

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Arbeit im Gange - Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1	is' klar 'ne? . . . . .	2
1.2	Lineare Operatoren . . . . .	3
1.3	Metrische und topologische Räume, Satz von Baire . . . . .	9
1.3.1	Skalarprodukträume . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Einige Hauptsätze aus der Funktionalanalysis</b>	<b>21</b>
2.1	Satz von der offenen Abbildung, Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz von der stetigen Inversen . . . . .	21
2.2	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz von Banach-Steinhaus . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Lineare Funktionale und duale Abbildungen</b>	<b>25</b>
3.1	Fortsetzungssätze von Hahn-Banach . . . . .	25
3.2	Dualraum und Reflexivität . . . . .	28
3.3	Duale und adjungierte Abbildungen . . . . .	31
3.4	Schwache Konvergenz . . . . .	32
<b>A</b>	<b>Etwaige Begriffe</b>	<b>34</b>

# Kapitel 1

## Arbeit im Gange - Grundlagen

### 1.1 is' klar 'ne?

#### Bekannt aus Analysis I-III

- Banachraum: vollständiger normierter Vektorraum (wir schreiben  $(X, \|\cdot\|_X)$ )
- Hilbertraum: vollständiger Skalarproduktvektorraum mit  $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)_X}$ . Wobei  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt bezeichnet.
- Cauchy-Folge:  $(x_n), \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \geq n : \|x_m - x_n\| < \varepsilon$
- vollständiger metrischer Raum, Topologie.

**Definition 1.1** (Halbnorm, Seminorm). Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, wobei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Für  $x, y \in X$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist eine Halbnorm oder Seminorm eine Abbildung  $||| \cdot ||| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $|||x||| \geq 0$
- (ii)  $|||\lambda x||| = |\lambda| \cdot |||x|||$
- (iii)  $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$

Eine Norm erfüllt zusätzlich noch die Bedingung, dass sie nur dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet.

*Bemerkung 1.2.* (a)  $N := \{x \in X : |||x||| = 0\}$  bildet einen Unterraum von  $X$ .

(b)  $X/N$  ist ein normierter Raum über(?)  $\|x + N\| := |||x|||$

(c)  $X$  ist ein vollständiger seminormierter Raum  $\Rightarrow X/N$  ist ein Banachraum

**Beispiel 1.3** (wichtige Vektorräume). Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum

(a)  $p \in [1, \infty)$   $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar, } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$  ist ein seminormierter Raum mit  $|||f|||_p := (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ .  
 $L^p(\Omega, \mu)$  ist ein vollständiger normierter Raum ( $\nearrow$  Ana III).

(b)  $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar und essentiell beschränkt}\}$  ist ebenfalls seminormiert mit  $|||f|||_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ .  
 $L^\infty(\Omega, \mu)$  ist ein vollständiger normierter Raum.

(c)  $p \in [1, \infty]$ ,  $|\cdot|$  sei das Zählmaß auf  $\mathbb{N}$  und der Maßraum sei gegeben durch  $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), |\cdot|)$ .  
 $\ell^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, |\cdot|)$  heißt Folgenraum und ist ein normierter unendlichdimensionaler Raum.

- (d)  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  messbar,  $\lambda^n$  Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ .  $L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \lambda^n)$  heißt Lebesgue-Raum.
- (e) Sei  $(\Omega, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.  $BC(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$  versehen mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.

*Bemerkung 1.4 (diverse Fakten).* Seien  $p, q, r \in [1, \infty)$

- (a)  $L^p(\Omega, \mu)$  ist ein Banachraum,  $L^2(\Omega, \mu)$  ist ein Hilbertraum mit  $(f, g)_2 := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$
- (b) Falls  $\mu(\Omega) < \infty$ ,  $p \geq r \Rightarrow L^p(\Omega, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \mu)$
- (c) Wenn  $p \geq r \Rightarrow L^r(\Omega, \mu) \cap L^\infty(\Omega, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$
- (d)  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in L^p(\Omega, \mu)$ ,  $g \in L^q(\Omega, \mu) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega, \mu)$  mit  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$  (Hölder-Ungleichung). Dies gilt auch für  $p = 1, q = \infty$  wobei hier  $\frac{1}{\infty} := 0$ .
- (e) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet.  $C_0^k := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp } f \text{ kompakt und } f \in C^k(\Omega, \mathbb{C})\}$  ist dicht in  $L^p(\Omega) \forall p \in [1, \infty)$ . Dies gilt nicht für  $p = \infty$ , da  $f = \text{const}$  oder  $f = \text{sign}$  sich nicht durch Funktionen aus  $C_0^k$  approximieren lassen.
- (f)  $BC(\Omega)$  ist abgeschlossen in  $L^\infty(\Omega)$ , aber nicht in  $L^p(\Omega)$  für  $p < \infty$ , dennoch ist  $BC(\Omega)$  in beiden Fällen ein Unterraum.

## 1.2 Lineare Operatoren

**Definition 1.5** (linearer Operator). Seien  $X, Y$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  heißt *linearer Operator* wenn

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in X$$

wir schreiben auch  $Tx$  statt  $T(x)$ .

Wenn  $Y = \mathbb{K}$  dann heißt ein linearer Operator  $T : X \rightarrow \mathbb{K}$  *Funktional*.

Wenn  $X, Y$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume sind, heißt ein linearer Operator  $T$  *beschränkt*, wenn  $T(U_1(0)) \subseteq Y$  beschränkt ist. In Quantoren lautet diese Aussage

$$\exists M \geq 0, \text{ so dass } \forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq M \text{ mit } \|x\|_X < 1$$

*Bemerkung.* Die Bilder beschränkter Mengen  $M$  unter einem beschränkten linearen Operator  $T$  sind beschränkt. Denn existiert ein  $R > 0$  mit  $M \subseteq U_R(0)$ , sodass

$$T(M) \subseteq T(U_R(0)) = T(R \cdot U_1(0)) = R \cdot T(U_1(0))$$

und dies ist beschränkt.

**Beispiel 1.6.** a)  $X = \mathbb{K}^n$ ,  $Y = \mathbb{K}^m$ ,  $\{T : X \rightarrow Y : T \text{ linearer Operator}\} = \mathbb{K}^{m \times n}$ .  $T \in \mathbb{K}^{n \times m}$  ist beschränkt. Denn:

$$\|T\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |t_{ij}| < \infty, \quad t_{ij} \text{ sind die Einträge der Matrix } T.$$

Da auf einem endlichdimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist  $T$  beschränkt.

- b)  $T : L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $Tf := \int_{\Omega} f d\mu$ . Es gilt  $|Tf| = |\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu = \|f\|_1$ . Also ist  $|Tf| < 1 \forall f \in L^1(\Omega, \mu) : \|f\|_1 < 1$  und damit ist  $T$  beschränkt.

**Satz 1.7.** Seien  $X, Y$  normierte Räume,  $T : X \rightarrow Y$  ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

- (i)  $T$  beschränkt,

(ii)  $T$  ist Lipschitz stetig,

(iii)  $T$  ist gleichmäßig stetig,

(iv)  $T$  ist stetig,

(v)  $T$  stetig in 0,

(vi)  $\exists x \in X : T$  stetig in  $x$ .

**Beweis:** "(i)  $\Rightarrow$  (ii)": Sei  $M > 0$ , so dass  $\|Tx\|_Y \leq M \forall x \in U_1(0)$ . Es gilt  $T0 = 0$ . Weiterhin gilt für  $x \in X \setminus \{0\}$ :

$$\|Tx\|_Y = \left\| 2 \|x\|_X T \left( \frac{x}{2 \|x\|_X} \right) \right\| = 2 \|x\|_X \left\| T \left( \underbrace{\frac{x}{2 \|x\|_X}}_{\in U_1(0)} \right) \right\|_Y \leq 2M \|x\|_X.$$

Also gilt  $\|Tx\|_Y \leq 2M \|x\|_X \forall x \in \|x\|_X$  und daraus folgt die Lipschitz Stetigkeit wegen

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq 2M \|x_1 - x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

"(ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (v)  $\Rightarrow$  (vi)": Der Beweis dieser Implikationskette ist Gegenstand der Grundvorlesungen<sup>1</sup>.

"(vi)  $\Rightarrow$  (v)": Sei  $x \in X$ , so dass  $T$  stetig in  $x$  ist. Sei  $(x_n)$  Nullfolge in  $X$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x + x_n) = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T(x + x_n) = Tx \stackrel{\text{stetig in 0}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0 = T0$$

"(v)  $\Rightarrow$  (i)": Beweis durch Widerspruch: Angenommen  $T$  ist unbeschränkt  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U_1(0)$ , so dass  $\|Tx_n\|_Y \geq n$  ( $\Rightarrow x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt  $\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , aber  $\|T \frac{x_n}{n}\|_Y = \frac{1}{n} \|Tx_n\|_Y \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$  Das heiße aber  $T$  ist unstetig in 0. ■

An dieser Stelle werden einige Definition und Bemerkung festgehalten, die in späteren Kapitel beleuchtet und untersucht werden.

**Bemerkung 1.8.** a)  $\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y : T \text{ beschränkt}\}$

b)  $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$  beides sind  $\mathbb{K} - VR$ .

c)  $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  topologischer Dualraum von  $X$ .

**Bemerkung 1.9.** d)  $\text{Ker } T, \text{Im } T$  sind UVR.

e) (i) – (vi) äquivalent zu (vii): Jede beschränkte Menge wird auf eine beschränkte Menge abgebildet.

f) Es gibt beschränkte lineare Operatoren, so dass  $\text{Im } T$  nicht abgeschlossen  $\nearrow$  Übung

g)  $\text{Ker } T$  abgeschlossen  $\forall T \in \mathcal{B}(X, Y)$ , da  $T$  stetig und  $\text{Ker } T = T^{-1}(\{0\})$ , wobei  $\{0\}$  abgeschlossen in  $Y$ .

