x)|$.
Notation: Anstelle von $x'(x) =: \langle x, x' \rangle_{X,X'}$, $x' \in X', x \in X$.
$E_{\mathbb{R}}$: E aufgefasst als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

3.1 Fortsetzungssätze von Hahn-Banach

Thema: X normierter Raum, $f : E \to \mathbb{K}$ lineare, E UVR.
Frage: Kann ich f auf X fortsetzen ? (so dass f linear ist)

Lemma 3.1. *Sei X $\mathbb{R}$-VR, $p : X \to \mathbb{R}$ mit*

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \;\; \forall \lambda \geq 0, x \in X$ (Homogenität)

2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \;\; \forall x, y \in X$ (Subadditivität)

Weiters sei $E \subseteq X$ UVR und $f : E \to \mathbb{R}$ linear, $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$. Dann existiert $F : X \to \mathbb{R}$ linear und $F|_E = f$ und $F(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X$.

Beweisskizze. Falls $E = X \Rightarrow$ klar. ($F = f$). Angenommen $E \subsetneq X \Rightarrow x_0 \in X \backslash E, x_0 \neq 0$.

1 Schritt: Zunächst Forsetztung auf eindimensional größeren Raum. TODO

2 Schritt: Definiere Menge von Abbildungen und Unterräume, definiere und zeige Halbordnung, und prüfe dann Voraussetzung vom Lemma von Zorn. Das liefert ein maximales Element, dass dann schon der ganze Raum sein muss. Sonst fände mein mit Schritt eins einen größeren Raum, was aber ein Widerspruch zur Annahme bereits das maximale Element benutzt zu haben.

□

Beweis : Falls $E = X$: klar(Wähle $F = f$). Sei also $E \subsetneq X \Rightarrow \;\; \exists x_0 \in X \setminus E$.

Schritt 1:
Setze f auf $E \oplus span\{x_0\}$ fort (Bezeichnung wieder mit f) mit $f(z + \alpha x_0) = f(z) + \alpha\gamma$ $z \in E, \alpha \in \mathbb{R}$.
Wähle $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $f(z + \alpha x_0) \leq p(z + \alpha x_0)$. Dabei gilt:

$\alpha > 0 : \;\; \gamma \leq \frac{1}{\alpha} p(z + \alpha x_0) - f(z)) = p(\frac{z}{\alpha} + x_0) - f(\frac{z}{\alpha}) \Leftrightarrow \gamma \leq p(z_1 + x_0) - f(z_1) \; \forall z_1 \in E$

$\alpha < 0 : \;\; \alpha\gamma \leq p(z + \alpha x_0) - f(z) \Leftrightarrow -\gamma \leq p(-\frac{z}{\alpha} - x_0) + f(\frac{z}{\alpha}) \Leftrightarrow \gamma \geq -p(-z_2 - x_0) - f(z_2) \; \forall z_2 \in E$

Also existiert ein geeignetes $\gamma \in \mathbb{R}$, falls $\forall z_1, z_2 \in E$ gilt:

$$-p(-z_2 - x_0) - f(z_2) \leq p(z_1 + x_0) - f(z_1) \Leftrightarrow f(z_1 - z_2) \leq p(-z_2 - x_0) + p(z_1 + x_0).$$

Dies gilt, da $f(z_1 - z_2) \overset{Vor.}{\leq} p(z_1 - z_2) \overset{2.}{\leq} p(-z_2 - x_0) + p(z_1 + x_0)$.
Also $\exists \gamma = \sup\limits_{z \in E} -p(-z + x_0) - f(z) \Rightarrow f : E \oplus span\{x_0\}$ ist linear und $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E \oplus span\{x_0\}$.

