# Liste der noch zu erledigenden Punkte

# Inhaltsverzeichnis

# List of Theorems

# Kapitel 1

# Arbeit im Gange - Grundlagen

## 1.1 Normierte Räume

Was macht man in der Funktionalanalysis? man definiert sich einen vernünfitgen Abstandsbegriff: z.B. den Begriff der Metrik auf (zunächst einmal) einer beliebigen Mengen $E$. Damit hat man einen metrischen Raum geschaffen.

**Arsenal an Begriffen** Der nötige Apparat für die Entwicklung der Funktionanalysis ist nicht groß, er besteht im wesentlichen aus den Begriffen metrischer Raum, Topologie, Konvergenz, Cauchy-Folge und Stetigkeit.

Einige weitere Begriffe sind in 1.28 und 1.30 festgehalten.

Es sei stets für das ganze Skript $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

**Defintion 1.1: Halbnorm, Seminorm**

Sei $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist eine *Halbnorm* (oder Seminorm) eine Abbildung $|||\cdot||| : X \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $|||x||| \geq 0$

(ii) $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$

(iii) $|||x + y||| \leq |||x\ ||| + |||\ y|||$

Eine Norm efüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

**Bemerkung 1.2: Kern und Quotientenraum von Halbnormen**

(a) $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$ bildet einen Unterraum von $X$.

(b) $X/N$ ist ein normierter Raum über(?) $||x + N|| := |||x|||$

(c) X ist ein vollständiger seminormierter Raum $\Rightarrow X/N$ ist ein Banachraum

Siehe Aufgabe 1 auf Blatt 4.

**Beispiele 1.3: wichtige Vektorräume**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum

(a) Für $p \in [1, \infty)$. Definiere seminormierten Raum durch

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar} : \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \right\} \quad \text{mit} \quad |||\, f|||_p := (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum ($\nearrow$ Ana III).

(b) Für $p = \infty$ gibt es mit $|||f|||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ ebenfalls einen seminormiert Raum

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ messbar und essentiell beschränkt } \}.$$

$L^\infty(\Omega, \mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum.

(c) Sei $p \in [1, \infty]$ und $|\cdot|$ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und der Maßraum sei gegeben durch $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$. $\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$ heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

(d) $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ messbar, $\lambda^n$ Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$ heißt Lebesgue-Raum.

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $BC(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$ versehen mit der Suprenumsnorm ist ein Banachraum.

**Bemerkung 1.4: diverse Fakten**

Seien $p, q, r \in [1, \infty)$

(a) $L^p(\Omega, \mu)$ ist ein Banachraum, $L^2(\Omega, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit $(f, g)_2 := \int_\Omega f\bar{g}d\mu$

(b) Falls $\mu(\Omega) < \infty$, $p \geq r \Rightarrow\ L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$

(c) Wenn $p \geq r \Rightarrow\ L^r(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$

(d) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mu) \Rightarrow\ fg \in L^1(\Omega, \mu)$ mit $||fg||_1 \leq ||f||_p\, ||g||_q$ (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für $p = 1, q = \infty$ wobei hier $\frac{1}{\infty} := 0$.

(e) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $C_0^k := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \,|\, \operatorname{supp} f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, \infty)$. Dies gilt nicht für $p = \infty$, da $f = \text{const}$ oder $f = sign$ sich nicht durch Funktionen aus $C_0^k$ approximieren lassen.

(f) $BC(\Omega)$ ist abgeschlossen in $L^\infty(\Omega)$, aber nicht in $L^p(\Omega)$ für $p < \infty$, dennoch ist $BC(\Omega)$ in beiden Fällen ein Unterraum.

## 1.2 Lineare Operatoren

### 1.2.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

**Defintion 1.5: linearer Operator**

Seien $X, Y$ $\mathbb{K}-$Vektorräume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ x, y \in X$$

wir schreiben auch $Tx$ statt $T(x)$.
Wenn $Y = \mathbb{K}$ dann heißt ein linearer Operator $T : X \to \mathbb{K}$ *Funktional*.
Wenn $X, Y$ normierte $\mathbb{K}-$Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator $T$ *beschränkt*, wenn

$T(U_1(0)) \subseteq Y$ beschränkt ist. In Quantoren lautet diese Aussage

$$\exists M \geq 0, \text{ so dass } \forall x \in X: \ ||Tx||_Y \leq M \text{ mit } ||x||_X < 1$$

**Bemerkung**

Die Bilder beschränkter Mengen $M$ unter einem beschränkten linearen Operator $T$ sind beschränkt. Denn existiert ein $R > 0$ mit $M \subseteq U_R(0)$, sodass

$$T(M) \subseteq T(U_R(0)) = T(R \cdot U_1(0)) = R \cdot T(U_1(0))$$

und dies ist beschränkt.

**Beispiele 1.6: Lineare Operator**

a) $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$, $\{T : X \to Y : T \text{ linearer Operator}\} = \mathbb{K}^{m\times n}$. $T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ ist beschränkt. Denn:

$$||T||_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |t_{ij}| < \infty, \ t_{ij} \text{ sind die Einträge der Matrix } T.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist $T$ beschränkt.

b) $T : \mathrm{L}^1(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$, $Tf := \int_\Omega f d\mu$. Es gilt $|Tf| = |\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu = ||f||_1$. Also ist $|Tf| < 1 \ \forall f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mu) : ||f||_1 < 1$ und damit ist $T$ beschränkt.

**Satz 1.7: Charakterisierung der Stetigkeit**

Seien $X, Y$ normierte Räume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

(i) $T$ beschränkt,

(ii) $T$ ist lipschitz stetig,

(iii) $T$ ist gleichmäßig stetig,

(iv) $T$ ist stetig,

(v) $T$ stetig in 0,

(vi) $\exists x \in X : T$ stetig in $x$.

*Beweis.* "$(i) \Rightarrow (ii)$" : Sei $M > 0$, so dass $||Tx||_Y \leq M \ \forall x \in U_1(0)$. Es gilt $T0 = 0$. Weiterhin gilt für $x \in X \backslash \{0\}$:

$$||Tx||_Y = \left|\left| 2 \ ||x||_X \ T\left(\frac{x}{2\,||x||_X}\right)\right|\right| = 2 \ ||x||_X \left|\left| T \underbrace{\left(\frac{x}{2\,||x||_X}\right)}_{\in U_1(0)} \right|\right|_Y \leq 2M\,||x||_X \,.$$

Also gilt $||Tx||_Y \leq 2M\,||x||_X \ \ \forall x \in ||x||_X$ und daraus folgt die Lipschitz Stetigkeit wegen

$$||Tx_1 - Tx_2|| = ||T(x_1 - x_2)|| \leq 2M\,||x_1 - x_2||_X \ \ \forall x_1, x_2 \in X$$

"$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$" : Der Beweis dieser Implikationskette ist Gegenstand der Grundvorlesungen [1].

[1] Damit meinen wir stets Sätze, die in Analysis/LA I,II oder Höhere Analysis bewiesen wurden.

"$(vi) \Rightarrow (v)$" : Sei $x \in X$, so dass $T$ stetig in $x$ ist. Sei $(x_n)$ Nullfolge in $X$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x+x_n) = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(x+x_n) = Tx \overset{\text{stetig in } 0}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0 = T\,0$$

"$(v) \Rightarrow (i)$" : Beweis durch Widerspruch: Angenommen $T$ ist unbeschränkt $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in U_1(0)$, so dass $||Tx_n||_Y \geq n$ ($\Rightarrow x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$). Dann gilt $\frac{x_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, aber $\left|\left|T\frac{x_n}{n}\right|\right|_Y = \frac{1}{n}||Tx_n||_Y \geq \frac{1}{n}\cdot n = 1$ Das hieße aber $T$ ist unstetig in 0.

■

An dieser Stelle werden einige Definition und Bemerkung festgehalten, die in späteren Kapitel beleuchtet und untersucht werden.

**Bemerkung 1.8: $\mathcal{B}(X,Y)$ und Dualraum**

a) $\mathcal{B}(X,Y) := \{T : X \to Y : T \text{ beschränkt}\}$

b) $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X,X)$ beides sind $\mathbb{K}$-VR.

c) $X' := \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ topologischer Dualraum von $X$.

**Bemerkung 1.9: wichtige Fakten zu Linearen Abbildung**

d) $ker\,T$, $im\,T$ sind UVR.

e) $(i)-(vi)$ äquivalent zu $(vii)$: Jede beschränkte Menge wird auf eine beschränkte Menge abgebildet.

f) Es gibt beschränkte lineare Operatoren, so dass $Im\,T$ nicht abgeschlossen ist. ↗ B2,A1

g) Für alle $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ ist $kerT$ abgeschlossen, da $T$ stetig ist und der $ker\,T = T^{-1}(\{0\})$, also Urbild einer abgeschlossen Menge unter einer stetigen Funktionen.

**Satz 1.10: Operatornormen**

$X, Y$ normierte Räume. $\mathcal{B}(X,Y)$ normierter Raum mit folgendener Norm

$$||T|| := \sup_{x\in U_1(0)} ||Tx||_Y\,.$$

*Beweis.* (*Positivität:*) $||0|| = 0$. Sei $||T|| = 0 \Rightarrow Tx = 0\ \forall\ x \in U_1(0)$. Sei $x \in X$ beliebig. $\Rightarrow Tx = 2\,||x||_X\ T\left(\frac{x}{2||x||_X}\right) = 0 \Rightarrow T = 0$.

(*Homogenität:*) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann $||\lambda T|| = \sup_{x\in U_1(0)} ||(\lambda T)x||_Y = |\lambda| \sup_{x\in U_1(0)} ||Tx|| = |\lambda|\,||T||$.

(*Dreiecksungleichug:*) Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann $||T_1+T_2|| = \sup\limits_{x\in U_1(0)} (||T_1x+T_2x||_Y) \leq \sup\limits_{x\in U_1(0)} (||T_1x||_Y + ||T_2x||_Y) \leq \sup\limits_{x_1,x_2\in U_1(0)} (||T_1x_1||_Y + ||T_2x_2||_Y) \leq \sup\limits_{x_1\in U_1(0)} ||T_1x_1||_Y + \sup\limits_{x_2\in U_1(0)} ||T_1x_2||_Y = ||T_1|| + ||T_2||$

■

**Bemerkung 1.11: Äquivalenz der Operatornorm**

Es gilt $||T|| = \sup\limits_{x\in\overline{U_1(0)}} ||Tx||_Y = \sup\limits_{x\in\partial U_1(0)} ||Tx||_Y = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X}$ (↗ Ü1, A2).

*Beweis.* Wir zeigen

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} =: M_3 \;\geq\; ||T|| \;\geq\; M_1 := \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} ||Tx||_Y$$

und

$$M_3 \geq M_1 \geq M_2 \geq M_3 \quad \text{mit } M_2 := \sup_{x\in\partial U_1(0)} ||Tx||_Y$$

Wobei $M_1 \geq M_2$ gilt, da wir das Supremum über eine größere Menge bilden.

"$M_3 \geq ||T|| \geq M_1$ :" $\forall$ $||x|| = 1$ und $U_1(0) \ni x_n = x - \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt

$$||Tx_n|| = \left|\left|T(x - \frac{1}{n})\right|\right| = \left|\left|Tx - T\frac{1}{n}\right|\right| \to ||Tx - T0|| = ||Tx||$$

Damit hat man formal gezeigt, dass man für jeden Vektor in $\overline{U_1(0)}$ bezüglich den man ein Supremum bilden kann, auch Folgen in $U_1(0)$ findet. Kurz: $||T|| \geq M_1$. Weiterhin gilt $||Tx|| \leq M_3 \cdot ||x||$ $\forall x \in X$, damit folgt

$$||T|| = \sup_{||x||<1} ||Tx|| \leq \sup_{||x||<1} (M_3 \cdot ||x||) = M_3 \sup_{||x||<1} ||x|| = M_3$$

.

"$M_3 \geq M_1$ :" Sei $||x|| \leq 1$. Dann gilt $||Tx|| \leq ||Tx|| \,/\, ||x||$. Also:

$$M_1 = \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} ||Tx|| \leq \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} (||Tx|| \,/\, ||x||) \leq M_3$$

"$M_2 \geq M_3$ :" Einfaches Umformen ergibt:

$$M_3 = \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup_{x\neq 0} \left|\left| T\frac{x}{||x||}\right|\right| \leq M_2$$

■

**Satz 1.12: Y Banachraum, $\mathcal{B}(X,Y)$ Banachraum**

$X$ normierter Raum, $Y$ Banachraum. Dann ist $\mathcal{B}(X,Y)$ Banachraum.

*Beweis.* Sei $(T_n)$ $CF$ in $\mathcal{B}(X,Y)$, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall n, m > N : ||T_n - T_m|| < \varepsilon$. Also $||T_n x - T_m x||_Y \leq ||T_n - T_m|| \cdot ||x|| < \varepsilon \cdot ||x||$ $\forall x \in X$. Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von Y, dass $(T_n x)$ in $Y$ für alle $x \in X$ konvergiert. Wir setzen den Grenzwert auf $T : X \to Y$, $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Die so definierte Abbildung, also dieser Grenzwert, erfüllt folgende Eigenschaften:

a) $T$ ist ein linearer Operator.

b) $T$ ist beschränkt.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} ||T - T_n|| = 0$ (also Normkonvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz)

Zu a): $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda T_n x_1 + \mu T_n x_2) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} T_n x_1 + \mu \lim\limits_{n\to\infty} T_n x_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2$

zu b): Wegen $||T_n - T_m|| \geq (||T_n|| - ||T_m||)$ gilt $||T_n||$ ist $CF$ in $\mathbb{R}$ , also beschränkt: $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$. Für $x \in U_1(0)$ gilt $||Tx||_Y = \lim\limits_{n\to\infty} ||T_n x||_Y \leq \lim\limits_{n\to\infty} ||T_n|| \cdot ||x||_X \leq M \cdot ||x||_X \leq M$. (vgl. Def 1.5, "$\Leftrightarrow$")

zu c): Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m,n > N : ||T_n - T_m|| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $x \in U_1(0)$ gilt somit

$$||(T - T_n)x|| = \lim_{m\to\infty} ||(T_m - T_n)x|| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow ||T - T_n|| = \sup_{x\in U_1(0)} ||(T - T_n)x|| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \forall n \geq N$$

Also ist $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und aufgrund der Beliebigkeit der $CF$, folgt die Vollständigkeit. ∎

**Kollar 1.13: Dualraum ist ein Banachraum**

$X$ normierter Raum $\Rightarrow X'$ Banachraum.

**Bemerkung 1.14: wichtige (negative) Resultate**

a) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y,Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{B}(X,Z)$ und $||ST|| \leq ||S|| \cdot ||T||$ (gilt wegen $||S(Tx)||_Z \leq ||S|| \cdot ||Tx||_Y \leq ||S|| \cdot ||T|| \cdot ||x||_X \leq M\,||x||_X\ \forall x \in X$ und der Linearität von $ST$.)

b) $I \in \mathcal{B}(X,X)$, $||I|| = 1$.

c) Aus punktweiser Konvergenz $T_n x \to Tx$ folgt i.A. nicht $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} ||T_n - T|| = 0$).

**Bsp:** Sei $X = \ell^p$, $p \in [1,\infty)$, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_1,\dots,x_n,\dots) \in \ell^p$ und

$$T_n : \ell^p \to \ell^p,\ T_n x = (x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)$$

Es gilt $T_n \in \mathcal{B}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ (nachrechnen!) und $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$ :

$$||T_n(x_k) - x_n||_X = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon\ \Rightarrow ||T_n - x||_X \to 0\ (n \to \infty).$$

Aber! Betrachte $||T_n e_{n+1} - e_{n+1}||_X = ||e_{n+1}||_X = 1$ Also gilt $||I - T_n|| \geq 1$.

d) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $T$ bijektiv. Dann ist $T^{-1}$ i.A. nicht beschränkt.

**Bsp.** $X \in C[0,1]$, $Y = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$ mit $||x||_X = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ und $||\cdot||_X = ||\cdot||_Y$ und $T : X \to Y$, $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)ds$.

- $T^{-1} = S : Y \to X, Sy = y'$. (Zeige $ST = I_X$ und $TS = I_Y$)
- $T^{-1} \notin \mathcal{B}(Y,X)$ (Sei $y_n(t) = t^n \in Y$, $(T^{-1}y_n)(t) = n \cdot t^{n-1} \Rightarrow ||y_n||_Y = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\left|T^{-1}y_n\right|\right|_X = n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T^{-1}$ kann nicht beschränkt sein.

Bem: $Y$ ist nicht vollständig. Wir werden sehen, dass dies wesentlich ist.

**Satz 1.15: Charakterisierung stetige Inverse und Injektivität**

Sei $X,Y$ normierte $\mathbb{K}$-VR, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann sind äquivalent:

(i) $T$ ist injektiv und $T^{-1} \in \mathcal{B}(im(T),X)$.

(ii) $\exists\, m > 0 : ||Tx||_Y \geq m\,||x||_X\ \forall x \in X$.

*Beweis.* "(i) $\Rightarrow$ (ii)": $\exists\, M > 0, \left|\left|T^{-1}y\right|\right| \leq M\,||y||\ \forall y \in imT$. Sei $x \in X\ \exists y \in imT : x = T^{-1}y \Rightarrow ||x||_Y \leq M\,||Tx||_Y \Rightarrow ||Tx||_Y \geq \frac{1}{M}\,||x||_X = m\,||x||_X$

"$(ii) \Rightarrow (i)$": Sei $x \in X : Tx = 0$. Aus $||Tx|| \geq m\,||x||$ folgt $x = 0$ und damit ist $T$ injektiv. Sei $y \in imT$ $\exists x \in X : Tx = y$ und $T^{-1}y = x \overset{(ii)}{\Rightarrow} ||T^{-1}y|| = ||x|| \leq \frac{1}{m}\,||Tx||_Y = \frac{1}{m}\,||y||_Y$, also $\exists\, M = \frac{1}{m}$, $||T^{-1}y||_X \leq M\,||y||_Y \;\; \forall y \in imT \Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{B}(imT, X)$

■

Die Negation dieser Aussage halten wir explizit fest mit folgendem

**Kollar 1.16: Nichtexistenz der stetigen Inversen**

Seien $X, Y$ normierte $\mathbb{K}$-VR, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

(i) $T$ besitzt <u>keine</u> stetige Inverser $T^{-1} : imT \to X$.

(ii) $\exists$ Folge $(x_n)$ in $X$, so dass $||x_n|| = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} ||Tx_n|| = 0$

**Defintion 1.17: Äquivalenz von Normen**

$X - \mathbb{K} - VR$ mit Norm $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$. Dann heißt $||\cdot||_1$

(a) stärker als $||\cdot||_2$, falls gilt $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x||_1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x||_2$

(b) schwächer als $||\cdot||_2$, falls $||\cdot||_2$ stärker ist als $||\cdot||_1$.

(c) äquivalent falls $||\cdot||_1$ stärker und schwächer ist als $||\cdot||_2$

**Satz 1.18: Charakterisierung der Äquivalenz von Normen**

$X$ $\mathbb{K} - VR$ mit Norm $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$. Dann gilt

(a) $||\cdot||_1$ ist stärker als $||\cdot||_2 \Leftrightarrow \exists\, M > 0 : ||x||_2 \leq M\,||x||_1 \;\; \forall x \in X$

(b) $||\cdot||_1$ ist schwächer als $||\cdot||_2 \Leftrightarrow \exists\, M > 0 : ||x||_1 \leq M\,||x||_2 \;\; \forall x \in X$

(c) $||\cdot||_1$ ist äquivalent zu $||\cdot||_2 \Leftrightarrow \exists\, m, M > 0 : m\,||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M\,||x||_1 \;\; \forall x \in X$

*Beweis.* zu (a): $\Rightarrow id : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2)$ ist stetig wegen Vor. $\overset{S.1.15}{\Rightarrow}$ und weil $id$ linear, $id$ beschränkt, $id \in \mathcal{B}((X, ||\cdot||_1), (X, ||\cdot||_2)$ d.h. $\exists M > 0 : ||id(X)||_2 \leq M\,||x||_1 \;\; \forall x \in X$.
$\Leftarrow$ Wissen $\exists M > 0 : ||x||_2 \leq M\,||x||_1 \;\; \forall x \in X$. Sei $||x_n - x||_1 \to 0 \Rightarrow ||x_n - x||_2 \leq M\,||x_n - x||_1 \to 0 \; (n \to \infty) \Rightarrow ||\cdot||_1$ stärker als $||\cdot||_2$.

■

**Defintion 1.19: topologischer Isomorphismus**

Zwei normierte $\mathbb{K}$-VR $X, Y$ heißen *topologisch isomorph*, falls es ein Isomorphismus $T : X \to Y$ mit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Dann heißt $T$ topologischer Isomorphismus.

**Satz 1.20: Charakterisierung topologisch isomorph**

$X, Y$ topologisch isomorph $\Leftrightarrow \exists m, M > 0 : T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und injektiv : $m\,||x||_X \leq ||Tx||_Y \leq M\,||x||_X \;\; \forall x \in X$

*Beweis.* 'Klar' wegen Satz 1.18 und Satz 1.15. ■

**Bemerkung 1.21: Isometrie und lineare Bijektion**

1. Falls, $m = M = 1$, dann nennen wir $T$ *Isometrie*. Also $||Tx|| = ||x||$.
2. Falls $\dim X = \dim Y = n \in \mathbb{N}$: $X, Y$ topologisch isomorph und topologischer Isomorphismus $=$ lineare Bijektion.

Isometrie: Metrik bleibt erhalten, Isomorphismus: im Sinne der LA, Normisomorph: beides

**Satz 1.22: Fortsetzung von stetigen Operatoren**

$X, Y$ normierter Raum, $Y$ ein Banachraum, $Z \subseteq X$, $Z$ dichter UVR. $T \in \mathcal{B}(Z, Y)$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$, so dass $T|_Z = T$.

*Beweis.* a) Zeige: $\tilde{T}$ ist wohldefiniert. Da $T$ beschränkt ist, ist $(Tz_n)$ Cauchyfolge in $Y \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} Tz_n$ existiert. Seien $(V_n), (Z_n)$ Folgen in $Z$ mit $||V_n - x|| \to 0, ||Z_n - x|| \to 0$. Dann gilt:

$$||TV_n - TZ_n|| \overset{T\ beschr.}{\leq} ||T|| \cdots ||V_n - Z_n|| \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} TV_n = \lim_{n\to\infty} TZ_n.$$

b) Zeige: $\tilde{T}$ ist linear und beschränkt. (Betrachte Summen von Limiten, Limes der Summen, etc.; insbesondere ist $T : X \to Y$ immer beschränkt, wenn $\dim(X) < \infty$)

c) Zeige: $\tilde{T}|_Z = T$ und $\tilde{T}$ ist eindeutig. Sei $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ mit $\tilde{T}|_Z = T$ und $x \in X$. Dann

$$\exists (Z_n) \text{ in } Z \text{ mit } Z_n \to x (\text{da } Z \text{ dicht in } X) \overset{T\ beschr.}{\Rightarrow} \tilde{T}x = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}Z_n = \lim_{n\to\infty} TZ_n.$$

d) Zeige: $\left|\left|\tilde{T}\right|\right| = ||T||$.

em " $\leq$ " Sei $x \in U_1(0) \subset X \Rightarrow \exists (Z_n)$ in $Z$ mit $Z_n \to x$ und damit:

$$\left|\left|\tilde{T}\right|\right| = \sup_{x\in U_1(0)} \left|\left|\tilde{T}x\right|\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left|\tilde{T}Z_n\right|\right| = \lim_{n\to\infty} ||TZ_n|| \leq \lim_{n\to\infty} ||T||\,||Z_n|| = ||T|| \lim_{n\to\infty} ||Z_n|| \leq ||T||.$$

" $\geq$ " Da $Z \subset X$ gilt auch $\sup\limits_{z\in Z} ||Tz|| \leq \sup\limits_{x\in X} ||Tx||$.

■

**Satz 1.23: Fortsetzung bleibt normerhaltend**

Ist $T$ normerhaltend (in $\mathbb{R}^n$ die unitären Matrizen $||Tx|| = ||x||$), so ist $\tilde{T}$ ebenfalls normerhaltend.

**Beispiele 1.24: Konstruktion eines unbeschränkten Funktionals**

Sei $X = \ell^1$ (Raum der absolut konvergenten Folgen)

Betrachte: $x_0 = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots) \in \ell^1$, $||x_0|| = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^2}| = \frac{\pi^2}{6}$,

Einheitsvektor $e_k = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$.

$\nearrow$ Erzeugnis: <u>endliche</u> linear Kombination der Einheitsvektoren $\Rightarrow \operatorname{span}\{e_k\}_{k_{\mathbb{N}}} = \{(x_1, x_2, \dots, 0, \dots)\}$ (Folgen, die irgendwann zu 0 werden.)

Die Familie $B := (x_0, e_1, e_2, e_3, \dots)$ ist linear unabhängig. $\Rightarrow B_i$ lässt sich zu Basis $B = (b_i)_{i\in I}$ mit $\mathbb{N}_0 \subseteq I$ und $b_0 = x_0, b_i = e_i\ \forall i \in \mathbb{N}$ erweitern (überabzählbar).

Sei $x \in X = \ell^1 \Rightarrow \exists$ eindeutige Darstellung $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ endlich}} \alpha_n e_n + \sum_{\substack{i\in I\setminus N_0 \\ endlich}} \alpha_i b_i$.

Definiere das Funktional: $f : \ell^1 \to \mathbb{K}N?$ mit $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ endlich}} \alpha_n e_n + \sum_{\substack{i\in I\setminus N_0 \\ endlich}} \alpha_i b_i \mapsto \alpha_0$

Wir zeigen: $Kerf$ nicht abeschlossen.

Betrachte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \Rightarrow x_n \in Kerf\ \forall n \in \mathbb{N}$, da $x_n \in span\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt jedoch $x_n \to x_0 \notin Kerf$, da $f(x_0) = 1$. □

### 1.2.2 Neumannsche Reihe

Nun versuchen wir mit Erfolgt einer waghalsige Verallgemeinerung der geometrischen Reihe im Reellen für Operatoren und Banachräume. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\ \forall q \in \mathbb{C}$ mit $||q|| < 1$

**Satz 1.25: Neumanansche Reihe**

$X$ Banachraum. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann sind äquivalent:

i) Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} T^k = I_X + T^1 + T^2 + \dots$ ist konvergent bzgl. der Operatornorm.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^n|| = 0$

iii) $\exists N \in \mathbb{N} : \left|\left|T^N\right|\right| < 1$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{||T^n||} < 1$.

In diesem Fall besitzt $(I - T)$ eine beschränkte Inverse. Diese erfüllt $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

*Beweis.* "$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$" : klaro

"$iii) \Rightarrow iv)$" : Sei $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, N-1\}$, so dass $n = \ell \cdot N + k$ Dann folgt

$$\ell \leq \frac{n}{N} - 1 \Rightarrow ||T^n|| = \left|\left|(T^N)^\ell T^k\right|\right| \leq \left|\left|T^N\right|\right|^\ell \cdot \left|\left|T^k\right|\right|.$$

Sei $M := \max\{1, ||T||, \left|\left|T^2\right|\right|, \dots, \left|\left|T^{N-1}\right|\right|\}$. Dann gilt $||T^n|| \leq M \left|\left|T^N\right|\right|^\ell$ und damit folgt

$$\sqrt[n]{||T^n||} = \sqrt[n]{\left|\left|T^N\right|\right|^\ell}\sqrt[n]{M} \leq \sqrt[n]{||T^N||^{\frac{n}{N}-1}} \cdot \sqrt[n]{M} = \underbrace{\sqrt[N]{||T^N||}}_{<1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{M}{||T^N||}}}_{\substack{\to 1 \\ \text{für } n\to\infty}}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{||T^n||} < 1$ (↗ Wurzelkriterium)

"$iv) \Rightarrow i)$" : $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{||T^n||} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1),\ N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sqrt[n]{||T^n||} \leq q\ \forall\ n \geq N \Rightarrow ||T^n|| \leq q^n\ \forall\ n \geq N$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $N_1 \geq N$, so dass $q^{n+1} + \dots + q^m = q^{n+1}\frac{1-q^{m-1}}{1-q} < \varepsilon\ \ \forall n, m \geq N_1$.

$$\text{Für } S_n := \sum_{k=0}^{\infty} T^k \text{ gilt also } : ||S_n - S_m|| = \left|\left|\sum_{k=m+1}^{n} T^k\right|\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left|\left|T^k\right|\right| \leq q^{m+1} + \dots + q^n < \varepsilon.$$

Also ist $(S_n)$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(X)$. Da $X$ vollständig ist, ist auch $\mathcal{B}(X)$ vollständig, also konvergiert die Neumannsche Reihe.

Noch zu zeigen, wenn $(i) - (iv)$ gilt $(I - T) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} T^k = (\sum_{k=0}^{\infty} T^k) \cdot (I - T) = I$. Es gilt:

$$(I - T) \cdot S_n = (I - T) \cdot (\sum_{k=0}^{n} T^k) = \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=1}^{n+1} T^k = I - T^{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} I_K$$

Analog andersherum (↗ linksinvers ≠ rechtsinvers in unendlichdimensionalen Räumen, da inj. $\not\Leftrightarrow$ surj.) ■

**Bemerkung 1.26: Konvergenz Neumannsche Reihe**

1. Wenn $||T|| < 1$, dann konvergiert die Neumannsche Reihe.
2. $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{||T^n||} < 1$ ist nur hinreichend für Invertierbarkeit von $I - T$, wie das Gegenbeispiel $T = 2I$ zeigt.

**Beispiele 1.27: Fredholmsche Integralgleichung**

Sei $k \in C([a,b]^2)$. Der Fredholmsche Integraloperator

$$K : C([a,b]) \to C([a,b]),\ (Kx)(s) := \int_a^b K(s,t)x(t)dt$$

ist stetig, wenn x stetig ist. Die Fredholmsche Integralgleichung lautet:

$$(I - K)x = y, \quad y \in C([a,b]).$$

Und es gilt: $\|Kx\|_\infty \leq \max\limits_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|dt \cdot \|x\|_\infty$.

Wenn nun $\max\limits_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(s,t)|dt < 1$, dann gilt für alle $y \in C([a,b])$ : Die Fredholmsche Integralgleichung $(I - K)x = y$ hat genau eine Lösung $x \in C([a,b])$. Diese hängt stetig von $y \in C[a,b]$ ab.

## 1.3 Metrische und topologische Räume, Satz von Baire

### 1.3.1 Grundbegriffe:metrischer Raum und Vervollständigung

**Bemerkung 1.28: Erinnerung**

- Kompaktheit, Satz von Bolzano-Weierstraß

**Lemma 1.29: Vierecksungsgleichung**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann gilt die Vierecksungleichung:

$$|d(x,y) - d(x_1,y_1)| \leq d(x,x_1) + d(y,y_1) \quad \forall x, x_1, y, y_1 \in X$$

*Beweis.* $d(x_1,y_1) \leq d(x_1,x) + d(x,y_1) \leq d(x_1,x) + d(x,y) + d(y,y_1)$
$\Rightarrow d(x_1,y_1) - d(x,y) \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$. Analog: $d(x,y) - d(x_1,y_1) \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$
$\Rightarrow |d(x,y) - d(x_1,y_1)| \leq d(x,x_1) + d(y,y_1)$ ■

**Bemerkung 1.30**

Rekapitulieren Sie folgende Begriffe: $U_r(x)$ Kugel mit Radius r, $\overline{M}$ Abschluss, $\mathring{M}$ Innere, $\partial M$ Rand, Kompakt, offene Überdeckung.