**Satz 1.10** (Operatornormen).  $X, Y$  normierte Räume.  $\mathcal{B}(X, Y)$  normierter Raum mit folgender Norm

$$\|T\| := \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\|_Y.$$

**Beweis:** (Positivität:)  $\|0\| = 0$ . Sei  $\|T\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \forall x \in U_1(0)$ . Sei  $x \in X$  beliebig.  $\Rightarrow Tx = 2 \|x\|_X T \left( \frac{x}{2 \|x\|_X} \right) = 0 \Rightarrow T = 0$ .

<sup>1</sup>Damit meinen wir stets Sätze, die in Analysis/LA I,II oder Höhere Analysis bewiesen wurden.

(Homogenität:) Sei  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann  $\|\lambda T\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(\lambda T)x\|_Y = |\lambda| \sup_{x \in U_1(0)} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|$ .

(Dreiecksungleichung:) Seien  $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann  $\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in U_1(0)} (\|T_1 x + T_2 x\|_Y) \leq \sup_{x \in U_1(0)} (\|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y) \leq \sup_{x_1, x_2 \in U_1(0)} (\|T_1 x_1\|_Y + \|T_2 x_2\|_Y) \leq \sup_{x_1 \in U_1(0)} \|T_1 x_1\|_Y + \sup_{x_2 \in U_1(0)} \|T_2 x_2\|_Y = \|T_1\| + \|T_2\|$  ■

Bemerkung 1.11. Es gilt  $\|T\| = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$  ( $\nearrow$  Ü1, A2).

**Beweis:** Wir zeigen

$$\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} =: M_3 \geq \|T\| \geq M_1 := \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\|_Y$$

und

$$M_3 \geq M_1 \geq M_2 \geq M_3 \quad \text{mit } M_2 := \sup_{x \in \partial U_1(0)} \|Tx\|_Y$$

Wobei  $M_1 \geq M_2$  gilt, da wir das Supremum über eine größere Menge bilden.

“ $M_3 \geq \|T\| \geq M_1$  : “  $\forall \|x\| = 1$  und  $U_1(0) \ni x_n = x - \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ , gilt

$$\|Tx_n\| = \left\| T\left(x - \frac{1}{n}\right) \right\| = \left\| Tx - T\frac{1}{n} \right\| \rightarrow \|Tx - T0\| = \|Tx\|$$

Damit hat man formal gezeigt, dass man für jeden Vektor in  $\overline{U_1(0)}$  bezüglich den man ein Supremum bilden kann, auch Folgen in  $U_1(0)$  findet. Kurz:  $\|T\| \geq M_1$ . Weiterhin gilt  $\|Tx\| \leq M_3 \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$ , damit folgt

$$\|T\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\| < 1} (M_3 \cdot \|x\|) = M_3 \sup_{\|x\| < 1} \|x\| = M_3$$

“ $M_3 \geq M_1$  : “ Sei  $\|x\| \leq 1$ . Dann gilt  $\|Tx\| \leq \|Tx\| / \|x\|$ . Also:

$$M_1 = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} \|Tx\| \leq \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} (\|Tx\| / \|x\|) \leq M_3$$

“ $M_2 \geq M_3$  : “ Einfaches Umformen ergibt:

$$M_3 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq M_2$$
 ■

**Satz 1.12.**  $X$  normierter Raum,  $Y$  Banachraum. Dann ist  $\mathcal{B}(X, Y)$  Banachraum.

**Beweis:** Sei  $(T_n)$  CF in  $\mathcal{B}(X, Y)$ , d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon$ . Also  $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$ . Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von  $Y$ , dass  $(T_n x)$  in  $Y$  für alle  $x \in X$  konvergiert. Wir setzen den Grenzwert auf  $T : X \rightarrow Y$ ,  $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ . Die so definierte Abbildung, also dieser Grenzwert, erfüllt folgende Eigenschaften:

a)  $T$  ist ein linearer Operator.

b)  $T$  ist beschränkt.

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$  (also Normkonvergenz bzw. gleichmäßige Konvergenz)

Zu a):  $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n x_1 + \mu T_n x_2) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_1 + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_2 = \lambda T x_1 + \mu T x_2$

zu b): Wegen  $\|T_n - T_m\| \geq (\|T_n\| - \|T_m\|)$  gilt  $\|T_n\|$  ist CF in  $\mathbb{R}$ , also beschränkt:  $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ . Für  $x \in U_1(0)$  gilt  $\|Tx\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\|_X \leq M \cdot \|x\|_X \leq M$ . (vgl. Def 1.5, “ $\Leftrightarrow$ ”)

zu c): Sei  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Für  $x \in U_1(0)$  gilt somit

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_m - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|T - T_n\| = \sup_{x \in U_1(0)} \|(T - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Also ist  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  und aufgrund der Beliebigkeit der  $CF$ , folgt die Vollständigkeit. ■

**Korollar 1.13.**  $X$  normierter Raum  $\Rightarrow X'$  Banachraum.

**Bemerkung 1.14.** a)  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $S \in \mathcal{B}(Y, Z) \Rightarrow ST \in \mathcal{B}(X, Z)$  und  $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$  (gilt wegen  $\|S(Tx)\|_Z \leq \|S\| \cdot \|Tx\|_Y \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|_X \leq M \|x\|_X \forall x \in X$  und der Linearität von  $ST$ .)

b)  $id \in \mathcal{B}(X, X)$ ,  $\|id\| = 1$ .

c) Aus punktweiser Konvergenz  $T_n x \rightarrow Tx$  folgt i.A. nicht  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  (d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ ).

**Bsp:**  $X = \ell^p, p \in [1, \infty), T_n : \ell^p \rightarrow \ell^p, T_n(x_k) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$  wobei  $(x_k) = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ .

Man kann zeigen, dass  $T_n \in \mathcal{B}(X) \forall n \in \mathbb{N}$  ( $\nearrow$  Übung).

Sei  $(x_k) \in \ell^p, \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} < \epsilon. \|T_n(x_k) - x_n\|_X = (\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} \forall n \geq N$ . Also  $\forall x \in X \|T_n - x\|_X \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . Frage:  $\|T_n - T\|_X \rightarrow 0$ ? Nein! Sei  $(x_k^n) =$

$(0, \dots, 0, \overset{n+1 \text{ Stelle}}{1}, 0, \dots)$ ,  $\|T_n(x_k^n) - x\|_X = \|(0, \dots, 0, -1, 0, \dots)\|_Y = 1 \|T_n - T\| \stackrel{Def}{=} \sup_{x \in U_1(0)} \|(T_n - T)x\|_X \geq \left\| (T_n - T) \left( \frac{1}{2} (x_k^n) \right) \right\| = \frac{1}{2} \cdot 1 (T = id) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|T_n - T\| \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

d)  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  und  $T$  bijektiv. Dann ist  $T^{-1}$  i.A. nicht beschränkt.

**Bsp.**  $X \in C[0, 1], Y = \{f \in C^1([0, 1]) : f(0) = 0\}$  mit  $\|x\|_X = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$  und  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_Y$

und  $T : X \rightarrow Y, (Tx)(t) = \int_0^t x(s) ds$ .

- $T^{-1} = S : Y \rightarrow X, Sy = y'$ . (Zeige  $ST = id_X$  und  $TS = id_Y$ )
- $T^{-1} \notin \mathcal{B}(Y, X)$  (Sei  $y_n(t) = t^n \in Y, (T^{-1}y_n)(t) = n \cdot t^{n-1} \Rightarrow \|y_n\|_Y = 1 \forall n \in \mathbb{N}, \|T^{-1}y\|_X = n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow T^{-1}$  kann nicht beschränkt sein. ( $\|T^{-1} \frac{1}{2} y_n\|_X = \frac{1}{2} \cdot n$  mit  $\|\frac{1}{2} y_n\|_Y = \frac{1}{2}$ )

Bem:  $Y$  ist nicht vollständig.

**Satz 1.15.** Sei  $X, Y$  normierte  $\mathbb{K} - VR, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann sind äquivalent:

(i)  $T$  ist injektiv und  $T^{-1} \in \mathcal{B}(im(T), X)$  normierter UVR von  $Y$ .

(ii)  $\exists m > 0 : \|Tx\|_Y \geq m \|x\|_X \forall x \in X$ .

**Beweis:** "(i)  $\Rightarrow$  (ii)":  $\exists M > 0, \|T^{-1}y\| \leq M \|y\| \forall y \in im T$ . Sei  $x \in X \exists y \in im T : x = T^{-1}y \Rightarrow \|x\|_X \leq M \|Tx\|_Y \Rightarrow \|Tx\|_Y \geq \frac{1}{M} \|x\|_X = m \|x\|_X$

"(ii)  $\Rightarrow$  (i)": Sei  $x \in X : Tx = 0$ . Aus  $\|Tx\| \geq m \|x\|$  folgt  $x = 0$  und damit ist  $T$  injektiv. Sei  $y \in im T \exists x \in X : Tx = y$  und  $T^{-1}y = x \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} \|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{m} \|Tx\|_Y = \frac{1}{m} \|y\|_Y$ , also  $\exists M = \frac{1}{m}, \|T^{-1}y\|_X \leq M \|y\|_Y \forall y \in im T \Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{B}(im T, X)$  ■

Die Negation dieser Aussage halten wir explizit fest mit folgendem

**Korollar 1.16.**  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  ( $X, Y$  normierte  $\mathbb{K} - VR$ ). Dann sind äquivalent:

(i)  $T$  besitzt keine stetige Inverser  $T^{-1} : im T \rightarrow X$ .