Schritt 2:
Sei $\mathcal{F} := \{(H, g_H) : E \subset H \subset X\ UVR, g_H|_E = f, g_H(x) \leq p(x)\ \forall x \in H\}$.
Sei $(H_1, g_{H_1}) \leq (H_2, g_{H_2}) :\Leftrightarrow H_1 \leq H_2$ mit $g_{H_2}|_{H_1} = g_{H_1}$ eine Halbordnung (ÜA). Falls $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ totalgeordnet ist, dann ist $H_0 = \bigcup_{(H,g_H)\in\mathcal{G}} H$ mit $g_{H_0}z = g_H z\ \forall z \in H, (H, g_H) \in \mathcal{G}$ eine obere Schranke von $\mathcal{G}$ (Wohldefiniertheit folgt aus Totalordnung).
Mit dem Lemma von Zorn folgt nun: $\mathcal{F}$ hat ein maximales Element (X_0, g_{x_0}). Falls $X_0 \subsetneq X_1$, so kann mit Schritt 1 auf $\tilde{X_0} = X_0 \oplus span\{x_0\}$ $x_0 \in X \setminus X_0$ linear fortgesetzt werden. Also ist $(\tilde{X_0}, f_{\tilde{X_0}}) \succeq (X_0, g_{X_0})$ und dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von (X_0, g_{X_0}). ■

Satz 3.2 (Satz von Hahn-Banach)**.** *X ein $\mathbb{K}$-VR, $p : X \to \mathbb{R}$ Halbnorm, E UVR, $f : E \to \mathbb{K}$ linear und*

$$f(x) \leq p(x)\ \forall x \in E$$

Dann existiert $F : X \to \mathbb{K}$, so dass

(i) $F|_E = f$

(ii) $|F(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X$

Beweisskizze. Fall 1 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Nutze wesentliche Lemma 3.1, dann sind *i*), *ii*) Konsequenzen.

Fall 2 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Setze $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ Etwas rechnen ergibt mit der $\mathbb{R}$-Linearität $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$. Damit ist auch dieser Fall wesentlich auf den reellen Fall zurückgeführt. Und Lemma 3.1 rechtfertig folgendes : Definiere dann $F(x) := F_1(x) - iF_1(ix)$. Prüfe daran alle Eigenschaften *leicht nach.* □

Beweis : 1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Mit Lemma 3.1. $\exists F : X \to \mathbb{R}$ linear mit $F|_E = f$ und $F(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$. Außerdem gilt

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x) \Rightarrow |F(x)| \leq p(x).$$

2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ mit $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-linear. Da f linear ist gilt:

$$f(ix) = if(x) = if_1(x) - f_2(x) \wedge f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) \Rightarrow f_2(x) = -f_1(ix) \Rightarrow f(x) = f_1(x) - if_1(ix).$$

Also ist $f_1 : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear und $|f_1(y)| \leq p(y)\ \forall y \in E_{\mathbb{R}}$. Mit Schritt 1 angewandt auf f_1 an $X_{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\exists \mathcal{F} : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \text{ sodass } F_1|_{E_{\mathbb{R}}} = f_1 \text{ und } |F_1(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X_{\mathbb{R}}.$$

Sei $F(x) = f_1(x) - iF_1(ix)$. zZ.: $F : X \to \mathbb{C}$ ist linear mit $F|_E = f$ und $|F(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X$. Linearität: Für $x, y \in X$, $\alpha = \underbrace{\alpha_1}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{\alpha_2}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{C}$ gilt:

$$F(x+y) = F_1(x+y) - i(F_1((x+y)i)) \overset{F_1 lin.}{=} F_1(x) + F_2(y) - i(F_1(ix) + F_1(iy)) = F(x) + F(y).$$

und

$$\begin{aligned} F(\alpha x) &= F_1(\alpha x) - iF_1(\alpha ix) = F_1((\alpha_1 + i\alpha_2)x) - iF_1(\underbrace{(\alpha_1 + i\alpha_2)ix}_{=(\alpha_1 i - \alpha_2)x}) \\ &= \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_1(x) - \alpha_1 iF_1(ix) + \alpha_2 iF_1(x) = \alpha_1 F(x) + \alpha_2 i \underbrace{(-iF_1(ix) + F_1(x))}_{=F(x)} \\ &= \alpha F(x). \end{aligned}$$