**Defintion 1.31: Abstandserhaltung, Einbettung und Isometrie**

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

(a) *abstandserhaltend* falls $d_X(x,y) = d_Y(f(x), f(y))$

(b) *Isometrie* falls abstandserhaltend und surjektiv, also insgesamt bijektiv. Aus abstandserhaltend folgt die Injektivität.

Das rechtfertigt auch folgende Begriffsbildung:
Eine abstandserhaltende Abbildung heißt auch *Einbettung*. Eine Einbettung heißt *dicht*, falls $f(X)$ dicht in Y ist.

Notation: Wir schreiben $X \subseteq Y$, falls X in Y eingebettet ist.

**Satz 1.32: Der große Vervollständigungssatz**

Jeder metrische Raum $(X, d)$ lässt sich in einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ dicht einbetten. $(\hat{X}, \hat{d})$ heißt Vervollständigung von $(X, d)$.

*Beweis.* (1) Konstruktion von $\hat{X}$

Sei $CF(X)$ die Menge aller Cauchyfolgen in X. Seien $\overline{x} := (x_n),\ \overline{y} := (y_n) \in CF(X)$.

Wir betrachten den „Abstand“

$$d(\overline{x}, \overline{y}) := \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n),$$

der dank Lemma 1.29 wohldefiniert ist, und die Relation $\sim \subseteq CF(X) \times CF(X)$ mit

$$\overline{x} \sim \overline{y} :\Leftrightarrow d(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

„ $\sim$ “ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation und unterteilt $CF(X)$ in Äquivalenzklassen. Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse des Repräsentanten $\overline{x}$ und $\hat{X}$ die Menge aller Äquivalenzklassen.

Für $\overline{x}, \overline{x}' \in [x] \in \hat{X},\ \overline{y}, \overline{y}' \in [y] \in \hat{X}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 = d(\overline{x}, \overline{x}') &= \lim_{n\to\infty} d_X((x_n), (x_n')) \\ 0 = d(\overline{y}, \overline{y}') &= \lim_{n\to\infty} d_X((y_n), (y_n')). \end{aligned}$$

Wegen $d_x(x_n, y_n') \leq d_X(x_n', x_n') + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y_n')$
$d_x(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x_n') + d_X(x_n', y_n') + d_X(y_n', y_n)$ ist

$$\lim_{n\to\infty} d_X(x_n', y_n') \leq \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d_X(x_n', y_n') \Rightarrow d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{x}', \overline{y}')$$

und wir können wohldefinieren: $\hat{d}([x], [y]) := d(\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow \hat{d}$ ist Metrik auf $\hat{X}$.

(2) Konstruktion einer dichten Einbettung $f : X \to \hat{X}$

Für $x \in X$ sei $f(x) := [(x, x, x, \dots)]$.
Es gilt für $x, y \in X$: $\hat{d}(f(x), f(y)) = \lim_{n\to\infty} d_X(x, y) = d_X(x, y)$.

Wir zeigen nun, dass $f(X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt. Sei $[x] \in \hat{X},\ \overline{x} = (x_n)$, da nun $(x_n)$ eine Cauchyfolge in $X$ ist, ist:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \ \forall n, m \geq N$$

Wir betrachten nun $\overline{x}_N := (x_N, x_N, x_N, \dots)$

$$\Rightarrow \hat{d}(f(x_N), [x]) = \lim_{n\to\infty} d_X(x_N, x_n) \leq \varepsilon$$

Damit ist $f(x_N) \to [x]$ für $\varepsilon \to 0$ (oder $N \to \infty$?).

(3) Vollständigkeit von $\hat{X}$

Sei $([x]_j)$ eine Cauchyfolge in $\hat{X}$. Zu jedem $[x]_j \in \hat{X}$ $\exists y_j \in X$ so dass $\hat{d}([x]_j, f(y_j)) < \frac{1}{j}$, da f(X) dicht in $\hat{X}$ ist.

$$\Rightarrow d_X(y_j, y_k) = \hat{d}(f(y_j), f(y_k)) \leq \hat{d}(f(y_j), [x]_j) + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \hat{d}([x]_k, f(y_k)) < \frac{1}{j} + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow$ $(y_j)$ ist eine Cauchyfolge in $X$, $y := (y_j) \in CF(X) \Rightarrow$ $[y] \in \hat{X}$ ist der Kandidat für den Grenzwert der Cauchyfolge:

$$\hat{d}([x]_j, [y]) \leq \hat{d}([x]_j, f(y_j)) + \hat{d}(f(y_j), [y]) < \frac{1}{j} + \lim_{k\to\infty} d_X(y_j, y_k) \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \hat{d}([x]_j, [y]) = 0$$

das heißt $[x]_j \to [y]$ für $j \to \infty$

(4) Eindeutigkeit von $\hat{X}$ im folgenden Sinne: ist $\tilde{X}$ eine weitere Vervollständigung von $X$, so sind $\hat{X}, \tilde{X}$ isometrisch zueinander.

Sei also $(H, d_H)$ ein vollständiger metrischer Raum mit $X \subseteq H$, $d_H(x, y) = d_X(x, y)$ $\forall x, y \in X$ und $\overline{X} = H$.

Unser Ziel ist es, eine Isometrie $g : \hat{X} \to H$ zu bauen.
Sei $[x] \in \hat{X}$, $\overline{x} = (x_n) \in [x] \in \hat{X}$, da $H$ vollständig ist $\exists h \in H$ so dass $\lim_{n\to\infty} d_H(x_n, h) = 0$

Wir betrachten $g : \hat{X} \to H$, $[x] \mapsto h$ wie oben.

$g$ ist surjektiv, da für $h \in H \Rightarrow \exists \overline{x} = (x_n) \in CF(X)$ so dass $\lim_{n\to\infty} d_H(x_n, h) = 0$, also $g([x]) = h$
$g$ ist abstandserhaltend, da für $[x], [y] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}([x], [y]) = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_H(x_n, y_n) = d_H(g([x]), g([y])).$$

■

### 1.3.2 Der Bairesche Kategoriesatz und grundlegendes zu Vollständigkeit und Kompaktheit

**Defintion 1.33: Durchmesser**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $M \subseteq X$, $M \neq \emptyset$. Wir definieren den *Durchmesser* von M durch

$$\delta(M) := \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips aus $\mathbb{R}$.

**Satz 1.34: Cantorscher Durchschnittssatz**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, der vollständig ist. $(F_n)$ eine Folge von abgeschlossen Teilmengen mit $F_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in X : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x_0\}$$

*Beweis.* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $x_n \in F_n$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ : $\delta(F_n) < \varepsilon$ $\forall n \geq N$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ da } x_n, x_m \in F_N \text{ und } \delta(F_N) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x_n) \text{ ist eine Cauchyfolge} \overset{X \text{ vollst.}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in X : \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

Weil $x_k \in F_n \ \forall k \geq n$ und $F_n$ abgeschlossen ist, ist

$$x_0 \in F_n \Rightarrow x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \Rightarrow \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

Angenommen $\exists y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, mit $x_0 \neq y$

$$\Rightarrow 0 < d(x_0, y) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) \leq 2\delta(F_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ Widerspruch!}$$

■

*Eigene Bemerkung.* Der Heuser beschreibt den folgenden Satz folgendermaßen:
„Es gibt wohl keinen Satz in der Funktionalanalysis, der glanzloser und gleichzeitig kraftvoller wäre als der Bairesche Kategoriensatz. Von seiner Glanzlosigkeit wird sich der Leser *sofort* überzeugen können; für seine Kraft müssen wir ihn auf die folgenden Nummern vertrösten.“

**Satz 1.35: Bairescher Kategoriensatz**

Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum, $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$, wobei $F_n \subseteq X$ abgeschlossen für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset.$$

Es gibt also ein $F_{n_0}$ dessen Inneres nichtleer ist.

*Beweis.* Wir bemerken zuerst: $x \in \mathring{M} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq M$.
Angenommen es gelte für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathring{F}_n = \emptyset$, also kein $F_n$ enthalte eine abgeschlossene Kugel.
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $r > 0$ und $x_0 \in X \Rightarrow \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$
Seien nun $x_n \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$. Da $F_n$ kein Inneres hat (offiziell: abgeschlossen?!), existiert ein $r_n \in (0, \frac{r}{2})$ mit $\overline{U_{r_n}(x_0)} \cap F_n = \emptyset$, und für ein $y \in \overline{U_{r_n}(x_n)}$ gilt:

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x_0) \leq r_n + \frac{r}{2} \leq r$$

So erhalten wir $\overline{U_{r_n}(x_n)} \subseteq \overline{U_r(x_0)}$. Wir betrachten nun $\overline{U_1(x_0)}$ und nach obiger Überlegung

$$\exists r_1 > 0, x_1 \in X : \overline{U_{r_1}(x_1)} \subseteq \overline{U_1(x_0)} \text{ mit } r_1 \leq \frac{1}{2} \text{ und } \overline{U_{r_1}(x_1)} \cap F_1 = \emptyset$$

Ebenso

$$\exists r_2 > 0, x_2 \in X : \overline{U_{r_2}(x_2)} \subseteq \overline{U_{r_1}(x_1)} \text{ mit } r_2 \leq \frac{1}{4} \text{ und } \overline{U_{r_2}(x_2)} \cap F_2 = \emptyset$$

Sukzessive erhalten wir so eine Folge $\left(\overline{U_{r_n}(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{U_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq \overline{U_{r_n}(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $r_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $\overline{U_{r_n}(x_n)} \cap F_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wegen (1) und

$$0 \leq \delta\left(\overline{U_{r_n}(x_n)}\right) = 2r_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

sind wir in der Situation des Cantorschen Durchschnittsatzes und es gibt ein eindeutiges $\hat{x} \in X$ mit $\hat{x} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_{r_n}(x_n)$. Dann ist wegen (3) $\hat{x} \notin F_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \hat{x} \in X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$ Widerspruch! ■

**Kollar**

Der Raum der Polynome $\mathcal{P}$ kann mit keiner Norm vollständig sein.

*Beweis.* Es sei $b_n := x^n$. Die Familie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet eine abzählbare Basis von $\mathcal{P}$. Den Rest erledigt uns die Hausaufgabe Vektorräume mit abzählbaren Basen. ■

**Defintion 1.36: dicht, mager, Kategorie**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. $M \subseteq X$ heißt...

(a) *nirgends dicht*, wenn $\mathring{\overline{M}} = \emptyset$.

(b) *mager* oder *von 1.Kategorie*, wenn $M$ eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist, also $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $A_n$ nirgends dicht für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt.

(c) *von 2.Kategorie* oder *fett*, wenn $M$ nicht von 1.Kategorie ist.

*Eigene Bemerkung (Trivia am Rande).* Direkt aus der Definition folgt, das jede nirgends dichte Menge insbesondere von 1.Kategorie ist. Andersrum gilt dies nicht, was das Beispiel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ zeigt. Ein Beispiel für eine nirgends dichte Menge ist die Cantor-Menge oder $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
*Anschaulich* bedeutet *nirgends dicht*, wenn sie in keiner Teilmenge (mit nichtleeren Innerem) dicht liegt.

Mithilfe dieser Definition können wir den Baireschen Kategoriensatz Umformulieren zu

$$(X, d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum } \Rightarrow X \text{ ist von 2.Kategorie}$$

**Kollar 1.37: vollstängier Raum von 2. Kategorie**

$(X, d)$ sei ein vollständiger metrischer Raum, $U \subseteq X$ offen und nichtleer.
Dann ist $U$ von 2. Kategorie.

*(Eigener Beweis).* Da $U$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in U$, $\overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq U$ ist. Nun können wir den Baireschen Kategoriensatz auf $\overline{U_\varepsilon(x)}$ anwenden. ■

**Kollar 1.38: magere Unteremengen in vollständigen Raum**

$(X, d)$ sei ein vollständiger metrischer Raum.
Dann gilt:

$$M \subseteq X \text{ mager } \Rightarrow X \setminus M \text{ ist dicht in} X.$$

*Beweis.* Sei $M \subseteq X$ mager, angenommen $X \setminus M$ sei nicht dicht, also $X \setminus \overline{(X \setminus M)} \neq \emptyset$
$\Rightarrow O := X \setminus \overline{(X \setminus M)}$ ist (als Komplement einer abgeschlossenen Menge) offen und nichtleer.
$\Rightarrow O \subseteq M$ ist von 1. Kategorie, Widerspruch zu Korollar 1.37. ■

**Kollar 1.39: Darstellung vollständiger metrischer Räume**

$(X, d)$ sei ein vollständiger metrischer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n \subseteq X$ so dass $X \setminus B_n$ mager.

$B := \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$$\Rightarrow \overline{B} = X$$

*Beweis.* $X \setminus B = X \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n)^c = X \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n^c)$ ist wegen Korollar 1.38 dicht in $X$. ■

**Defintion 1.40: kompakt, präkompakt**

Der metrische Raum $(X, d)$ heißt …

(a) *kompakt*, wenn für alle offenen Überdeckungen $(U_i)_{i\in I}$ von $X$ ein endliches $I' \subseteq I$ existiert, so dass $X = \cup_{i\in I'} U_i$

(b) *präkompakt*, wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine endliche Menge $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ existiert, so dass $X = \cup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$. $M$ heißt auch *$\varepsilon$-Netz* von $X$. [a]

Besonders interessant sind diese Begriffe für Teilräume $F \subset X$.

[a] Äquivalent dazu: Jede Folge besitzt eine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist.

**Satz 1.41: Charakterisierung von Kompaktheit**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann ist äquivalent:

(1) $X$ kompakt.

(2) Jede abzählbare offene Überdeckung von $X$ enthält eine endliche Teilüberdeckung.

(3) Ist $(A_n)$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von $X$ mit $A_n \supseteq A_{n+1} \neq \emptyset \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(4) Jede Folge in $X$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

(5) $X$ ist vollständig und präkompakt.

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (2): Man nimmt nur weniger mögliche Vereinigungen.

(2) $\Rightarrow$ (3): Angenommen $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, $A_n = \overline{A_n}$, $\emptyset \neq A_{n+1} \subseteq A_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow U_n := X \setminus A_n \text{ offen und } \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$$

$$\begin{aligned} \stackrel{2}{\Rightarrow} \exists n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N} : X = \cup_{i=1}^m U_{n_i} &= \cup_{i=1}^m (X \setminus A_{n_i}) \\ &= X \setminus (\cap_{i=1}^m A_{n_i}) \\ &= X \setminus A_k \qquad \text{für } k := \max\{n_1, \dots, n_m\} \\ &\Rightarrow A_k = \emptyset \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Sei $(x_n)$ eine Folge in $X$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

Es ist $A_n \supseteq A_{n+1}$ und $A_n \neq \emptyset$ abgeschlossen $\forall n \in \mathbb{N} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \exists x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Deshalb ist

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : U_\varepsilon(x_0) \cap \{x_k : k \geq n\} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow x_0$ ist Häufungspunkt der Folge $(x_n)$ und damit Grenzwert einer Teilfolge von $(x_n)$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Sei $(x_n)$ eine Cauchyfolge. Wegen (4) hat $(x_n)$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $x \in X$. Dann ist $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow X$ vollständig.

Angenommen $X$ sei nicht präkompakt

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X \ \exists x_{n+1} \in X \text{ mit } x_{n+1} \notin \cup_{i=1}^n U_{\varepsilon_0}(x_i).$$

Konstruiere so eine Folge $(x_n)$ in $X$. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon_0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$\Rightarrow (x_n)$ hat keine Cauchy-Teilfolge $\Rightarrow (x_n)$ hat keine konvergente Teilfolge.

(5) $\Rightarrow$ (1): Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X$. Angenommen es existiere keine endliche Teilüberdeckung. Wir definieren induktiv Kugeln $K_n$, $n \in \mathbb{N}$, wie folgt:
Da $X$ präkompakt ist, gibt es zu $\varepsilon = 1$ endliche viele Kugeln $U_1(x_{0,j})$ mit

$$X \subseteq \cap_{j=0}^{m_1} U_1(x_{0,j}).$$

Dann ist mindestens eine dieser Kugeln nicht durch endlich viele Mengen aus $(U_i)_{i\in I}$ überdeckbar.

OBdA sei $U_1(x_{0,0})$ und setze $x_0 := x_{0,0}$. Konstruiere so eine Folge $(x_n)$, so dass $U_{\frac{1}{2^n}}(x_1)$ nicht durch endlich viele Mengen aus $(U_i)_{i\in I}$ überdeckt werden kann. Sei

$$y \in U_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_{n-1}) \cap U_{\frac{1}{2^n}}(x_1) \neq \emptyset$$

Dann gilt

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-1}, y) + d(y, x_1) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Für $n \leq p \leq q$ gilt dann

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}$$

Daraus folgt, $(x_n)$ ist eine Cauchyfolge in $X$ und wegen der Vollständigkeit von X gibt es ein $\hat{x} \in X$, so dass $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \hat{x}) = 0$. Wegen $X = \cup_{i\in I} U_i$ gilt $\exists i_0 \in I : \hat{x} \in U_{i_0}$. Weil $U_{i_0}$ offen ist: $\exists r > 0$, so dass $U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$ und $d(\hat{x}, x_n) < \frac{r}{2}$. $\Rightarrow U_{\frac{1}{2}}(x_n) \subseteq U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $U_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$ nicht durch endliche viele $U_i$ überdeckt werden kann.

■

**Kollar 1.42: Folgen- und Überdeckungskompakt**

$(X, d)$ sei ein metrischer Raum. Dann gilt:

a) $(X, d)$ kompakt $\Rightarrow X$ vollständig

b) $M \subseteq X$, so dass jede Folge in M eine in M konvergente Teilfolge hat (M folgenkompakt) $\Leftrightarrow$ $M \subseteq X$ kompakt (M Überdeckungskompakt)

c) $M \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow M$ beschränkt und abgeschlossen.

d) $X$ kompakt, $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt.

**Defintion 1.43: relativ kompakt**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. $M \subseteq X$ heißt *relativ kompakt*, wenn $\overline{M}$ kompakt ist.

**Satz 1.44: Charakterisierung relativ kompakt**

$(X, d)$ vollständiger metrischer Raum, $M \subseteq X$ relativ kompakt.
$\Leftrightarrow$ jede Folge in $M$ besitzt eine in $X$ konvergente Teilfolge.

**Satz 1.45: Aussagen zu komapkt, prä- und relativkompakt**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. $M, N \subseteq X$ seien relativ kompakt (bzw. präkompakt). Dann gilt

(a) $S \subseteq M \Rightarrow S$ relativ kompakt (bzw. präkompakt)

(b) $M \cup N$ relativ kompakt (bzw präkompakt)

(c) $M$ relativ kompakt $\Rightarrow$ M präkompakt

(d) Ist $(X, d)$ vollständig, so gilt $M$ relativ kompakt $\Leftrightarrow M$ präkompakt

*Beweis.* a) relativ kompakt: Sei $(x_n)$ eine Folge aus $S$. Da $(x_n)$ ein Folge in M ist, hat es eine konvergente Teilfolge, dessen Grenzwert in $\overline{M}$ ist. Dann ist der Grenzwert auch in $\overline{S}$. Also ist S relativ kompakt. präkompakt: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es eine endliche Menge $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$, so dass $S \subseteq M = \bigcup_{i=0}^{n} U_\varepsilon(x_i)$. Also ist auch S präkompakt.

b) relativ kompakt: Ist $(x_n)$ eine Folge aus $M \cup N$, so gibt es eine Teilfolge, die nur in $M$ oder $N$ ist. Dann hat diese Teilfolge noch eine konvergente Teilfolge. präkompakt: $M$ und $N$ haben jeweils ein $\varepsilon$-Netz. Die Vereinigung ist dann auch ein $\varepsilon$-Netz.

c) Angenommen M sei nicht präkompakt, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass sich $M$ nicht durch endlich viele $\varepsilon$-Kugeln überdecken lässt. Wählen wir aus jedem dieser (mindestens abzählbar vielen) Kugeln ein Element aus, entsteht eine Folge, dessen Folgenglieder alle Mindestabstand $\frac{\varepsilon}{2}$ zueinander haben. $\Rightarrow$ Es gibt keine konvergente Teilfolge $\Rightarrow M$ ist nicht relativ kompakt.

d) $\Rightarrow$ folgt aus c)

$\Leftarrow$ Sei $M$ präkompakt $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}, \{x_1, \dots, x_p\} \subset X$ mit $M \subset \cup_{j=1}^{p} \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)}$. Wegen $\overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset U_\varepsilon(x_j)$ gilt $\overline{M} \subset \cup_{j=1}^{p} \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset \cup_{j=1}^{r} U_\varepsilon(x_j) \Rightarrow \overline{M}$ ist präkompakt. Da $(\overline{M}, d)$ vollständig ist, ist $\overline{M}$ kompakt. $\overset{\text{Satz 1.41}}{\Rightarrow}$ $M$ relativ kompakt.

■

**Bemerkung 1.46: Fakten**

$(X, ||\cdot||)$ normierter Raum.

a) Aussagen über metrischer Räume übertragen sich.

b) Die Vervollständigung von $X$ ist ein Banachraum.

c) Wenn $\dim X < \infty$, dann

  i) $X$ Banachraum
  ii) $M \subseteq X$ ist kompakt $\Leftrightarrow M$ ist beschränkt und abgeschlossen (Heine-Borel)
  iii) $M \subseteq X$ relativ kompakt $\Leftrightarrow M$ präkompakt $\Leftrightarrow M$ beschränkt

Folgendes Lemma dient - neben immament Interessantem - zur Vorbereitung auf eine Charakterisierung des Satzes Bolazano-Weierstraß, der genau dann gilt, wenn der Raum von endlicher Dimension ist.

**Lemma 1.47: Lemma von Riesz**

$(X, ||\cdot||)$ normierter Raum, $E \subset X$ abgeschlossener Unterraum mit $E \neq X$, $\eta \in (0,1)$.
Dann existiert ein $x_\eta \in X$ mit $||x_\eta|| = 1$ und $||x_\eta - y|| \geq \eta \; \forall y \in E$.

*Beweis.* Sei $x_0 \in X \setminus E$. Definiere $\delta := \inf_{y \in E} ||x_0 - y||$, da E abgeschlossen ist, ist $\delta > 0$. Sei $(y_n)$ Folge in $E$ mit $||x_0 - y_n|| \to \delta$. Da $\eta \in (0,1)$ ist $\frac{\delta}{\eta} > \delta$; also $\exists z \in E$ mit $||x_0 - z|| \leq \frac{\delta}{\eta}$. Definiere $x_\eta := \frac{x_0 - z}{||x_0 - z||}$, dann ist $||x_\eta|| = 1$. Für $y \in E$ gilt dann

$$\begin{aligned} ||y - x_\eta|| &= \left|\left| y - \frac{x_0 - z}{||x_0 - z||} \right|\right| = \left|\left| y + \frac{z}{||x_0 - z||} - \frac{x_0}{||x_0 - z||} \right|\right| \\ &= \frac{||\left(||x_0 - z||\, y + z\right) - x_0||}{||x_0 - z||} \geq \frac{\delta}{||x_0 - z||} \geq \frac{\eta}{\delta} \cdot \delta = \eta \end{aligned}$$

■

„Wir können nun die Endlichkeit der Dimension eines normierten Raumes (eine *algebraische* Eigenschaft) durch eine *metrische* Eigenschaften (die Gülitgkeit des Bolzano-Weierstraßschen Satzes) charakterisieren. Dass so etwas überhaupt möglich ist, liegt letztlich daran, dass die algebraische und metrische Struktur normierter Räume nicht unverbunden nebeneinander stehen, sondern via Stetigkeit ineinanderengreifen. “ [Heuser (S.104)]

**Kollar 1.48: kompakt in endlichdim. Räumen, konvergente Teilfolgen**

$(X, ||\cdot||)$ normierter Raum.

a) $\overline{U_1(0)}$ kompakt $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

b) Jede beschränkt Folge besitzt konvergente Teilfolge $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

*Beweis.* a) " $\Leftarrow$ " Folgt aus Heine-Borel

" $\Rightarrow$ " Angenommen, $\dim X = \infty$ (Nicht endlichdimensional). Wir wählen ein $x_0 \in X$ mit $||x_0|| = 1$. Nach dem Lemma von Riesz gibt es ein $x_1 \in X$, so dass $||x_1 - y|| \geq \frac{1}{2} \; \forall y \in \operatorname{span}\{x_0\}$. Sukzessiv können wir so eine Folge $(x_n)$ konstruieren für die gilt: $||x_n|| = 1$ und $||x_n - y|| \geq \frac{1}{2} \; \forall y \in \operatorname{span}\{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \; \forall n \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow ||x_n - x_m|| \geq \frac{1}{2} \; \forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. $\Rightarrow (x_n)$ hat keine konvergente Teilfolge.

b) genauso.

■

## 1.4 Skalarprodukträume

Erinnerung Skalarprodukt:
Sei $X$ ein $\mathbb{K}$-VR. Ein *Skalarprodukt* ist eine Abb $(\cdot,\cdot) \to \mathbb{K}$ mit

(S1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z) \; \forall x, y, z \in X, \; \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(S2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

(S3) $(x,x) > 0 \; \forall x \in X \backslash \{0\}$.

**Bemerkung 1.49: Diverses zu Skalarprodukträumen**

1) $||x|| := \sqrt{(x,x)}$ ist eine Norm.

2) ein vollständiger Skalarproduktraum heißt *Hilbertraum*.

3) $||x|| \cdot ||y|| \geq |(x, y)|\ \forall x, y \in X$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

4) Für $x, y \in X$ mit $(x, y) = 0$ (x und y orthogonal, $x \perp y$) gilt $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (Satz des Pythagoras)

5) Für $x, y \in X$ gilt die Parallelogrammgleichung: $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2$

6) Für $(x_n), (y_n)$ mit $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$ gilt $(x_n, y_n) \to (x, y)$, da $|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x||\,||y||$ (Stetigkeit des Skalarprodukts)

**Satz 1.50: Skalarprodukt induziert Norm**

Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum mit $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2\ \ \forall x, y \in X$. Dann existiert ein Skalarprodukt auf $X$, welches $||\cdot||$ induziert.

*Beweis.* ($\nearrow$ Übung, Blatt 6, Aufgabe 1) Skizze! a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $(x, y) := \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2)$.
b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2)$ ∎

**Defintion 1.51: Alles Orthogonlität inkl. System und Basis**

$(X, (\cdot, \cdot))$ Skalarprodukt, $x, y \in X$. $M, N \subseteq X$, $(x_i)_{i \in I}$ Familie.

1. $x$ orthogonal zu $y$ (x $\perp$ y), wenn $(x, y) = 0$.
2. $x$ orthogonal zu $N$ (x $\perp$ M), wenn $x \perp y \quad \forall y \in N$
3. $M$ orthogonal zu $N$ (N $\perp$ M), wenn $x \perp M \quad \forall x \in N$.
4. $M^\perp = \{x \in X : x \perp M\}$ *Orthogonalraum zu M*
5. $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthogonalsystem* (OGS), wenn $x \perp y, \forall i, j \in I, i \neq j$
6. $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS), wenn es OGS mit $\|x_i\| = 1\ \forall i \in I$ ist.
7. $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthogonalbasis* (OGB), wenn es ein linear unabhängiges OGS ist und $\overline{span((x_i)_{i \in I})} = X$.
8. $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Orthonomalbais* (ONB), wenn es OGB und ONS ist.

**Beispiele 1.52: ONSs und ONBs**

a) $e_n = (\delta_{in})_{i \in I} \in \ell^2$ $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ONS Es ist auch ONB.
Sei $x = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}. \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon^2$. Für $v = a_1 e_1 + \cdots + a_N e_N \in span(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$||v - x||_2 = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$

b) $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$
$u_k \in L^2([0, 2\pi])$ ist ONS, da $\int_0^{2\pi} u_k(x) \overline{u_j(x)} dx = \delta_{kj}$ Auch ONB?

Beachte: $V^\perp$ ist immer abgeschlossen, da für eine Folge $(v_i)$ in $V^\perp$ mit $v_i \to v$ gilt $(x, v) \leftarrow (x, v_i) = 0\ \forall x \in V \Rightarrow v \in V^\perp$

**Satz 1.53: Besselsche Ungleichung**

Sei $X$ ein Skalarproduktraum, $(u_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem, $x \in X$, $i_1, \ldots, i_n \in I$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2 \leq ||x||^2$$

*Beweis.* Sei $x_n := x - \sum_{k=1}^{n}(x, u_{ik})u_{ik}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist

$$(x_n, u_{ij}) = (x, u_{ij}) - \sum_{k=1}^{n}(x, u_{i_k}) \underbrace{(u_{i_k}, u_{i_j})}_{\delta_{kj}} = (x, u_{i_j}) - (x, u_{i_j}) = 0$$

Also ist $\sum_{k=1}^{n}(x, u_{i_k})u_{i_k} \perp x_n$ und mit dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$||x||^2 = ||x_n||^2 + \| \sum_{k=1}^{n}(x, u_{i_j})u_k\|^2 = \|x_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2$$

■

**Kollar 1.54: Fourreihe und Besssel Ungl. II**

Voraussetzungen wie oben. Dann gilt

(a) $(x, u_i) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $i \in I$.

(b) $\sum_{i\in I} |(x, u_i)|^2 \leq ||x||^2$ (Besselsche Ungleichung II)

(c) Die Reihe $\sum_{i\in I}(x, u_i)u_i$ (Fourierreihe) ist eine Cauchyfolge in $X$.

*Beweis.* (a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Bessel (I), dass für $S_{x,n} := \{i \in I : |(x, u_i)|^2 > \frac{1}{n}\}$ gilt $|S_{x.n}| \leq n\,||x||^2$, also endlich.

Dann ist $\{i \in I : (x, u_i) \neq 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_{x,n}$ abzählbar, als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen.

(b) Seien $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt mit $\{i_n : n \in \mathbb{N}\} = \{i \in I : (x, u_i) \neq 0\}$. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ : $||x||^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2 \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |(x, u_{i_k})|^2 = \sum_{i\in I} |(x, u_i)|^2$.

(c) $(i_n)$ wie oben, $\varepsilon > 0 \overset{b)}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq m \geq N$ gilt $\sum_{k=m+1}^{n} |(x, u_k)|^2 < \varepsilon^2$
$\Rightarrow ||\sum_{k=1}^{n}(x, u_{i_k})u_{i_k} - \sum_{k=1}^{m}(x, u_{i_k})u_{i_k}||^2 = ||\sum_{k=m+1}^{n}(x, u_{i_k}u_{i_k}||^2 \overset{Pyth.}{=} \sum_{k=m+1}^{n} |(x, u_{i_k})|^2 < \varepsilon^2$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(x, u_{i_k})u_{i_k}$ ist eine Cauchyfolge.