(ii)  $\exists$  Folge  $(x_n)$  in  $X$ , so dass  $\|x_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| = 0$

**Definition 1.17.**  $X - \mathbb{K} - VR$  mit Norm  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ . Dann heißt  $\|\cdot\|_1$

(a) stärker als  $\|\cdot\|_2$ , falls gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_2$

(b) schwächer als  $\|\cdot\|_2$ , falls  $\|\cdot\|_2$  stärker ist als  $\|\cdot\|_1$ .

(c) äquivalent falls  $\|\cdot\|_1$  stärker und schwächer ist als  $\|\cdot\|_2$

**Satz 1.18.**  $X$   $\mathbb{K}$ -VR mit Norm  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ . Dann gilt

(a)  $\|\cdot\|_1$  ist stärker als  $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists M > 0 : \|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad \forall x \in X$

(b)  $\|\cdot\|_1$  ist schwächer als  $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists M > 0 : \|x\|_1 \leq M \|x\|_2 \quad \forall x \in X$

(c)  $\|\cdot\|_1$  ist äquivalent zu  $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \exists m, M > 0 : m \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad \forall x \in X$

**Beweis:** zu (a):  $\Rightarrow id : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$  ist stetig wegen Vor.  $S.1.15$  und weil  $id$  linear,  $id$  beschränkt,  $id \in \mathcal{B}((X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2))$  d.h.  $\exists M > 0 : \|id(x)\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad \forall x \in X$ .

$\Leftarrow$  Wissen  $\exists M > 0 : \|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \quad \forall x \in X$ . Sei  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x\|_2 \leq M \|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\Rightarrow \|\cdot\|_1$  stärker als  $\|\cdot\|_2$ . ■

**Definition 1.19.** Zwei normierte  $\mathbb{K}$ -VR  $X, Y$  heißen *topologisch isomorph*, falls es ein Isomorphismus  $T : X \rightarrow Y$  mit  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  und  $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ . Dann heißt  $T$  topologischer Isomorphismus.

**Satz 1.20.**  $X, Y$  topologisch isomorph  $\Leftrightarrow \exists m, M > 0 : T \in \mathcal{B}(X, Y)$  und injektiv :  $m \|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X$

**Beweis:** 'Klar' wegen Satz 1.17 und Satz 1.15. ■

**Bemerkung 1.21.** 1. Falls,  $m = M = 1$ , dann nenn wir  $T$  Isometrie.

2. Falls  $\dim X = \dim Y = n \in \mathbb{N}$ :  $X, Y$  topologisch isomorph und topologischer Isomorphismus = lineare Bijektion.

**Satz 1.22** (Fortsetzung von stetigen Operatoren).  $X, Y$  normierte  $\mathbb{K}$ -VR,  $Y$  ein Banachraum,  $Z \subseteq X$ ,  $Z$  dichter UVR.  $T \in \mathcal{B}(Z, Y)$ . Dann existiert ein eindeutiger Operator  $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$ , so dass  $\tilde{T}|_Z = T$ .

**Beweis:** a) Zeige:  $\tilde{T}$  ist wohldefiniert. Da  $T$  beschränkt ist, ist  $(Tz_n)$  Cauchyfolge in  $Y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n$  existiert. Seien  $(V_n), (Z_n)$  Folgen in  $Z$  mit  $\|V_n - x\| \rightarrow 0, \|Z_n - x\| \rightarrow 0$ . Dann gilt:

$$\|TV_n - TZ_n\| \stackrel{T \text{ beschr.}}{\leq} \|T\| \cdot \|V_n - Z_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} TV_n = \lim_{n \rightarrow \infty} TZ_n.$$

b) Zeige:  $\tilde{T}$  ist linear und beschränkt. (Betrachte Summen von Limiten, Limes der Summen, etc.; insbesondere ist  $T : X \rightarrow Y$  immer beschränkt, wenn  $\dim(X) < \infty$ )

c) Zeige:  $\tilde{T}|_Z = T$  und  $\tilde{T}$  ist eindeutig. Sei  $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X, Y)$  mit  $\tilde{T}|_Z = T$  und  $x \in X$ . Dann

$$\exists (Z_n) \text{ in } Z \text{ mit } Z_n \rightarrow x \text{ (da } Z \text{ dicht in } X) \stackrel{T \text{ beschr.}}{\Rightarrow} \tilde{T}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} TZ_n.$$

d) Zeige:  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

em "  $\leq$  " Sei  $x \in U_1(0) \subset X \Rightarrow \exists (Z_n) \text{ in } Z \text{ mit } Z_n \rightarrow x$  und damit:

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\| &= \sup_{x \in U_1(0)} \|\tilde{T}x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{T}Z_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|TZ_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \|Z_n\| = \|T\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|Z_n\| \leq \|T\|. \\ &\geq \text{" Da } Z \subset X \text{ gilt auch } \sup_{z \in Z} \|Tz\| \leq \sup_{x \in X} \|Tx\|. \end{aligned}$$

**Satz 1.23.** Ist  $T$  normerhaltend (in  $\mathbb{R}^n$  die unitären Matrizen  $\|Tx\| = \|x\|$ ), so ist  $\tilde{T}$  ebenfalls normerhaltend.

**Beweis:** TODO: Kurze Begründung. Eigentlich Korollar? ■

**Beispiel 1.24** (Konstruktion eines unbeschränkten Funktional). Sei  $X = \ell^1$  (Raum der absolut konvergenten Folgen)

Betrachte:  $x_0 = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots) \in \ell^1$ ,  $\|x_0\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^2}| = \frac{\pi^2}{6}$ ,

Einheitsvektor  $e_k = (\delta_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Erzeugnis: endliche lineare Kombination der Einheitsvektoren  $\Rightarrow \text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots, 0, \dots)\}$  (Folgen, die irgendwann zu 0 werden.)

Die Familie  $B := (x_0, e_1, e_2, e_3, \dots)$  ist linear unabhängig.  $\Rightarrow B_i$  lässt sich zu Basis  $B = (b_i)_{i \in I}$  mit  $\mathbb{N}_0 \subseteq I$  und  $b_0 = x_0, b_i = e_i \forall i \in \mathbb{N}$  erweitern (überabzählbar).

Sei  $x \in X = \ell^1 \Rightarrow \exists$  eindeutige Darstellung  $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{endlich}}} \alpha_n e_n + \sum_{\substack{i \in I \setminus \mathbb{N}_0 \\ \text{endlich}}} \alpha_i b_i$ .

Definiere das Funktional:  $f : \ell^1 \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $x = \alpha_0 x_0 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{endlich}}} \alpha_n e_n + \sum_{\substack{i \in I \setminus \mathbb{N}_0 \\ \text{endlich}}} \alpha_i b_i \mapsto \alpha_0$

Wir zeigen:  $\text{Ker } f$  nicht abgeschlossen.

Betrachte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} e_k \Rightarrow x_n \in \text{Ker } f \forall n \in \mathbb{N}$ , da  $x_n \in \text{span}\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Es gilt jedoch  $x_n \rightarrow x_0 \notin \text{Ker } f$ , da  $f(x_0) = 1$ .  $\square$

Nun versuchen wir mit Erfolg einer waghalsigen Verallgemeinerung der geometrischen Reihe im Reellen für Operatoren und Banachräume.  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \forall q \in \mathbb{C}$  mit  $\|q\| < 1$

**Satz 1.25** (Neumanansche Reihe).  $X$  Banachraum. Sei  $T \in \mathcal{B}(X)$ . Dann sind äquivalent:

i) Die Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} T^i = I_X + T + T^2 + \dots$  ist konvergent bzgl. der Operatornorm.

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0$

iii)  $\exists N \in \mathbb{N} : \|T^N\| < 1$

iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ .

In diesem Fall besitzt  $(I - T)$  eine beschränkte Inverse. Diese erfüllt  $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ .

**Beweis:** “i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  iii)” : klaro

“iii)  $\Rightarrow$  iv)” : Sei  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}, k \in \{q_0, \dots, N-1\}$ , so dass  $n = \ell \cdot N + k$  Dann folgt

$$\ell \leq \frac{n}{N} \Rightarrow \|T^n\| = \|(T^n)^\ell T^k\| \leq \|T^N\|^\ell \cdot \|T^k\|.$$

Sei  $M := \max\{1, \|T\|, \|T^2\|, \dots, \|T^{N-1}\|\}$ . Dann gilt  $\|T^n\| \leq M \|T^N\|^\ell$  und damit folgt

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} = \sqrt[n]{\|T^N\|^\ell} \sqrt[n]{M} \leq \sqrt[n]{\|T^N\|} \frac{n}{N} \cdot \sqrt[n]{M} = \underbrace{\sqrt[n]{\|T^N\|}}_{<1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{M}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\|T^N\|}}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$  ( $\nearrow$  Wurzelkriterium)

“iv)  $\Rightarrow$  i)” :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0, 1), N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} \leq q \forall n \geq N \Rightarrow \|T^n\| \leq q^n \forall n \geq N$$

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $N_1 \geq N$ , so dass  $q^{n+1} + \dots + q^m = q^{n+1} \frac{1-q^{m-n}}{1-q} < \varepsilon \forall n, m \geq N_1$ .

$$\text{Für } S_n := \sum_{k=0}^{\infty} T^k \text{ gilt also : } \|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n T^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|T^k\| \leq q^{m+1} + \dots + q^n < \varepsilon.$$

Also ist  $(S_n)$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{B}(X)$ . Da  $X^*$  vollständig ist, ist auch  $\mathcal{B}(X)$  vollständig, also konvergiert die Neumannsche Reihe.