$F|_E = f$ folgt aus der Darstellung von F und f.
Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $x \in X$ fest $(F(x) \in \mathbb{C})$ gilt:
$|F(x)| = zF(x) = F(zx) \overset{F(zx)\in\mathbb{R}}{=} F_1(zx) \leq p(zx) = p(x)$. ■

Satz 3.3 (topologische Verssion von Satz 5.2)**.** *X normierter $\mathbb{K} - VR$, E UVR, $f : E \to \mathbb{K}$ stetig und linear. Dann exisitiert $F : X \to \mathbb{K}$ linear stetig mit* *(i)* $\|F\| = \|f\|$

(ii) $F|_E = f$

Beweisskizze. Betrache $p(x) := \|f\| \cdot \|x\|$. Stetigkeit zeigt man über die Beschränktheit von F. Das liefert auch bereits $\|F\| \leq \|f\|$. Die andere Ungleichung folgt, da f eine Einschränkung von F ist. TODO. □

Beweis : Betrachte $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ ist Halbnorm und $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$ (folgt aus Definition des beschränkten Operators, also Stetigkeit von f). Mit Satz 3.2. folgt:
$\exists F : X \to \mathbb{K}$ mit $F|_E = f$ und $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\| \; \forall x \in X \Rightarrow \sup\limits_{\substack{x\in X\\x\neq 0}} \dfrac{|F(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$
Damit ist F beschränkt, also stetig und $\|F\| \leq \|f\|$. Außerdem gilt:

$$\|F\| = \sup_{\substack{x\in X\\x\neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x\in E\\x\neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|.$$

■

Korollar 3.4. *X normierter $\mathbb{K} - VR$, $x_0 \in X$. Dann existiert $x' \in X'$, so dass $\|x'\| = 1$ und $\langle x_0, x'\rangle = \|x_0\|$.*

Beweisskizze. Falls $x_0 = 0$ ist die Aussage schon mal richtig. Sei $E := span x_0$ und

$$f : E \to \mathbb{K} : cx_0 \mapsto c\|x_0\| \; x \in \mathbb{K}$$
$$f(x_0) = \|x_0\|, \|f\| = \sup_{\cdots} |f(x)| = 1 \quad (UE)$$
$$\overset{Satz 3.3}{\Rightarrow} \exists$$

□

Beweis : Für $x_0 = 0$ is die Aussage klar. Sei also $x_0 \neq 0, E := span\{x_0\}, f : E \to \mathbb{K} : cx_0 \mapsto c\|x_0\| \; c \in \mathbb{K}$.
Dann ist $f(x) = \|x_0\|$ und $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\x=1}} |f(x)| = 1$ (ÜA). Mit Satz 3.3. folgt:
$\exists x' : X \to \mathbb{K}, x'|_E = f$ und $\|x'\| = \|f\| = 1 \Rightarrow x'(x_0) = \langle x_0, x'\rangle = f(x_0) = \|x_0\|$. ■

Korollar 3.5. *X normierter VR, $x_0 \in X$. Dann gilt, dass $\|x_0\| = \sup_{x'\in X, \|x'\|\leq 1} |\langle x_0, x'\rangle| = \sup_{x'\in X, \|x'\|=1} |\langle x_0, x'\rangle|$*

Beweis : $\geq ... \geq$ ist klar. Sei $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1 \overset{Def.\ Op.Norm}{\Longrightarrow} |\langle x_0, x'\rangle| \leq \|x'\| \cdot \|x_0\| \leq \|x_0\|$.
Wähle x' wie in Korollar 3.4., dann ist $|\langle x_0, x'\rangle| = \|x_0\|$. ■

Satz 3.6. *X normierteri $\mathbb{K} - VR$. X' separabel $\Rightarrow$ X separabel.*

Beweisskizze. (i) X' seperabel $\Rightarrow S := \{x' \in X' : \|x'\| = 1\}$ ist separabel.

(ii) Schreibe S als Abschluss einer abzählbaren Mengen. Alle Element haben Norm 1 und damit exisitieren Werte von den Operatoren die größer sind als $\frac{1}{2}$. Die Elemente aus S aufgespannt über eine abzählbare Menge von K ist abzählbare. Nun muss der Abschluss dieses Spannes schon X selber sein. Wäre dies nicht so, dann gäbe es ein Element das weder im Abschluss des Spannes noch X ist.