■

**Satz 1.55: Projektionssatz**

$X$ Skalarproduktraum, $V$ vollständig UVR, $x \in X$. Dann existiert ein eindeutiges $v_0 \in V$, so dass $||x - v_0|| = \inf_{v\in U} ||x - v||$. Dieses $v_0$ erfüllt $x - v_0 \in V^\perp$

*Beweis.* Sei $(v_n)$ eine Folge in $V$ mit $d_n := \|x - v_n\| \to \inf_{v\in V} \|x - v\| =: d$. Wegen der Parallelogrammgleichung ist

$$\underbrace{\|x - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2}_{\geq d^2} + \|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\|x - v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x - v_m\|^2 = \frac{1}{2}d_n^2 + \frac{1}{2}d_m^2$$

$$\Rightarrow \|\frac{v_n - v_m}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2 \to 0 \text{ für } n, m \to \infty$$

$\Rightarrow (v_n)$ ist eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von $V$ konvergiert sie gegen ein $v_0 \in V \Rightarrow \|x - v_0\| = \inf_{v \in V} \|x - v\|$

Eindeutigkeit: Sei $v_1 \in V$ ein weiterer Vektor mit $\|x - v_1\| = \|x - v_0\| = d = \inf_{v \in V} \|x - v\|$. Wegen der Parallelogrammgleichung ist

$$\|v_1 - v_0\|^2 = 2\left(\|x - v_0\|^2 + \|x - v_1\|^2 - 2d^2\right) = 0 \Rightarrow v_0 = v_1.$$

Es bleibt noch zu zeigen: $x - v_0 \in V^\perp$.

Für $\lambda \in \mathbb{K},\ v \in V$ ist

$$\|x-v_0\|^2 \leq \|x-(v_0+\lambda v)\|^2 = ((x-v_0)-\lambda v, (x-v_0)-\lambda v) = \|x-v_0\|^2 - \overline{\lambda}(x-v_0, v) - \lambda(v, x-v_0) + |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Sei also $\lambda := \frac{(x-v_0,v)}{\|v\|^2}$

$$\Rightarrow \|x - v_0\|^2 \leq \|x - v_0\|^2 - \underbrace{\frac{|(x - v_0, v)|^2}{\|v\|^2}}_{\leq 0} \leq \|x - v_0\|^2 \Rightarrow |(x - v_0, v)|^2 = 0 \Rightarrow x - v_0 \perp v.$$

■

**Kollar 1.56: Orthogonalunterräume und Approximation**

Sei $X$ ein Hilbertraum und $V$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt

1. $X = V \perp V^\perp$, also $V \perp V^\perp$ und $X = V \oplus V^\perp$
   Insbesondere gilt wegen $V \cap V^\perp = \{0\}$, dass $\forall x \in X$ die Zerlegung $x = v + w$ mit $v \in V,\ w \in V^\perp$ eindeutig ist.
2. Sei $(u_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von $V, x \in X$. Dann ist $v := \sum_{i \in I}(x, u_i)u_i$ die Bestapproximation von $x$ in $V$.

*Beweis.* 1. $x \in X$. Sei $v \in V$, so dass, $||x - v|| = \inf_{u \in V} ||x - u|| \Rightarrow x = v + (x - v)$ und $v \in V,\ x - v \in V^\perp$

2. Für $v := \sum_{i \in I}(x, u_i)u_i$ (konvergent) ist $x - v \in V^\perp$ (wie im Beweis der Besselschen Ungleichung) $\Rightarrow v$ ist Bestapproximation von $x$ in $V$.

■

**Lemma 1.57: Orthogonalraum und Abschluss**

Sei $X$ ein Skalarproduktraum, $V$ ein Unterraum. Dann ist $V^\perp = \overline{V}^\perp$

*Beweis.* „ $\supseteq$ “ Da $V \subseteq \overline{V} \Rightarrow \overline{V}^\perp \subseteq V^\perp$

„ $\subseteq$ “ Sei $x \in V^\perp, v \in V \Rightarrow \exists$ Folge $(v_n)$ in $V$ mit $v_n \to v \Rightarrow (x, v) \leftarrow (x, v_n) = 0$ ■

**Satz 1.58: Charakterisierung von ONBs**

$X$ Skalarproduktraum. $(u_i)_{i \in I}$ ONS.

Betrachte folgende Aussagen

(i) $(u_i)_{i \in I}$ ist eine Orthonormalbasis

(ii) $x = \sum_{i \in I}(x, u_i)u\ \forall x \in X$ (Fourierreihe)

(iii) $(x, y) = \sum_{i\in I}(x, u_i)(u_i, y)\ \forall x, y \in X$ (Parseval-Identität)

(iv) $||x||^2 = \sum_{i\in I} |(x, u_i)|^2\ \forall x \in X$ (Bessel-Gleichung)

(v) $(span(u_i)_{i\in I})^\perp = \{0\}$

Dann gilt $i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iii \Leftrightarrow iv \Rightarrow v$.
Wenn $X$ zusätzlich noch ein Hilbertraum ist, dann gilt auch $v \Rightarrow iv$.

*Beweis.* "$(i) \Rightarrow (ii)$" : Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(u_i)_{i\in I}$ eine ONB ist, gibt es $i_1, \dots, i_n \in I,\ \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ so dass $\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{i_k}\| < \varepsilon$ wegen Korollar 1.56 ist

nochmal anschauen!

$$\|x - \sum_{k=1}^n (x, u_{i_k})\| \leq \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{i_k}\| < \varepsilon$$

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" : Es ist:

$$x = \sum_{i\in I}(x, u_i)u \overset{(\cdot,y)}{\Rightarrow} (x, y) = \left(\sum_{i\in I}(x, u_i)u_i, y\right) = \sum_{i\in I}(x, u_i)(u_i, y) \quad \forall x, y \in X$$

"$(iii) \Rightarrow (iv)$": Setze in die Formel $y = x$ ein.

"$(iv) \Rightarrow (i)$": Mit Pythagoras und Korollar 1.56 gilt:

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |(x_i, u_i)|^2 + \|x - \sum_{i\in I}(x, u_i)u_i\|^2 \Rightarrow x - \sum_{i\in I}(x, u_i)u_i = 0 \Rightarrow x \in \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}.$$

"$(i) \Rightarrow (v)$": Wegen Lemma 1.57 ist $(\operatorname{span}(u_i)_{i\in I})^\perp = \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}^\perp = X^\perp = \{0\}$.

"$(v) \Rightarrow (i)$": Sei $X$ ein Hilbertraum $\Rightarrow \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}$ ist vollständig. Sei $x \in X$ mit $x = x_1 + x_2$, wobei $x_1 \in \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}},\ x_2 \in \overline{\operatorname{span}(u_i)_{i\in I}}^\perp = \operatorname{span}(u_i)_{i\in I}^\perp = \{0\} \Rightarrow x = x_1$.

■

Nun zurück zu $L^2([0, 2\pi])$. Wir erinnern uns vorerst:

1. Der Raum der stetigen Funktionen liegt dicht in $L^2([0, 2\pi])$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, f \in L^2([0, 2\pi])\ \exists g \in C([0, 2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi) = 0$ und $||f - g||_2 < \varepsilon$.
2. Zu $g \in C([0, 2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi), \varepsilon > 0\ \exists h \in \operatorname{span}(u_i)_{i\in\mathbb{Z}} : ||g - h||_\infty$

**Satz 1.59: $L^2$ und ONB**

Die Familie $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $u_k(x) = \frac{1}{2\pi}e^{ikx}$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2([0, 2\pi])$ Wir benutzen:

a) $\forall\varepsilon > 0, f \in L^2([0, 2\pi])\ \exists g \in C([0, 2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi) = 0$ und $||f - g||_2 < \varepsilon$,

b) Zu $g \in C([0, 2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi), \varepsilon > 0\ \exists h \in span(U_i)_{i\in\mathbb{Z}} : ||g - h||_\infty < \varepsilon$.

*Beweis.* Sei $f \in L^2([0, 2\pi]), \varepsilon > 0$. Dann existiert $g \in C([0, 2\pi])$ mit $g(0) = g(2\pi) = 0$ und $||f - g||_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $h \in \overline{span(u_i)_{i\in I}}$, so dass $||g - h|| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$

$$\Rightarrow ||f - h||_2 \leq ||f - g||_2 + ||g - h||_2 \leq ||f - g||_2 + \sqrt{2\pi}\,||g - h||_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} = \varepsilon$$

wobei wir $\|f\|_2^2 = \int_I |f|^2 d\lambda \leq \int_I \operatorname{ess\,sup}_{x\in I}|f(x)|^2 d\lambda = \|f\|_\infty^2 \int_I d\lambda = \|f\|_\infty^2 \lambda(I)$ für $f \in L^2(I)$ genutzt haben. ■

**Kollar: Bestapproximation trigono. Polynome**

Sei $f \in L^2([0, 2\pi])$

1. $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ ist bestapprox. trig. Polynom vom Grad $n$ für $f$ (mit $c_k = (f, e^{ik\cdot}) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$)
2. $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\cdot}$
3. $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $v_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, v_k = \cos(k\cdot)\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für $k > 0, v_k = sin(k\cdot)\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ für $k < 0$

**Defintion 1.60: Halbordnung, Totalordnung**

Sei $M$ eine Menge. Eine Relation $\leq \subseteq M \times M$, heißt *Halbordnung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad \forall a, b, c \in M$

(ii) $a \leq a \quad \forall a \in M$

(iii) $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in M$

$d \in M$ heißt *obere Schranke*, wenn $a \leq d \; \forall a \in M$

Die Relation heißt *Totalordnung*, wenn sie eine Halbordnung ist und $\forall a, b \in M : a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt.

**Lemma 1.61: Lemma von Zorn**

$M$ sei eine halbgeordnete Menge. Besitzt jede totalgeordnete Teilmenge $Z \subseteq M$ eine obere Schranke in $M$, dann besitzt $M$ eine obere Schranke.

**Satz 1.62: Existenz von ONB in Hilberträumen**

$(X, (\cdot, \cdot))$ sei ein Hilbertraum. Dann existiert eine Orthonormalbasis.

*Beweis.* Sei $M = \{(u_i)_{i \in I} : (u_i)_{i \in I} \text{ ist Orthonormalsystem}\}$

Wir definieren die Halbordnung $(u_i)_{i \in I} \subseteq (y_i)_{i \in J} :\Leftrightarrow I \subseteq J$ und $x_i = y_i \; \forall i \in I$.

Sei $Z := \{(x)_{i \in I_j} : j \in J\} \subseteq M$ eine totalgeordnete Teilmenge, $(x_i)_{i \in I}$ ist eine obere Schranke von $Z$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also eine obere Schranke $(\hat{x}_i)_{i \in J}$ von $M$.

Mit anderen Worten: $\nexists$ ONS $(\hat{y}_i)_{i \in \hat{J}}$ mit $J \subsetneq \hat{J}$ und $\hat{x}_i = \hat{y}_i \; \forall i \in J$.

$\Rightarrow \forall x \in X$ mit $x \perp \hat{x}_i \; \forall i \in I$ gilt $x = 0$

$\Rightarrow (span(\hat{x}_i)_{i \in I})^{\perp} = \{0\}$ ∎

Siehe Übung. Blatt 5, 6.

**Satz 1.63: Basen in Hilberträumen haben die gleich Mächtigkeit**

Seien $X$ ein Hilbertraum, $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in J}$ Orthonormalbasen. Dann haben $I$ und $J$ die gleiche Mächtigkeit.

*Beweis.* Layouten

Für endliches $I$ ist die Aussage klar.

Seien also $|I|$ und $|J|$ unendlich.

Für $x \in X$, definiere $S_x = \{i \in I : (x, x_i) \neq 0\} \Rightarrow |S_X| \leq |\mathbb{N}|$ sowie $\bigcup_{j \in J} S_{y_j} = I$ und $S_{y_j} \neq \emptyset$. Denn: Ist $S_{y_j} = \emptyset$, dann $y_j \perp x_i \forall i \in I \Rightarrow y_j = 0$ ↯ !

Ist $i \in I$ mit $i \notin \bigcup_{j \in J} S_{y_j}$, dann $x_i \perp y_j \forall j \in J \Rightarrow x_i = 0$ ↯!

Also $|I| = |\bigcup_{j \in J} S_{x_j}| \subseteq |J| \cdot |\mathbb{N}| = |J|$.

Analog $|J| \subseteq |I|$ ■

# Kapitel 2

# Einige Hauptsätze aus der Funktionalanalysis

## 2.1 Satz von der offenen Abbildung, Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz von der stetigen Inversen

**Defintion 2.1: offene Abbildung**

Seien $X, Y$ topologische Räume. $f : X \to Y$ heißt *offen*, falls für alle offenen $U \subseteq X$, $f(U) \subseteq Y$ offen ist.

**Satz 2.2: Stetigkeit der Inversen unter offenen Abbildung**

Es seien $X, Y$ topologische Räume und $f : X \to Y$ injektiv. Dann sind äquivalent

(i) $f : X \to f(X)$ ist offen (Relativtopologie von $Y$ auf $f(X)$)

(ii) $f^{-1} : f(X) \to X$ stetig.

*Beweis.* "$(i) \Rightarrow (ii)$" : Sei $U \subseteq X$ offen, dann ist $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ offen, also ist $f^{-1}$ stetig.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" : Sei $U \subseteq X$ offen, $f^{-1}$ stetig $\Rightarrow f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ offen $\Rightarrow f$ offen.

■

**Lemma 2.3: Äquivalenzen zu Offenheit**

Seien $X, Y$ normierte Räume, $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

(i) $T$ ist offen.

(ii) $\forall r > 0 : T(U_r(0))$ ist eine Nullumgebung.

(iii) $\exists r > 0 : T(U_r(0))$ ist eine Nullumgebung.

(iv) $\exists r > 0 : T(U_1(0))$ ist eine Nullumgebung.

*Beweis.* Vergleiche ÜA3, Blatt 2. ■

**Satz 2.4: Satz von der offenen Abbildung, Satz von Banach-Schauder, open-mapping theorem**

Seien $X, Y$ Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ surjektiv. Dann ist $T$ offen.

*Beweisskizze.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass $(iii)$ aus Lemma 2.3 gilt.

1. Schritt Wir zeigen $\exists \varepsilon_0 > 0$, so dass $U_{\varepsilon_0}(0) \subseteq \overline{T(U_1(0))}$. Weil $T$ surjektiv gilt $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(U_n(0))$. Da $Y$ Banachraum, so gilt nach Baire $\exists N \in \mathbb{N} : \overline{T(U_N(0))} \neq \emptyset$ $\exists y_0 \in \overline{T(U_N(0)), \varepsilon > 0}$, so dass $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \overline{T(U_N(0))}$. Aus $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \frac{1}{2}U_1(\varepsilon)y_0 + \frac{1}{2}U_1(\varepsilon) - y_0$ und $\overline{T(U_N(0))} = \frac{1}{2}\overline{T(U_N(0))} + \frac{1}{2}\overline{T(U_N(0))}$ folgt $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \overline{T(U_N(0))} \Rightarrow U_1(\frac{\varepsilon}{N})0 \subseteq \overline{T(U_1(0))}$. $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{N}$.

2. Schritt Wir zeigen $U_1(\varepsilon_0)0 \subseteq \underline{T(U_1(0))}$ Sei $y \in U_1(\varepsilon_0)0$. Wähle $\varepsilon > 0$ mit $||y|| < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\overline{y} := \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}y \Rightarrow ||\overline{y}|| < \varepsilon_0 \Rightarrow \overline{y} \in \overline{T(U_1(0))} \Rightarrow \exists y_0 = Tx_0 \in T(U_1(0))$ mit $||\overline{y} - y_0|| < \alpha\varepsilon_0$, wobei $0 < \alpha < 1$ mit $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1-\alpha} < 1$ Betrachte nun $\frac{\overline{y} - y_0}{\alpha} \in U_1(\varepsilon_0)0 \Rightarrow \exists y_1 = Tx_1 \in T(U_1(0))$ mit $\left|\left|\frac{\overline{y}-y_0}{\alpha} - y_1\right|\right| < \alpha\varepsilon_0 \Rightarrow ||\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1)|| < \alpha^2\varepsilon_0$ Behandle $\frac{\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1)}{\alpha^2}$ mit derselben Methoden, erhalte, $y_2 = Tx_2 \in T(U_1(0))$ mit $\left|\left|\overline{y} - (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2)\right|\right| < \alpha^3\varepsilon_0$ Erhalte so induktiv eine Folge $(x_n)$ in $U_1(0)$ mit $\left|\left|\overline{y} - T(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k x_k)\right|\right| < \alpha^{n+1} \cdot \varepsilon_0$. Weegen $\alpha < 1$ gilt $\overline{x} := \sum_{\alpha=0}^{\infty} \alpha^k x_k$ konver. $\overset{Tbeschrnkt}{\Rightarrow} T\overline{x} = \overline{y}$ Für $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\overline{x}$ gilt $Tx = y$ und $||x|| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}||\overline{x}|| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \underbrace{||x_k||}_{<1} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1-\alpha} < 1 \Rightarrow y \in T(U_1(0))$. Also $U_1(\varepsilon)0 \subseteq T(U_1(0))$.

■

**Bemerkung: Charakterisierung Offenheit durch abgeschlossenes Bild**

ÜA: $X, Y$ Banachräume, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ist offen (relativ in im$T$) $\Leftrightarrow$ $imT$ abgeschlossen.

*Idee.* “ $\Leftarrow$ “ gilt nach Satz 2.4. ($imT$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $imT$ ist Banachraum)
“ $\Rightarrow$ “ betrachte injektive Abbildung $\hat{T} : X \setminus KerT \to imT, x + KerT \mapsto Tx$ ■

*Beweis.* $\Rightarrow$ Sei $T$ also offen. Dann ist nach Übung auch die kanonische Injektion $\hat{T} : X \setminus kerT \to imT$ offen. Mit Satz 2.2 dann also $\hat{T}^{-1} : imT \to X \setminus kerT$ stetig, Damit ist $imT$ als Urbilder einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion abgeschlossen.

$\Leftarrow$ Gilt nun $imT = \overline{imT}$. Dann ist $imT$ als abeschlossener Unterraum eines Banachraums abgeschlossen. Auf $T : A \to ImA$ kann also der Satz der offenen Abbildung angewendet werden. Damit wird also jede offene Menge von $X$ auf eine offene Menge abgebildet und damit ist die Abbildung auch definitionsgemäß offen von $X$ *in* $Y$.

■

**Satz 2.5: Satz von der stetigen Inversen, inverse mapping theorem**

$X, Y$ Banachräume. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ bijektiv $\Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$

*Beweis.* Weil $T$ surjektiv ist, folgt aus dem Satz der offenen Abb. die Offenheit. Weil $T$ neben offen auch also injektiv vorausgesetzt ist, folgt mit Satz 2.2 auch die Stetigkeit der Inversen. (wichtig Banachraum!)

■

**Defintion 2.6: Graph**

$X, Y$ Mengen, $f : X \to Y$ Abbildung. Der Graph von $f$ ist $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

**Defintion 2.7: Metrik auf kartetischen Produkt**

$X, Y$ metrische Räume. Dann ist auf $X \times Y$ eine Metrik via $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : (d(x_1, x_2)^2 + d(y_1, y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$ definiert. (erhält Parallelogrammgleichung und damit Skalarproduktstruktur)

Beachte

(i) $X \times Y$ vollständig $\Leftrightarrow X, Y$ vollständig

(ii) $X \times Y$ normierter Raum $\Leftrightarrow X, Y$ nomierte Räume

(iii) $X \times Y$ Skalarproduktraum $\Leftrightarrow X, Y$ Skalarproduktraum.

(iv) abgeschlossene Metrik ist äquivalent zu $\max\{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}$ und $\sqrt[p]{(d(x_1, x_2)^p + d(y_1, y_2)^p)}$, $p \in (1, \infty)$

**Defintion 2.8: Graphenabgeschlossenheit**

$X, Y$ metrische Räume, $f : X \to Y$ heißt *graphenabgeschlossen*, wenn $G(f) \subseteq X \times Y$ abgeschlossen ist.

**Bemerkung 2.9: Bem. zur Graphenabgeschlossenheit**

1. $f$ graphenabgeschlossen $\Leftrightarrow (x_n)$ in $X$ mit $x_n \to x$ und $f(x_1) \to y \Rightarrow f(x) = y)$
2. $T : X \to Y$ lineare Operator $\Rightarrow G(T) \subseteq X \times Y$ UVR.
3. $f$ stetig $\Rightarrow f$ graphenabgeschlossen.
4. Umkehrung von $(iii)$ gilt i.A. nicht: Gegensbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & sonst \end{cases}$

**Satz 2.10: Satz vom abgeschlossem Graphen, closed graph theorem**

$X, Y$ Banachräume, $T : X \to Y$, lineare Operatoren. Dann sind äquivalent:

(i) $T$ graphenabgeschlossen

(ii) $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

*Beweis.* "$(ii) \Rightarrow (i)$": Stetigkeit bedingt Graphenabgeschlossenheit.

"$(i) \Rightarrow (ii)$": Der Graph $G(T) \subset X \times Y$ ist als abegschlossener Unterraum eines Banachraums, selbst ein Banachraum. Sei $S : G(T) \to X$ mit $(x, Tx) \mapsto x$ gegeben, dann ist $S$ bijektiv und linear. Weil nun $||S(x, Tx)||_X = ||x||$, folgt die Stetigkeit von $S$. Mit dem Satz von der stetigen Inversen gilt, dass auch $S^{-1}$ stetig sein muss. Damit folgt aus $x_n \to x$, dass $(x_n, Tx_n) = T^{-1}(x_n) \to T^{-1}(x) = (x, Tx)$, also auch $Tx_n \to Tx$[1]und das ist Stetigkeit.

∎

**Bemerkung 2.11: Ein paar Anwendungen**

1. Aus Inverse mapping thm folgt: $(X, ||\cdot||_1$, $(X, ||\cdot||_2)$ BRe, $||\cdot||_1$ stärker als $||\cdot||_2 \Rightarrow ||\cdot||_2$ stärker $||\cdot||_1$.

   *Beweis.* Sei $I_X : (X, ||\cdot||_1) \to (X, ||\cdot||_2) \overset{Vor.}{\Rightarrow} I_x$ beschränkt $\overset{IMT}{\Rightarrow} I_X^{-1} : (X, ||\cdot||_2) \to (X, ||\cdot||_1)$

[1]Konvergenz auf Produkträumen heißt komponentenweise Konvergenz

beschränkt $\Rightarrow ||\cdot||_2$ ist stärker als $||\cdot||_1$. ■

2. Betrachte $X = C([a,b])$, $Y = C^1([a,b])$ mit Normen $||x||_X = \max_{t\in[a,b]}|x(t)| = ||x||_\infty$, $||x||_Y = ||x||_\infty + ||x'||_\infty$, $X, Y$ Banachräume.
   Ist $T \in \mathcal{B}(C([a,b]))$ mit $imT \subset C^1([a,b])$. Dann ist $T \in \mathcal{B}(C([a,b]), C^1([a,b]))$

   *Beweis.* $x, x_n \in Xy \in Y$ mit $||x_n - x||_X \to 0$, $||Tx_n - y||_Y \to 0 \Rightarrow ||x_n - x||_X \to 0$ und $||Tx_n - y||_X \to 0$, da $||z||_X \le ||z||_Y \ \forall z \in Y$. $\overset{T\in\mathcal{B}(X)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}||Tx_n - Tx|| = 0 \Rightarrow y = Tx$ $\Rightarrow T$ graphenabgeschlossen $\overset{X,Y\ BRe}{\Rightarrow} T \in \mathcal{B}(X,Y)$. ■

**Bemerkung 2.12: Charakterisierung grahpenabgeschlossen**

$T : X \to Y$ lineare Operatoren. Dann sind äquivalent:

(i) $T$ graphenabgeschlossen

(ii) $\forall (x_n)$ in $X$ mit $x_n \to 0$, $y \in Y$ mit $(Tx_1) \to y$ folgt $y = 0$

*Beweis.* Nutze Linearität:
"⇒" klar (Spezialisierung auf Nullfolgen)
"⇐" angenommen $(x_n) \to x, T(x_n) \to y \Rightarrow (x_n - x)$ ist Nullfolge. ■

## 2.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit, Satz von Banach-Steinhaus

**Satz 2.13: Satz von Osgood**

Sei ein $X$ normierter Raum, $E \subset X$ von 2. Kategorie. Wenn die Familie von reellwertigen stetigen Funktionen $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}, \alpha \in A\}$ auf $E$ punktweise nach oben beschränkt[a] ist. Dann existiert eine abgeschlossene Kugel $K \subseteq X$, auf der die Familie sogar gleichmäßig nach oben beschränkt ist, d.h.

$$\exists M > 0\ \forall x \in K : f_\alpha(x) \le M\ \forall \alpha \in A.$$

[a] $\forall x \in E\ \exists M_x > 0 : f_\alpha(x) \le M_x\ \forall \alpha \in A.$

*Beweis.* Layout!

Für $n \in \mathbb{N}$, def $E_n : \{x \in X : f_\alpha(x) \le n \forall \alpha \in A\} = \bigcap_{\alpha\in A}\underbrace{\{x \in X : f_\alpha(x) \le n\}}_{\text{abgeschlossen, da f stetig}} \Rightarrow E_n$ abgeschlossen.

Ferne gilt $E \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ wegen Annahme (punktweise Beschränkt). $\overset{2.Kate}{\Rightarrow} \cup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ von 2. Kategoriere $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathring{E}_{n_0} = \mathring{\overline{E_{n_0}}} \ne \emptyset$. $\Rightarrow$ Für $U = \mathring{E}_{n_o}$ : $\sup_{\alpha\in A, x\in U} f_\alpha(x) \le n_0 =: M$ Insbesondere $\exists x_0 \in U, \delta > 0$, so dass $K := \overline{U_\delta(x_0)} \subseteq U$. Dann gilt $\forall \alpha \in A, x \in \overline{U_\delta(x_0)} : f_\alpha(x) \le M$. ■

**Kollar 2.14: Prinzip der glm Beschränkheit**

$X, Y$ normierter Räume, $E \subset X$ von 2. Kategorie, ist die Familie stetig linearer Abbildungen $\{T_\alpha : \alpha \in A, T : X \to Y\}$ punktweise von $X$ in $Y$ beschränkt[a]. Dann gilt:

$$\exists M > 0 : ||T_\alpha|| \le M\ \forall \alpha \in A$$

[a] $\forall x \in E\ \exists M_x > 0 : ||T_\alpha x|| \le M_x\ \forall \alpha \in A$

*Beweis.* Für $T \in \mathcal{F}$ definiere $f_T : X \to \mathbb{R}, x \mapsto ||Tx|| \Rightarrow f_T$ ist stetig $\forall T \in \mathcal{F}, \{f_T : T \in \mathcal{F}\}$ ist pw. beschränkt $\overset{Osgood}{\Rightarrow} \exists M, r > 0, x_0 \in E : \sup_{\substack{x \in \overline{U_r(x_0)} \\ T \in \mathcal{F}}} ||Tx|| \in M$. Für $x \in U_1(0)$ gilt dann

$$||Tx|| = \left|\left|\frac{1}{r}T(rx + x_0) - \frac{1}{r}Tx_0\right|\right| \leq \frac{1}{r}\underbrace{||T(rx + x_0)||}_{\leq M} + \frac{1}{r}\underbrace{||Tx_0||}_{\leq M} \leq \frac{2M}{r} \Rightarrow ||T|| \leq \frac{2M}{r} \ \forall T \in \mathcal{F}.$$

■

**Kollar 2.15: beschränktheit von bestimmten Operatoren**

$X$ Banachraum, $Y$ normierter Raum. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$, so dass $\forall x \in X \ \exists M_x > 0 : ||T_x|| \leq M_x \ \forall T \in \mathcal{F}$. Dann existiert ein $M > 0$, so dass $||T|| \leq M \ \forall T \in \mathcal{F}$.

*Beweis.* $X$ Banachraum $\overset{Baire}{\Rightarrow}$ $X$ von 2. Kategorier. Resultat folgt aus Kor. 2.14. ■

**Kollar 2.16: Unbeschränkte Operatoren**

$X$ Banachraum, $Y$ normierter Raum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$, so dass

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} ||T|| = \infty$$

. Dann gilt

(i) $\exists x_0 \in X$: $\sup_{T \in \mathcal{F}} ||Tx_0|| = \infty$

(ii) Die Menge $\{x_0 \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} ||Tx_0|| = \infty\}$ ist dicht.

*Beweis.* Angenommen $Z \subseteq X$ nicht dicht $\Rightarrow \exists r > 0, x \in X$ :

$$\overline{U_r(x_0)} \subseteq X \backslash Z \Rightarrow \forall x \in \overline{U_r(x_0)} : \sup_{T \in \mathcal{F}} ||Tx|| < \infty$$

$\overset{2.14}{\Rightarrow} \sup T \in \mathcal{F} \, ||T|| < \infty$ Widerspruch! ■

Ein Beispiel für starke Konvergenz aber keine Konvergenz von Operatoren.

**Satz 2.17: Aussagen zu punktweiser Konvergenz**

$X$ Banachraum, $Y$ normierter Raum. $(T_n)$ Folge in $\mathcal{B}(X, Y)$, so dass

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x \ \forall x \in X.$$

Dann gilt $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\{||T_n|| : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und $||T|| \leq \lim_{n \to \infty} \inf ||T_n||$.

*Beweis.* Linearität von $T$ ist klar. Weiter gilt

$$\lim_{n \to \infty} |\,||T_n x|| - ||Tx||\,| \leq \lim_{n \to \infty} ||T_n x - Tx|| = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow \ \forall x \in X \ \exists M_x > 0, \text{ sodass } \sup_{n \in \mathbb{N}} ||T_n x|| \leq M_x$$

$\Rightarrow \exists M > 0$, so dass $\sup_{n \in \mathbb{N}} ||T|| \leq M < \infty$. Für $x \in X$ und jede TF $(X_{n_k})$, sodass $||T_{n_k}||$ konvergiert, gilt

$$||Tx|| = \lim_{k \to \infty} ||T_{n_k} x|| \leq \lim_{k \to \infty} ||T_{n_k}|| \, ||x|| \Rightarrow ||Tx|| \leq \liminf_{n \to \infty} ||Tn|| \, ||x|| \Rightarrow ||T|| \leq \liminf_{n \to \infty} ||T_n|| \, .$$

■

**Satz 2.18: Satz von Banach-Steinhaus**

$X, Y$ Banachräume, $(T_n)$ Folge in $\mathcal{B}(X,Y)$. Dann konvergiert $(T_n)$ punktweise gegen ein $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, genau dann wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\exists M > 0$, so dass $||T_n|| \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\exists D \subset X$ dicht, so dass $(T_n x)$ CF $\forall x \in D$.