Noch zu zeigen, wenn (i) – (iv) gilt  $(I - T) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} T^k = (\sum_{k=0}^{\infty} T^k) \cdot (I - T) = I$ . Es gilt:

$$(I - T) \cdot S_n = (I - T) \cdot \left( \sum_{k=0}^n T^k \right) = \sum_{k=0}^n T^k - \sum_{k=1}^{n+1} T^k = I - T^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I_K$$

Analog andersherum ( $\nearrow$  linksinvers  $\neq$  rechtsinvers in unendlichdimensionalen Räumen, da inj.  $\not\Rightarrow$  surj.)  $\blacksquare$



**Bemerkung 1.26.** 1. Wenn  $\|T\| < 1$ , dann konvergiert die Neumannsche Reihe.

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$  ist nur hinreichend für Invertierbarkeit von  $I - T$ , wie das Gegenbeispiel  $T = 2I$  zeigt.

**Beispiel 1.27** (Fredholmsche Integralgleichung). Sei  $k \in C([a, b]^2)$ . Der Fredholmsche Integraloperator

$$K : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]), (Kx)(s) := \int_a^b K(s, t)x(t)dt$$

ist stetig, wenn  $x$  stetig ist. Die Fredholmsche Integralgleichung lautet:

$$(I - K)x = y, \quad y \in C([a, b]).$$

Und es gilt:  $\|Kx\|_\infty \leq \max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)|dt \cdot \|x\|_\infty$ .

Wenn nun  $\max_{s \in [a, b]} \int_a^b |K(s, t)|dt < 1$ , dann gilt für alle  $y \in C([a, b])$ : Die Fredholmsche Integralgleichung  $(I - K)x = y$  hat genau eine Lösung  $x \in C([a, b])$ . Diese hängt stetig von  $y \in C[a, b]$  ab.

### 1.3 Metrische und topologische Räume, Satz von Baire

**Bemerkung 1.28** (Erinnerung). -  $(X, d)$  metrischer Raum mit Metrik  $d$ .

- Kompaktheit, Satz von Bolzano-Weierstraß

**Lemma 1.29.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt die Vierecksungleichung:

$$|d(x, y) - d(x_1, y_1)| \leq d(x, x_1) + d(y, y_1) \quad \forall x, x_1, y, y_1 \in X$$

**Beweis:**  $d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x) + d(x, y_1) \leq d(x_1, x) + d(x, y) + d(y, y_1)$   
 $\Rightarrow d(x_1, y_1) - d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(y, y_1)$ . Analog:  $d(x, y) - d(x_1, y_1) \leq d(x, x_1) + d(y, y_1)$   
 $\Rightarrow |d(x, y) - d(x_1, y_1)| \leq d(x, x_1) + d(y, y_1)$  ■

**Bemerkung 1.30.** Rekapitulieren Sie folgende Begriffe:  $U_r(x)$  Kugel mit Radius  $r$ ,  $\overline{M}$  Abschluss,  $\overset{\circ}{M}$  Innere,  $\partial M$  Rand, Kompakt, offene Überdeckung.

**Definition 1.31.** Seien  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt

(a) *abstandserhaltend* falls  $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$

(b) *Isometrie* falls abstandserhaltend und surjektiv.

Eine abstandserhaltende Abbildung heißt auch *Einbettung*. Eine Einbettung heißt *dicht*, falls  $f(X)$  dicht in  $Y$  ist.

Notation: Wir schreiben  $X \subseteq Y$ , falls  $X$  in  $Y$  eingebettet ist.

**Satz 1.32.** Jeder metrische Raum  $(X, d)$  lässt sich in einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten vollständigen metrischen Raum  $(\hat{X}, \hat{d})$  dicht einbetten.  $(\hat{X}, \hat{d})$  heißt Vervollständigung von  $(X, d)$ .

**Beweis:** (1) Konstruktion von  $\hat{X}$

Sei  $CF(X)$  die Menge aller Cauchyfolgen in  $X$ . Seien  $\bar{x} := (x_n), \bar{y} := (y_n) \in CF(X)$ .

Wir betrachten den „Abstand“

$$d(\bar{x}, \bar{y}) := \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, y_n),$$

der dank Lemma 1.29 wohldefiniert ist, und die Relation  $\sim \subseteq CF(X) \times CF(X)$  mit

$$\bar{x} \sim \bar{y} :\Leftrightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

„ $\sim$ “ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation und unterteilt  $CF(X)$  in Äquivalenzklassen. Sei  $[x]$  die Äquivalenzklasse des Repräsentanten  $\bar{x}$  und  $\hat{X}$  die Menge aller Äquivalenzklassen.

Für  $\bar{x}, \bar{x}' \in [x] \in \hat{X}$ ,  $\bar{y}, \bar{y}' \in [y] \in \hat{X}$  gilt:

$$0 = d(\bar{x}, \bar{x}') = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X((x_n), (x'_n))$$

$$0 = d(\bar{y}, \bar{y}') = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X((y_n), (y'_n)).$$

Wegen  $d_X(x_n, y'_n) \leq d_X(x'_n, x'_n) + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y'_n)$   
 $d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x'_n) + d_X(x'_n, y'_n) + d_X(y'_n, y_n)$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x'_n, y'_n) \Rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}', \bar{y}')$$

und wir können wohldefinieren:  $\hat{d}([x], [y]) := d(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \hat{d}$  ist Metrik auf  $\hat{X}$ .

- (2) Konstruktion einer dichten Einbettung  $f: X \rightarrow \hat{X}$

Für  $x \in X$  sei  $f(x) := [(x, x, x, \dots)]$ .

Es gilt für  $x, y \in X$ :  $\hat{d}(f(x), f(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x, y) = d_X(x, y)$ .

Wir zeigen nun, dass  $f(X)$  dicht in  $\hat{X}$  liegt. Sei  $[x] \in \hat{X}$ ,  $\bar{x} = (x_n)$ , da nun  $(x_n)$  eine Cauchyfolge in  $X$  ist, ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Wir betrachten nun  $\bar{x}_N := (x_N, x_N, x_N, \dots)$

$$\Rightarrow \hat{d}(f(x_N), [x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_N, x_n) \leq \varepsilon$$

Damit ist  $f(x_N) \rightarrow [x]$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  (oder  $N \rightarrow \infty$ ?).

- (3) Vollständigkeit von  $\hat{X}$

Sei  $([x]_j)$  eine Cauchyfolge in  $\hat{X}$ . Zu jedem  $[x]_j \in \hat{X} \exists y_j \in X$  so dass  $\hat{d}([x]_j, f(y_j)) < \frac{1}{j}$ , da  $f(X)$  dicht in  $\hat{X}$  ist.

$$\Rightarrow d_X(y_j, y_k) = \hat{d}(f(y_j), f(y_k)) \leq \hat{d}(f(y_j), [x]_j) + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \hat{d}([x]_k, f(y_k)) < \frac{1}{j} + \hat{d}([x]_j, [x]_k) + \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow (y_j)$  ist eine Cauchyfolge in  $X$ ,  $y := (y_j) \in CF(X) \Rightarrow [y] \in \hat{X}$  ist der Kandidat für den Grenzwert der Cauchyfolge:

$$\hat{d}([x]_j, [y]) \leq \hat{d}([x]_j, f(y_j)) + \hat{d}(f(y_j), [y]) < \frac{1}{j} + \lim_{k \rightarrow \infty} d_X(y_j, y_k) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{d}([x]_j, [y]) = 0$$

das heißt  $[x]_j \rightarrow [y]$  für  $j \rightarrow \infty$

- (4) Eindeutigkeit von  $\hat{X}$  im folgenden Sinne: ist  $\tilde{X}$  eine weitere Vervollständigung von  $X$ , so sind  $\hat{X}, \tilde{X}$  isometrisch zueinander.

Sei also  $(H, d_H)$  ein vollständiger metrischer Raum mit  $X \subseteq H$ ,  $d_H(x, y) = d_X(x, y) \quad \forall x, y \in X$  und  $\bar{X} = H$ .

Unser Ziel ist es, eine Isometrie  $g: \hat{X} \rightarrow H$  zu bauen.

Sei  $[x] \in \hat{X}$ ,  $\bar{x} = (x_n) \in [x] \in \hat{X}$ , da  $H$  vollständig ist  $\exists h \in H$  so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x_n, h) = 0$

Wir betrachten  $g: \hat{X} \rightarrow H$ ,  $[x] \mapsto h$  wie oben.

$g$  ist surjektiv, da für  $h \in H \Rightarrow \exists \bar{x} = (x_n) \in CF(X)$  so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x_n, h) = 0$ , also  $g([x]) = h$

$g$  ist abstandserhaltend, da für  $[x], [y] \in \hat{X}$  gilt

$$\hat{d}([x], [y]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_H(x_n, y_n) = d_H(g([x]), g([y])).$$

■

**Definition 1.33.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $M \subseteq X$ ,  $M \neq \emptyset$ . Wir definieren den Durchmesser von  $M$  durch

$$\delta(M) := \sup \{d(x, y) : x, y \in M\}.$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips aus  $\mathbb{R}$ .

**Satz 1.34** (Cantorscher Durchschnittssatz). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, der vollständig ist.  $(F_n)$  eine Folge von abgeschlossen Teilmengen mit  $F_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$

$$\Rightarrow \exists! x_0 \in X : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x_0\}$$

**Beweis:** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir ein  $x_n \in F_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \delta(F_N) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ da } x_n, x_m \in F_N \text{ und } \delta(F_N) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (x_n) \text{ ist eine Cauchyfolge} \stackrel{X \text{ vollst.}}{\Rightarrow} \exists x_0 \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$$

Weil  $x_k \in F_n \quad \forall k \geq n$  und  $F_n$  abgeschlossen ist, ist

$$x_0 \in F_n \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

Angenommen  $\exists y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ , mit  $x_0 \neq y$

$$\Rightarrow 0 < d(x_0, y) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) \leq 2\delta(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ Widerspruch!}$$

■

*Eigene Bemerkung.* Der Heuser beschreibt den folgenden Satz folgendermaßen:

Es gibt wohl keinen Satz in der Funktionalanalysis, der glanzloser und gleichzeitig kraftvoller wäre als der Bairesche Kategoriensatz. Von seiner Glanzlosigkeit wird sich der Leser *sofort* überzeugen können; für seine Kraft müssen wir ihn auf die folgenden Nummern vertrösten.