(iii) ÜA: $\exists x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$, $ker x' > E$, $\langle x_0, x'\rangle \neq 0$
Dann null der Operatoren dieser Operator als Elemente in E. Wegen der Norm 1 ist dieser Operator in S und hat wegen einer Ungleichungskette echten Abstand von allen anderen Elementen in S. Dies ist ein Widerspruch zur Dichtheit von S.

□

Beweis : 1) X' separabel $\Rightarrow \underbrace{\{x' \in X' : \|x'\| = 1\}}_{=:S}$ ist separabel (Dreiecksungleichung).

2) $S = \overline{\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}}, x'_n \in S$. Da $\|x'_n\| = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ existieren $x_n \in X : \|x_n\| = 1$ und $\langle x_n, x'_n\rangle \geq \frac{1}{2} \; \forall n$ (Definition der Operatornorm $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = x'$.
Sei $E := span\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Angenommen $E = X \Rightarrow span_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist Dicht in X.
Falls $E \neq X$, so existiert $x_0 \in X \setminus E$.

3) $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1, Kerx' \supset E$ (ÜA), $\langle x_0, x'\rangle \neq 0 \overset{x_n \in E}{\Rightarrow} \langle x_n, x'\rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\frac{1}{2} \leq \langle x_n, x_n'\rangle = \langle x_n, x_n'\rangle - \langle x_n, x'\rangle = \langle x_n, x_n' - x\rangle \leq \underbrace{\|x_n\|}_{=1} \cdot \|x_n' - x'\| \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow x' \in S = \{x_n' : n \in \mathbb{N}\}$ aber $\|x' - x_n'\| \geq \frac{1}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Dichtheit von $\{x_n' : n \in \mathbb{N}\}$ in S. ■

3.2 Dualraum und Reflexivität

Definition 3.7. $X'' = (X')'$ heißt Bidualraum.
Bemerkung: $X = \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $X' = \mathbb{R}^{1\times n}$
Frage: $X'' = X$

Bemerkung 3.8. Vorüberlegung: Sei $x_0 \in X$ betrachte $f_{x_0} : X' \to \mathbb{K}, y' \mapsto \langle x_0, y'\rangle$. $f_{x_0} \in (X')'$?,
Ja, weil $\|f_{x_0}\| = \|f_{x_0}\|_{\mathcal{B}(X',\mathbb{K})} = \sup |\langle x_0, x'\rangle| = \|x_0\|$. f_0 linear klar.
$\Rightarrow \mathcal{J}_X : X \to X'' : x \mapsto f_X = \langle x, \cdot\rangle$ ist linear, isometrisch.
$\Rightarrow \mathcal{J}_X \subset X''$ auf diese Art kann X als Teilraum von X'' aufgefasst werden.

Definition 3.9. X normierte Vr heißt reflexiv, falls $\mathcal{J}_X(X) = X''$. In diesem Fall ist $J_X : X \to X''$ ein Isomorphismus.

Lemma 3.10. *X normierter VK. Dann gilt : X reflexiv $\Rightarrow$ X vollständig.*

Beweis : X'' ist vollständig (weil $X'' = \mathcal{B}(X', \mathbb{K})$ und da $\mathbb{K}$ vollständig ist).
da $J_X : X \to X''$ isometrisch isomorph ist, ist auch X vollständig. ■

Zunächst Charakterisierung des HR-Falls

Satz 3.11 (Darstellungssatz Frächet-Riesz)**.** *Sei X Hilbertraum. Dann ist*

$$R_X : X \to X',\ x \mapsto^{\cdot, x} = (y \mapsto (\cdot,\cdot)y, x)$$

anti-linear, isometrische Bijektion. D.h.

(i) $y \mapsto (\cdot,\cdot)y, x \in X' \forall x \in X$

(ii) $\forall x' \in X' \exists! \in X \langle y, x'\rangle = (\cdot,\cdot)y, x \forall y \in X$

Beweisskizze. (i) R_x wohldefiniert, isometrisch, anti-linear: nachrechnen !