*Beweis.* “$\Rightarrow$“ 1. folgt aus Satz 2.17., 2. ist klar (nehme $D = X$)
“$\Leftarrow$“ Sei $x \in X, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in D : ||x - y|| < \frac{\varepsilon}{3M}, \exists N \in \mathbb{N} : ||T_n y - T_m y|| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall n, m \leq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\forall n, m \leq N : ||T_m x - T_n x|| &\leq ||T_m x - T_m y|| + ||T_m y - T_n y|| + ||T_n y - T_n x|| \\ &\leq ||T_m|| \, ||x - y|| + ||T_m y - T_n x|| + ||T_n|| \, ||x - y|| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.\end{aligned}$$

$\Rightarrow (T_n x)$ ist Cauchyfolge in $Y \Rightarrow (T_n x)$ konvergiert in $Y \overset{2.17.}{\Rightarrow} T \in B(X,Y)$. ∎

# Kapitel 3

# Lineare Funktionale und duale Abbildungen

Eine nützliche Inspirations- und Motivationsquelle ist in diesem Kapitel die Lineare Algebra. Es wird ein Fortsetzungsatz aus der Lineare Algebra auf normierte Räume erweitert werden. Der sogenannte Dualraum rückt in der Mittelpunkt der Betrachtung. Und vielleicht das Grundproblem der Linearen Algebra, wann die Gleichung $Ax = y$ eine Lösung besitzt wird mithilfe von adjungierten Operatoren auch im unendlich-dimensionalen beschreibar.

Thema dieses Kaptiels sind also lineare Funktionale und duale Abbildung. Die linearen Funktionale sind eine besondere „Klasse“ von Operatoren, nämlich solche die in die zugrundliegende Körper eines $\mathbb{K}$-VR $X$ abbilden. Dazu schreiben man kurz $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ und benutzen (gerne) kleine Buchstaben für Funktionale, also $x' \in X'$.
Der Dualraum (oder eine Teilmenge von Interesse) ist gut zu studieren und beinhaltet wesentlich alle Information des nomierten Raum in den Funktionalen. Durch Hahn-Banach können wir nämlich sehen, dass die Funktionale unseren normierten Raum trennen.

Dabei sei erwähnt, dass es sich bei dem Dualraum (Dualsystem) um einen Spezialfall von sogenannten Bilinearsystemen handelt, denn eine Bilinearform zugrunde liegt. Auch da kann man mit Hilfe eines beliebigen zweiten Vektorraum nützliches über den Ausgangsraum und ein Problem erfahren. (Vgl. Dazu Heuser Kapitel IX).

**Bemerkung**

In diesem Kapitel kommt Bemerkung 3.11 besonders zum Tragen, daher hier noch einmal die Aussage
$$||x'|| = ||x'||_{\mathcal{B}(X,\mathbb{K})} = \sup_{x \in U_1(0) \subset X} |x'(x)| = \sup_{x \in X, ||x||=1} |x'(x)| = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} |x'(x)|.$$
Zur besseren Übersicht schreibt man die Auswertung eines Funktional wie folgt
$$x'(x) =: \langle x, x' \rangle_{X,X'}, \quad x' \in X', x \in X.$$
Wobei man die Räume häufig weglässt, wenn klar ist, welche gemeint sind.
$E_{\mathbb{R}}$ : $E$ aufgefasst als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

dazu muss noch ausführlich etwas ins Glossar: Stichpunkt $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR

## 3.1 Fortsetzungssätze von Hahn-Banach

Es geht um die Fortsetzbarkeit eines Funktionals. Genauer, angenommen man hat einen normierter Raum $X$ und ein lineares Funktional auf einem Untervektorraum $E \subseteq X$, $f : E \to \mathbb{K}$ gegeben. Kann man dann $f$ auf $X$ so fortsetzen, dass die Fortsetzung auf kann X linear ist ? Die positive Beantwortung gibt der mächtige Satz von *Hahn-Banach*, der in zunächst in sehr allgemeiner topologischen Form dargestellt, dann aber auch konkreter formuliert wird.

**Lemma 3.1**

Sei $X$ $\mathbb{R}$-Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ wie folgt

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \geq 0, x \in X$ (Homogenität)

2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$ (Subadditivität)

Weiter sei $E \subseteq X$ UVR und $f : E \to \mathbb{R}$ linear sowie

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

Dann existiert ein lineares Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ für das gilt

$$F|_E = f \text{ und } F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

.

*Beweisskizze.* Falls $E = X \Rightarrow$ klar. $(F = f)$. Angenommen $E \subsetneq X \Rightarrow x_0 \in X \backslash E, x_0 \neq 0$.

1 Schritt: Zunächst Forsetztung auf eindimensional größeren Raum.

2 Schritt: Definiere Menge von Abbildungen und Unterräume, definiere und zeige Halbordnung, und prüfe dann Voraussetzung vom Lemma von Zorn. Das liefert ein maximales Element, dass dann schon der ganze Raum sein muss. Sonst fände mein mit Schritt eins einen größeren Raum, was aber ein Widerspruch zur Annahme bereits das maximale Element benutzt zu haben.

*Beweis.* Falls $E = X$: klar(Wähle $F = f$). Sei also $E \subsetneq X \Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus E$.

Schritt 1:
Setze $f$ auf $E \oplus span\{x_0\}$ fort (Bezeichnung wieder mit $f$) mit $f(z + \alpha x_0) = f(z) + \alpha\gamma \; z \in E, \alpha \in \mathbb{R}$. Wähle $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass $f(z + \alpha x_0) \leq p(z + \alpha x_0)$. Dabei gilt:

$$\alpha > 0 : \; \gamma \leq \tfrac{1}{\alpha} p(z + \alpha x_0) - f(z)) = p(\tfrac{z}{\alpha} + x_0) - f(\tfrac{z}{\alpha}) \Leftrightarrow \gamma \leq p(z_1 + x_0) - f(z_1) \; \forall z_1 \in E$$
$$\alpha < 0 : \; \alpha\gamma \leq p(z + \alpha x_0) - f(z) \Leftrightarrow -\gamma \leq p(-\tfrac{z}{\alpha} - x_0) + f(\tfrac{z}{\alpha}) \Leftrightarrow \gamma \geq -p(-z_2 - x_0) - f(z_2) \; \forall z_2 \in E$$

Also existiert ein geeignetes $\gamma \in \mathbb{R}$, falls $\forall z_1, z_2 \in E$ gilt:

$$-p(-z_2 - x_0) - f(z_2) \leq p(z_1 + x_0) - f(z_1) \Leftrightarrow f(z_1 - z_2) \leq p(-z_2 - x_0) + p(z_1 + x_0).$$

Dies gilt, da $f(z_1 - z_2) \overset{Vor.}{\leq} p(z_1 - z_2) \overset{2.}{\leq} p(-z_2 - x_0) + p(z_1 + x_0)$.
Also $\exists \gamma = \sup\limits_{z \in E} -p(-z + x_0) - f(z) \Rightarrow f : E \oplus span\{x_0\}$ ist linear und $f(x) \leq p(x) \; \forall x \in E \oplus span\{x_0\}$.

Schritt 2:
Sei $\mathcal{F} := \{(H, g_H) : E \subset H \subset X \; UVR, g_H|_E = f, g_H(x) \leq p(x) \; \forall x \in H\}$.
Sei $(H_1, g_{H_1}) \leq (H_2, g_{H_2}) :\Leftrightarrow H_1 \leq H_2$ mit $g_{H_2}|_{H_1} = g_{H_1}$ eine Halbordnung (ÜA). Falls $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ totalgeordnet ist, dann ist $H_0 = \bigcup\limits_{(H, g_H) \in \mathcal{G}} H$ mit $g_{H_0} z = g_H z \; \forall z \in H, (H, g_H) \in \mathcal{G}$ eine obere Schranke von $\mathcal{G}$ (Wohldefiniertheit folgt aus Totalordnung).
Mit dem Lemma von Zorn folgt nun: $\mathcal{F}$ hat ein maximales Element $(X_0, g_{x_0})$. Falls $X_0 \subsetneq X_1$, so kann mit Schritt 1 auf $\tilde{X_0} = X_0 \oplus span\{x_0\} \; x_0 \in X \setminus X_0$ linear fortgesetzt werden. Also ist $(\tilde{X_0}, f_{\tilde{X_0}}) \succeq (X_0, g_{X_0})$ und dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $(X_0, g_{X_0})$.

■

**Satz 3.2: Satz von Hahn-Banach**

$X$ ein $\mathbb{K}$-VR, $p : X \to \mathbb{R}$ Halbnorm, $E$ UVR, $f : E \to \mathbb{K}$ linear und

$$f(x) \leq p(x) \; \forall x \in E$$

Dann existiert $F : X \to \mathbb{K}$, so dass

(i) $F|_E = f$

(ii) $|F(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X$

*Beweisskizze.* Fall 1 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Nutze wesentliche Lemma 3.1, dann sind *i*), *ii*) Konsequenzen.

Fall 2 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Setze $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ Etwas rechnen ergibt mit der $\mathbb{R}$-Linearität $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$. Damit ist auch dieser Fall wesentlich auf den reellen Fall zurückgeführt. Und Lemma 3.1 rechtfertig folgendes : Definiere dann $F(x) := F_1(x) - iF_1(ix)$. Prüfe daran alle Eigenschaften *leicht nach.*

*Beweis.* 1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Mit Lemma 3.1. $\exists F : X \to \mathbb{R}$ linear mit $F|_E = f$ und $F(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$. Außerdem gilt

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x) \Rightarrow |F(x)| \leq p(x).$$

2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ mit $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-linear. Da $f$ linear ist gilt:

$$f(ix) = if(x) = if_1(x) - f_2(x) \wedge f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) \Rightarrow f_2(x) = -f_1(ix) \Rightarrow f(x) = f_1(x) - if_1(ix).$$

Also ist $f_1 : E_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear und $|f_1(y)| \leq p(y)\ \forall y \in E_\mathbb{R}$. Mit Schritt 1 angewandt auf $f_1$ an $X_\mathbb{R}$ gilt:

$$\exists \mathcal{F} : X_\mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ sodass } F_1|_{E_\mathbb{R}} = f_1 \text{ und } |F_1(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X_\mathbb{R}.$$

Sei $F(x) = f_1(x) - iF_1(ix)$. zZ.: $F : X \to \mathbb{C}$ ist linear mit $F|_E = f$ und $|F(x)| \leq p(x)\ \forall x \in X$. Linearität: Für $x, y \in X$, $\alpha = \underbrace{\alpha_1}_{\in\mathbb{R}} + i \underbrace{\alpha_2}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{C}$ gilt:

$$F(x+y) = F_1(x+y) - i(F_1((x+y)i)) \overset{F_1 lin.}{=} F_1(x) + F_2(y) - i(F_1(ix) + F_1(iy)) = F(x) + F(y).$$

und

$$\begin{aligned} F(\alpha x) &= F_1(\alpha x) - iF_1(\alpha ix) = F_1((\alpha_1 + i\alpha_2)x) - iF_1(\underbrace{(\alpha_1 + i\alpha_2)ix}_{=(\alpha_1 i - \alpha_2)x}) \\ &= \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_1(x) - \alpha_1 iF_1(ix) + \alpha_2 iF_1(x) = \alpha_1 F(x) + \alpha_2 i \underbrace{(-iF_1(ix) + F_1(x))}_{=F(x)} \\ &= \alpha F(x). \end{aligned}$$

$F|_E = f$ folgt aus der Darstellung von $F$ und $f$.
Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $x \in X$ fest $(F(x) \in \mathbb{C})$ gilt:
$|F(x)| = zF(x) = F(zx) \overset{F(zx)\in\mathbb{R}}{=} F_1(zx) \leq p(zx) = p(x)$.

■

**Satz 3.3: topologische Verssion von Satz 5.2**

$X$ normierter $\mathbb{K} - VR$, $E$ UVR, $f : E \to \mathbb{K}$ stetig und linear. Dann exisitiert $F : X \to \mathbb{K}$ linear stetig mit

(i) $||F|| = ||f||$

(ii) $F|_E = f$

*Beweisskizze.* Betrache $p(x) := ||f|| \cdot ||x||$. Stetigkeit zeigt man über die Beschränktheit von $F$. Das liefert auch bereits $||F|| \leq ||f||$. Die andere Ungleichung folgt, da $f$ eine Einschränkung von $F$ ist.

*Beweis.* Betrachte $p(x) = ||f|| \cdot ||x||$ ist Halbnorm und $|f(x)| \leq ||f|| \cdot ||x|| = p(x)$ (folgt aus Definition des beschränkten Operators, also Stetigkeit von $f$). Mit Satz 3.2. folgt:

$\exists F : X \to \mathbb{K}$ mit $F|_E = f$ und $|F(x)| \le p(x) = ||f|| \cdot ||x|| \ \forall x \in X \Rightarrow \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{||x||} \le ||f||$

Damit ist $F$ beschränkt, also stetig und $||F|| \le ||f||$. Außerdem gilt:

$$||F|| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{||x||} \ge \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{||x||} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} = ||f|| \, .$$

■

**Kollar 3.4: Funktional für jeden Punkt**

$X$ normierter $\mathbb{K} - VR$, $x_0 \in X$. Dann existiert $x' \in X'$, so dass $||x'|| = 1$ und $\langle x_0, x' \rangle = ||x_0||$.

*Anmerkung:* Ist $\langle x_0, x' \rangle$ für alle $x' \in X'$, so ist $x_0 = 0$.

*Beweis.* Für $x_0 = 0$ is die Aussage klar. Sei also $x_0 \neq 0, E := span\{x_0\}, f : E \to \mathbb{K} : cx_0 \mapsto c\,||x_0|| \ \ c \in \mathbb{K}$. Dann ist $f(x) = ||x_0||$ und $||f|| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x = 1}} |f(x)| = 1$ (ÜA). Mit Satz 3.3. folgt:

$\exists x' : X \to \mathbb{K}, x'|_E = f$ und $||x'|| = ||f|| = 1 \Rightarrow x'(x_0) = \langle x_0, x' \rangle = f(x_0) = ||x_0||\,.$ ■

**Kollar 3.5: Normen und Funktionale**

$X$ normierter VR, $x_0 \in X$. Dann gilt, dass

$$||x_0|| = \sup_{x' \in X, ||x'|| \le 1} |\langle x_0, x' \rangle| = \sup_{x' \in X, ||x'|| = 1} |\langle x_0, x' \rangle|$$

*Beweis.* $\ge ... \ge$ ist klar. Sei $x' \in X'$ mit $||x'|| = 1 \overset{Def.\ Op.Norm}{\Longrightarrow} |\langle x_0, x' \rangle| \le ||x'|| \cdot ||x_0|| \le ||x_0||$.
Wähle $x'$ wie in Korollar 3.4., dann ist $|\langle x_0, x' \rangle| = ||x_0||$. ■

**Satz 3.6: Separabilität von Dualraum**

$X$ normierter $\mathbb{K} - VR$. $X'$ separabel $\Rightarrow X$ separabel.

*Beweisskizze.* (i) $X'$ seperabel $\Rightarrow S := \{x' \in X' : ||x'|| = 1\}$ ist separabel.

(ii) Schreibe S als Abschluss einer abzählbaren Mengen. Alle Element haben Norm 1 und damit exisitieren Werte von den Operatoren die größer sind als $\frac{1}{2}$. Die Elemente aus S aufgespannt über eine abzählbare Menge von K ist abzählbare. Nun muss der Abschluss dieses Spannes schon X selber sein. Wäre dies nicht so, dann gäbe es ein Element das weder im Abschluss des Spannes noch X ist.

(iii) ÜA: $\exists x' \in X'$ mit $||x'|| = 1$, $kerx' > E$, $\langle x_0, x' \rangle \neq 0$
Dann null der Operatoren dieser Operator als Elemente in E. Wegen der Norm 1 ist dieser Operator in S und hat wegen einer Ungleichungskette echten Abstand von allen anderen Elementen in S. Dies ist ein Widerspruch zur Dichtheit von S.

*Beweis.* 1) $X'$ separabel $\Rightarrow \underbrace{\{x' \in X' : ||x'|| = 1\}}_{=:S}$ ist separabel (Dreiecksungleichung).

2) $S = \overline{\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}}, x'_n \in S$. Da $||x'_n|| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ existieren $x_n \in X : ||x_n|| = 1$ und $\langle x_n, x'_n \rangle \ge \frac{1}{2} \ \forall n$ (Definition der Operatornorm $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = x'$.
Sei $E := span\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Angenommen $E = X \Rightarrow span_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist Dicht in $X$.
Falls $E \neq X$, so existiert $x_0 \in X \setminus E$.

3) $x' \in X'$ mit $||x'|| = 1, Kerx' \supset E$ (ÜA), $\langle x_0, x' \rangle \neq 0 \overset{x_n \in E}{\Rightarrow} \langle x_n, x' \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\frac{1}{2} \le \langle x_n, x'_n \rangle = \langle x_n, x'_n \rangle - \langle x_n, x' \rangle = \langle x_n, x'_n - x \rangle \le \underbrace{||x_n||}_{=1} \cdot ||x'_n - x'|| \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow x' \in S = \{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ <u>aber</u> $||x' - x'_n|| \geq \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Dichtheit von $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $S$.

■

## 3.2 Dualraum und Reflexivität

Es wird de Dualraum genauer untersucht. Der Bidualraum wird als Dualraum des Dualraums eingeführt. Man findet eine kanonische Injektion von Raum in den Bidualraum (über das Funktional zu einem Funktional). Ist die Bidualraum immer gleich dem Raum? Diese Eigenschaft soll reflexiv heißen. Welchen Zusammenhang besteht zwischen reflexiv und vollständig? Hat man mehr Struktur durch einen Hilbertraum findet man eine explizite Darstellung eines Funktionals über das Skalarprodukt. Wie stehen da reflexiv und vollständig in Beziehung?
Wir verallgemeiner den Orthogonalraum auf normierter Räume und seinen Dualraum. Welche topologische Eigenschaften haben solche Räume? Gibt es Normisomorphien?

**Defintion 3.7: Bidualraum**

$X'' := (X')'$ heißt Bidualraum.
Bemerkung für den endlichdimensionalen Fall: $X = \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $X' = \mathbb{R}^{1\times n}$
Im allgemeinen, also im unendlichdimensionalen ist $X'' \neq X$.

Wie Definition 5.7 vermuten lässt besitzt der Dualraum $X'$ von $X$ als eigener normierter Raum auch einen Dualraum. Die Trennungsätze haben die Reichhaltigkeit dieses Dualraums gezeigt und daher können wir $X$ in seinen Bidual $X''$ einbeten. $x$ kann also in folgendem Sinne als Linearform auf $X'$ aufgefasst werden. Betrachte dazu:

**Bemerkung 3.8: Einbettungsisomorphismus $J_X$**

Für $x \in X$ betrachte die Linearform

$$f_x \in \mathcal{B}(X', \mathbb{K}) \text{ mit } x' \mapsto \langle x, x'\rangle \text{ für } x' \in X'.$$

Damit definieren wir `die` lineare isometrische *kanonische Abbildung*:

$$J_X \in \mathcal{B}(X, X'') \quad \text{mit} \quad J_X(x) = f_x(= \langle x, \cdot\rangle)$$

$$\text{bzw.} \Leftrightarrow J_X(x) : X \to \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \langle x', J_X x\rangle_{X'} := \langle x, x'\rangle_X \quad x' \in X'$$

Es gilt nun sogar, dass $x$ als Element von X die gleiche Norm besitzt wie als Linearform von $X'$ und $J_X$ damit stetig ist auf $X'$. Es gilt:

$$||J_X(x)|| = ||f_x|| = ||x|| \quad \text{und} \quad J_X \in \mathcal{B}(X, X'')$$

*Beweis.* $||f_x|| = ||f_x||_{\mathcal{B}(X',\mathbb{K})} = \sup |\langle x, x'\rangle| \overset{3.5}{=} ||x_0||$. $f_x$ linear klar. ■

Wegen $J_X(X) \underset{\text{normisomorph}}{\subset} X''$ kann $X$ also als Teilraum von $X''$ aufgefasst werden.

**Defintion 3.9: Reflexiv**

Ein normierter Raum $X$ heißt reflexiv, falls $J_X(X) = X''$. In diesem Fall ist $J_X : X \to X''$ ein Isomorphismus.

**Lemma 3.10: reflexiv bedingt volländig**

Für einen normierten Raum $X$ gilt: $X$ reflexiv $\Rightarrow$ $X$ vollständig.

*Beweis.* $X''$ ist vollständig (weil $X'' = \mathcal{B}(X', \mathbb{K})$ und da $\mathbb{K}$ vollständig ist). Da $J_X : X \to X''$ isometrisch isomorph ist, ist auch $X$ vollständig. ■

Der Hilbertraum kann als Prototyp eines *„schönen"* Raumes angesehen werden. So finden wir eine konkrete Darstellung für seine Funktionale. Der reflexive Raum kann in diesem Sinne als Versuch der Verallgemeinerung verstanden werden. Eine konkrete Darstellung werden wir auch für ihn nicht finden, aber wichtige Existenzaussagen und Kompaktheitseigenschaften werden wir beweisen können. Zunächst aber der Hilbertraum:

**Satz 3.11: Darstellungssatz Frechet-Riesz**

Sei $X$ Hilbertraum. Dann ist

$$R_X : X \to X',\ x \mapsto (\cdot, x) = (y \mapsto (y, x))$$

anti-linear, isometrische Bijektion. D.h.

(i) $R_X(x) = (y \mapsto (y, x)) \in X' \quad \forall x \in X$

(ii) $\forall x' \in X'\ \exists!\ x \in X : \langle y, x' \rangle = (y, x) \quad \forall y \in X$

*Beweisskizze.* (i) $R_x$ wohldefiniert, isometrisch, anti-linear: nachrechnen !

(ii) $R_x$ surjektiv: Wenn wir nicht das Nullfunktional haben, denn finden wir ein $z \neq 0$ im orthogonalen Komplement des Kerns. Konstruiere für dieses z ein Funktional durch $x' = (\cdot, xz)$ mit $c \in \mathbb{C}$. Diese Konstruktion gilt dann auch für Elemente im Kern.

*Beweis.* 1) $R_X$ ist wohldefiniert, semilinear und isometrisch.

Sei $x \in X$. Dann ist $y \mapsto (y, x)$ linear (folgt aus der Linearität des Skalarprodukts). Es gilt

$$|\langle y, R_X x \rangle| \overset{Def.R_X}{=} |(y, x)| \overset{C.S.}{\leq} ||y|| \cdot ||x|| \overset{\forall y \in X}{\Rightarrow} R_X x \in X' \text{ mit } ||R_X x|| \leq ||x|| \,.$$

Setze $y = x$ ein: $|\langle x, R_X x \rangle| = |(x, x)| = ||x||^2 \overset{Def.\ Op.Norm}{\Longrightarrow} ||R_X x|| \geq ||x|| \Rightarrow ||R_X x|| = ||x||$.

$R_X(x + y)) = R_X x + R_X y$ klar. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\langle y, R_X \alpha x \rangle = (y, \alpha x) = \overline{\alpha}(y, x) = \overline{\alpha}\langle y, R_X x \rangle \Rightarrow R_X \alpha x = \overline{\alpha} R_X x.$$

2) $R_X$ ist surjektiv.

Sei $x' \in X'$. Falls $x' = 0$, dann wähle $x = 0$ und es gilt $R_X 0 = 0$.
Angenommen $x' \neq 0 \Rightarrow Kerx' \neq X$. Weil $X$ Hilbertraum ist, gilt:

$$X = Kerx' \oplus (Kerx')^{\perp} \Rightarrow\ \exists z \neq 0, z \in (Kerx')^{\perp}.$$

Ansatz: $x' = (\cdot, cz)$ mit $c \in \mathbb{C}$ (OBdA ist $X$ ein $\mathbb{C} - HR$), also $\langle y, x' \rangle = (y, cz)\ \forall y \in X$.

Für $y = z : \langle z, x' \rangle = (z, zc) \Rightarrow \overline{c} = \dfrac{\langle z, x' \rangle}{(z, z)} \Rightarrow c = \dfrac{\overline{\langle z, x' \rangle}}{(z, z)}$.

Beh.: $\forall y \in X : \langle y, x' \rangle \overset{!}{=} (y, cz)$

$$\begin{aligned} \langle y, x' \rangle = \overline{c}(y, z) = \frac{\langle z, x' \rangle}{(z, z)}(y, z) &\Leftrightarrow \langle y, x' \rangle (z, z) = \langle z, x' \rangle (y, z) \\ &\Leftrightarrow (\langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y \perp z \end{aligned}$$

Da $z \in (Kerx')^{\perp}$ verbleibt zu Zeigen, dass $\langle y, x'\rangle z - \langle z, x'\rangle y \in Kerx'$:

$$0 = \langle y, x'\rangle\langle z, x'\rangle - \langle z, x'\rangle\langle y, x'\rangle = \langle\langle y, x'\rangle z - \langle z, x'\rangle y, x'\rangle.$$

Wir haben für $x' \in X'$ also ein $x \in X x = cz$ konstruiert, sodass $x' = \underbrace{(\cdot, x)}_{R_X x}$. Daraus folgt die Surjektivität.

■

**Kollar: Beschreibung des $L^2$**

Beschränkte lineare Abbildung $L^2(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$. Dann wird diese beschrieben durch ein Element aus $L^2(\Omega, \mu) \to \mathbb{K}$).

**Satz 3.12: Hilberträume sind reflexiv**

$X$ Hilbertraum $\Rightarrow$ $X$ reflexiv ($J_X X = X''$)

*Beweisskizze.* Zu zeigen: $J_x$ surjektiv.

(i) Z.z.: $X'$ Hilbertraum. Nutze bijektivität von $R_x$ und Isometrie.
Wende dann als nächstes Satz 5.11 zweimal an, das liefert einen Kanditaten für $x$ und $x''$. Dann bleibt zu zeigen, dass $J_x x = x''$ erfüllt. Dies sind zwei Funktionale und ihre Gleichheit zeigt man durch nachrechnen, dass sie punktweise gleich sind.

*Beweis.* z.Z.: $J_X$ ist surjektiv.

1) $X'$ ist Hilbertraum.
Seien $x', y' \in X'$. Definiere $(x', y')'_X := (R_X^{-1} y', R_X^{-1} x')$.
$(\cdot, \cdot)'_X$ ist Skalarprodukt (folgt aus den Eigenschaften von $R_X$) mit $(x', x')'_X = \left|\left|R_X^{-1} x'\right|\right|^2 = ||x||^2$.

2) Sei $x'' \in X''$. Gesucht ist $x \in X : J_X x = x''$. Wende Satz 3.11. auf HR $X'$ folgendermaßen an:
Sei $x' := R_{X'}^{-1} x''$. Wende Satz 3.11. nun auf $X$ an: $x := R_X^{-1} x' \in X$.

$$\begin{aligned}\forall y' \in X' : \langle y', x''\rangle = (y', x')'_X &\overset{Def.(\cdot,\cdot)'_X}{=} (R_X^{-1} x', R_X^{-1} y')_X \\ &= \langle \underbrace{R_X^{-1} x'}_{=x}, y'\rangle = \langle x, y'\rangle \overset{Def. J_X}{=} \langle y', J_X x\rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow x'' = J_X x$

■

**Defintion 3.13: Orthogonalraum**

$X$ normierter $\mathbb{K} - VR$, $M \subset X$, $N \subset X'$. Dann heißt

$$M^{\perp} := \{x' \in X' : \langle x, x'\rangle = 0 \; \forall x \in M\}$$

Orthogonalraum von M.

$$N_{\perp} := \{x \in X : \langle x, x'\rangle = 0 \; \forall x' \in N\}$$

Orthogonalraum von N.
Klar: $M^{\perp} \subset X', N_{\perp} \subset X$.

**Lemma 3.14: Aussagen zu Orthogonalräumen**

$X$ normierter Raum. $M \subset X$, $N \subset X'$. Dann

(i) $M^\perp \subset X'$ abgeschlossen UVR.

(ii) $N_\perp \subset X$ abgeschlossen UVR.

(iii) $M \subset (M^\perp)_\perp$

(iv) $N_\perp \subset N^\perp$, wobei : $N_\perp \subset X, N^\perp \subset X''$ als UVRe von $X''$ aufgefasst werden.

*Beweis.* (i) Sei $(x'_n)$ Folge in $M^\perp$ die gegen ein $x' \in X'$ konvergiere. Dann gilt $0 = \langle x, x'_n \rangle \to \langle x, x' \rangle$ für alle $x \in M$. Damit ist aber auch $0 = \langle x, x' \rangle$ für alle $x \in M$ und damit ist definitionsgemäß $x' \in M^\perp$ sein.

(ii) $N_\perp$ kann auch mit scharfen Blick beschrieben werden durch

$$N_\perp = \bigcap_{x' \in N} ker x' = \bigcap_{x' \in N} \overline{ker x'}$$

(iii) Sei $x \in M$. Dann gilt per Definition von $M^\perp$, dass $\langle x, x' \rangle = 0$ für alle $x' \in M^\perp$. Was aber gerade heißt $x \in (M^\perp)_\perp$.
(Spannender ist die Frage wann bei Menge gleich sind. Wie im endlichdimensionalen.)

(iv) Sei $x \in N_\perp$, dass heißt $\langle x, x' \rangle = 0 \; \forall x' \in N$. Nun betrachte kanonsiche Einbettung mit $x'' \in J_X(X)$:

$$\langle x', x'' \rangle = \langle x', J_X(x) \rangle = 0 \quad \forall x' \in N \quad \Rightarrow \quad J_X(x) \in N^\perp \subset J_X(X) \subset X''^{1}.$$

■

**Bemerkung: Übung**

$X$ normierter Raum, $x_0 \notin \overline{E}$, $E \subset X$ UVR. Dann existiert $x' \in X'$ mit $ker x' \supset \overline{E}$ und $\langle x_0, x' \rangle \neq 0$.

**Satz 3.15: Abschlüsse und Orthogonalräume**

$X$ normierter Raum, $E \subset X$ UVR. Dann gilt

$$\overline{E} = (E^\perp)_\perp$$

*Beweis.* "$\subset$": Mit Lemma 3.14 (ii) und (iii) gilt $E \subset (E^\perp)_\perp = \overline{(E^\perp)_\perp} \Rightarrow \overline{E} \subset (E^\perp)_\perp$

"$\supset$": Angenommen es gäbe ein $x_0 \in (E^\perp)_\perp$, dass nicht in $\overline{E}$ ist. Dann gibt es auch ein $x' \in X'$ mit $\langle x_0, x' \rangle \neq 0$ und $ker x' \supset \overline{E}$. Damit ist $x' \in \overline{E}^\perp$, inbesondere also $x' \in E^\perp$. Per Annahme soll aber $x_0 \in (E^\perp)_\perp$, also müsste auch $\langle x_0, x' \rangle = 0$ ↯!

■

**Kollar 3.16**

$X$ normierter Raum, $E \subset X$ UVR. Dann gilt $E$ abgeschlossen $\Leftrightarrow E = (E^\perp)_\perp$.

[1]Wobei wir $J_X(x)$ mit $x$ identifiziert haben.

**Satz 3.17: Übung: Normisomorphien Dual- und Quotientenraum**

$X$ normierter Raum. $M \subset X$ abgeschlossen UVR. Dann

(i) $X'/M^{\perp}$ ist normisomorph zu $M'$.