**Satz 1.35** (Bairescher Kategoriensatz). Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ , wobei  $F_n \subseteq X$  abgeschlossen für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann gilt:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset.$$

Es gibt also ein  $F_{n_0}$  dessen Inneres nichtleer ist.

**Beweis:** Wir bemerken zuerst:  $x \in \overset{\circ}{M} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq M$ .

Angenommen es gelte für alle  $n \in \mathbb{N} \quad \overset{\circ}{F}_n = \emptyset$ , also kein  $F_n$  enthalte eine abgeschlossene Kugel.

Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig,  $r > 0$  und  $x_0 \in X \Rightarrow \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$

Seien nun  $x_n \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(x_0)} \setminus F_n \neq \emptyset$ . Da  $F_n$  kein Inneres hat (offiziell: abgeschlossen?!), existiert ein  $r_n \in (0, \frac{r}{2})$  mit  $\overline{U_{r_n}(x_0)} \cap F_n = \emptyset$ , und für ein  $y \in \overline{U_{r_n}(x_n)}$  gilt:

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x_0) \leq r_n + \frac{r}{2} \leq r$$

So erhalten wir  $\overline{U_{r_n}(x_n)} \subseteq \overline{U_r(x_0)}$ . Wir betrachten nun  $\overline{U_1(x_0)}$  und nach obiger Überlegung

$$\exists r_1 > 0, x_1 \in X : \overline{U_{r_1}(x_1)} \subseteq \overline{U_1(x_0)} \text{ mit } r_1 \leq \frac{1}{2} \text{ und } \overline{U_{r_1}(x_1)} \cap F_1 = \emptyset$$

Ebenso

$$\exists r_2 > 0, x_2 \in X : \overline{U_{r_2}(x_2)} \subseteq \overline{U_{r_1}(x_1)} \text{ mit } r_2 \leq \frac{1}{4} \text{ und } \overline{U_{r_2}(x_2)} \cap F_2 = \emptyset$$

Sukzessive erhalten wir so eine Folge  $\left( \overline{U_{r_n}(x_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\overline{U_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subseteq \overline{U_{r_n}(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2)  $r_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (3)  $\overline{U_{r_n}(x_n)} \cap F_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Wegen (1) und

$$0 \leq \delta \left( \overline{U_{r_n}(x_n)} \right) = 2r_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

sind wir in der Situation des Cantorschen Durchschnittsatzes und es gibt ein eindeutiges  $\hat{x} \in X$  mit  $\hat{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{r_n}(x_n)$ . Dann ist wegen (3)  $\hat{x} \notin F_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \hat{x} \in X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$  Widerspruch! ■

**Korollar.** Hier kommt ziemlich fancy Zeug, von wegen der Polynomraum kann nicht vollständig sein, rein. TODO Behauptung und Beweis erstellen.

**Beweis:** klar! (Ja, selbst ohne eine Behauptung) ■

**Definition 1.36.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.  $M \subseteq X$  heißt...

- (a) *nirgends dicht*, wenn  $\overset{\circ}{M} = \emptyset$ .
- (b) *mager* oder *von 1.Kategorie*, wenn  $M$  eine abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist, also  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ,  $A_n$  nirgends dicht für alle  $n \in \mathbb{N}$ , gilt.
- (c) *von 2.Kategorie* oder *fett*, wenn  $M$  nicht von 1.Kategorie ist.

*Eigene Bemerkung (Trivia am Rande).* Direkt aus der Definition folgt, dass jede nirgends dichte Menge insbesondere von 1.Kategorie ist. Andersrum gilt dies nicht, was das Beispiel  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  zeigt. Ein Beispiel für eine nirgends dichte Menge ist die Cantor-Menge.

Anschaulich bedeutet *nirgends dicht*, wenn sie in keiner Teilmenge (mit nichtleeren Innerem) dicht liegt.

Mithilfe dieser Definition können wir den Baireschen Kategoriensatz Umformulieren zu

$$(X, d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum} \Rightarrow X \text{ ist von 2.Kategorie}$$

**Korollar 1.37.**  $(X, d)$  sei ein vollständiger metrischer Raum,  $U \subseteq X$  offen und nichtleer. Dann ist  $U$  von 2. Kategorie.

**Beweis (Eigener Beweis):** Da  $U$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für  $x \in U$ ,  $\overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq U$  ist. Nun können wir den Baireschen Kategoriensatz auf  $\overline{U_\varepsilon(x)}$  anwenden. ■

**Korollar 1.38.**  $(X, d)$  sei ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$M \subseteq X \text{ mager} \Rightarrow X \setminus M \text{ ist dicht in } X.$$

**Beweis:** Sei  $M \subseteq X$  mager, angenommen  $X \setminus M$  sei nicht dicht, also  $X \setminus \overline{(X \setminus M)} \neq \emptyset$   
 $\Rightarrow O := X \setminus \overline{(X \setminus M)}$  ist (als Komplement einer abgeschlossenen Menge) offen und nichtleer.  
 $\Rightarrow O \subseteq M$  ist von 1. Kategorie, Widerspruch zu Korollar 1.37. ■

**Korollar 1.39.**  $(X, d)$  sei ein vollständiger metrischer Raum. Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $B_n \subseteq X$  so dass  $X \setminus B_n$  mager.  $B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$$\Rightarrow \overline{B} = X$$

**Beweis:**  $X \setminus B = X \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n)^c = X \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c)$  ist wegen Korollar 1.38 dicht in  $X$ . ■

**Definition 1.40.** Der metrische Raum  $(X, d)$  heißt ...

- (a) *kompakt*, wenn für alle offenen Überdeckungen  $(U_i)_{i \in I}$  von  $X$  ein endliches  $I' \subseteq I$  existiert, so dass  $X = \bigcup_{i \in I'} U_i$

- (b) *präkompakt*, wenn  $\forall \varepsilon > 0$  eine endliche Menge  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$  existiert, so dass  $X = \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$ .  $M$  heißt auch  $\varepsilon$ -Netz von  $X$ .

**Satz 1.41.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist äquivalent:

- (1)  $X$  kompakt.
- (2) Jede abzählbare offene Überdeckung von  $X$  enthält eine endliche Teilüberdeckung.
- (3) Ist  $(A_n)$  eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  mit  $A_n \supseteq A_{n+1} \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ .
- (4) Jede Folge in  $X$  besitzt eine konvergente Teilfolge.
- (5)  $X$  ist vollständig und präkompakt.

**Beweis:** (1)  $\Rightarrow$  (2): Man nimmt nur weniger mögliche Vereinigungen.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Angenommen  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ ,  $A_n = \overline{A_n}$ ,  $\emptyset \neq A_{n+1} \subseteq A_n \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow U_n := X \setminus A_n \text{ offen und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = X \\ &\stackrel{2}{\Rightarrow} \exists n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N} : X = \bigcup_{i=1}^m U_{n_i} = \bigcup_{i=1}^m (X \setminus A_{n_i}) \\ &= X \setminus (\bigcap_{i=1}^m A_{n_i}) \\ &= X \setminus A_k \quad \text{für } k := \max\{n_1, \dots, n_m\} \\ &\Rightarrow A_k = \emptyset \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$

(3)  $\Rightarrow$  (4): Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $X$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$A_n := \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

Es ist  $A_n \supseteq A_{n+1}$  und  $A_n \neq \emptyset$  abgeschlossen  $\forall n \in \mathbb{N} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \exists x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Deshalb ist

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : U_\varepsilon(x_0) \cap \{x_k : k \geq n\} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow x_0$  ist Häufungspunkt der Folge  $(x_n)$  und damit Grenzwert einer Teilfolge von  $(x_n)$ .

(4)  $\Rightarrow$  (5): Sei  $(x_n)$  eine Cauchyfolge. Wegen (4) hat  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert  $x \in X$ . Dann ist  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \Rightarrow X$  vollständig.

Angenommen  $X$  sei nicht präkompakt

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X \exists x_{n+1} \in X \text{ mit } x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^n U_{\varepsilon_0}(x_i).$$

Konstruiere so eine Folge  $(x_n)$  in  $X$ . Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon_0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$\Rightarrow (x_n)$  hat keine Cauchy-Teilfolge  $\Rightarrow (x_n)$  hat keine konvergente Teilfolge.

(5)  $\Rightarrow$  (1): Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Angenommen es existiere keine endliche Teilüberdeckung. Wir definieren induktiv Kugeln  $K_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wie folgt:

Da  $X$  präkompakt ist, gibt es zu  $\varepsilon = 1$  endliche viele Kugeln  $U_1(x_{0,j})$  mit

$$X \subseteq \bigcap_{j=0}^{m_1} U_1(x_{0,j}).$$

Dann ist mindestens eine dieser Kugeln nicht durch endlich viele Mengen aus  $(U_i)_{i \in I}$  überdeckbar.