(ii) R_x surjektiv: Wenn wir nicht das Nullfunktional haben, denn finden wir ein $z \neq 0$ im orthogonalen Komplement des Kerns. Konstruiere für dieses z ein Funktional durch $x' = (\cdot, xz)$ mit $c \in \mathbb{C}$. Diese Konstruktion gilt dann auch für Elemente im Kern.

□

Beweis : 1) R_X ist wohldefiniert, semilinear und isometrisch.

Sei $x \in X$. Dann ist $y \mapsto (y, x)$ linear (folgt aus der Linearität des Skalarprodukts). Es gilt

$$|\langle y, R_X x\rangle| \overset{Def.R_X}{=} |(y,x)| \overset{C.S.}{\leq} \|y\| \cdot \|x\| \overset{\forall y \in X}{\Rightarrow} R_X x \in X' \text{ mit } \|R_X x\| \leq \|x\|.$$

Setze $y = x$ ein: $|\langle x, R_X x\rangle| = |(x,x)| = \|x\|^2 \overset{Def.\ Op.Norm}{\Longrightarrow} \|R_X x\| \geq \|x\| \Rightarrow \|R_X x\| = \|x\|$.

$R_X(x + y)) = R_X x + R_X y$ klar. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\langle y, R_X \alpha x\rangle = (y, \alpha x) = \overline{\alpha}(y, x) = \overline{\alpha}\langle y, R_X x\rangle \Rightarrow R_X \alpha x = \overline{\alpha} R_X x.$$

2) R_X ist surjektiv.

Sei $x' \in X'$. Falls $x' = 0$, dann wähle $x = 0$ und es gilt $R_X 0 = 0$.
Angenommen $x' \neq 0 \Rightarrow Kerx' \neq X$. Weil X Hilbertraum ist, gilt:

$$X = Kerx' \oplus (Kerx')^{\perp} \Rightarrow \ \exists z \neq 0, z \in (Kerx')^{\perp}.$$

Ansatz: $x' = (\cdot, cz)$ mit $c \in \mathbb{C}$ (OBdA ist X ein $\mathbb{C} - HR$), also $\langle y, x' \rangle = (y, cz)\ \forall y \in X$.
Für $y = z : \langle z, x' \rangle = (z, zc) \Rightarrow \bar{c} = \dfrac{\langle z, x' \rangle}{(z,z)} \Rightarrow c = \dfrac{\overline{\langle z, x' \rangle}}{(z,z)}$.
Beh.: $\forall y \in X : \langle y, x' \rangle \stackrel{!}{=} (y, cz)$

$$\begin{aligned} \langle y, x' \rangle = \bar{c}(y,z) = \frac{\langle z, x' \rangle}{(z,z)}(y,z) &\Leftrightarrow \langle y, x' \rangle (z,z) = \langle z, x' \rangle (y,z) \\ &\Leftrightarrow (\langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y \perp z \end{aligned}$$

Da $z \in (Kerx')^{\perp}$ verbleibt zu Zeigen, dass $\langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y \in Kerx'$:

$$0 = \langle y, x' \rangle \langle z, x' \rangle - \langle z, x' \rangle \langle y, x' \rangle = \langle \langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y, x' \rangle.$$

Wir haben für $x' \in X'$ also ein $x \in Xx = cz$ konstruiert, sodass $x' = \underbrace{(\cdot, x)}_{R_X x}$. Daraus folgt die Surjektivität. ■

Korollar. *Beschränkte lineare Abbildung $L^2(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$). Dann wird diese beschrieben durch ein Element aus $L^2(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$).*

Satz 3.12. *X Hilbertraum $\Rightarrow X$ relfexiv ($J_X X = X''$)*

Beweisskizze. Zu zeigen: J_x surjektiv.