(ii) $(X/M)'$ ist normisomorph zu $M^{\perp}$.

*Beweis.* Siehe hier B.8.4. ■

**Satz 3.18: Banachraum und Reflexivität**

$X$ reflexiv normierter Raum. Dann sind äquivalent

(i) $X$ Banachraum

(ii) $X'$ reflexiv.

(Die eigentliche Aussage ist $X$ reflexiv $\Rightarrow$ $X'$ reflexiv.)

*Beweis.* “$\Leftarrow$“: Folgt aus Satz 3.10.

“$\Rightarrow$“: Für die Reflexivität ist zu zeigen, dass die *kanonische Injektion* von $X'$ nach $X'''$ **surjektiv** ist. Wir betrachten also

$$J' := J_{X'} : X' \to X''', \; \langle x'', J'x' \rangle = \langle x', x'' \rangle \quad \forall x' \in X', x'' \in X'' \quad (*)$$

Sei also $x''' \in X'''$ beliebig. Wir setzen uns den Kanditaten zu

$$x' : X \to \mathbb{K}, \quad \langle x, x' \rangle := \langle Jx, x''' \rangle \quad \forall x \in X.$$

$x'$ ist schon mal linear und stetig, also $x' \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = X'$. Bleibt zu zeigen:

$$J'x' = x''', \quad (\text{d.h.}\, \langle x'', J'x' \rangle = \langle x'', x''' \rangle \; \forall x'' \in X'')$$

Die Reflexivität von $X$ liefert nun zu jedem $x''$ ein $x$ mit $x'' = Jx$. Nun rechnet man nur nach:

$$\begin{aligned}\langle x'', J'x' \rangle = \langle x', x'' \rangle &\overset{x''=Jx}{=} \langle x', Jx \rangle \\ = \langle x, x' \rangle &\overset{(*)}{=} \langle Jx, x''' \rangle \overset{Jx=x''}{=} \langle x'', x''' \rangle\end{aligned}$$

■

**Satz 3.19: Äquivalenz Reflexivität und Dualraum**

$X$ Banachraum. Dann gilt

$$X \text{ reflexiv } \Leftrightarrow X' \text{ reflexiv }.$$

Für $\Leftarrow$ könnte man auch beweisen und nutzen: Abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume sind reflexiv.

*Beweis.* “$\Rightarrow$“: Dies ist ja gerade Satz 3.18.

“$\Leftarrow$“: Sei also $X'$ reflexiv. Angenommen $X$ ist nicht reflexiv:
Da $J(X) = \overline{J(X)} \subset X''$ [2] ist, existiert ein $x''' \in X''' \setminus \{0\}$ mit

$$\langle Jx, x''' \rangle = 0 \quad \forall x \in X.$$

[2]

Sei $J' : X' \to X'''$ die *kanonische Einbettung*. Wir zeigen $x''' \notin J'(X')$. Angenommen $x' \in X'$, so dass $x''' = J'x'$. Dann gilt für $x$ aus $X$:

$$\langle x, x' \rangle = \langle x', Jx \rangle = \langle Jx, J'x' \rangle = \langle Jx, x''' \rangle = 0$$

Damit ist $x' = 0$, aber $0 = J'x' = x''' \neq \{0\}$ ↯
*Alternativer Beweis:* Mit Lemma 3.33 und der Hinrichtung.

■

## 3.3 Duale und adjungierte Abbildungen

In diesem Abschnitt wird die duale Abbildung definiert. Wann ist dieser stetig? Was wissen über sein Kern und sein Bild? Wie hängen Injektivität und Surjektivität vom Operator und seinem Dualen zusammen. Was ist mit dem Dualen des Dualen? Welche Rechenregeln gelten ? Folgt aus der Bijektivität eines Operatoren die Bijektivität seines Dualen und umgekehrt?
Wenn wir sogar einen Hilbertraum haben, können wir (noch stärker) einen adjungiert Operator einführen und diesen mit Hilfe der Riesz-Einbettung eindeutig charakterisieren. Auch für den adjungierten Operatoren werden einige Rechenregel gezeigt. Welche Gleichheiten gelten für Bild und Kern von Operatoren und seinem Adjungierten?

**Defintion 3.20: duale Operator**

Seien $X, Y$ normierte Räume, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Die Abbildung $T' : Y' \to X'$ mit

$$\langle x, T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle \;\; \forall y' \in Y', x \in X.$$

heißt der zu $T$ duale Operator.
$T'$ ist eine linearer Operator. [a]

[a] Wesentlich weil $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform ist.

**Satz 3.21: Norm und Bild des Dualen Operatores**

$X, Y$ normierter Räume, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann gilt

(i) $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$ mit $||T'|| = ||T||$, d.h. die Abbildung $T \mapsto T'$ von $\mathcal{B}(X, Y) \to \mathcal{B}(Y', X')$ ist eine isometrische (und lineare) Einbettung.

(ii) $Ker\, T' = \{0\} \Leftrightarrow \overline{Im\, T} = Y$

*Beweisskizze.* (i) Abschätzung in beide Richtung.

(ii) Injektivität vom dualen Operatoren voraussetzen; ein Funktional das alle Elemente von x null, ist es das Nullfunktional. Angenommen das Bild ist nicht abgeschlossen, dass muss es ein Element geben, dass ungleich null ist. Widerspruch. Andere Richtung, irgendetwas mit Stetigkeit und Dichtheit vom Bild.

*Beweis.* (i) „ $\leq$“ Sei $y' \in Y'$. Dann gilt:

$$||T'y'|| = ||y' \circ T|| \leq ||y'|| \, ||T|| \quad \Rightarrow ||T'|| \leq ||T||$$

„ $\geq$ “ (nach Alt). Es gilt für $||y'|| \leq 1$ und $||x|| \leq 1$

$$|\langle Tx, y' \rangle| = |\langle x, T'y' \rangle| \leq ||T'y'|| \cdot \underbrace{||x||}_{\leq 1} \leq ||T'y'|| \leq ||T'|| \cdot \underbrace{||y'||}_{\leq 1} \leq ||T'||$$

Wenn $Tx \neq 0$, gibt es wegen Kor 3.4 ein $y' \in Y'$ mit $||y'|| = 1$ und $\langle Tx, y' \rangle = ||Tx||$. Insgesamt also mit $||T'|| \geq ||Tx||$:

$$||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx|| \leq ||T'||$$

(ii) Beweis, halbe Tafel S.16

■

**Kollar 3.22: Eigenschaften unter abgeschlossenem Bild**

$X$ Banachraum, $Y$ normierter Raum. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, so dass ein $m > 0$ existiert mit

$$m\,||x|| \leq ||Tx||\ \forall x \in X$$

. ($T$ injektiv und hat abgeschlossenes Bild) Dann sind äquivalent

(i) T surjekiv

(ii) T' injekitv

*Beweisskizze.* $T'$ injektiv gilt genau dann wenn der Abschluss vom Bild Y ist und dies gilt wegen der geforderten Ungleichung genau dann wenn, bereits nur das Bild gleich Y.

*Beweis.* Beweis, ein Tafel, S.17

■

**Satz 3.23: Eigenschaften des bidualen Operatores**

$X, Y$ normierter Räume, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann

(i) $T'' \in \mathcal{B}(X'', Y'')$ und $T = T''|_{imJ_X}$ (genauer: $T''J_X = J_Y T$). Insbesondere $T'' = T$, wenn $X$ reflexiv ist.

(ii) $S \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow (\alpha S + \beta T)' = \alpha S' + \beta T'$

(iii) $S \in \mathcal{B}(Y, Z) \Rightarrow (ST)' = T'S'$

*Beweis.* Beweis, halbe Tafel S.19

(i)

(ii)

(iii)

■

**Kollar 3.24: Bijektivität von der Inversen und des Dualen**

$X, Y$ Banachräume, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Dann gilt

$$(T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Leftrightarrow) \quad T \text{ bijektiv} \quad \Leftrightarrow \quad T' \text{ bijektiv} \quad (\Leftrightarrow (T')^{-1} \in \mathcal{B}(X', Y'))$$

*Beweis.* Beweis, eine Tafel S.20f

“ $\Rightarrow$ “

“ $\Leftarrow$“

■

Jetzt Fokus auf den Hilbertraum. Grob ist der Hilbertraum sein eigener Dualraum.

**Defintion 3.25: adjungierter Operator**

$(X, (\cdot,\cdot)_X), (Y, (\cdot,\cdot)_Y)$ Skalarprodukträume. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Ein Operator $T^* \in \mathcal{B}(Y,X)$ heißt zu $T$ adjungierter Operator, wenn

$$(Tx, y)_Y = (x, T^*y)_X \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

**Beispiele 3.26**

$\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ mit euklidschem Skalarprodukt. $A \in \mathbb{K}^{n\times m} = \mathcal{B}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \Rightarrow A^* = \overline{A}^T$

**Satz 3.27: Existenz und Eindeutigkeit vom adjungierten Op.**

$(X, (\cdot,\cdot)_X)$ Hilbertraum, $(Y, (\cdot,\cdot))$ Skalarproduktraum. Dann existiert ein eindeutiges $T^* \in \mathcal{B}(Y,X)$. Für die Riesz-Einbettung $R_X : X \to X'$, $R_Y : Y \to Y'$ gilt

$$T^* = R_x^{-1} T' R_Y.$$

*Beweis.* Beweis, Halbe Tafel S.22

■

Im folgenden Satz sind die Voraussetzungen zum Teil etwas stärker als sie seien müssten.

**Satz 3.28: Rechenregeln adjungierte Operatoren in Hilberträumen**

$X, Y, Z$ Hilberträume, $S, T \in \mathcal{B}(X, Y, )U \in \mathcal{B}(Y, Z)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt

(i) $(S+T)^* = S^* + T^*$, da $(S+T)^* = R_X^{-1}(S+T)'R_Y = R_X^{-1}S'R_Y + R_X^{-1}T'R_Y = S^* + T^*$.

(ii) $(UT)^* = T^*U^*$, da $(UT)^* = R_Y^{-1}(UT)'R_Z = R_X^{-1}T'R_Y R_Y^{-1}U'R_Z = T^*U^*$

(iii) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$, da $(\alpha T)^* = R_X^{-1}(\alpha T)'R_Y = R_X^{-1}\alpha T'R_Y = \overline{\alpha}R_X^{-1}T'R_Y = \alpha T^*$

(iv) $(id_X)^* = id_X$, da

kleine Begr.

(v) $T^{**} = T$, da

kleine Begr.

(vi) $||T^*|| = ||T||$, da

kleine Begr.

(vii) Existiert $T^{-1}$, dann auch $(T^*)^{-1}$, und es gilt $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ (Folgt aus Kor. 3.24)

**Satz 3.29: Bild, Kern, Orthogonalraum der Adjungierten**

$X, Y$ Hilberträume, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann gilt

(i) $(imA)^\perp = KerA^*$

(ii) $(imA^*)^\perp = KerA$

(iii) $\overline{imA} = (KerA^*)^\perp$

(iv) $\overline{imA^*} = (KerA)^\perp$

*Beweis.* Beweis, ein Tafel S.24

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

■

## 3.4 Schwache Konvergenz

Die schwache Konvergenz ist sehr nützlich und hilfreich. Sie ist in unserem Fall tatsächlich nichts anderes als punktweise Konvergenz von stetigen Linearformen gegen stetige Linearform. Siehe dazu Bemerkung 3.31, a).

**Defintion 3.30: schwach und schwach$^*$ Konvergenz**

$X$ normierter Raum. Eine Folge $(x_n)$ in $X$ heißt

a) *schwache Cauchy-Folge*, wenn

$$\langle x_n, x'\rangle \, CF \text{ ist } \forall x' \in X$$

b) *schwach konvergent* gegen $x \in X$, wenn

$$\langle x_n, x'\rangle \to \langle x, x'\rangle \quad \forall x' \in X'$$

$$\text{(schreibe } x_n \rightharpoonup x)$$

Eine Folge $(x'_n)$ in $X'$ heißt

a) *schwach$^*$ Cauchy-Folge*, wenn

$$\langle x, x'_n\rangle \text{ CF ist} \quad \forall x \in X$$

b) *schwach$^*$ konvergent* gege $x' \in X'$, wenn

$$\langle x, x'_n\rangle \to \langle x, x'\rangle \quad \forall x \in X$$

$$\text{(schreibe } x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x')$$

Eine Menge $M \subset X$ $(M \subset X')$ heißt *schwach (schwach$^*$) Folgenkompakt*, wenn jede Folge in $M$ eine schwach (schwach$^*$) konvergente Teilfolge besitzt, deren schwacher (schwacher $^*$) Grenzwert in $M$ liegt.

**Bemerkung 3.31**

In c) sei $X$ ein Banachraum. Sonst normierter Raum.

a) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow J_X x_n \overset{*}{\rightharpoonup} J_X x_n$

b) Wenn $(x_n)$ schwach konvergiert, dann ist der schwache Limes eindeutig.

c) $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$, dann $(||x'_n||)$ beschränkt und $||x'|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x'_n||$

d) $x_n \rightharpoonup x$, dann $(||x_n||)$ beschränkt und $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$

e) $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$
$x'_n \to x' \Rightarrow x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$

f) Umkehrung in e) gilt i.A nicht.

g) $x_n \to x, x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x' \Rightarrow \langle x_n, x'_n\rangle \to \langle x, x'\rangle$,

h) $x_n \rightharpoonup x, x'_n \to x' \Rightarrow \langle x_n, x'_n\rangle \to \langle x, x'\rangle$.

i) Aus $x_n \rightharpoonup x$, $x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ folgt i.A. <u>nicht</u> $\langle x_n, x'_n\rangle \to \langle x, x'\rangle$.

j) $\dim X < \infty \Rightarrow (x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow x_n \to x)$ und $(x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x \Leftrightarrow x'_n \rightharpoonup x')$

k) $X$ reflexiv, dann $x'_n \rightharpoonup x' \Leftrightarrow x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ („ $\Rightarrow$ “ gilt auch ohne Reflexivität)

*Beweis.* a) $x_n \rightharpoonup x$, d.h $\forall x' \in X'$ gilt: $\langle x', Jx_n\rangle = \langle x_n, x'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x', Jx\rangle$

b) Sei $x_n \to x, x_n \rightharpoonup y$. Damit gilt $\langle x, x'\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x'\rangle = \langle y, x'\rangle \ \forall x' \in X'$. Damit gilt

$$0 = \langle x - y, x'\rangle \ \forall x' \in X' \overset{\text{Anm.3.4}}{\Rightarrow} x - y = 0, \quad \text{also} \quad x = y.$$

c) Gilt mit Satz 2.17 bzw. Banach-Steinhaus. Schwache Konvergenz ist punktweise Konvergenz in $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

d) gilt wegen a) und c)

e) Ganz formal: Sei $x' \in X'$ beliebig, $\varepsilon > 0$. Dann gilt mit der starken bzw. Normkonvergenz:

$$|x'(x) - x'(x_n)| \leq ||x'|| \, ||x - x_n|| < ||x'|| \cdot \varepsilon' \leq \varepsilon$$

f) Betrachte die Einheitsvektoren $e_n \in \ell^2$. Es gibt für $x' \in \ell^{2\prime}$ ein Element und damit Folge $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} = R_{\ell^2}^{-1} x' \in \ell^2$, so dass $\langle y, x'\rangle = \langle y, R_{\ell^2} x\rangle = (y, x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \overline{x_i}$. Damit wird klar, dass

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_n, x'\rangle = \lim_{n\to\infty} (e_n, x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} e_{n_i} \overline{x_i} = \lim_{n\to\infty} \overline{x_n} = 0 \quad \Rightarrow e_n \rightharpoonup 0$$

Offensichtlich ist aber $||e_n|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |e_i|^2} = 1$. Also $e_n \not\to 0$ (stark).

g) Beim ersten Gleichzeiten wurde eine 1 hinzuaddiert. Die Ausdrücke verschwinden per Vor.

$$\begin{aligned} |\langle x, x'\rangle - \langle x_n, x'_n\rangle| &= |\langle x, x' - x'_n\rangle - \langle x_k - x, x'_n\rangle| \\ &\leq |\langle x, x' - x'_n\rangle| + |\langle x_n - x, x'_n\rangle| \\ &\leq \underbrace{|\langle x, x' - x'_n\rangle|}_{\to 0} + \underbrace{||x - x_n||}_{\to 0} \cdot \underbrace{||x'_n||}_{\text{beschränkt in } n} \end{aligned}$$

h) wie in g)

i) Bsp. $x_n = e_n \in \ell^2, x'_n = R_{\ell^2} e_n \Rightarrow x_n \rightharpoonup 0, x'_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, aber $\langle x_n, x'_n\rangle = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

j) Es gibt (Hamel-)Basen, Reflexivität, Stetigkeit.

k) Mit a) zweimal (weil reflexiv).

■

Zu Beispielen für z.B. $\ell_p$-Räumen, siehe Kapitel 4 und den Alt.

**Satz 3.32: Satz von Banach-Alaoglu**

$X$ separabler Banachraum. Dann gilt $\overline{U_1^{x'}(0)} = \{x' \in X' : ||x'|| \leq 1\}$ ist schwach* folgenkompakt.

*Beweis.* *Separabilität:* Sei $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$ und $Y := \operatorname{span}(x_n : n \in \mathbb{N})$.

*Diagonalverfahren:* Sei $(x_k')_{k\in\mathbb{N}} \in \overline{U_1^{x'}(0)}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Folgen $(\langle x_n, x_k'\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$[3] beschränkt in $\mathbb{K}$. Weil wir in $\mathbb{K}$ sind, besitzt jeder dieser Folgen eine konvergente Teilfolge. Mit Hilfe des Diagonalverfahrens erhalten wir sogar eine bestimmte Auswahl $\tilde{k} \to \infty$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der $\lim\limits_{\tilde{k}\to\infty} \langle x_n, x_{\tilde{k}}'\rangle$ existiert.

*schwach* Konvergenz:* Weiter existiert[4] für alle $y \in Y$

$$\langle y, x'\rangle := \lim_{\tilde{k}\to\infty} \langle y, x_{\tilde{k}}'\rangle \quad \text{und wir wollen zeigen:} \quad x_{\tilde{k}}' \xrightharpoonup{*} x' \in \overline{U_1^{x'}(0)}$$

Offenbar ist $x' \in \mathcal{B}(Y, \mathbb{K})$, offenbar linear zumindest, Stetigkeit so:

$$|\langle y, x'\rangle| = \lim_{\tilde{k}\to\infty} |\langle y, x_{\tilde{k}}'\rangle| \leq ||y|| \cdot \lim_{\tilde{k}\to\infty} ||x_{\tilde{k}}'|| \leq ||y||$$

Mit Satz 1.22 und Banach-Steinhaus haben wir sogar $x' \in X'$ und $||x'|| \leq 1$.[5] Also haben wir $\forall x \in X$ und $y \in Y$:

$$\begin{aligned} |\langle x, x'\rangle - \langle x, x_{\tilde{k}}'\rangle| = |\langle x, x' - x_{\tilde{k}}'\rangle| &\leq |\langle x - y, x' - x_{\tilde{k}}'\rangle| + |\langle y, x' - x_{\tilde{k}}'\rangle| \\ &\leq \underbrace{||x - y||}_{\leq \varepsilon(n)} \cdot \underbrace{||x' - x_{\tilde{k}}'||}_{\leq 2} + \underbrace{|\langle y, x' - x_{\tilde{k}}'\rangle|}_{\to 0} \end{aligned}$$

■

**Lemma 3.33: Reflexivität von abgeschlossen UVR**

$X$ normierter Raum. Dann

$$X \text{ reflexiv} \Leftrightarrow \text{Jeder abgeschlossen UVR von } X \text{ ist reflexiv.}$$

*Beweis.* Siehe Alt. S.245 unten ■

**Satz 3.34: Schwache Folgenkompaktheit in reflexiven Räumen**

$X$ reflexiv. Dann ist $\overline{U_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Kollar 3.35: Schwache Folgenkompaktheit in Hilberträumen**

$X$ Hilbertraum. Dann ist $\overline{U_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

[3] Durch $||x_n||$?
[4] $y$ ist Linearkombination von den $x_n$s
[5] hier brauchen wir die Dichtheit!

**Kollar 3.36: Existenz von schwach konvergenter Teilfolge**

$X$ reflexiv, $(x_n)$ beschränkte Folge. Dann existiert schwach konvergente Teilfolge.

**Kollar 3.37: Existenz von schwach$^*$ konvergenter Teilfolge**

$X$ separabel, $(x'_n)$ beschränkte Folge in $X'$. Dann existiert schwach$^*$ konvergente Teilfolge.

Nun: Charakterisierung schwacher Abgeschlossenheit.

**Satz 3.38: Trennungssatz**

$X$ normierter Raum, $M \subset X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Sei $x_0 \in X \backslash M$. Dann existiert $x' \in X'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$Re \langle x, x' \rangle \leq \alpha < Re \langle x_0, x' \rangle \quad \forall x \in M$$

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Kollar 3.39: schwache Folgenabgeschlossenheit**

$X$ normierter Raum, $M \subset X$. Konvex, abgeschlossen, dann ist $M$ schwach folgenabgeschlossen, d.h. $(x_n)$ Folge in $M$, $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow x \in M$.

**Defintion 3.40: konvexe Hülle**

$X$ Vektorraum, $M \subset X$. Die *konvexe Hülle* von $M$ ist

$$conv(M) = \bigcap_{\substack{M \subset C \subset X \\ C \text{ konvex}}} C$$

Leicht zu zeigen:

Leicht zu zeigen

Klar: $M$ konvex $\Rightarrow \overline{M}$ konvex.

Klar

**Satz 3.41: Lemma von Maza**

$X$ normierter Raum. $(x_n)$ Folge in X mit $x_n \rightharpoonup x$. Dann gilt

$$x \in \overline{conv \{x_k : k \in \mathbb{N}\}} =: M$$

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Satz 3.42: Distanzaussage zu konvexen, abgeschlossen UVR**

$X$ reflexiv, $M \subset X$ nichtleere, konvex, abgeschlossen. $x_0 \in X$ beliebig. Dann existiert ein $x \in M$

mit
$$||x - x_0|| = dist(x_0, M)$$

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

# Kapitel 4

# Funktionenräume

## 4.1 Dualität in $\mathrm{L}^p$

$p \in [1, \infty]$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. $q \in [1, \infty]$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nach Hölder-Ungleichung gilt für $f \in L^p(\Omega, \mu), g \in L^q(\Omega, \mu)$.

$$\left| \int_\Omega fgd\mu \right| \leq ||f||_p \, ||g||_q$$

Mit anderen Worten. Die Abbidung

$$J_p : L^q(\Omega, \mu) \to L^p(\Omega, \mu)'$$

$$(J_p g)(f) = \int_\Omega fgd\mu \quad \forall f \in L^p(\Omega, \mu)^1$$

definiert eine isometrisch isomorphe (lineare) Abbildung mit $||J_p g|| \leq ||g||_q$.

Für $p = 2$ gilt : $J_p = \overline{R_{L^2}}$, insbesondere ist $J_p$ normerhaltend und surjektiv. (S.v. Frechet-Riesz). Sonst?

**Satz 4.1**

$p \in [1, \infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (mit $\frac{1}{\infty} = 0$). Dann ist die Abbildung

$$J_p : \ell^q \to (\ell^p)'$$

$$(\langle x, y' \rangle = \langle x, J_p y \rangle =) \quad (J_p y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{wobei } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

normerhaltend und surjektiv, also ein isometrischer Isomorphismus.

*Beweis.* Bilder 45-47

Siehe Werner S.50

■

Gilt auch $imJ_\infty = (\ell^\infty)'$?

**Kollar 4.2**

Die Abbildung

$$J_\infty : \ell^1 \to (\ell^\infty)'_\infty$$

[1] Wird sonst auch so geschriben:$g \mapsto (f \mapsto \int_\Omega fgd\mu)$

$$(y_n) \mapsto ((x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n)$$

ist normerhaltend, jedoch nicht surjektiv.

*Beweis.* Bilder 48-49

Vollständiger Beweis

∎

**Bemerkung: Der Dualraum von $c_0$**

Es gilt:$J_\infty(\ell^1) = (c_0)'$ (s. auch Alt S.206)

**Defintion 4.3: Buntes zu Maßen**

$\Omega$ Menge, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Ring über $\Omega$ (d.h.

$$\emptyset \in \mathcal{R}, A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \backslash B, A \cup B \in \mathcal{R}).$$

Eine Abbildung :

$$\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{K} \quad \text{heißt}$$

a) *"additiv"*, wenn $\mu(\emptyset) = 0, \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \forall A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$.

b) *"σ-additiv"*, wenn sie additiv ist und $\forall (A_n) \in \mathcal{R}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)| \leq \infty$, $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ und $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R} : \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

c) *"signiertes Maß"*, wenn $\mathcal{R}$ $\sigma$-Algebra ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mu$ $\sigma$-additiv

d) *"komplexes Maß"*, wie in c), nur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

e) *"Maß"*, falls es signiertes Maß ist mit $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{R}$ ist.

f) *"σ-endliches Maß"*, falls $\mu$ Maß und eine Folge $(A_n)$ in $\mathcal{R}$ existiert mit $\mu(A_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.

g) *"endliches Maß "*, alls $\mu$ Maß mit $\mu(\Omega) < \infty$.

ERRATA:

**Defintion: Semi-endlich**

Ein Maßraum heißt *semi-endlich*, wenn $\forall A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = \infty$, es ein $E \in \mathcal{A}, E \subset A$ gibt und $0 < \mu(A) < \infty$.

**Bemerkung**

$\sigma$-endlich $\Rightarrow$ semi-endlich

*Beweis.* Beweis, S.52

∎

**Beispiele**

a) Zählmaß auf $\mathbb{R}$ ist semi-endlich jedoch nicht $\sigma$-endlich.

b) $\Omega = \{0\}$, $\mu(\{0\}) = \infty$ $L^1(\Omega,\mu) = \{0\}$, $L^\infty(\Omega,\mu) \simeq \mathbb{K} \Rightarrow J_1 : L^1(\Omega,\mu) \to L^1(\Omega,\mu)'$ ist nicht injektiv.

ERRATA ENDE.

**Satz 4.4: ***

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty]$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} J_p : &L^q(\Omega,\mu) \to L^p(\Omega,\mu)', \\ &g \mapsto (f \mapsto \int_\Omega fg d\mu) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dann gilt

a) Wenn $p \in (1,\infty]$, dann ist $J_p$ normerhaltend

b) Äquivalent sind

 (i) $J_1$ normerhaltend

 (ii) $J_1$ injektiv

 (iii) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ semi-endlich

c) Falls $p \in (1,\infty)$, so ist $J_p$ surjektiv

d) Falls $p = 1$ und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ $\sigma$-endlich, dann ist $J_p$ surjektiv und normerhaltend.

Satz unvollständig. S.53

*Beweis.* Ohne Beweis. Siehe Alt. ∎

**Kollar 4.5**

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $p \in (1,\infty)$. Dann ist $L^p(\Omega,\mu)$ reflexiv.

*Beweis.* Wir betrachten die Abbildungen

$$J_p : L^q(\Omega,\mu) \to L^p(\Omega,\mu)', \qquad J_q : L^p(\Omega,\mu) \to L^q(\Omega,\mu)'$$

gemäß (4.1) . Dann gilt:

$$\langle f, J_p g\rangle = \int_\Omega fg d\mu = \langle g, J_q f\rangle \tag{4.2}$$

Sei $f'' \in L^p(\Omega,\mu)''$, da $L^q(\Omega,\mu) \to \mathbb{K}$, $\quad g \mapsto \langle J_p g, f''\rangle$ ein linearer Funktional aus $L^q(\Omega,\mu)'$ beschreibt, können wir auch schreiben:

$$\langle g, f'\rangle = \langle J_p g, f''\rangle, \quad \forall g \in L^q(\Omega,\mu). \tag{4.3}$$

Sei $f := J_q^{-1} f' \in L^p(\Omega,\mu)$. Dann gilt für alle $g' \in L^p(\Omega,\mu)'$

$$\langle g', f''\rangle = \langle J_p J_p^{-1} g', f''\rangle \overset{(4.3)}{=} \langle J_p^{-1} g', f'\rangle = \int_\Omega (J_p^{-1} g') f d\mu = \int_\Omega f (J_p^{-1} g' \overset{(4.2)}{=} \langle f, g'\rangle .$$

∎

**Kollar 4.6**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer. Dann ist

$$J_\infty : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)'$$

nicht surjektiv.

*Beweis.* Sei $BC := C(\Omega, \mathbb{K}) \cap L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ stetig und beschränkt } \}$ und für $x_0 \in \Omega$ definieren wir

$$f : BC(\Omega) \to \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \varphi(x_0)$$

$f$ ist offenbar linear und wegen $|\langle \varphi, f \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq ||\varphi||_\infty$ beschränkt, also $\in L^\infty(\Omega)'$. Da $\langle 1_\Omega, f \rangle = 1$, ist $||f|| = 1$. Nach Hahn-Banach gibt es also ein $x' \in L^\infty(\Omega)'$, so dass $\|x'\| = 1$ und $x'|_{BC(\Omega)} = f$.
Wir zeigen nun $x' \notin imJ_\infty$ per Widerspruch: Angenommen $x' \in imJ_\infty \Rightarrow \exists g \in L^1(\Omega) : J_\infty g = x'$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in BC(\Omega) : \varphi(x_0) = \langle \varphi, x' \rangle = \int_\Omega \varphi g d\lambda^n$$

Sei $(\varphi_k)$ eine Folge in $BC(\Omega)$ mit

$$\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq U_{\frac{1}{k}}(x_0), \quad ||\varphi_k||_\infty = 1, \quad \varphi_k(x_0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dann ist aber

$$1 = |\langle \varphi_k, x' \rangle| = \left| \int_\Omega \varphi_k g d\lambda^n \right| \leq \int_\Omega |\varphi_k||g| d\lambda^n \leq \|\varphi_k\|_\infty \int_{U_{\frac{1}{k}}(x_0)} |g| d\lambda^n = \int_{U_{\frac{1}{k}}(x_0)} |g| d\lambda^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \lightning!$$

Wobei sich die Konvergenz gegen 0 durch $\int_{U_{\frac{1}{k}}(x_0)} |g| d\lambda^n = \int_\Omega 1_{U_{\frac{1}{k}}(x_0)} |g| d\lambda^n$ und dem Satz der monotonen Konvergenz erklärt. ■

## 4.2 Der Dualraum von $C(K, \mathbb{K})$

In diesem Abschnitt wollen wir den Dualraum von $C(K)$ für eine kompakte, hausdorffsche Menge $K$ mit der Topologie $\mathcal{T} \in P(K)$ näher untersuchen. Dafür benötigen wir einiges an Maßtheorie. Wir wissen bereits, dass $C(K) := C(K, \mathbb{K})$ mit der Supremumsnorm zu einem Banachraum wird. $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{T})$ ist die *Borel $\sigma$-Algebra*, also die kleinste $\sigma$-Algebra, die noch $\mathcal{T}$ enthält. Entsprechend ist $\mathcal{B}_0$ der kleinste Ring, der $\mathcal{T}$ enthält.