OBdA sei  $U_1(x_{0,0})$  und setze  $x_0 := x_{0,0}$ . Konstruiere so eine Folge  $(x_n)$ , so dass  $U_{\frac{1}{2^n}}(x_1)$  nicht durch endlich viele Mengen aus  $(U_i)_{i \in I}$  überdeckt werden kann. Sei

$$y \in U_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_{n-1}) \cap U_{\frac{1}{2^n}}(x_1) \neq \emptyset$$

Dann gilt

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-1}, y) + d(y, x_1) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Für  $n \leq p \leq q$  gilt dann

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \leq \frac{1}{2^{p-1}} + \dots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}$$

Daraus folgt,  $(x_n)$  ist eine Cauchyfolge in  $X$  und wegen der Vollständigkeit von  $X$  gibt es ein  $\hat{x} \in X$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \hat{x}) = 0$ . Wegen  $X = \cup_{i \in I} U_i$  gilt  $\exists i_0 \in I : \hat{x} \in U_{i_0}$ . Weil  $U_{i_0}$  offen ist:  $\exists r > 0$ , so dass  $U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$ . Sei nun  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$  und  $d(\hat{x}, x_n) < \frac{r}{2}$ .  $\Rightarrow U_{\frac{1}{2^n}}(x_n) \subseteq U_r(\hat{x}) \subseteq U_{i_0}$ . Das ist ein Widerspruch dazu, dass  $U_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$  nicht durch endliche viele  $U_i$  überdeckt werden kann. ■

**Korollar 1.42.**  $(X, d)$  sei ein metrischer Raum. Dann gilt:

- a)  $(X, d)$  kompakt  $\Rightarrow X$  vollständig
- b)  $M \subseteq X$ , so dass jede Folge in  $M$  eine in  $M$  konvergente Teilfolge hat ( $M$  folgenkompakt)  $\Leftrightarrow M \subseteq X$  kompakt ( $M$  Überdeckungskompakt)
- c)  $M \subseteq X$  kompakt  $\Rightarrow M$  beschränkt und abgeschlossen.
- d)  $X$  kompakt,  $A \subseteq X$  abgeschlossen  $\Rightarrow A$  kompakt.

**Definition 1.43.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.  $M \subseteq X$  heißt *relativ kompakt*, wenn  $\overline{M}$  kompakt ist.

**Definition 1.44.**  $(X, d)$  vollständiger metrischer Raum,  $M \subseteq X$  relativ kompakt.  
 $\Leftrightarrow$  jede Folge in  $M$  besitzt eine in  $X$  konvergente Teilfolge.

Was genau  
wird hier  
definiert?

**Satz 1.45.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.  $M, N \subseteq X$  seien relativ kompakt (bzw. präkompakt). Dann gilt

- (a)  $S \subseteq M \Rightarrow S$  relativ kompakt (bzw. präkompakt)
- (b)  $M \cup N$  relativ kompakt (bzw. präkompakt)
- (c)  $M$  relativ kompakt  $\Rightarrow M$  präkompakt
- (d) Ist  $(X, d)$  vollständig, so gilt  $M$  relativ kompakt  $\Leftrightarrow M$  präkompakt

**Beweis:** a) relativ kompakt: Sei  $(x_n)$  eine Folge aus  $S$ . Da  $(x_n)$  ein Folge in  $M$  ist, hat es eine konvergente Teilfolge, dessen Grenzwert in  $\overline{M}$  ist. Dann ist der Grenzwert auch in  $\overline{S}$ . Also ist  $S$  relativ kompakt.  
 präkompakt: Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gibt es eine endliche Menge  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ , so dass  $S \subseteq M = \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(x_i)$ . Also ist auch  $S$  präkompakt.

b) relativ kompakt: Ist  $(x_n)$  eine Folge aus  $M \cup N$ , so gibt es eine Teilfolge, die nur in  $M$  oder  $N$  ist. Dann hat diese Teilfolge noch eine konvergente Teilfolge. präkompakt:  $M$  und  $N$  haben jeweils ein  $\varepsilon$ -Netz. Die Vereinigung ist dann auch ein  $\varepsilon$ -Netz.

c) Angenommen  $M$  sei nicht präkompakt, dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass sich  $M$  nicht durch endlich viele  $\varepsilon$ -Kugeln überdecken lässt. Wählen wir aus jedem dieser (mindestens abzählbar vielen) Kugeln ein Element aus, entsteht eine Folge, dessen Folgenglieder alle Mindestabstand  $\frac{\varepsilon}{2}$  zueinander haben.  $\Rightarrow$  Es gibt keine konvergente Teilfolge  $\Rightarrow M$  ist nicht relativ kompakt.

d)  $\Rightarrow$  folgt aus c)

$\Leftarrow$  Sei  $M$  präkompakt  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathbb{N}, \{x_1, \dots, x_p\} \subset X$  mit  $M \subset \bigcup_{j=1}^p \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)}$ . Wegen  $\overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset U_\varepsilon(x_j)$  gilt  $\overline{M} \subset \bigcup_{j=1}^p \overline{U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)} \subset \bigcup_{j=1}^p U_\varepsilon(x_j) \Rightarrow \overline{M}$  ist präkompakt. Da  $(\overline{M}, d)$  vollständig ist, ist  $\overline{M}$  kompakt.  $\xrightarrow{\text{Satz 1.41}} M$  relativ kompakt. ■

**Bemerkung 1.46 (Fakten).**  $(X, \|\cdot\|)$  normierter Raum.

a) Aussagen über metrischer Räume übertragen sich

b) Die Vervollständigung von  $X$  ist ein Banachraum.

c) Wenn  $\dim X < \infty$ , dann

- i)  $X$  Banachraum
- ii)  $M \subseteq X$  kompakt  $\Leftrightarrow M$  beschränkt und abgeschlossen (Heine-Borel)
- iii)  $M \subseteq X$  relativ kompakt  $\Leftrightarrow M$  präkompakt  $\Leftrightarrow M$  beschränkt

**Lemma 1.47** (Lemma von Riesz).  $(X, \|\cdot\|)$  normierter Raum,  $E \subset X$  abgeschlossener Unterraum mit  $E \neq X$ ,  $\eta \in (0, 1)$ .

Dann existiert ein  $x_\eta \in X$  mit  $\|x_\eta\| = 1$  und  $\|x_\eta - y\| \geq \eta \forall y \in E$ .

**Beweis:** Sei  $x_0 \in X \setminus E$ . Definiere  $\delta := \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|$ , da  $E$  abgeschlossen ist, ist  $\delta > 0$ . Sei  $(y_n)$  Folge in  $E$  mit  $\|x_0 - y_n\| \rightarrow \delta$ . Sei  $\eta \in (0, 1) \Rightarrow \frac{\delta}{\eta} > \delta \Rightarrow \exists z \in E$  mit  $\|x_0 - z\| \leq \frac{\delta}{\eta}$ . Definiere  $x_\eta := \frac{x_0 - z}{\|x_0 - z\|} \Rightarrow \|x_\eta\| = 1$ . Für  $y \in E$  gilt dann

$$\|x_\eta - y\| = \left\| y - \frac{x_0 - z}{\|x_0 - z\|} \right\| = \left\| y + \frac{z}{\|x_0 - z\|} - \frac{x_0}{\|x_0 - z\|} \right\| = \frac{\left\| \overbrace{(\|x_0 - z\| y + z)}^{\in E} - x_0 \right\|}{\|x_0 - z\|} \geq \delta \cdot \frac{1}{\|x_0 - z\|} \geq \frac{\eta}{\delta} \cdot \delta = \eta \quad \blacksquare$$

**Korollar 1.48.**  $(X, \|\cdot\|)$  normierter Raum.

a)  $\overline{U_1(0)}$  kompakt  $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

b) Jede beschränkt Folge besitzt konvergente Teilfolge  $\Leftrightarrow \dim X < \infty$

**Beweis:** a) "  $\Leftarrow$  " Folgt aus Heine-Borel

"  $\Rightarrow$  " Angenommen,  $\dim X = \infty$  (Nicht endlichdimensional). Wir wählen ein  $x_0 \in X$  mit  $\|x_0\| = 1$ . Nach dem Lemma von Riesz gibt es ein  $x_1 \in X$ , so dass  $\|x_1 - y\| \geq \frac{1}{2} \forall y \in \text{span}\{x_0\}$ . Sukzessiv können wir so eine Folge  $(x_n)$  konstruieren für die gilt:  $\|x_n\| = 1$  und  $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{2} \forall y \in \text{span}\{x_0, \dots, x_{n-1}\} \forall n \in \mathbb{N}$ .

$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \forall n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq m$ .  $\Rightarrow (x_n)$  hat keine konvergente Teilfolge.

b) genauso. \blacksquare

### 1.3.1 Skalarprodukträume

Erinnerung:

Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -VR. Ein *Skalarprodukt* ist eine Abb  $(\cdot, \cdot) \rightarrow \mathbb{K}$  mit

$$(S1) \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \quad \forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

$$(S2) \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$(S3) \quad (x, x) > 0 \quad \forall x \in X \setminus \{0\}.$$

*Bemerkung 1.49.* 1)  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  ist eine Norm.

2) ein vollständiger Skalarproduktraum heißt *Hilbertraum*.

$$3) \quad \|x\| \cdot \|y\| \geq |(x, y)| \quad \forall x, y \in X \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung})$$

$$4) \quad \text{Für } x, y \in X \text{ mit } (x, y) = 0 \text{ (x und y orthogonal, } x \perp y) \text{ gilt } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ (Satz des Pythagoras)}$$

$$5) \quad \text{Für } x, y \in X \text{ gilt die Parallelogrammgleichung: } \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$6) \quad \text{Für } (x_n), (y_n) \text{ mit } (x_n) \rightarrow x, (y_n) \rightarrow y \text{ gilt } (x_n, y_n) \rightarrow (x, y), \text{ da } |(x_n, y_n) - (x, y)| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \text{ (Stetigkeit des Skalarprodukts)}$$

**Satz 1.50.** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum mit  $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$ . Dann existiert ein Skalarprodukt auf  $X$ , welches  $\|\cdot\|$  induziert.

**Beweis:** Skizze! a)  $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (x, y) := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ .

b)  $\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (x, y) := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2))$  ( $\nearrow$  Übung, Blatt 6, Aufgabe 1) ■

**Definition 1.51.**  $(X, (\cdot, \cdot))$  Skalarprodukt,  $x, y \in X$ .  $M, N \subseteq X$ ,  $(x_i)_{i \in I}$  Familie.