(i) Z.z.: X' Hilbertraum. Nutze bijektivität von R_x und Isometrie.
Wende dann als nächstes Satz 5.11 zweimal an, das liefert einen Kanditaten für x und x''. Dann bleibt zu zeigen, dass $J_x x = x''$ erfüllt. Dies sind zwei Funktionale und ihre Gleichheit zeigt man durch nachrechnen, dass sie punktweise gleich sind.

□

Beweis : z.Z.: J_X ist surjektiv.

1) X' ist Hilbertraum.
Seien $x', y' \in X'$. Definiere $(x', y')'_X := (R_X^{-1} y', R_X^{-1} x')$.
$(\cdot, \cdot)'_X$ ist Skalarprodukt (folgt aus den Eigenschaften von R_X) mit $(x', x')'_X = \|R_X^{-1} x'\|^2 = \|x\|^2$.
2) Sei $x'' \in X''$. Gesucht ist $x \in X : J_X x = x''$. Wende Satz 3.11. auf HR X' folgendermaßen an:
Sei $x' := R_{X'}^{-1} x''$. Wende Satz 3.11. nun auf X an: $x := R_X^{-1} x' \in X$.

$$\begin{aligned} \forall y' \in X' : \langle y', x'' \rangle = (y', x')'_X &\stackrel{Def.(\cdot,\cdot)'_X}{=} (R_X^{-1} x', R_X^{-1} y')_X \\ &= \langle \underbrace{R_X^{-1} x'}_{=x}, y' \rangle = \langle x, y' \rangle \stackrel{Def. J_X}{=} \langle y', J_X x \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow x'' = J_X x$ ■

Definition 3.13. X normierter $\mathbb{K} - VR$, $M \subset X$, $N \subset X'$. Dann heißt

$$M^{\perp} := \{x' \in X' : \langle x, x' \rangle = 0\ \forall x \in M\}$$

Orthogonalraum von M.

$$N_{\perp} := \{x \in X : \langle x, x' \rangle = 0\ \forall x' \in N\}$$

Orthogonalraum von N.
Klar: $M^{\perp} \subset X', N_{\perp} \subset X$.

Lemma 3.14. *X normierter Raum. $M \subset X$, $N \subset X'$. Dann*

(i) $M^\perp \subset X'$ abgeschlossen UVR.

(ii) $N_\perp \subset X$ abgeschlossen UVR.

(iii) $M \subset (M^\perp)_\perp$

(iv) $N_\perp \subset N^\perp$, wobei : $N_\perp \subset X, N^\perp \subset X''$ als UVRe von X'' aufgefasst werden.

Beweisskizze. (i) Folge nehmen und sehen das sie in der Menge bleibt.
(ii) Schnitt über die Kerne, die als abgeschlossenen Mengen abgeschlossen bleiben.
(iii) Mengeinklusion
(iv) Mengeninklusion

□

Beweis : TODO ■

ÜA: X normierter Raum, $x_0 \notin \overline{E}$, $E \subset X$ UVR. Dann existiert $x' \in X'$ mit $Kernx' > \overline{E}$ und $\langle x_0, x' \rangle \neq 0$.

Satz 3.15. *X normierter Raum, $M \subset X$ UVR. Dann gilt*

$$\overline{E} = (E^\perp)_\perp$$

Beweisskizze. Mengeninklusion in beide Richtung. Die eine mit Lemma 3.14 (iii), die andere braucht die ÜA. □

Beweis : TODO ■

Korollar 3.16. *X normierter Raum, $E \subset X$ UVR>. Dann gilt E abgeschlossen $\Leftrightarrow E = (E^\perp)_\perp)$*

Satz 3.17 (Übung)**.** *X normierter Raum. $M \subset X$ abgeschlossen UVR. Dann*

(i) $X'/M^\perp$ ist normisomorph zu M'.

(ii) $(X/M)'$ ist normisomorph zu $M^\perp$.

Satz 3.18. *X reflexiv normierter Raum. Dann*

(i) X Banachraum

(ii) X' reflexiv.

Beweisskizze. (i) Folgt aus Satz 1.12.
(ii) Betrachte kanonische Injektion und zeige dann die Surjektivität.