**Defintion 4.7: inkl. Satz**

Sei $R$ ein Ring über $\Omega$ mit $\Omega \in R$ (also eine Algebra), $\mu R \to \mathbb{K}$ additiv. Für $E \in R$ definieren wir

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^k |\mu(E_i)| : k \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_k \in R \text{ paarweise disjunkt, } E_i \subseteq E \right\}$$

das *Variationsmaß zu $\mu$*. Das Variationsmaß $|\mu| : R \to [0, \infty]$ ist additiv.

$$\|\mu\|_{Var} := |\mu|(\Omega)$$

heißt *Totalvariation zu $\mu$*. $\mu$ heißt *beschränkt*, falls $\|\mu\|_{Var} < \infty$.

*Beweis. der Additivität von $|\mu|$:* Seien $B_1, B_2 \in R$ disjunkt. Es ist zu zeigen:

$$\Rightarrow |\mu|(B_1) + |\mu|(B_2) = |\mu|(B_1 \cup B_2)$$

Die Ungleichung "$\leq$ "ist klar. Für die andere Ungleichheit sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Seien $E_1, \dots, E_k \in R$ paarweise disjunkte Mengen mit $E_i \subseteq B_1 \cup B_2$, so dass

$$|\mu|(B_1 \cup B_2) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{k} |\mu|(E_i)|$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |\mu|(E_i)| \leq \sum_{i=1}^{k} |\mu|(E_i \cap B_1) + \mu(E_i \cap B_2)| \leq \sum_{i=1}^{k} |\mu|(E_i \cap B_1)| + \sum_{i=1}^{k} |\mu(E_i \cap B_2)| \leq |\mu|(B_1) + |\mu|(B_2)$$

Insgesamt also $|\mu|(B_1 \cup B_2) - \varepsilon \leq |\mu|(B_1) + |\mu|(B_2)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

**Defintion 4.8: bounded additive, countable additive**

$K$ sei ein kompakter Hausdorffraum mit der Topologie $\mathcal{T}$. Wir definieren

$$ba(K) := \{\mu : B_0 \to \mathbb{K} : \mu \text{ additiv und beschränkt}\}$$
$$ca(K) := \{\mu : B \to \mathbb{K} : \mu\ \sigma - \text{additiv und beschränkt}\}$$

$M \in ba(K)$ heißt *regulär*, wenn für alle $E \in \mathcal{T}$ gilt

$$\inf \{|\mu|(U \setminus C) : C \subseteq E \subseteq U,\ C \text{ abgeschlossen}, U \text{ offen}\} = 0.$$

Zusätzlich definieren wir

$$rba := \{\mu \in ba(K) : \mu \text{ regulär}\}, \qquad rca := \{\mu \in ca(K) : \mu \text{ regulär}\}.$$

Offenbar definiert die Totalvariation $\|\mu\|_{Var}$ eine Norm auf $ba(K), ca(K), rba, rca$

**Bemerkung: Jordan Zerlegung**

Resultat: Für einen Ring $R$, $\mu \in ba(K)$ reellwertig ist

$$\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \qquad \mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

nicht negativ und beschränkt. Es ist $\mu = \mu^+ - \mu^-$, diese Zerlegung heißt *Jordan-Zerlegung*. Ist $\mu$ regulär, so sind $\mu^+$, $\mu^-$ regulär. Für komplexwertiges $\mu$ ist

$$\mu = Re(\mu)^+ - Re(\mu)^- + i(Im(\mu)^+ - Im(\mu)^-).$$

Wir betrachten nochmal das

**Bemerkung: (Riemann-) Integral stetiger Funktionen**

$K$ sei kompakt, $B_0$ wie oben und $\mu : B_0 \to \mathbb{K}$ additiv mit $\|\mu\|_{Var} < \infty$. Für Treppenfunktionen

$$f = \sum_{i=1}^{k} 1_{E_i} a_i,\ k \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{K},\ E_i \in B_0$$

ist

$$\int_K f d\mu := \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(E_i)$$

unabhängig von der Darstellung von $f$ und es ist offenbar $\left|\int_K f d\mu\right| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|_{Var}$.

Wir zeigen nun, dass sich jedes $f \in C(K)$ durch Treppenfunktionen approximieren lässt.

Approximation S.62f

**Satz 4.9: Satz von Riesz-Radon, Dualraum von $C(K)$**

$K$ kompakt, Hausdorffsch. Durch

$$J : rca(K) \to C(K)' \quad \mu \mapsto (f \mapsto \int_K f d\mu)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus definiert

*Beweis.* Nicht hier! ∎

**Beispiele**

a) $x' \in C([0,1])'$, $\langle f, x'\rangle = f(0) \Rightarrow ||x'|| = 1$ $\mu(E) = \{1 \quad 0 \in E \quad 0\ sonst\ \forall E \in \sigma([0,1]$ (Diracmaß). Es gilt $\int_K f d\mu = f(0)$.

Layouten

b) $g \in L^1([0,1])$, $x' \in C([0,1])'$, $\langle f, x'\rangle = \int_{[0,1]} fgd\lambda$, $\mu := gd\lambda$, $\mu(A) := \int_A gd\lambda \Rightarrow \langle f, x'\rangle = \int_{[0,1]} fd\mu$

## 4.3 Kompaktheit in $C(K)$ und $L^p$

**Satz 4.10: Satz Arzela-Ascoli**

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $M \subseteq C(K)$. Dann gilt

$$M \text{ präkompakt} \Leftrightarrow M \text{ beschränkt und gleichgeradig stetig}$$

Dabei heißt eine Menge $M$ gleichgeradig stetig, falls

$$\sup_{f \in M} |f(x) - f(y)| \to 0 \text{ für } x, y \in K \text{ mit } x - y \to 0$$

$$(d.h. \forall \epsilon \exists \delta > 0 : \forall x, y \in K \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ und } \forall f \in M : |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

*Beweis.* Vollständiger Beweis

∎

**Satz 4.11: Präkompaktheit in $L^p$**

$p \in [1, \infty)$, $M \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann sind äquivalent

(i) $M$ präkompakt

(ii) a) $M$ beschränkt und b) $\sup_{f \in M} ||f(\cdot + h) - f(\cdot)||_p \to 0$ bei $h \to 0$ c) $\sup_{f \in M} \left|\left|1_{\mathbb{R}^n \setminus U_r(0)} f\right|\right| \to 0$ für $r \to 0$

*Beweis.* hier nicht, siehe bspw. Alt ∎

**Bemerkung: Kompaktheit in $L^p(\Omega)$**

Fasse $L^p(\Omega)$ als UVR von $L^p(\mathbb{R}^n)$ auf via

$$L^p(\Omega) \ni f \mapsto 1_\Omega f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

## 4.4 Sobolevräume

**Lemma 4.12: partielle Integration**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und habe stückweise glatten Rand. Dann gilt für $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$.

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)dx = \int_{\partial\Omega} v(x)u(x)e_i^T n(x)ds(x) - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}v(x)u(x)dx$$

wobei n der Einheitsnormalenvektor ist und das erste Integral das Hyperflächenintegral.

*Beweis.* S.70

■

**Bemerkung 4.13: Notation**

$$\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \text{ Multiindex,}$$

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f \quad \text{Ableitung}$$

**Bemerkung 4.14**
$f \in C^m(\Omega), \phi \in C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ kompakt }\}$. Anwendung von Lemma 4.12. liefert

$$\int_\Omega D^\alpha f(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)D^\alpha\phi(x)dx$$

Wobei $\phi$ auf $\partial\Omega$ verschwindet.

**Defintion 4.15: schwache Ableitung**

Nocheinmal mit dem Alt vergleiche

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \alpha \in N_0^n$. Wenn ein $w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ existiert, so dass

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi d\lambda^n = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega w\varphi d\lambda^n \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

dann heißt w *schwache Ableitung* von $f$. $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ heißt *m-mal schwach diffbar*, wenn die $\alpha - ten$ schwache Ableitung existiert $\forall |\alpha| \leq m$.

**Bemerkung: Lemma (Übung)**

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}$, so dass

$$\int_\Omega f\phi d\lambda^n = 0 \; \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$$

Übungsbeweis

Beweisen?

**Satz 4.16**

Vor. wie in Def. 4.15. Dann gilt: Falls existent, so ist die $\alpha$-te schwache Ableitung von $f$ eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Vollständiger Beweis ■

**Beispiele 4.17**

a) Beispiel vervollständigen

b) c) S.73f

c) Ist $f$ $\alpha$-mal stetig differenzierbar, so ist $f$ $\alpha$-mal schwach differenzierbar, und die konventionelle Ableitung stimmt mit der schwachen Ableitung überein. (Lemma 4.12)

**Defintion 4.18: Sobolevräume**

Nocheinmal mit dem Alt vergleiche

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \in \mathbb{N}_0$

1. $p \in [1, \infty)$, $W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}$
   mit Norm $||f||_{W^{k,p}} = (\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}$
2. $(p = \infty)$ $W^{k,\infty}(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega) : D^\alpha f \in L^\infty(\Omega)\ \forall |\alpha| \leq k\}$
   mit Norm $||f||_{W^{k,\infty}} = \max_{|\alpha| \leq} ||D^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}$

**Satz 4.19: ***

Vor. wie in Definition 4.18. Dann gilt

a) $W^{k,p}(\Omega)$ Banachraum $\forall p \in [1, \infty], k \in \mathbb{N}_0$

b) $\forall k \in \mathbb{N}_0, p \in [1, \infty) : C^\infty(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

c) $p = 2$. Dann ist $W^{k,2}(\Omega)$ Hilbertraum mit $(f, g)_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\infty g)_{L^2(\Omega)}$

*Beweis.* siehe Alt. ■

**Defintion 4.20: $W_0^{k,p}(\Omega)$**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty)$.

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)} \subset W^{k,p}(\Omega)$$

Wobei Abschluss bezüglich $||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}$

## Anwendung an elliptischer Randwertprobleme

Komplette Herleitung zu Dirichlet Randwertproblem

hier vieles Klassisches Dirichlet-Randwertproblem (RWP).
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C(\overline{\Omega})$ $A(\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}), g \in C(\partial\Omega)$
$A(x) = A^T(x)\ \forall x \in \overline{\Omega}$, es gebe $c_0, C_0 > 0$, so dass

$$c_0 \left|\left|\xi\right|\right|^2 \leq \xi^T A(x)\xi \leq C_0 \left|\left|\xi\right|\right|^2 \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n (\text{Elliptizität})$$

Gesucht: $f, g$ sind gegeben. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, welches das *elliptische RWP*:

$$div(A(\cdot)gradu) = f \quad \text{auf } \Omega$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

löst.
Bsp: $A = I \Rightarrow \Delta u = f$ auf $\Omega$

1.) Transformation auf homogene Randwerte.
Wir nehmen an, dass $\delta$ eine Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ hat mit $g \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und erhalten für $\tilde{u} = u \cdot g$

$$div(Agrad\tilde{u}) = -div(Agradg) + f \text{ auf } \Omega$$

$$\tilde{u} = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

OBdA kann $g = 0$ angenommen werden (falls g stetige Fortsetzung hat).

$$div(Agradu) - div(Agradg) = f - div(Agradg)$$

$$div(Agradu) = f \text{ auf } \Omega$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

2.) Multiplikation mit Testfunktionen

3.) Gleichung $(*)$ ist äquivalent zu $divAgradu = f$

4.) Einbettung in geeignete Räume, schwache Lösung

Grundidee der Vorgehensweise:

a) Wir zeigen, dass die linke Seite in $(*)$ ein Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert.

b) Wir zeigen, dass $a(\cdot,\cdot)$ äquivalent zum Skalarprodukt in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist.

c) Wir zeigen, dass die rechte Seite ein beschränkte Funktional $F : \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x)f(x)dx$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert. Nach Frechet-Riesz existiert, dann ein eindeutiges $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass $a(e, u) = \langle\varphi, F\rangle$ $\forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \supset C_0^\infty(\Omega)$. Dann $u$ ist dann schwache Lösung des RWPs.

**Lemma 4.21: Poincare-Ungleichung**

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so existiert $c > 0$, so dass

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq \int_\Omega \left|\left|gradu(x)\right|\right|^2 dx \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Satz 4.22**

$\Omega$ offen und beschränkt. Dann ist $a(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf $W_0^{1,2}(\Omega)$.

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

zu b)

**Satz 4.23**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist $W_0^{1,2}(\Omega)$ Hilbertraum mit $||\cdot|| = a(\cdot,\cdot)$ mit

$$a(u,v) = \int_\Omega (gradu)^T \overline{gradv} d\lambda^n$$

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

zu c)

**Satz 4.24**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^2(\Omega)$. Dann ist

$$F : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{K}, \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

in $W_0^{1,2}(\Omega)'$.

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Kollar 4.25**

Unter den gegebenen Voraussetzung existiert ein eindeutiges $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass $a(\varphi, u) = F(\varphi)$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Bemerkung 4.26: Neumann-RWP**

$div(A(x)gradu(x)) = f$ auf $\Omega$. mit $n^T A(x)gradu(x) = g$ auf $\partial\Omega$ mit $n^T$ ist Einheitsnormalenvektor.

Kann mit ähnlichen Methoden behandelt werden.

$$\int_\Omega \varphi(x) div(A(x) grad u(x))dx = -\int_\Omega (grad\varphi(x))^T A(x) grad u(x)dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) n^T(x) A(x) grad u(x)dx$$

$$= -a(\varphi, u) + \int_\Omega \varphi g d\lambda^{n-1} = \int_\Omega \varphi(x) f(x)dx$$

# Kapitel 5

# Kompakte Operatoren und Spektraltheorie

## 5.1 Kompakte Operatoren

**Defintion 5.1: kompakter Operator**

$X, Y$ normierte Räume. $T : X \to Y$ linearer Operatoren. $T$ heißt *kompakt*, wenn $\overline{TU_1(0)}$ kompakt.

$$K(X,Y) := \{T : X \to Y, T \text{ kompakt }\}, \quad K(X) = K(X,X)$$

**Bemerkung 5.2**

a) $K(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$

b) Äquivalent sind für $T : X \to Y$, $Y$ Banachraum

  (i) $T \in K(X,Y)$

  (ii) $M \subset X$ beschränkt $\Rightarrow T(M)$ präkompakt

  (iii) $TU_1(0)$ präkompakt

  (iv) $(x_n)$ beschränkt Folge $\Rightarrow (Tx_n)$ hat konvergente Teilfolge.

c) $I \in K(X) \Leftrightarrow \dim X < \infty$ (Lema von Riesz)

*Beweis.* Beweis/ Alt S.331

■

**Beispiele 5.3: Integraloperator ist kompakt**

$X : C([0,1])$ mit $||\cdot||_\infty$.

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \Rightarrow T \in \mathcal{B}(C([0,1]))$$

Für $f \in C([0,1])$, $||f||_\infty \leq 1$, $t_1, t_2 \in [0,1]$ gilt

$$|(Tf)(t_1) - (Tf)(t_2)| = |\int_{t_1}^{t_2} f(\tau)d\tau| \leq |t_2 - t_1|$$

$\Rightarrow \{Tf : ||f||_\infty \leq 1\}$ ist gleichgeradig stetig. $\overset{Arz.Arc}{\Rightarrow}$ präkompakt. $\Rightarrow$ kompakt.

**Satz 5.4: Diverse Aussagen**

a) $K(X,Y)$ abgeschlossener UVR von $\mathcal{B}(X,Y)$, $Y$ Banachraum.

b) $T \in K(X,Y)$ ist vollstetig. D.h. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \to Tx$

c) $X$ reflexiv, $T : X \to Y$ vollstetig $\Rightarrow T \in K(X,Y)$

d) $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ mit $rangT < \infty$, dann $T \in K(X,Y)$ (rangT $=$ dim im T)

e) $Y$ Hilbertraum, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann $T \in K(X,Y) \Leftrightarrow \exists (T_n) \in \mathcal{B}(X,Y)$, so dass $rangT_n < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $||T - T_n|| \to 0$

f) $P \in \mathcal{B}(X,Y)$. Projektor (d.h. $P^2 = P$). Dann $P \in K(X) \Leftrightarrow rangP < \infty$.

g) $T \in K(X,Y)$, $U \in \mathcal{B}(Y,Z)$, $S \in \mathcal{B}(V,X) \Rightarrow UTS \in K(V,Z)$

*Beweisskizzen.* Beweis/ Alt S.332

■

**Satz 5.5: Satz von Schauder**

$X, Y$ normierte Räume

a) $T \in K(X,Y) \Rightarrow T' \in K(Y', X')$

b) $T' \in K(Y', X')$, $Y$ vollständig $\Rightarrow T$ kompakt

*Beweis.* Beweis. Alt S.405

■

**Defintion 5.6: Fredholm-Operator**

$A \in \mathcal{B}(X,Y)$ heißt *Fredholm-Operator*, falls

a) $\dim(kerA) < \infty$

b) $im(A)$ abgeschlossen

c) codim $(imA) < \infty$ ($V \subset X$ UVR, codim $V := \dim X/V$)

*Fredholmindex*: ind $(A) := \dim KerA -$ codim $imA$

**Satz 5.7: $I - T$ ist ein Fredholm-Operator**

$T \in K(X)$. Dann ist $A := I - T$ ein Fredholm-Operator mit ind $(A) = 0$.

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Bemerkung 5.8: Nichtexistenz eine beschränkten Inversen**

$X$ normierter Raum, $\dim X = \infty$, $T \in K(X)$. Dann folgt $T$ hat keine beschränkte Inverse.

Beweis Übung

**Bemerkung: Beispiel**

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]),\ f \mapsto (t \mapsto \int_0^t f(\tau)d\tau)$$

$(\lambda I - T)f = 0 \Rightarrow \lambda f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$, $\lambda = 0 \Rightarrow f = 0$; $\{\lambda \neq 0, f(0) = 0$ und $f'(t) = \frac{1}{\lambda}\} \Rightarrow f = 0$.

## 5.2 Das Spektrum von beschränkten Operatoren

**Defintion 5.9: Das Spektrum**

$T \in \mathcal{B}(X)$,$X$ Banachraum über $\mathbb{C}$

(i) $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : ker(\lambda I - T) = \{0\}$ und $im(\lambda I - T) = X\}$ ***"Resolventenmenge"***

(ii) $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ ***"Spektrum"***

(iii) $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$ ***"Punktspektrum"***

(iv) $\sigma_c(T) = \Big\{\lambda \in \sigma(T) : ker(\lambda I - T) = \{0\}$ und $im((\lambda I - T) \neq X$, aber $\overline{im(\lambda I - T)} = X\Big\}$ ***"kontinuierliches Spektrum"***

(v) $\sigma_r(T) = \Big\{\lambda \in \sigma(T) : ker(\lambda I - T) = \{0\}$ und $\overline{im(\lambda I - T)} \neq X\Big\}$ ***"Residualspektrum"***

Es gilt $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$ und wir definieren

(1) $v \in ker(\lambda I - T) \setminus \{0\}$ heißt ***Eigenvektor von*** $\lambda$ .

(2) $Eig_\lambda(T) := ker(\lambda I - T)$ heißt ***Eigenraum von*** $\lambda$.

(3) $\nu_\lambda(T) := dim Eig_\lambda(T)$ heißt ***geometrische Vielfachheit***.

(4) $\mu_\lambda(T) := \max_{n\in\mathbb{N}} \dim ker(\lambda I - T)^n$ heißt ***algebraische Vielfachheit***

**Satz 5.10: $\rho(T)$ ist offen, Resolventfkt ist Potenzreihe entwickelbar**

$T \in \mathcal{B}(X)$, $X$ Banachraum. Dann ist $\rho(T)$ offen und die "Resolventenfunktion" $R(\lambda, T) := (\lambda I - T)^{-1} : \rho(T) \to \mathcal{B}(X)$ ist komplex-analytisch (d.h. in Potenzreihe entwickelbar).

*Beweis.* Vollständiger Beweis

∎

**Satz 5.11: Spektralradius**

$X \neq \{0\}$ Banachraum, $T \in \mathcal{B}(X)$.

$\sigma(T)$ ist kompakt und nichtleer mit "Spektralradius": $\sup|\sigma(T)| = \lim_{m\to\infty} ||T^m||^{\frac{1}{m}} \leq ||T||$.

*Beweis.* Vollständiger Beweis ∎

**Bemerkung 5.12: Diverse Fakten und Beispiele**

a) $T \in K(X)$, $\lambda \in \sigma(T)\setminus\{0\} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$. Folgt, da $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$

b) $T \in K(X)$, $\dim X = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(T)$ (Bem. 5.8)

c) $\dim X < \infty \Rightarrow \sigma(T) = \sigma_p(T)$

d) Bsp.: Betrachte $T \in \mathcal{B}(\sigma([0,1))(Tf)(x) = xf(x)$, $\sigma(T) = [0,1] = \sigma_r(T)$

e) $T \in L^p([0,1]), (Tf)(x) = xf(x)$ f.ü. $p < \infty$. $\sigma(T) = [0,1] = \sigma_c(T)$

f) $L \in \mathcal{B}(\ell^2)$ Linksshift. $\sigma(T) = \overline{U_1(0)}$ $\sigma_p(T) = U_1(0)$; $\sigma_c(T) = \partial U_1(0)$

g) $R = L^* \in \mathcal{B}(\ell^2)$ Rechtsshift. $\sigma(T) = \overline{U_1(0)}$, $\sigma_r(T) = U_1(0)$, $\sigma_c(T) = \partial U_1(0)$.

**Satz 5.13: Spektralsatz für kompakte Operatoren**

$X$ Banachraum, $T \in K(X)$. Dann gilt

a) $\sigma(T)\setminus\{0\}$ aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten mit 0 als einzig möglichen Häufungspunkt. Wenn $\sigma(T)$ unendlich, dann ist $0 \in \sigma(T)$.

b) Für $\lambda \in \sigma(T)\setminus\{0\}$ ist $1 \leq n_\lambda := \max\left\{n \in \mathbb{N} : ker(\lambda I - T)^{n-1} \neq ker(\lambda I - T)^n\right\} < \infty$

c) „Riesz-Zerlegung“. Für $\lambda \in \sigma(T)\setminus\{0\}$ gilt $X = ker(\lambda I - T)^{n_\lambda} \oplus im(\lambda I - T)^{n_\lambda}$

d) $\lambda \in \sigma(T)\setminus\{0\} \Rightarrow \sigma(T|_{im(\lambda I - T)^{n_\lambda}}) = \sigma(T)\setminus\{\lambda\}$

e) Ist $E_\lambda \in \mathcal{B}(X)$ Projektor mit $kerE_\lambda = im(\lambda I - T)^{n_\lambda}$, $imE_\lambda = ker(\lambda I - T)^{n_\lambda}$, so gilt $E_\lambda E_\mu = \delta_{\lambda\mu} E_\lambda$

*Beweis.* Beweis. Alt S.395 ∎

Hier fehlt nichts!!!!!

**Kollar 5.18: Fredholm Alternative**

$T \in K(X)$, $\lambda \neq 0$. Dann gilt:

Entweder ist die Gleichung $Tx - \lambda x = y$ nach $x$ eindeutig lösbar $\forall y \in X$

oder $Tx - \lambda x = 0$ hat nicht-triviale Lösungen.

*Beweis.* Beweis. Alt S.407 ∎

**Bemerkung 5.19: Beispiel**

Operatoren ohne Eigenwerte: $T \in K(C[0,1])$, wie in Bsp. 5.3.

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

## 5.3 Kompakte normale/selbstadjungierte Operatoren

Sei $X$ von nun an ein Hilbertraum und meistens $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Defintion 5.20: selbstadjungiert, normal**

$A \in \mathcal{B}(X)$. Dann heißt $A$

a) selbstadjungiert, wenn $A = A^*$

b) normal, falls $A^*A = AA^* \overset{UE10}{\Leftrightarrow} ||Ax|| = ||A^*x|| \ \forall x \in X$

**Lemma 5.21: Norm über größtes Spektrum**

$X \neq \{0\}$ $\mathbb{C}$-HR, $T \in \mathcal{B}(X)$ normal. Dann ist $\sup|\sigma(T)| = ||T||$.

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Satz 5.22: Spektralsatz für kompakte und normale Operatoren**

$X$ $\mathbb{C}$-HR, $T \in K(X) \setminus \{0\}$ normal. Dann gilt:

a) $\exists N \subset \mathbb{N}$, ONS $(e_n)_{n\in N} \in X$, $(\lambda_n)_{n\in N} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, s.d.

$$Te_k = \lambda_k e_k \quad \forall k \in N, \quad \sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_k : k \in N\}$$

Ist $N = \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

b) $n_{\lambda_k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

c) $X = kerT \perp span\{e_n : n \in N\}$

d) $Tx = \sum_{k\in N} \lambda_k (x, e_k) e_k \quad \forall x \in X$

*Beweis.* Vollständiger Beweis

■

**Bemerkung 5.23: Diverse Fakten**

$X$ $\mathbb{C}$-HR, $T \in \mathcal{B}(X)$

a) $T = T^*, \sigma(T) \subset [-||T||, ||T||]$ ($\sigma(T)$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, wenn $T$ selbstadjungiert ist. Außerdem ist $\sigma(T) \subset \overline{B_{||T||}(0)}$)

b) $T = T^*$, $T \in K(X) \Rightarrow ||T|| \in \sigma_p(T) \vee -||T|| \in \sigma_p(T)$ Lemma 5.23 und 5.22)

c) $T = T^*$, $T$ positiv semi-definit, d.h. $(Tx, x) \geq 0 \forall x \Rightarrow \sigma(T) \subset [0, ||T||]$ (UE: z.z. $\forall x < 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$)

d) $T = T^*$, $T \in K(X)$ pos. semidefinit $\Rightarrow ||T|| \in \rho_p(T)$ (aus b) und c))

e) $T = T^*$, $T \in K(X)$ pos. semidefinit $\Rightarrow \exists \sqrt{T} \in K(X)$, s.d $\sqrt{T} = \sqrt{T^*}(\sqrt{T})^*$ und $(\sqrt{T})^2 = T$

f) $T \in K(X, Y), Y \mathbb{C}$-HR $\Rightarrow \exists\ |T| \in K(X)$, so dass $|T|$ pos. semidefinit, selbstadjungiert und $T^*T = |T|^2$

kurz begründen

*Beweis.* a)

b)

c)

d)

e) kleine Rechnung

f) $T^*T \in K(X)$, pos. semidef. $\Rightarrow \exists \sqrt{T^*T}$ wie in e). Definiere $|T| = \sqrt{T^*T}$

■

# Anhang A

# Etwaige Begriffe

# Glossar

**Banachraum** vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben $(X, ||\cdot||_X)$.

**Cauchy-Folge** Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : |x_m - x_n| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists a \in X, N \in \mathbb{N} : \forall n > N : x_n \in U_\varepsilon(a)$
$\Leftrightarrow d(x_k, x_l) \longrightarrow 0$ für $(k,l) \longrightarrow (\infty, \infty)$

.

**Diagonalverfahren** Diagonalverfahren.

**essentiell beschränkt** $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt essentiell beschränkt, falls

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N\in\mathcal{A} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x\in\Omega\setminus N} |f(x)| < \infty$$

oder auch: f ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ und $\mu = \lambda$, da $f$ nur auf $\mathbb{Q}$ nicht null ist, und $\mathbb{Q}$ ist Lesbesgue-Nullmenge. .

**gleichmaessige Konvergenz und Ableitung** Es sei $(f_n)$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem kompakten Intervall. Es gelte $f_n \to f$ punktweise für ein stetig differenzierbares $f$ und $||f'_n - g||_\infty \to 0$ für ein stetiges $g$.
Dann ist $f' = g$. .

**Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft** Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand $> 0$ haben. Für ein Gegenbeispiel $\nearrow$ topologischer Raum.

**Hilbertraum** vollständiger Skalarproduktvektorraum mit $||\cdot|| = \sqrt{(\cdot,\cdot)_X}$. Wobei $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt bezeichnet..

**Infimum** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl $s$ heißt größte untere Schranke oder Infimum von $M$, wenn gilt das

1) $s$ untere Schranke von $M$ ist, d.h. $\forall x \in M : x \geq s$ und überdies
2) keine Zahl $> S$ noch untere Schranke von $M$ sein kann, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < S - \varepsilon$

Ein Infimum ist eindeutig. .

**kompakt** kompakt.

**Konvergenz** .

**gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen** Sei $x_k : T \to \mathbb{R}$
Ein Funktionsfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* auf $T$ gegen $x$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 = k_0(\varepsilon) : \forall k \geq k_0 \; \forall t \in T : |x_k(t) - x(t)| < \varepsilon$$

Man schreibt dafür $f_n \to f$ gleichmäßig auf $T$.
Dazu äquivalent ist die Beschreibung durch die Supremumsnorms:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 = k_0(\varepsilon) : \forall k \geq k_0 : \|x_k(t) - x(t)\|_\infty := \sup_{t\in T} |x_k(t) - x(t)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow ||x_k - x||_\infty \to 0$$

*Beweis.* **$\Leftarrow$:**
**$\Rightarrow$:** Sei $\varepsilon > 0$, $k_0 = k_0(\varepsilon)$, so dass $\forall k > k_0$ und $\forall t \in T$ ist. Dann ist für dieses $k$ somit $y_k := x_k - x$ auf $T$ beschränkt und

$$||y_k||_\infty = ||x_k - x||_\infty = \sup_{t\in T} |x_k(t) - x(t)| \leq \varepsilon,$$

damit konvergiert die Zahlenfolge $B(T) \ni (||y_m||_\infty, ||y_{m+1}||_\infty, \ldots) \to 0$ für $m \to \infty$.
Was ausgeschrieben ja genau heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 : |\|g_k\|_\infty - 0| = \|g_k\|_\infty < \varepsilon$$

■

.

**Kugel mit Radius r** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Unter der *Kugel um $x$ mit Radius $r$* versteht man

$$U_r(x) := \{y \in X L d(x, y) < r\}$$

. sort.

**Sätze zu metrischer Raum** Metrischer Raum.

**Rand** Der Rand von $M \subset X$

$$\partial M := \{x \in X : \forall r > 0 : U_r(x) \cap M \neq \emptyset \text{ und } U_r(x) \cap X \setminus M \neq \emptyset\}$$

Es gilt $\partial M$ ist stets abgeschlossen und folgende Beziehungen

$$\overline{M} = M \cup \partial M \text{ und } \partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$$

.

**Inneres** Das *Innere* von $M \subset X$, bezeichnet mit $\mathring{M}$, ist die größte offene Menge, die in $M$ liegt.

$$\mathring{M} := \bigcup_{\substack{O\subset M\\ O=\mathring{O}}} O$$

Sei $M \subset X$. Ein Punkt $x \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, und $M$ heißt *Umgebung* von $x$, falls

$$\exists r > 0 : U_r(x) \subset M$$

Eine Teilmenge $O \subset X$, für die jedes $x \in O$ innerer Punkt ist, heißt *offen*. .

**Abschluss** Da der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Menge abgeschlossen ist, existiert für ein $M \subset X$ eine kleinste abgeschlossene Menge, die $M$ umfasst. Die beziechnet man mit $\overline{M}$ und heißt Abschluss,

$$\overline{M} := \bigcap_{M\subset A=\overline{A}} A$$

.