1.  $x$  orthogonal zu  $y$  ( $x \perp y$ ), wenn  $(x, y) = 0$ .
2.  $x$  orthogonal zu  $N$  ( $x \perp M$ ), wenn  $x \perp y \quad \forall y \in N$
3.  $M$  orthogonal zu  $N$  ( $N \perp M$ ), wenn  $x \perp M \quad \forall x \in N$ .
4.  $M^\perp = \{x \in X : x \perp M\}$  Orthogonalraum zu  $M$
5.  $(x_i)_{i \in I}$  heißt Orthogonalsystem (OGS), wenn  $x \perp y, \forall i, j \in I, i \neq j$
6.  $(x_i)_{i \in I}$  heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn es OGS mit  $\|x_i\| = 1 \quad \forall i \in I$  ist.
7.  $(x_i)_{i \in I}$  heißt Orthogonalbasis (OGB), wenn es ein linear unabhängiges OGS ist und  $\overline{\text{span}((x_i)_{i \in I})} = X$ .
8.  $(x_i)_{i \in I}$  heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn es OGB und ONS ist.

**Beispiel 1.52.** a)  $e_n = (\delta_{in})_{i \in I} \in \ell^2$   $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist ONS Es ist auch ONB.

Sei  $x = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}. \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon^2$ . Für  $v = a_1 e_1 + \dots + a_N e_N \in \text{span}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\|v - x\|_2 = \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

b)  $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit  $u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$

$u_k \in L^2([0, 2\pi])$  ist ONS, da  $\int_0^{2\pi} u_k(x) \overline{u_j(x)} dx = \delta_{kj}$  Auch ONB?

Beachte:  $V^\perp$  ist immer abgeschlossen, da für eine Folge  $(v_i)$  in  $V^\perp$  mit  $v_i \rightarrow v$  gilt  $(x, v) \leftarrow (x, v_i) = 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow v \in V^\perp$

**Satz 1.53** (Besselsche Ungleichung). Sei  $X$  ein Skalarproduktraum,  $(u_i)_{i \in I}$  ein Orthonormalsystem,  $x \in X$ ,  $i_1, \dots, i_n \in I$ . Dann ist

$$\sum_{k=1}^n |(x, u_{i_k})|^2 \leq \|x\|^2$$

**Beweis:** Sei  $x_n := x - \sum_{k=1}^n (x, u_{i_k}) u_{i_k}$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist

$$(x_n, u_{i_j}) = (x, u_{i_j}) - \sum_{k=1}^n (x, u_{i_k}) \underbrace{(u_{i_k}, u_{i_j})}_{\delta_{kj}} = (x, u_{i_j}) - (x, u_{i_j}) = 0$$

Also ist  $\sum_{k=1}^n (x, u_{i_k}) u_{i_k} \perp x_n$  und mit dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (x, u_{i_k}) u_{i_k} \right\|^2 = \|x_n\|^2 + \sum_{k=1}^n |(x, u_{i_k})|^2 \geq \sum_{k=1}^n |(x, u_{i_k})|^2$$
 ■

**Korollar 1.54.** Voraussetzungen wie oben. Dann gilt

(a)  $(x, u_i) \neq 0$  für höchstens abzählbar viele  $i \in I$ .

(b)  $\sum_{i \in I} |(x, u_i)|^2 \leq \|x\|^2$  (Besselsche Ungleichung II)



(c) Die Reihe  $\sum_{i \in I} (x, u_i) u_i$  (Fourierreihe) ist eine Cauchyfolge in  $X$ .

**Beweis:** (a) Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt nach Bessel (I), dass für  $S_{x,n} := \{i \in I : |(x, u_i)|^2 > \frac{1}{n}\}$  gilt  $|S_{x,n}| \leq n \|x\|^2$ , also endlich.

Dann ist  $\{i \in I : (x, u_i) \neq 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_{x,n}$  abzählbar, als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen.

(b) Seien  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkt mit  $\{i_n : n \in \mathbb{N}\} = \{i \in I : (x, u_i) \neq 0\}$ . Dann gilt  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |(x, u_{i_k})|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |(x, u_{i_k})|^2 = \sum_{i \in I} |(x, u_i)|^2.$$

(c)  $(i_n)$  wie oben,  $\varepsilon > 0 \xRightarrow{b)} \exists N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\forall n \geq m \geq N$  gilt  $\sum_{k=m+1}^n |(x, u_k)|^2 < \varepsilon^2$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^n (x, u_{i_k}) u_{i_k} - \sum_{k=1}^m (x, u_{i_k}) u_{i_k} \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n (x, u_{i_k}) u_{i_k} \right\|^2 \stackrel{\text{Pyth.}}{=} \sum_{k=m+1}^n |(x, u_{i_k})|^2 < \varepsilon^2$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (x, u_{i_k}) u_{i_k}$  ist eine Cauchyfolge. ■

**Satz 1.55** (Projektionssatz).  $X$  Skalarproduktraum,  $V$  vollständig UVR,  $x \in X$ . Dann existiert ein eindeutiges  $v_0 \in V$ , so dass  $\|x - v_0\| = \inf_{v \in V} \|x - v\|$ . Dieses  $v_0$  erfüllt  $x - v_0 \in V^\perp$ .

**Beweis:** Sei  $(v_n)$  eine Folge in  $V$  mit  $d_n := \|x - v_n\| \rightarrow \inf_{v \in V} \|x - v\| =: d$ . Wegen der Parallelogrammgleichung ist

$$\underbrace{\left\| x - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2}_{\geq d^2} + \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|x - v_n\|^2 + \frac{1}{2} \|x - v_m\|^2 = \frac{1}{2} d_n^2 + \frac{1}{2} d_m^2$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2) - d^2 \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow (v_n)$  ist eine Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von  $V$  konvergiert sie gegen ein  $v_0 \in V \Rightarrow \|x - v_0\| = \inf_{v \in V} \|x - v\|$

Eindeutigkeit: Sei  $v_1 \in V$  ein weiterer Vektor mit  $\|x - v_1\| = \|x - v_0\| = d = \inf_{v \in V} \|x - v\|$ . Wegen der Parallelogrammgleichung ist

$$\|v_1 - v_0\|^2 = 2 (\|x - v_0\|^2 + \|x - v_1\|^2 - 2d^2) = 0 \Rightarrow v_0 = v_1.$$

Es bleibt noch zu zeigen:  $x - v_0 \in V^\perp$ .

Für  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $v \in V$  ist

$$\|x - v_0\|^2 \leq \|x - (v_0 + \lambda v)\|^2 = ((x - v_0) - \lambda v, (x - v_0) - \lambda v) = \|x - v_0\|^2 - \bar{\lambda}(x - v_0, v) - \lambda(v, x - v_0) + |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Sei also  $\lambda := \frac{(x - v_0, v)}{\|v\|^2}$

$$\Rightarrow \|x - v_0\|^2 \leq \|x - v_0\|^2 - \underbrace{\frac{|(x - v_0, v)|^2}{\|v\|^2}}_{\leq 0} \leq \|x - v_0\|^2 \Rightarrow |(x - v_0, v)|^2 = 0 \Rightarrow x - v_0 \perp v. \quad \blacksquare$$

**Korollar 1.56.** Sei  $X$  ein Hilbertraum und  $V$  ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt

1.  $X = V \perp V^\perp$ , also  $V \perp V^\perp$  und  $X = V \oplus V^\perp$

Insbesondere gilt wegen  $V \cap V^\perp = \{0\}$ , dass  $\forall x \in X$  die Zerlegung  $x = v + w$  mit  $v \in V$ ,  $w \in V^\perp$  eindeutig ist.

2. Sei  $(u_i)_{i \in I}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ ,  $x \in X$ . Dann ist  $v := \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i$  die Bestapproximation von  $x$  in  $V$ .

**Beweis:** 1.  $x \in X$ . Sei  $v \in V$ , so dass,  $\|x - v\| = \inf_{u \in V} \|x - u\| \Rightarrow x = v + (x - v)$  und  $v \in V$ ,  $x - v \in V^\perp$

2. Für  $v := \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i$  (konvergent) ist  $x - v \in V^\perp$  (wie im Beweis der Besselschen Ungleichung)  $\Rightarrow v$  ist Bestapproximation von  $x$  in  $V$ . ■

**Lemma 1.57.** Sei  $X$  ein Skalarproduktraum,  $V$  ein Unterraum. Dann ist  $V^\perp = \overline{V}^\perp$

**Beweis:** “ $\supseteq$ “ Da  $V \subseteq \overline{V} \Rightarrow \overline{V}^\perp \subseteq V^\perp$

“ $\subseteq$ “ Sei  $x \in V^\perp, v \in V \Rightarrow \exists$  Folge  $(v_n)$  in  $V$  mit  $v_n \rightarrow v \Rightarrow (x, v) \leftarrow (x, v_n) = 0$  ■

**Satz 1.58.**  $X$  Skalarproduktraum.  $(u_i)_{i \in I}$  ONS.

Betrachte folgende Aussagen

(i)  $(u_i)_{i \in I}$  ist eine Orthonormalbasis

(ii)  $x = \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i \quad \forall x \in X$  (Fourierreihe)

(iii)  $(x, y) = \sum_{i \in I} (x, u_i)(u_i, y) \quad \forall x, y \in X$  (Parseval-Identität)

(iv)  $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x, u_i)|^2 \quad \forall x \in X$  (Bessel-Gleichung)

(v)  $(\text{span}(u_i)_{i \in I})^\perp = \{0\}$

Dann gilt  $i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iii \Leftrightarrow iv \Rightarrow v$ .