□

Beweis : TODO ■

Satz 3.19. *X Banachraum. Dann gilt*

$$X \text{ reflexiv } \Leftrightarrow X' \text{ reflexiv }.$$

Beweisskizze. $\Rightarrow$ Satz 3.18
$\Leftarrow$ nerviger Beweis. □

Beweis : TODO ■

3.3 Duale und adjungierte Abbildungen

Definition 3.20. X, Y normierte Räume, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Die Abb $T' : Y' \to X'$ mit

$$\langle x', T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle \ \forall y' \in Y', x \in X.$$

heißt der zu T duale Operator.
Einfach zu sehen: T' ist eine linearer Operator, weil TODO.

Satz 3.21. *X, Y normierter Räume, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann gilt*

(i) $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$ *mit* $\|T'\| = \|T\|$

(ii) $Ker\, T' = \{0\} \Leftrightarrow \overline{Im\, T} = Y$

Beweisskizze. (i) Abschätzung in beide Richtung.

(ii) Injektivität vom dualen Operatoren voraussetzen; ein Funktional das alle Elemente von x null, ist es das Nullfunktional. Angenommen das Bild ist nicht abgeschlossen, dass muss es ein Element geben, dass ungleich null ist. Widerspruch.
Andere Richtung, irgendetwas mit Stetigkeit und Dichtheit vom Bild.

□

Beweis: TODO ■

Korollar 3.22. *X Banachraum, Y normierter Raum. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, so dass ein $m > 0$ existiert mit*

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \ \forall x \in X$$

. (T injektiv und hat abgeschlossenes Bild) Dann sind äquivalent

(i) T surjekiv

(ii) T' injekitv

Beweisskizze. T' injektiv gilt genau dann wenn der Abschluss vom Bild Y ist und dies gilt wegen der geforderten Ungleichung genau dann wenn, bereits nur das Bild gleich Y. □

Beweis: TODO ■

Satz 3.23. *X, Y normierter Räume, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann*

(i) $T'' \in \mathcal{B}(X'', Y'')$ *und* $T = T''|_{imJ_X}$ *(genauer:* $T''J_X = J_YT$*). Insbesondere* $T'' = T$*, wenn X reflexiv ist.*

(ii) $S \in \mathcal{B}(X,Y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow (\alpha S + \beta T)' = \alpha S' + \beta T'$

(iii) $S \in \mathcal{B}(Y,Z) \Rightarrow (ST)' = T'S'$

Beweis: TODO ■

Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft -** Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand > 0 haben. Für ein Gegenbeispiel $\nearrow$ topologischer Raum

2. **essentiell beschränkt -** $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt essentiell beschränkt, falls
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)| := \inf_{\substack{N\in\mathfrak{A}\\ \mu(N)=0}} \sup_{x\in\Omega\setminus N} |f(x)| < \infty$$
oder auch: f ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und $\mu = \lambda$, da f nur auf $\mathbb{Q}$ nicht null ist, und $\mathbb{Q}$ ist Lesbesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$ **-** Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq P(X)$. Die Elemente von $\mathcal{T}$ sind die *offenen Mengen*. $\mathcal{T}$ definiert eine *Topologie*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

   (i) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$

   (ii) $A_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$, $\mathbb{N} \supset I$ endlich $\Rightarrow \cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

   (iii) $A_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$, I bel. Indexmenge $\Rightarrow \cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

   $(X, \mathcal{T})$ ist der *topologische Raum.*

   Ein Beispiel, für einen topologischen Raum sind die metrischen Räume (X, d): d induziert dann eine Topologie auf X, die offenen Mengen sind nämlich durch d bestimmt.

   Sei $M := \{1, 2\}, \ldots$

   $\mathcal{T} := \{\emptyset, M\}$. Die triviale Topologie, nur $\emptyset$ und M sind offen.

   $\mathcal{T} := P(M)$. Die diskrete Topologie, alle Mengen sind offen. Die diskrete Metrik induziert genau diese Topologie.

   $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. M ist hier nicht hausdorffsch, denn egal welche Umgebung man um 2 betrachtet, man kann nicht erreichen, dass 1 nicht in der gleichen ist.