**metrischer Raum** Metrischer Raum.

**offene Uberdeckung** offene Überdeckung.

**Restklassenbildung** Restklassenbildung.

**Sesquilinearform** siehe Skalarprodukt.

**Hermitesche Form** siehe Skalarprodukt.

**Skalarprodukt** Skalarprodukt.

**stetig** Seien $(X_1, d_1)$ und $(X_2, d_2)$, eine Abbildung $f : X_1 \to X_2$ heißt *stetig an der Stelle* $x_0 \in X_1$, falls

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \underbrace{\forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(y)}_{f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))}$

$\Leftrightarrow$ $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ für alle Folgen $x_n$

(folgendes bezieht sich auf Stetigkeit für alle $x_0 \in X_1$)

$\Leftrightarrow$ Für alle offenen $O \subset X_2$ ist $f^{-1}(O)$ offen in $X_1$

$\Leftrightarrow$ Für alle abgeschlossen $A \subset X_2$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $X_1$

.

**gleichmäßige Stetigkeit** hallo .

**Eindeutigkeitssatz fur stetige Funktionen** Es seien $(X, d), (Y, h)$ metrische Räume und $f, g : X \to Y$ stetige Funktionen für die $f|_D = g|_D$ gelte, wobei $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge ist.
Dann gilt auch schon $f = g$ auf ganz $X$. Insbesondere gilt: Ist $f$ auf $D$ stetig, lässt es sich auf ganz $X$ eindeutig stetig fortsetzen. .

**Stetigkeit** Stetigkeit.

**Supremum** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl $S$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von $M$, wenn gilt das

1) $S$ obere Schranke von $M$ ist, d.h. $\forall x \in M : x \leq S$ und überdies
2) keine Zahl $< S$ noch obere Schranke von $M$ sein kann, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > S - \varepsilon$

Ein Supremum ist eindeutig.

Sätze und Beispiele

.

**topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$ - Sei $X$ eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq P(X)$. Die Elemente von $\mathcal{T}$ sind die *offenen Mengen*. $\mathcal{T}$ definiert eine *Topologie*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$
(ii) $A_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$, $\mathbb{N} \supset I$ endlich $\Rightarrow \cap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
(iii) $A_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$, $I$ bel. Indexmenge $\Rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ ist der *topologische Raum*.
Ein Beispiel, für einen topologischen Raum sind die metrischen Räume $(X, d)$: $d$ induziert dann eine Topologie auf $X$, die offenen Mengen sind nämlich durch $d$ bestimmt.
Sei $M := \{1, 2\}, \ldots$

- $\mathcal{T} := \{\emptyset, M\}$. Die triviale Topologie, nur $\emptyset$ und $M$ sind offen.

- $\mathcal{T} := P(M)$. Die diskrete Topologie, alle Mengen sind offen. Die diskrete Metrik induziert genau diese Topologie.
- $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$. M ist hier nicht hausdorffsch, denn egal welche Umgebung man um 2 betrachtet, man kann nicht erreichen, dass 1 nicht in der gleichen ist.

.

**vollstandig** vollständig.

# Anhang B

# Uebungen

## B.1 Blatt 1

### B.1.1 Reihen und Vollständigkeit

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

*Behauptung.* Es ist äquivalent:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty \Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergiert in $X$.

(b) $X$ ist ein Banachraum.

*Beweis.* "a⇒b": Da $X$ bereits ein normierter Raum ist, ist nur noch zu zeigen, dass $X$ vollständig ist. Sei $(u_n)$ eine Cauchyfolge in $X$, wobei o.B.d.A $u_0 = 0$, sonst betrachten wir $(\tilde{u}_n)$ mit $\tilde{u}_{n+1} := u_n$, $\tilde{u}_0 := 0$ statt $(u_n)$. Es ist $u_n = \sum_{n=0}^{k} u_n - u_{n-1}$. Sei $x_n := \frac{1}{n^2}$. Da $u_n$ eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $x_n$ ein (kleinstes) $N_n := N(x_n) \in \mathbb{N}$, so dass $\|u_{N(x_n)} - u_m\| \leq x_n \ \forall m \geq N_n$. Das Bemerkenswerte an $(N_n)$ ist, dass diese Folge monoton steigt. Es ist nun für $n' \in \mathbb{N}$ mit der Dreiecksungleichung und der Eigenschaft der Teleskopsumme

$$\left\| \sum_{n=0}^{N(n'+1)} u_n - u_{n-1} \right\| \leq \underbrace{\|u_1 - u_0\| + \|u_2 - u_1\| + \ldots}_{=:x_0} + \underbrace{\|u_{N_2} - u_{N_1}\|}_{\leq x_1} + \underbrace{\|u_{N_3} - u_{N_2}\|}_{\leq x_2} + \cdots + \underbrace{\|u_{N(n'+1)} - u_{N(n')}\|}_{\leq x_{n'}}$$

Bzw.

$$\left\| \sum_{n=N_2}^{N(n'+1)} u_{N_n} - u_{N_{n-1}} \right\| \leq \sum_{n=N_2}^{N(n'+1)} \left|\left| u_{N_n} - u_{N_{n-1}} \right|\right| \leq \sum_{n=1}^{n'} x_n$$

Damit erfüllt $\sum_{n=N_2}^{N(n'+1)} \left|\left| u_{N_n} - u_{N_{n-1}} \right|\right|$ das Cauchykriterium für Reihen, und somit konvergiert sie. Es gilt also:

$$\sum_{n=N_2}^{\infty} \left|\left| u_{N_n} - u_{N_{n-1}} \right|\right| < \infty.$$

Mit der Eigenschaft a) ist nun: $u_{N_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \in X$. Da $(u_k)$ eine Cauchyfolge ist, und sie eine konvergente Teilfolge hat, bleibt ihr nichts anderes übrig, als selber auch gegen $\alpha$ zu konvergieren. Also konvergiert $u_k$ in $X$, damit ist $X$ ein Banachraum.

b⇒a: Sei X ein Banachraum und $(u_n)$ eine Folge in $X$, so dass $s := \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$. Insbesondere erfüllt $s$ das Cauchykriterium für Reihen, und es ist dank der Dreiecksungleichung für $\varepsilon > 0$

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} u_n \right\| \leq \sum_{n=k}^{m} \|u_n\| < \varepsilon \quad \forall m, k \geq N(\varepsilon).$$

ALso erfüllt auch $\sum_{n=k}^{m} u_n$ das Cauchykriterium für Reihen. Damit konvergiert sie in $X$, also ist (a) gezeigt.

■

### B.1.2 Die Operatornorm

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

*Behauptung.* Es gilt:

$$\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_y}{\|x\|_X}.$$

*Beweis.* 1.Variante: Wir beweisen jede Gleichheit einzeln. Das erste Gleichheitszeichen ist eine Definition und somit wahr.
"$\sup_{x\in U_1(0)} \|Tx\|_Y \leq \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$": Da $U_1(0) \subseteq \overline{U_1(0)}$ kann das Supremum nicht größer werden.
"$\sup_{x\in U_1(0)} \|Tx\|_Y \geq \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$": Es sei $(x_n)$ eine Folge aus $U_1(0)$ mit $x_n \to x \in \overline{U_1(0)}$. Es ist erstmal $||Tx_n||_Y \leq ||T|| \ \forall n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von $T$ (Satz 1.7) und $||\cdot||_Y$ ist $||Tx_n||_Y \to ||Tx||_Y \Rightarrow ||Tx||_Y \leq ||T||$.
Für die restlichen Gleichheiten wird freundlich auf die 2. Variante verwiesen.

2.Variante: Aus Satz 1.7 folgt, dass $T$ stetig ist.
Dank der Definition von sup und der Stetigkeit von $T, \|\cdot\|_Y$ folgt: $\|T\| = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y &= \sup_{x \in \overline{U_1(0)} \setminus \{0\}} \|\|x\|_X T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \sup_{x \in \overline{U_1(0)} \setminus \{0\}} \|x\|_X \|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \underbrace{\sup_{x \in \overline{U_1(0)} \setminus \{0\}} \|x\|_X}_{=1} \cdot \sup_{x \in \overline{U_1(0)} \setminus \{0\}} \|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y \\
&= \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}
\end{aligned}$$

Wobei wir genuzt haben, dass $T0 = 0$ (für das erste Gleichheitszeichen) und $\|x\|_X, \|Tx\|_Y \geq 0 \ \forall x \in X$ (für das dritte Gleichheitszeichen). ■

### B.1.3 Eigenschaften in endlichdimensionalen Vektorräumen

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.

(a)

*Behauptung.*

$$m := dim(X) < \infty \text{ und } T : X \to Y \text{ linear} \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X,Y)$$

*Beweis.* Vorweg eine Vorüberlegung: Es sei $B := (v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von $X$. Ist $x_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^n v_i$, $\alpha_i^n \in \mathbb{K}$ eine Folge aus $X$ mit $x_n \to x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, so muss gelten $(\alpha_1^n, \ldots \alpha_m^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Dies folgt, da im $\mathbb{K}^m$ alle Normen äquivalent sind, und im $\mathbb{K}^m$ komponentenweise Konvergenz äquivalent zur Normkonvergenz ist (↗ Folgerung 4.29 im Ana I/II Lindner Skript). Falls einem dies nicht genügt, so bediene er sich der Seiten 102-103 im Buch Funktionalanalysis von H. Heuser 3.Auflage.

1.Variante: Für den eigentlichen Beweis nutzen wir Satz 1.7 und zeigen, dass $T$ stetig in der Null ist. Dafür sei $(x_n)$ eine Folge aus $X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $x_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i^n v_i$, $\alpha_i^n \in \mathbb{K}$.

$$||Tx_n||_Y = \left|\left|T\sum_{i=1}^m \alpha_i^n v_i\right|\right|_Y = \left|\left|\sum_{i=1}^m \alpha_i^n Tv_i\right|\right|_Y \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i^n|\,||Tv_i||_Y \leq \max_{i=1}^m ||Tv_i|| \sum_{i=1}^m |\alpha_i^n|$$

Wegen der Vorüberlegung ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m |\alpha_i^n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$$

2.Variante: Da $dim(X) < \infty$ und $T$ linear ist, ist der Bildraum ein endlichdimensionaler Vektorraum, und es gibt eine Basis $C$ von im $T$. Es gibt nun, dank der linearen Algebra eine Matrix $M \in \mathbb{K}^{m\times \dim \operatorname{im} T}$, so dass $T = \phi_C^{-1} \circ M \circ \phi_B$, wir zeigen nun, dass eine Koordinatenabbildung $\phi$ ein Homöomorphismus ist, denn dann ist $T$ eine Komposition aus stetigen Funktionen und somit selber stetig. Wegen der Vorüberlegung ist $\phi : X \mapsto \mathbb{K}^m$ stetig. Offenbar ist $\phi$ bijektiv. Da die Addition stetig ist, ist auch $\phi^{-1}$ stetig. $M$ ist auch stetig denn

$$\forall x \in \mathbb{K}^m,\ ||x|| < 1 \text{ gilt } \|Mx\| \leq a\|Mx\|_\infty \leq a\|M\|_\infty\|x\| \leq a\|M\|_\infty < a\infty.$$

Wobei $a \in \mathbb{R}^+$ die geeignet gewählte nur von der Norm abhängige Konstante ist, die von der Äquivalenz zu jeder anderen Norm entsteht. ■

(b)

*Behauptung.*

$$dim(X) < \infty \text{ und } T \in \mathcal{B}(X,Y) \Rightarrow \|T\| = \max_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$$

*Beweis.* Wir greifen vor auf Blatt 4 Aufgabe 3. Es ist nämlich eine Teilmenge eines endlichdimensionalen Vektorraumes genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Deshalb ist schon mal $\overline{U_1(0)}$ kompakt. Aus Aufgabe 2 ist bekannt, dass $\sup_{x\in U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{x\in\overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$. $T$, $\|\cdot\|_Y$ sind dank Satz 1.7 stetig, damit auch $||T\cdot||_Y$. Da $\overline{U_1(0)}$ kompakt ist und stetige Funktionen, die auf $\mathbb{R}$ abbilden, auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, ist die Behauptung bewiesen. ■

(c)

*Behauptung.* Im allgemeinen ist die Aussagen von b) falsch.

*Beweis.* Wir geben ein Beispiel für $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ derart an, dass

$$\|T\| \notin \left\{\|Tx\|_Y \,|\, x \in \overline{U_1(0)}\right\}.$$

1.Variante: Es sei $X = \operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^1$, $Y = \mathbb{R}$, wobei $e_k = (\delta_{ik})_{i\in\mathbb{N}}$, und

$$T : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto Tx := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} x_k$$

$T$ ist offenbar linear und wegen $|Tx| = \left|\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^\infty |x_k| = ||x||_1$ auch beschränkt. Es ist

$$\overline{\{x \in \ell^1 : x \in X, ||x|| < 1\}} =$$

TODO

2.Variante: Sei

$$X = Y = \ell^p(\mathbb{K}) =: \ell^p \text{ (beschr. Folgenraum) und } T : \ell^p \to \ell^p,\ (x_n) \mapsto \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right)$$

Mit der Norm $\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Dann ist $\overline{U_1(0)} = \{(x_n) \in \ell^p | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \leq 1\}$

$T$ ist ein beschränkter linearer Operator, denn:

(i) Seien $(x_n), (y_n) \in \ell^p$, $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow T(\alpha x_n + y_n) = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)(\alpha x_n + y_n)\right) = \alpha T x_n + T y_n$

(ii) Sei $x_n \in \overline{U_1(0)}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|T(x_n)\|^p = \| \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right) \|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n\right)^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - \frac{x_n}{n}|^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + |\frac{x_n}{n}|^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2|x_n|^p < \infty\end{aligned}$$

Mit der Folge (von Folgen) $i_n$, die an der $n$. Stelle $\overline{\text{eine}}$ 1 hat, und sonst nur Nullen, ist dann: $T(i_n) \longrightarrow 1$ für $n \longrightarrow \infty$. Dies ist mit Elementen aus $\overline{U_1(0)}$ nicht möglich (Warum?).

Nachtrag:
Geschickter ist es den Folgenraum $M \subset \ell^p$ einzuschränken, so dass für jedes Element aus $M$ gilt, dass nur endlich viele Folgenglieder ungleich null sind. Der Rest folgt flott.

3.Variante mit einem Integraloperator. ■

## B.2 Blatt 2

### B.2.1 Beispiele

a) $T_1 \in \mathcal{B}(X)$ injektiv mit $\overline{\operatorname{im} T_1} = X$, aber $\operatorname{im} T_1 \neq X$.

Die Eigenschaft bedeutet gerade, dass wir ein unter einem linearen injektiven Operator dichtes Bild haben wollen, dass nicht das ganze Bild umfasst.

1.Variante: Es sei $X := \ell^1$ und

$$T_1(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$$

$T_1$ ist offenbar linear und wegen $T_1 x = 0 \Rightarrow x = 0$ injektiv. Es ist

$$T_1 n \cdot e_n = e_n \Rightarrow \operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{im} T_1.$$

Wegen Aufgabe 2 ist also $\overline{\operatorname{im} T_1} = \ell^1$. Allerdings ist $\operatorname{im} T_1 \neq \ell^1$, denn zum Beispiel $(x_n) = (\frac{1}{n^2}) \notin \operatorname{im} T_1$. Es ist nämlich $T(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{n^2})$, und wegen der Injektivität gibt es keine weiteren Elemente, die das erfüllen. Aber $(\frac{1}{n}) \notin \ell^1$.

2.Variante: Sei $X := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$ mit der Supremumsnorm und

$$T : X \to X, \quad \text{mit } f \in X,\, x \in [0,1],\, T(f)(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Es ist $\operatorname{im} T = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0\}$, und dies liegt dank der höheren Analysis dicht in $X$, aber ist offenbar nicht ganz $X$.

b) $T_2 \in \mathcal{B}(X)$ injektiv mit $\overline{\operatorname{im} T} \neq X$.

1. Variante: $X := \ell^1$, $T_2(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$. $T$ erfüllt offenbar alle Bedingungen.

2.Variante: Wie in a) 2.Variante aber wir erweitern $X$ auf die Menge aller Riemann-Integrierbaren Funktionen mit $f(0) = 0$, und bilden geschickt Äquivalenzklassen wie im $L^p$. Dadurch wird die Injektivität gewährleistet, und das Bild ist dank dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung eine Teilmenge der stetigen Funktionen, welches mit der Supremumsnorm nicht dicht in $X$ liegen kann.

c) $T_3 \in \mathcal{B}(X)$ surjektiv, aber nicht injektiv.

$X := \ell^1$, $T_3(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4 \dots)$. Wegen $T_3 \circ T_2 = id$ ist $T_3$ surjektiv. Alle anderen Bedingungen sind natürlich auch erfüllt.

### B.2.2 $\ell^p$ und seine "Basis "

Wir definieren den k-ten kanonischen Einheitsvektor $e_k \in \ell^p$ durch $e_k := (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$

*Behauptung.* Für $p \in [1, \infty)$ gilt

$$\overline{\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}} = \ell^p.$$

Für $p = \infty$ hingegen gilt

$$\overline{\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}} = c_0.$$

*Beweis.* Wir erinnern uns vorerst an die Definition von span:

$$\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{k\in M} a_k e_k : a_k \in \mathbb{K},\, k \in M, M \subseteq \mathbb{N},\, |M| < \infty \right\}$$

$\operatorname{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist also die Menge aller *endlichen* Linearkombinationen von $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nun zum eigentlichen Beweis:

Erstmal für $p \in [1, \infty)$
„$\subseteq$ “:
$\mathrm{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^p$ und $\ell^p$ ist abgeschlossen.
„$\supseteq$ “:
Sei $(x_k) \in \ell^p$ d.h

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty \text{ (Cauchy-Kriterium)}$$

Wir definieren $(y_k^n) \in \mathrm{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $y_k^n := x_k e_k$ für $k = 1, \dots, n$ und $y_k^n = 0$ für $k > n$.

$$\Rightarrow \|(x_k) - (y_k^n)\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k^n|^p = \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty$$

Das bedeutet: $(y_k^n) \longrightarrow (x_k)$. Da $\overline{\mathrm{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}}$ abgeschlossen ist, ist $(x_k) \in \overline{\mathrm{span}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}}$.
$p = \infty$
"$\subseteq$ ":
Wir zeigen die Abgeschlossenheit von $c_0$. Dafür sei $((x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (aus Folgen) aus $c_0$, mit $\lim_{n\to\infty}(x_k^{(n)}) = c$. Zu zeigen ist $c \in c_0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\Rightarrow \left|\left|x_k^{(n)} - c\right|\right|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon,\ \forall n \geq N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \left|x_k^{(n)} - c_k\right| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(n)} = 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} : \forall k \geq M \ \left|x_k^{(n)}\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\Rightarrow |c_k| = \left|c_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right| \leq \left|x_k^{(n)} - c_k\right| + \left|x_k^{(n)}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} c_k = 0 \Rightarrow c \in c_0.$$

"$\supseteq$ ":
Analog zu $p < \infty$. ∎

### B.2.3 Offene Abbildung und seine Äquivalenzen

Es seien $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ zwei normierte Vektorräume und $T : X \to Y$ linear.

*Behauptung.* Es ist äquivalent:

(a) $T(U) \subseteq Y$ ist offen für alle offenen $U \subseteq X$.

(b) Für alle $r > 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $V_\varepsilon(0) \subseteq T(U_r(0))$.

(c) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $V_\varepsilon(0) \subseteq T(U_1(0))$.

Falls $T$ bijektiv ist, dann sind die obigen Aussagen äquivalent dazu, dass die Inverse von $T$ beschränkt ist.

*Beweis.* (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) trivial **(Muahahaha)**.
"(c) $\Rightarrow$ (a)": Es sei $U \subseteq X$ offen, und $y \in T(U)$. Es ist zu zeigen, dass es eine Umgebung um $y$ gibt, die in $T(U)$ enthalten ist. Es gibt ein $x \in U$ mit $Tx = y$. Da $U$ offen ist, ist auch $U - x$ offen und eine Nullumgebung. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon := U_\varepsilon(0) \subseteq U - x \Rightarrow T(U_\varepsilon) = T(\varepsilon U_1) = \varepsilon T(U_1) \supseteq \varepsilon V_\delta(0)$ für ein geeignetes $\delta > 0$. Nun ist

$$\varepsilon V_\delta(0) \subseteq T(U_\varepsilon) \subseteq T(U - x) = T(U) - y \Leftrightarrow T(U) \supseteq y + \varepsilon V_\delta(0) = \varepsilon V_\delta(y)$$

also haben wir eine Umgebung um $y$ gefunden.
Sei nun $T$ bijektiv, und $U \subseteq X$ offen:

$$T \text{ offen } \Leftrightarrow T(U) = {T^{-1}}^{-1}(U) \text{ offen } \Leftrightarrow T^{-1} : Y \to X \text{ stetig} \Leftrightarrow T^{-1} \text{ beschränkt.}$$

∎

## B.3 Blatt 3

### B.3.1 Resolventenmenge, Spektrum

Es seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ Banachräume über den Skalarkörper $\mathbb{K}$.

*Behauptung.* Es gelten die Aussagen

(a) Die Menge $M := \{T \in \mathcal{B}(X,Y) : T$ bijektiv mit $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)\}$ ist offen in $B(X,Y)$.

(b) Für $T \in \mathcal{B}(X)$ ist die *Resolventenmenge*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - T \text{ bijektiv mit } (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}$$

offen in $\mathbb{K}$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\rho(T^n) = \rho(T)^n := \{\lambda^n : \lambda \in \rho(T)\}$

(d) Für $T \in \mathcal{B}(X)$ gilt, dass $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| > \|T\|\} \subseteq \rho(T)$

(e) $\sigma(T) := \rho(T)^c = \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heißt *Spektrum* von $T$. Der *Spektralradius* $r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ ist endlich und $r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

(f) Es ist $r(T) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$

*Beweis.* (a) Es sei $T \in M$, $R := \frac{1}{||T^{-1}||}$ und $S \in U_R(T) \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$

$$\Rightarrow \left|\left|T^{-1}(T-S)\right|\right| \leq \left|\left|T^{-1}\right|\right| \, ||T-S|| < 1.$$

Nach Satz 1.25 (Neumannsche Reihe) ist $I - T^{-1}(T-S)$ invertierbar mit stetiger Inverse. Nun ist $S = T(I - T^{-1}(T-S))$ bijektiv als Verkettung bijektiver Funktionen und hat eine stetige Inverse, da auch die einzelnen Funktionen eine stetige Inverse haben $\Rightarrow S \in M$.

(b) Es sei $\lambda \in \rho(T)$. Nach (a) gibt es ein $r > 0$, so dass für alle $S \in U_r(T)$, $\lambda I - T + S$ bijektiv ist und eine stetige Inverse hat. Für $\mu \in \mathbb{R}, |\mu| < r$ ist $||\mu I|| = |\mu| < r$. Da $\lambda I + \mu I - T = \lambda I - T + \mu I$ bijektiv ist und eine stetige Inverse hat, ist $\lambda + \mu \in \rho(T) \Rightarrow (\lambda - r, \lambda + r) \subseteq \rho(T)$.

(c) TODO

(d) Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \|\frac{1}{\lambda}T\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1$. Damit ist $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$ nach Satz 1.25 invertierbar und somit $\lambda \in \rho(T)$. Hieraus folgt insbesondere, dass die Resolventenmenge unbeschränkt ist.

(e) $\sigma(T)$ lässt sich wegen (d) nach oben durch $\|T\|$ beschränken. Damit ist auch $r(T)$ endlich. Da $\rho(T)$ nach (b) offen ist, ist $\sigma(T)$ abgeschlossen. Damit wird auch das Maximum angenommen.

(f) TODO

■

### B.3.2 Ein Fredholm-Integraloperator

Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $k \in C([a,b]^2)$ und der *Fredholmoperator* $K : C([a,b]) \to C([a,b])$ gegeben durch

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)dt.$$

*Behauptung.* Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) $K \in \mathcal{B}([a,b])$ und $\|K\| \leq \max_{s\in[a,b]} \|k(s,\cdot)\|_{L^1(a,b)}$

(b) Es existiert $c_0 > 0$, so dass für $|\lambda| > c_0$ die *Fredholm'sche Integralgleichung*

$$(\lambda I - K)f = g$$

für jedes $g \in C([a,b])$ eine eindeutige Lösung $f \in C([a,b])$ hat. Weiterhin gilt, dass die Abbildung $f \mapsto g$ stetig ist.

*Beweis.* (a) Es ist für $f \in C([a,b])$, $\|f\|_\infty < 1$

$$\max_{s\in[a,b]} |Kf(s)| = \max_{s\in[a,b]} \left| \int_a^b k(s,t)f(t)dt \right| \leq \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)f(t)|\, dt$$
$$\leq \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)|\, dt = \max_{s\in[a,b]} ||k(s,\cdot)||_{L^1}.$$

Woraus die Behauptung folgt.

(b) Wegen (a) ist $K$ beschränkt. Wählen wir $c_0 := \|K\|$ so ist wegen Aufgabe 1 (d) $(\lambda I - K)$ bijektiv. Damit gibt es insbesondere stets eine eindeutige Lösung. Die Abbildung ist linear, wegen der Beschränktheit also auch stetig.

■

### B.3.3 Der "Links-Shift"

Es sei

$$S_l : \ell^p \to \ell^p, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$$

der *Links-Shift.*

*Behauptung.* Es ist:

$$\|S_l\| = 1, \quad \rho(S_l) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}, \quad r(S_l) = 1$$

*Beweis.* Für $x \in \ell^p$ ist

$$||S_l(x)||_p = \sqrt[p]{\sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} = ||x||_p \Rightarrow ||S_l|| \leq 1$$

und für $e_2 = (0,1,0,\dots) \Rightarrow \|S_l(e_2)\|_p = \|e_1\|_p = 1 \Rightarrow \|S_l\| \geq 1$. Zusammen ist also $\|S_l\| = 1$.
Wegen Aufgabe 1 d) ist schon mal $\rho(S_l) \supseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$ zeigen wir, dass $\lambda I - S_l$ nicht injektiv sein kann. Es ist nämlich:

$$(\lambda I - S_l)x = 0 \Leftrightarrow \lambda x = S_l x \Leftrightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \Leftrightarrow x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in \ell^p \Leftrightarrow |\lambda| < 1$$

Das heißt $\mathrm{kern}(\lambda I - S_l) \neq \{0\}$ also nicht injektiv. Da $\rho(S_l)$ wegen Aufgabe 1 b) offen ist, ist $\rho(S_l) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Daraus folgt auch direkt:

$$r(S_l) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \rho(T)^c\} = \max\{|\lambda| : |\lambda| \leq 1\} = 1$$

■

# B.4 Blatt 4

## B.4.1 Norm auf dem Quotientenraum

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $E \subseteq X$ ein Unterraum.

*Behauptung.* (a) Die Abbildung

$$|||\cdot||| : X/E \to \mathbb{R}, \quad x + E \mapsto \inf_{e \in E} ||x + e||$$

definiert eine Halbnorm auf $X/E$.

(b) $|||\cdot|||$ definiert eine Norm auf $X/E$ genau dann, wenn $E$ abgeschlossen ist.

(c) $(X/E, |||\cdot|||)$ ist ein Banachraum, wenn $X, E$ vollständig sind.

*Beweis.* (a) Wir müssen beweisen:

$$(i)\ |||\,0||| = 0, \quad (ii)\ |||\,\alpha x||| = |\alpha|\ |||\,x|||, \quad (iii)\ |||\,x + y||| \leq |||x\,||| + |||\,y|||$$

für $\alpha \in \mathbb{K},\ x, y \in X/E$.

$$(i): \quad |||0||| = \inf_{e \in E} \|0 + e\| \leq \|0\| = 0$$

$$(ii): \quad \alpha = 0 \Rightarrow (i),\ \alpha \neq 0 : |||\alpha x||| = \inf_{e \in E} \|\alpha x + e\| = |\alpha| \inf_{e \in E} \|x + \frac{1}{\alpha} e\| \overset{\frac{1}{\alpha} e \in E}{=} |\alpha|\ |||\,x|||$$

$$(iii): \quad |||x + y||| = \inf_{e \in E} \|x + y + e\| \overset{e_1 + e_2 = e}{=} \inf_{e_1, e_2 \in E} \|x + y + e_1 + e_2\| \leq$$

$$\inf_{e \in E} \|x + e\| + \inf_{e \in E} \|y + e\| = |||x\,||| + |||\,y|||$$

(b) Angenommen $E$ sei abgeschlossen. Dann müssen wir nur noch $|||x + E||| = 0 \Rightarrow x + E = 0$ zeigen. Dafür erinnern wir uns erstmal, was $0 \in X/E$ bedeutet. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $x + E = y + E \Leftrightarrow x - y \in E$. Es sind also genau die Elemente aus $E$ die Nullelemente, bzw. $E$ ist das Nullelement.
1.Variante
Sei nun $|||x + E||| = 0$. Es gibt also eine Folge $(x_n)$ aus $E$, mit $x_n \to -x$ für $n \to \infty$, da nur so das Infinum 0 annehmen kann. Da $E$ abgeschlossen ist, ist $-x \in E$ also (nach oben) $x = 0$.
2.Variante
Wie 2. Variante, aber wir wählen eine Folge $(x_n)$ aus $x + E$ mit $x_n \to 0$. Da $E$ abgeschlossen ist, ist auch $x + E$ abgeschlossen, und $0 \in x + E$.

$|||\cdot|||$ definiere nun eine Norm. Sei nun $(x_n)$ eine Folge aus $E$ mit $x_n \to x$. Also

$$0 \leftarrow \inf_{e \in E} ||x - x_n + e|| = \inf_{e \in E} ||x - e||$$

woraus aus der Definitheit schon $x \in E$ folgt.

(c) Diesen Beweis mit *besonderer* Vorsicht genießen

$X/E$ ist wegen der Linearen Algebra schon ein Vektorraum. Wegen b) ist $X/E$ normiert.

Für die Vollständigkeit sei $X/E \ni [x_n] = x_n + E$ eine Cauchyfolge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus

$$\varepsilon > |||x_n - x_m + E||| = \inf_{e \in E} ||x_n - x_m + e||$$

folgt dann, dass es eine Folge $(e_n) \subseteq E$ gibt, so dass $||x_n - x_m + e_n - e_m|| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$ bleibt. Mit $\tilde{x}_n := x_n + e_n$ folgt dann, dass $(\tilde{x}_n)$ eine Cauchyfolge in $X$ ist. Da $X$ vollständig ist, konvergiert $(\tilde{x}_n)$ gegen ein $x \in X$. Nun ist

$$\varepsilon > ||\tilde{x}_n - x|| = ||x_n + e_n - x|| \geq \inf_{e \in E} ||x_n - x + e|| = |||x_n - x + E|||$$

woraus die Konvergenz $[x_n] \to [x]$ folgt, und die Vollständigkeit von $X/E$ gezeigt ist.

■

### B.4.2 Vektorräume mit abzählbaren Basen

Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum mit abzählbar unendlicher Basis $B := \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$.

*Behauptung.* $X$ ist nicht vollständig.

*Beweis.* Wir nehmen O.B.d.A an, dass $||b_i|| = 1, \ \forall i \in \mathbb{N}$ und definieren $U_n := \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\}$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

1. $U_n$ ist abgeschlossen
2. $\mathring{U}_n = \emptyset$
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X$

1: $U_n$ ist endlichdimensional also abgeschlossen.

2: Per Widerspruch: Angenommen, es gäbe ein $x \in U_n$ und ein $\varepsilon > 0$ so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq U_n$. Dann ist aber

$$v := x - \frac{\varepsilon}{2} b_{n+1} \notin U_n$$

wegen der linearen Unabhängigkeit der $b_i$, außerdem ist

$$||x - v|| = \left|\left| x - x + \frac{\varepsilon}{2} b_{n+1} \right|\right| = \left|\left| \frac{\varepsilon}{2} b_{n+1} \right|\right| < \varepsilon$$

Also $v \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow U_\varepsilon(x) \nsubseteq U_n$.

3: Offenbar gilt ” $\subseteq$ ”. ” $\supseteq$ ”: Für $x \in X$, ist $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i b_i, \ \alpha_i \in \mathbb{K}$, also $x \in \bigcup_{n=1}^k U_n$

Nun folgt mit dem Baireschen Kategoriensatz 1.35 die Nicht-Vollständigkeit von $X$. Wäre nämlich $X$ vollständig, müsste wegen 1. und 3. der Satz gelten, und ein $U_n$ hätte kein leeres Inneres, was im Widerspruch zu 2. steht $\lightning$ ■

### B.4.3 Kompaktheit in endlichdimensionalen Vektorräumen

$(V, ||\cdot||)$ sei ein endlichdimensionaler Vektorraum über den Körper $\mathbb{K}$ und $K \subseteq V$. Und es gelten die Resultate:

(1.) Je zwei Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent.

(2.) Eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ versehen mit der Euklidischen Norm ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

*Behauptung.*

$$K \text{ kompakt} \Leftrightarrow K \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

*Beweis.* ” $\Rightarrow$ ”: Kompakte Mengen sind beschränkt und abgeschlossen.
” $\Leftarrow$ ”: Da auf dem $\mathbb{K}^n$ je zwei Normen äquivalent sind (1.) und bzgl. einer Normänderung die topologischen Eigeschaften Kompaktheit, Abgeschlossenheit und Beschränktheit nicht geändert werden [1] , gilt (2.) auch für alle anderen Normen. Sei $n := \dim V$, wegen der Linearen Algebra gibt es einen Isomorphismus $\varphi : V \to \mathbb{K}^n$, insbesondere ist $\varphi^{-1}$ stetig. Da $\varphi(K) \subseteq \mathbb{K}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist, ist es kompakt. Also auch $\varphi^{-1}(\varphi(K)) = K$. ■

[1] Die Übertragung der Abgeschlossenheit und Beschränktheit ergibt sich direkt aus der Definition und Satz 1.18. Die Kompaktheit ergibt sich auch, denn eine beschränkte Folge hat bzgl. der Euklidischen Norm stets einen partiellen Grenzwert, dank der Übetragung der Konvergenz bleibt der partielle Grenzwert erhalten.

## B.5 Blatt 5

### B.5.1 Beispiel für einen Hilbertraum

Es sei $J$ eine beliebige nichtleere Menge und

$$X := \{f : J \to \mathbb{R} : f(j) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } j \in J, \sum_{j \in J} |f(j)|^2 < \infty\}.$$

*Behauptung.* (a) Sei $f, g \in X$

$$(f, g) := \sum_{j \in J} f(j)g(j)$$

ist ein Skalarprodukt auf $X$, mit dem $X$ zu einem Hilbertraum über $\mathbb{R}$ wird.

(b) Die Familie $(e_j)_{j \in J}$ mit $e_j(k) := \delta_{jk}$ für $j, k \in J$ bildet eine Orthonormalbasis von $X$.

(c) $X$ ist separabel $\Leftrightarrow$ $J$ ist höchstens abzählbar.

*Beweis.* (a) (1. Variante) Die Eigenschaften des Skalarproduktes ergeben sich sofort. $X$ ist auch ein Vektorraum. Denn sei $N(f) := \{x \in J : f(x) \neq 0\}$, dann ist für $f, g \in X$ $N(f + g) \subseteq N(f) \cup N(g)$ und $N(\alpha f) \subseteq N(f)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, also $f + g \in X$ und $\alpha f \in X$.
Es ist noch die Vollständigkeit zu zeigen. Sei dafür $(f_n)$ eine Cauchyfolge aus $X$. Da für $j \in J$, $f_n(j)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist, existiert der Grenzwert. Wir definieren

$$f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j).$$

Es ist nun für $\varepsilon > 0$ wegen der absoluten Konvergenz der Reihe

$$||f_m - f||^2 = \sum_{j \in J}(f_m(j) - f(j))^2 = \sum_{j \in J}(f_m(j) - \lim_{n\to\infty} f_n(j))^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j \in J}(f_m(j) - f_n(j))^2 < \varepsilon$$

für alle $n > N(\varepsilon)$. Das $f$ nur für höchstens abzählbar viele $j \in J \neq 0$ sein kann, folgt aus seiner Definition. Denn $\cup_{n\in\mathbb{N}} N(f_n)$ ist höchstens abzählbar und gäbe es ein $j_0 \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} N(f_n)$, so dass $f(j_0) \neq 0$, so muss $f_n(j_0)$ auch irgendwann von Null verschieden bleiben, ein Widerspruch zu $j_0 \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} N(f_n)$. Außerdem ist natürlich $\sum_{j\in J} |f(j)|^2 < \infty$. Also ist tatsächlich $f \in X$.

(2. Variante - Skizze) Eine wesentlich elegantere Methode ist es zu zeigen, dass $L^2(J, |\cdot|) = X$ gilt. Die Vollständigkeit und das Skalarprodukt übernimmt dann die Theorie der Höheren Analysis.

(b) Offensichtlich ist $|e_j| = 1$ und $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Sei nun $f \in (\mathrm{span}(e_j)_{j\in J})^\perp$. Dann ist

$$0 = (f, e_k) = \sum_{j \in J} f(j)e_k(j) = f(k) \quad \forall k \in J$$

Woraus $f = 0$ folgt, und gezeigt ist, dass durch $(e_k)_{k\in J}$ ein Orthonormalsystem gegeben ist (da $\{0\} = (\mathrm{span}(e_j)_{j\in J})^\perp$).

(c) "$\Leftarrow$ "Ist $J$ abzählbar, so ist durch (b) eine abzählbare dichte Orthonormalbasis von $X$ gegeben. Durch $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(e_i)_{i\in J}$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge gegeben ($\nearrow$ $\mathbb{Q}$-Aufspann).

"$\Rightarrow$ "Sei $M := \{x_1, x_2, \dots\}$, so dass $X = \overline{M}$. Es lässt sich eine linear unabhängige Menge $\tilde{M}$ aus $M$ wählen, so dass die lineare Hülle dicht in $X$ liegt. Dank B.5.3 können wir nun die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung auf $\tilde{M}$ anwenden, und wir erhalten eine Orthonormalbasis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nun ist

$$J = \cup_{n\in\mathbb{N}} N(x_n)$$

denn angenommen es gibt ein $j_0 \in J$, so dass $j_0 \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} N(x_n)$, dann ist $x_n(j_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dementsprechend $(x_n, e_{j_0}) = 0$. Dann ist aber $0 \neq e_{j_0} \in (\mathrm{span}(x_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp$, dies ist ein Widerspruch dazu, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis bildet. Also gilt obige Gleichheit. Daraus folgt auch schon, dass $J$ höchstens abzählbar ist.

∎

### B.5.2 separable Hilberträume und der $\ell^2$

Jeder separable unendlich-dimensionale Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu $\ell^2$

*Beweis.* Es sei $H$ ein separabler unendlich-dimensionaler Hilbertraum. Wir wählen aus der abzählbaren dichten Teilmenge eine Menge an linear unabhängigen Vektoren, dessen lineare Hülle dicht in $X$ liegt. Mit B.5.3 erhalten wir eine Orthonormalbasis $(u_i)_{j\in\mathbb{N}}$ von $X$ Wir betrachten nun die Abbildung

$$J : H \to \ell^2, \quad \sum_{i=1}^{\infty}(x, u_i)u_i \mapsto \sum_{i=1}^{\infty}(x, u_i)e_i = (x, u_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

Wobei $e_i$ natürlich der $i$-te Einheitsvektor aus $\ell^2$ ist. Die Normerhaltung folgt aus der Bessel-Gleichung, und die Surjektivität aus der Fourrierreihe. ■

### B.5.3 Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

$H$ sei ein Hilbertraum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren in $H$. Dann existiert ein Orthonormalsystem $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

(a) $\operatorname{span}\{y_k : k = 1, \dots, n\} = \operatorname{span}\{x_k : k = 1, \dots, n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis $\Leftrightarrow$ $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = X$

*Beweis.* Aus der linearen Algebra und der endlich-dimensionalen Gram-Schmidt-Orthogonalisierung folgt sofort (a). (b) folgt sofort aus (a). ■

## B.6 Blatt 6

### B.6.1 Parallelogrammgleichung und Skalarprodukt

$(X, ||\cdot||)$ sei ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammgleichung

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2 \quad \forall x, y \in X$$

gilt.

*Behauptung.* Durch

$$(x,y) := \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i\,||x+iy||^2 - ||x-iy||^2\right)$$

wird ein Skalarprodukt definiert, welches die Norm $||\cdot||$ induziert.

*Beweis.* Für diese Aufgabe gibt es auch eine Lösung.
Wir zeigen die Aussage nur für das reelle Skalarprodukt

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right).$$

Die Aussage über das komplexe Skalarprodukt lässt sich analog mit wesentlich mehr Rechenaufwand aber den gleichen Ideen zeigen. Die positive Definitheit ergibt sich sofort aus der Definition, sowie dass das definierte Skalarprodukt die Norm $||\cdot||$ induziert. Genauso flott folgt $(0,x) = 0$, $(-x,y) = -(x,y)$ und $(x,y) = (y,x)$.
Die Aussage $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ ist etwas schwieriger zu zeigen. Es gilt erstmal wegen der Parallelogrammgleichung für $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} ||x+y+z||^2 &= 2\,||x||^2 + 2\,||y+z||^2 - ||x-y-z||^2 \\ ||x+z+y||^2 &= 2\,||x+z||^2 + ||y||^2 - ||x-y+z||^2 \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$||x+y+z||^2 = ||x||^2 + ||y+z||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y-z||^2 + ||x+z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y-z||^2$$

indem wir $-z$ statt $z$ einsetzen, erhalten wir

$$||x+y-z||^2 = ||x||^2 + ||y-z||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2 + ||x-z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} (x+y,z) &= \frac{1}{4}\left(||x+y+z||^2 - ||x+y-z||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(||x||^2 + ||y+z||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y-z||^2 + ||x+z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2 \\ &- ||x||^2 + ||y-z||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2 + ||x-z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}\,||x-y+z||^2) \\ &= \frac{1}{4}\left(||x+z||^2 - ||x-z||^2\right) + \frac{1}{4}\left(||y+z||^2 - ||y-z||^2\right) \\ &= (x,z) + (y,z) \end{aligned}$$

Woraus die Additivität in beiden Komponenten folgt. Um $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ zu zeigen, zeigen wir die Aussage zuerst für $\alpha \in \mathbb{N}$, dann für $\alpha \in \mathbb{Q}$ und nutzen anschließend, dass $\alpha \mapsto (\alpha x, y)$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Dann lässt sich, wenn die Aussage für $\mathbb{Q}$ gilt, der Eindeutigkeitssatz für stetige Funktionen ($\nearrow$ Glossar) anwenden, woraus die Aussage folgt. Wenn $\alpha \in \mathbb{N}$ ist, folgt die Aussage sofort aus der Additivität. Dann gilt das auch schon für $\alpha \in \mathbb{Z}$. Nun ist

$$\mathbb{Q} \ni \alpha = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\frac{p}{q}x, y) = p \cdot \frac{q}{q}(\frac{1}{q}x, y) = \frac{p}{q}(x,y)$$

Womit alles gezeigt ist. ∎

### B.6.2 Orthogonales Komplement

$(X, (\cdot, \cdot))$ sei ein Hilbertraum und $M \subseteq X$ ein Unterraum.

*Behauptung.* Es gilt

$$(i) \quad \left(M^\perp\right)^\perp = \overline{M}.$$

$(ii)$ Die Aussage gilt nicht, wenn man die Vollständigkeit weglässt

*Beweis zu $(i)$.* "$\subseteq$ " Es sei $x \in \left(M^\perp\right)^\perp$. Da $\overline{M}$ ein abgeschlossener Unterraum ist und $X$ ein Hilbertraum ist, ist $X = \overline{M} \oplus \overline{M}^\perp$. Also $x = v + v_\perp,\ v \in \overline{M},\ v_\perp \in \overline{M}^\perp$. Sei nun $y \in M^\perp$

$$\Rightarrow 0 = (x, v_\perp) = (v + v_\perp, v_\perp) = (v, v_\perp) + (v_\perp, v_\perp) \Rightarrow v_\perp = 0 \Rightarrow x = v \in \overline{M}$$

"$\supseteq$ " Für $x \in \overline{M}$ ist $x_n \to x$ für eine Folge $(x_n)$ aus $M$. Für $y \in M^\perp$ ist nun

$$0 = (y, x_n) \to (y, x) \Rightarrow x \in \left(M^\perp\right)^\perp$$

■

*Beweis zu $(ii)$.*

42

■

### B.6.3 Orthogonale Projektion

$X$ sei ein normierter Raum und $P : X \to X$ ein linearer Operator mit $P^2 = P$.

*Behauptung.* Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(a) $X = \operatorname{im} P \oplus \ker P$

(b) Ist $P$ beschränkt, dann sind $\operatorname{im} P,\ \ker P$ abgeschlossen und $||P|| \geq 1$ oder $||P|| = 0$.

(c) Ist $X$ vollständig, so folgt aus der Abgeschlossenheit von $\ker P$ und $\operatorname{im} P$, dass $P$ beschränkt ist.

(d) Sei $X$ ein Hilbertraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

  (i) $P$ ist eine orthogonale Projektion (d.h. $\operatorname{im} P \perp \ker P$)

  (ii) $||P|| \leq 1$

  (iii) $(Px, y) = (x, Py) \quad \forall x, y \in X$

(e) Für jeden abgeschlossenen Unterraum $U$ eines Hilbertraumes existiert eine eindeutige orthogonale Projektion $P$ mit $\operatorname{im} P = U$.

*Beweis.* (a) Für $x \in X$ ist $x = x - P(x) + P(x)$ und $x - P(x) \in \ker P,\ P(x) \in \operatorname{im} P$ Außerdem ist für $x \in \ker P \cap \operatorname{im} P,\ x = P(x) = 0$.

(b) Es ist $\ker P = P^{-1}(\{0\}$, also ist der Kern wegen der Stetigkeit abgeschlossen. Sei $(v_n)$ eine Folge aus $\operatorname{im} P$ mit $v_n \to v$. Wegen der Stetigkeit ist $v \leftarrow v_n = P(v_n) \to P(v)$ also $v \in \operatorname{im} P$, und damit ist auch das Bild abgeschlossen. Außerdem ist für $P \neq 0$

$$||P|| = \left|\left|P^2\right|\right| \leq ||P||^2 \Leftrightarrow 1 \leq ||P||\,.$$

(c) Wir nutzen den Satz über die Graphenabgeschlossenheit um die Stetigkeit zu zeigen. Sei dazu

$$x_n \to x,\ P(x_n) \to y,$$

nun ist

$$\ker P \ni x_n - P(x_n) \to x - y$$

wegen der Abgeschlossenheit des Kerns gilt also $x - y \in \ker P$ woraus $P(x) = P(y)$ folgt. Da das Bild abgeschlossen ist, gilt $y \in \operatorname{im} P$ woraus sich schlussendlich $P(x) = P(y) = y$ ergibt.

(d) TODO

(e) $U$ ist abgeschlossen, also $X = U \oplus U^\perp$ möglich. Wir definieren

$$P_U : X \to X, \quad x = u + u_\perp \mapsto u.$$

$P_U$ ist offensichtlich eine Projektion.

■

### B.6.4 Unbeschränkter Projektor

Die Vollständigkeit in Aufgabe 3 c) ist notwendig. Denn:

1. Es gibt zwei abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraumes, so dass $M \cap N = \{0\}$ und $M + N$ ist nicht abgeschlossen.
2. Es gibt eine unstetige Projektion $P$ auf einem Skalarproduktraum, so dass im $P$, $\ker P$ abgeschlossen sind.

*Beweis.* Nein. ■

## B.7 Blatt 7

### B.7.1 Abgeschlossenes Bild eines beschränkten Operators

$X, Y$ seien Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Es ist äquivalent:

1. im $T$ ist abgeschlossen.
2. $\inf_{x \in X \setminus \ker T} \frac{||Tx||}{\delta(x, \ker T)} > 0$, wobei $\delta(x, \ker T) = \inf_{z \in \ker T} ||x - z||$

*Beweis.* "$\Rightarrow$ " Es sei $x \in X \setminus \ker T$. Da im $T$ abgeschlossen ist, ist

$$\hat{T} : X/\ker T \to \text{im } T, \quad x + \ker T \mapsto Tx$$

eine bijektive Abbildung zwischen Banachräumen, also wegen des Satzes der offenen Abbildung offen, und damit ist die Inverse $\hat{T}^{-1}$ stetig. Also können wir den Satz .15] nutzen. Es existiert also ein $m > 0$ mit

$$m \,|||\, x + \ker T||| \leq \left|\left|\hat{T}x\right|\right| = ||Tx|| \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{||Tx||}{|||x + \ker T|||} = \frac{||Tx||}{\delta(x, \ker T)}$$

gilt. Aber genau das war zu zeigen!
"$\Leftarrow$ " Es gelte

$$\inf_{x \in X \setminus \ker T} \frac{||Tx||}{\delta(x, \ker T)} > 0 \Leftrightarrow \frac{||Tx||}{\delta(x, \ker T)} \geq m \quad \forall x \in X \setminus \ker T \text{ für ein } m > 0.$$

Um nun die Abgeschlossenheit des Bildes zu zeigen, sei $(y_n)$ eine gegen $y$ konvergente Folge aus im $T$. Es gibt für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $Tx_n = y_n$. Nun ist

$$||Tx_n - Tx_m|| \geq m \,|||\, x_n - x_m + \ker T|||$$

woraus folgt, dass $(x_n + \ker T)$ eine Cauchyfolge ist, da $\ker T$ abgeschlossen ist, ist wegen B.4.1 $X/\ker T$ ein Banachraum und die Cauchyfolge konvergiert gegen ein $x + \ker T$. Dann ist aber $\hat{T}(x + \ker T) = Tx = y$, wegen der Stetigkeit. Womit nun alles gezeigt ist. ∎

### B.7.2 Beispiel eines graphenabgeschlossenen, nicht stetigen Operators

Der Operator

$$T : (C^1([0,1]), ||\cdot||_\infty) \to (C([0,1]), ||\cdot||_\infty), \quad f \mapsto f'$$

ist graphenabgeschlossen, aber nicht stetig.

*Beweis.* Es sei $f_n$ eine Folge aus $C^1([0,1])$ mit $f_n \to f$ und $f_n' \to g \in C([0,1])$. Da Konvergenz bzgl. $||\cdot||_\infty$ gleichmäßige Kionvergenz bedeutet, sind die Voraussetzungen des Satzes gleichmäßige Konvergenz und Ableitung ($\nearrow$ Glossar) erfüllt. Also gilt tatsächlich $f' = g$.
Für die Nichtstetigkeit von $T$ betrachten wir die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\cos(n^2 x), \quad f_n'(x) = n \sin(n^2 x)$$

Es ist $||f_n||_\infty = \frac{1}{n} \to 0$, aber $||f_n'||_\infty = n \to \infty$.

∎

### B.7.3 Notwendigkeit der Vollständigkeit im Satz der offenen Abbildung

Im Satz der offenen Abbildung ist die Vollständigkeit notwendig.

*Beweis.* Trivial ... ∎

### B.7.4 Sowas wie die verallgemeinerte Exponentialfunktion ???????

$X$ sei ein Banachraum und $T : [0, \infty) \to \mathcal{B}(X)$ eine Abbildung mit

1. $\forall t, s \geq 0 : T(t + s) = T(t)T(s)$
2. $\forall x \in X : \lim_{t \searrow 0} T(t)x = x$

Es gelten die Eigenschaften

(a) $\forall x \in X : [0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x$ ist stetig.

(b) $T(0) = I_X$

(c) $\exists M \geq 0 \; \exists \omega \in \mathbb{R} \; \forall t \geq 0 : ||T(t)|| \leq Me^{\omega t}$

### B.7.5 Satz von Hellinger-Toeplitz

In einem Hilbertraum $X$ ist ein selbstadjungierter Operator $T : X \to X$ beschränkt.

*Beweis.* Fast trivial ■

## B.8 Blatt 8

### B.8.1 Funktional und Beschränktheit

$X$ sei ein Vektorraum, $x' : X \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional. Es gilt

$$x' \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \ker x' \text{ abgeschlossen}$$

*Beweis.* Betrachte $X/kerx' := \{\hat{x} := x + N : x \in X\}$ und die lineare Abbildung

$$\hat{H} : X/ker\, x' \to \mathbb{R}, \; \hat{H}\hat{x} := x'(x).$$

Weil $x'$ linear ist und $\hat{H}$ injektiv und $\hat{H}(X/ker\, x') = x'(X)$, folgt

$$X/ker\, x \text{ und } x'(X) \text{ isomorph zueinander} \quad \textit{und} \quad \dim(X \ker\, x') = \dim(\mathbb{R}) = 1.$$

Nun ist ein linearer Operator von einem endlich dimensionalen Raum in einen beliebigen normierten Raum stetig. Und damit ist $\hat{H}$ stetig. Nun wird gezeigt, dass daraus auch folgt, dass $x'$ stetig sein muss. Sei $\hat{x}$ die Restklasse von $x$, dann gilt

$$||x'(x)|| = \left|\left|\hat{H}\hat{x}\right|\right| \leq \left|\left|\hat{H}\right|\right| \cdot ||\hat{x}|| \leq \left|\left|\hat{H}\right|\right| \cdot ||x|| \leq M\,||x||\,.$$

Mit der in B.4.1 eingeführten Norm auf Quotientenräumen. ∎

### B.8.2 Hmm

$X$ sei ein normierter Raum, $E \subseteq X$ ein Unterraum und $x \in X$ mit $\delta(x, E) > 0$.
Es existiert ein $x' \in X$ mit $\langle x, x' \rangle = 1$ und $||x'|| = \frac{1}{\delta(x,E)}$.

*Beweis.* ∎

### B.8.3 Der Banach-Limes

$S : \ell_\infty \to \ell_\infty$ sei der Links-Shift. Es existiert ein $x' \in \ell'_\infty$ mit

1. $\forall x \in \ell_\infty : \langle Sx, x' \rangle \, \langle x, x' \rangle$
2. $\forall \in \ell_\infty : \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \langle x, x' \rangle \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$

Es ist $||x'|| = 1$

### B.8.4 Orthogonalräume oder so

$X$ sei ein normierter Raum und $E$ ein abgeschlossener Unterraum von $X$.

(a) $E'$ und $X'/E^\perp$ sind isometrisch isomorph.

(b) $E^\perp$ und $(X/E)'$ sind isometrisch isomorph.

*Beweis.* easy peasy ∎

## B.9 Blatt 9

### B.9.1 $\ell^1$ ist nicht reflexiv

$\ell^1$ ist nicht reflexiv.

*Beweis.* $\ell^1$ ist nicht reflexiv. ∎

### B.9.2 Schwache Cauchy-Folgen

Sei $X$ ein normierter Raum.

(a) Schwache Cauchy-Folgen in $X$ sind beschränkt.

(b) Ist $X$ reflexiv, so ist eine schwache Cauchy-Folge in $X$ schwach konvergent.

*Beweis.* Man nehme eine Portion Vollständigkeitssätze mit einer Prise Banach-Steinhaus, und fertig ist die Laube! ∎

### B.9.3 Nicht-Existenz von $T^*$

Es gibt Skalarprodukträume $X$, $Y$, und einen Operator $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, so dass $T^* : Y \to X$ nicht existiert.

*Beweis.* :P ∎

### B.9.4 Die Adjungierte des Rechts-Shifts

Die Adjungierte des Rechts-Shifts $R : \ell^2 \to \ell^2$ ist der Links-Shift.

*Beweis.* Nachrechnen! ∎

### B.9.5 Spektrum der Adjungierten und Dualen

$X$ sei ein Banachraum und $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Die Spektren von $T$ und $T'$ stimmen überein. In einem Hilbertraum ist das Spektrum von $T^*$ das komplex konjugierte Spektrum von $T$. (Wobei wir hier komplex konjugierte der Menge als komplex konjugierte der Elemente verstehen.)

# B.10 Blatt 10

## B.10.1 selbstadjungiert oder so

$X$ sei ein Skalarproduktraum (vollständig ?! ) und $A \in \mathcal{B}(X)$.

$$A \text{ selbstadjungiert} \Leftrightarrow \forall x \in X : \langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* ■

## B.10.2 Advanced Aufgabe 1

$X$ sei ein komplexer Skalarproduktraum und $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(X)$, so dass $\langle x, A_1 x\rangle = \langle x, A_2 x\rangle$ für alle $x \in X$.

(a) $A_1 = A_2$

(b) (a) gilt nicht bei reellen Skalarprodukträumen.

(c) (a) gilt bei reellen Skalarprodukträumen, wenn $A_1, A_2$ selbstadjungiert sind.

## B.10.3 Normale Operatoren

$X$ sei ein Hilbertraum, $A \in \mathcal{B}(X)$

$$A \text{ normal} \Leftrightarrow ||Ax|| = ||A^*x|| \quad \forall x \in X.$$

Wobei $A$ normal ist, wenn $AA^* = A^*A$.

*Beweis.* zu 78% trivial. ■

## B.10.4 Hmm

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Hilbertraum und $p, q \in [1, \infty]$, so dass $1/p + 1/q = 1$. Für $f \in L^p(\Omega, \mu)$ gilt

$$||f||_p = \sup\{\left|\int_\Omega f g \, d\mu\right| : g \in L^q(\Omega, \mu) \text{ mit } ||g||_q \leq 1\}.$$

## B.10.5 Der Dualraum von $c_0$

$c_0$ sei versehen mit der Maximumsnorm. Der Dualraum von $c_0$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^1$.

*Beweis.* Ähem... ■

## B.11 Blatt 11

### B.11.1 Der Fredholm-Operator

Sei $k[a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$T : L^p[c,d] \to L^p[a,b], \quad f \mapsto T(f), \text{ mit } T(f)(s) = \int_c^d k(s,t)f(t)dt$$

### B.11.2 Spektrumseigenschaften

TODO

*Beweis.* Leicht zu zeigen. ■

### B.11.3 Verallgemeinerter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

1. $f \in W^{1,1}(I)$ dann gilt für fast alle $x_1, x_2 \in I$

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt$$

2. $f, g \in L^1(I)$ und gilt

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} g(s)ds$$

für fast alle $x_1, x_2 \in I$, so folgt, dass $f \in W^{1,1}(I)$ und $f' = g$.

# B.12 Blatt 12

## B.12.1 Satz von Lax-Milgram

Sei $X$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $a : X \times X \to \mathbb{K}$ sequilinear. D.h. für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$(a) \quad a(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \cdot a(x, z) + \mu \cdot a(y, z), \qquad (b) \quad a(z, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} \cdot a(z, x) + \overline{\mu} \cdot a(z, y)$$

Außerdem seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < c_1 \leq c_2$ derart, dass für alle $x, y \in X$ gilt:

(i) $|a(x, y)| \leq c_2 \, ||x|| \, ||y||$

(ii) $\Re\, a(x, x) \geq c_1 \, ||x||^2$.

Dann existiert genau eine Abbildung $A : X \to X$ mit

$$a(y, x) = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x, y \in X$$

Des Weiteren ist $A \in \mathcal{B}(X)$ invertierbar mit

$$||A|| \leq c_2 \text{ und } \left|\left|A^{-1}\right|\right| \leq \frac{1}{c_1}.$$

## B.12.2 Ein elliptisches Randwertproblem

Diese Aufgabe wird boykottiert.

## B.12.3 Zeug für die Schwache Ableitung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^\infty(\Omega)$, so dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, dass

$$\int_\Omega f \varphi d\lambda^n = 0.$$

Dann gilt $f = 0$ (fü) .

## B.12.4 Hmm

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir betrachten die Abbildung

$$J_1 : L^\infty(\Omega, \mu) \to L^1(\Omega, \mu)' \quad g \mapsto J_1(g), \quad J_1(g)(f) = \int_\Omega f g d\mu.$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $J_1$ ist normerhaltend,
2. $J_1$ ist injektiv,
3. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ist semi-endlich.

# B.13 Blatt 13

## B.13.1 Kompakter Operator - Eigenschaften

Sei $X$ ein Banachraum und $K \in K(X)$. Es gilt:

1. $K$ bijektiv $\Rightarrow$ $X$ ist endlichdimensional.
2. $X$ unendlichdimensional $\Rightarrow d(I, K(X)) = \inf\{||I - K|| : K \in K(X)\} = 1$

## B.13.2 Abschätzung der Norm kompakter Operatoren

$X, Y, Z$ seien Banachräume und $T \in K(X, Y)$. $J \in \mathcal{B}(Y, Z)$ sei injektiv. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C_\varepsilon$, so dass

$$||Tx|| \leq \varepsilon ||x|| + C_\varepsilon ||JTx||, \qquad x \in X.$$

## B.13.3 Kompakter Operator - Eigenschaft

Sei $p \in [1, \infty]$, $z \in \ell^\infty$ und $T_z : \ell^p \to \ell^p$ sei durch

$$(T_z x)(n) = z(n)x(n)$$

$z(n) = z_n$ ??

Dann gilt: $T_z$ ist kompakt $\Leftrightarrow z \in c_0$

## B.13.4 Beispiele kompakter Operatoren

1. $C_1([0, 1])$ sei mit der Norm $||f|| := ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ versehen. Die Einbettung

$$J : (C^1([0, 1]), ||\cdot||) \to (C([0, 1]), ||\cdot||_\infty), \quad f \mapsto f'$$

ist kompakt

2. $k : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig. Der Integraloperator $T_k : C([0, 1]) \to C([0, 1])$,

$$(T_k x)(s) = \int_0^s k(s, t)x(t)dt$$

ist wohldefiniert und kompakt.

# Literaturverzeichnis

alpha]9Alt, Hans Wilhelm. *Lineare Funktionalanalysis.* 6., überarb. Aufl. Berlin[u.a]:Springer, 2012 Werner, Dirk. *Funnktionalanalysis.* 5., erw. Aufl. Berlin [u.a]: Springer, 2005 Heuser, Harro. *Funktionalanalysis* 3., durchges. Aufl. Stuttgart: Teubner, 1992