Wenn  $X$  zusätzlich noch ein Hilbertraum ist, dann gilt auch  $v \Rightarrow iv$ .

**Beweis:** “(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da  $(u_i)_{i \in I}$  eine ONB ist, gibt es  $i_1, \dots, i_n \in I, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  so dass  $\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{i_k}\| < \varepsilon$  wegen Korollar 1.56 ist

nochmal an-  
schauen!

$$\|x - \sum_{k=1}^n (x, u_{i_k}) u_{i_k}\| \leq \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k u_{i_k}\| < \varepsilon$$

“(ii)  $\Rightarrow$  (iii)“: Es ist:

$$x = \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i \stackrel{(\cdot, y)}{\Rightarrow} (x, y) = \left( \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i, y \right) = \sum_{i \in I} (x, u_i)(u_i, y) \quad \forall x, y \in X$$

“(iii)  $\Rightarrow$  (iv)“: Setze in die Formel  $y = x$  ein.

“(iv)  $\Rightarrow$  (i)“: Mit Pythagoras und Korollar 1.56 gilt:

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x, u_i)|^2 + \|x - \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i\|^2 \Rightarrow x - \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i = 0 \Rightarrow x \in \overline{\text{span}(u_i)_{i \in I}}.$$

“(i)  $\Rightarrow$  (v)“: Wegen Lemma 1.57 ist  $(\text{span}(u_i)_{i \in I})^\perp = \overline{\text{span}(u_i)_{i \in I}}^\perp = X^\perp = \{0\}$ .

“(v)  $\Rightarrow$  (i)“: Sei  $X$  ein Hilbertraum  $\Rightarrow \overline{\text{span}(u_i)_{i \in I}}$  ist vollständig. Sei  $x \in X$  mit  $x = x_1 + x_2$ , wobei  $x_1 \in \overline{\text{span}(u_i)_{i \in I}}, x_2 \in \overline{\text{span}(u_i)_{i \in I}}^\perp = \text{span}(u_i)_{i \in I}^\perp = \{0\} \Rightarrow x = x_1$ . ■

Nun zurück zu  $L^2([0, 2\pi])$ . Wir erinnern uns vorerst:

1. Der Raum der stetigen Funktionen liegt dicht in  $L^2([0, 2\pi])$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, f \in L^2([0, 2\pi]) \exists g \in C([0, 2\pi]) \text{ mit } g(0) = g(2\pi) = 0 \text{ und } \|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

2. Zu  $g \in C([0, 2\pi])$  mit  $g(0) = g(2\pi), \varepsilon > 0 \exists h \in \text{span}(u_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \|g - h\|_\infty < \varepsilon$

**Satz 1.59.** Die Familie  $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit  $u_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ikx}$  ist eine Orthonormalbasis von  $L^2([0, 2\pi])$ . Wir benutzen:

a)  $\forall \varepsilon > 0, f \in L^2([0, 2\pi]) \exists g \in C([0, 2\pi])$  mit  $g(0) = g(2\pi) = 0$  und  $\|f - g\|_2 < \varepsilon$ ,

b) Zu  $g \in C([0, 2\pi])$  mit  $g(0) = g(2\pi), \varepsilon > 0 \exists h \in \text{span}(u_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \|g - h\|_\infty < \varepsilon$ .

**Beweis:** Sei  $f \in L^2([0, 2\pi])$ ,  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert  $g \in C([0, 2\pi])$  mit  $g(0) = g(2\pi) = 0$  und  $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ . Sei  $h \in \overline{\text{span}(u_i)_{i \in I}}$ , so dass  $\|g - h\| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$

$$\Rightarrow \|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \sqrt{2\pi} \|g - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} = \varepsilon$$

wobei wir  $\|f\|_2^2 = \int_I |f|^2 d\lambda \leq \int_I \text{ess sup}_{x \in I} |f(x)|^2 d\lambda = \|f\|_\infty^2 \int_I d\lambda = \|f\|_\infty^2 \lambda(I)$  für  $f \in L^2(I)$  genutzt haben. ■

**Korollar.** Sei  $f \in L^2([0, 2\pi])$

1.  $f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  ist bestapprox. trig. Polynom vom Grad  $n$  für  $f$  (mit  $c_k = (f, e^{ik\cdot}) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ )
2.  $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{-n}^n c_k e^{ik\cdot}$
3.  $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  mit  $v_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $v_k = \cos(k\cdot) \frac{1}{\sqrt{\pi}}$  für  $k > 0$ ,  $v_k = \sin(k\cdot) \frac{1}{\sqrt{\pi}}$  für  $k < 0$

**Definition 1.60** (Halbordnung, Totalordnung). Sei  $M$  eine Menge. Eine Relation  $\leq \subseteq M \times M$ , heißt *Halbordnung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad \forall a, b, c \in M$
- (ii)  $a \leq a \quad \forall a \in M$
- (iii)  $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in M$

$d \in M$  heißt *obere Schranke*, wenn  $a \leq d \quad \forall a \in M$

Die Relation heißt *Totalordnung*, wenn sie eine Halbordnung ist und  $\forall a, b \in M : a \leq b$  oder  $b \leq a$  gilt.

**Lemma 1.61** (Lemma von Zorn).  $M$  sei eine halbgeordnete Menge. Besitzt jede totalgeordnete Teilmenge  $Z \subseteq M$  eine obere Schranke in  $M$ , dann besitzt  $M$  eine obere Schranke.

**Satz 1.62.**  $(X, (\cdot, \cdot))$  sei ein Hilbertraum. Dann existiert eine Orthonormalbasis.

**Beweis:** Sei  $M = \{(u_i)_{i \in I} : (u_i)_{i \in I} \text{ ist Orthonormalsystem}\}$

Wir definieren die Halbordnung  $(u_i)_{i \in I} \subseteq (y_i)_{i \in J} : \Leftrightarrow I \subseteq J$  und  $x_i = y_i \quad \forall i \in I$ .

Sei  $Z := \{(x)_{i \in I_j} : j \in J\} \subseteq M$  eine totalgeordnete Teilmenge,  $(x_i)_{i \in I}$  ist eine obere Schranke von  $Z$ . Nach dem Lemma von Zorn gibt es also eine obere Schranke  $(\hat{x}_i)_{i \in J}$  von  $M$ .

Mit anderen Worten:  $\nexists$  ONS  $(\hat{y}_i)_{i \in \hat{J}}$  mit  $J \subsetneq \hat{J}$  und  $\hat{x}_i = \hat{y}_i \quad \forall i \in J$ .

$\Rightarrow \forall x \in X$  mit  $x \perp \hat{x}_i \quad \forall i \in I$  gilt  $x = 0$

$\Rightarrow (\text{span}(\hat{x}_i)_{i \in I})^\perp = \{0\}$  ■

Übung. Blatt 5,6.

1. Gram-Schmidt-Orthonormalisierung

Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Skalarproduktraum,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  linear unabhängig. Dann existiert ein ONS  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\text{span}(y_1, \dots, y_k) = \text{span}(x_1, \dots, x_k)$ .

Mit  $(y_n)$  wie vorhin, gilt  $(y_n)$  ist ONB  $\forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \text{span}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = X$ .

2.  $M \subset X$  ist UVR  $\Rightarrow (M^\perp)^\perp = \overline{M}$

**Satz 1.63.** Seien  $X$  ein Hilbertraum,  $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in J}$  Orthonormalbasen. Dann haben  $I$  und  $J$  die gleiche Mächtigkeit.

**Beweis:** Für endliches  $I$  ist die Aussage klar.

Seien also  $|I|$  und  $|J|$  unendlich.

Für  $x \in X$ , definiere  $S_x = \{i \in I : (x, x_i) \neq 0\} \Rightarrow |S_x| \leq |\mathbb{N}|$  sowie  $\bigcup_{j \in J} S_{y_j} = I$  und  $S_{y_j} \neq \emptyset$ . Denn: Ist  $S_{y_j} = \emptyset$ , dann  $y_j \perp x_i \forall i \in I \Rightarrow y_j = 0$  Lightning!

Ist  $i \in I$  mit  $i \notin \bigcup_{j \in J} S_{y_j}$ , dann  $x_i \perp y_j \forall j \in J \Rightarrow x_i = 0$  Lightning!

Also  $|I| = |\bigcup_{j \in J} S_{x_j}| \subseteq |J| \cdot |\mathbb{N}| = |J|$ .

Analog  $|J| \subseteq |I|$  ■

## Kapitel 2

# Einige Hauptsätze aus der Funktionalanalysis

### 2.1 Satz von der offenen Abbildung, Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz von der stetigen Inversen

**Definition 2.1.** Seien  $X, Y$  topologische Räume.  $f : X \rightarrow Y$  heißt *offen*, falls für alle offenen  $U \subseteq X$ ,  $f(U) \subseteq Y$  offen ist.

**Satz 2.2.** Es seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  injektiv. Dann sind äquivalent

(i)  $f : X \rightarrow f(X)$  offen (Relativtopologie von  $Y$  auf  $f(X)$ )

(ii)  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  stetig.

**Beweis:** “(i)  $\Rightarrow$  (ii)“ : Sei  $U \subseteq X$  offen, dann ist  $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$  offen, also ist  $f^{-1}$  stetig.

“(ii)  $\Rightarrow$  (i)“ : Sei  $U \subseteq X$  offen,  $f^{-1}$  stetig  $\Rightarrow f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$  offen  $\Rightarrow f$  offen. ■

**Lemma 2.3.** Seien  $X, Y$  normierte Räume,  $T : X \rightarrow Y$  ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

(i)  $T$  ist offen.

(ii)  $\forall r > 0 : T(U_r(0))$  ist eine Nullumgebung.

(iii)  $\exists r > 0 : T(U_r(0))$  ist eine Nullumgebung.

(iv)  $\exists r > 0 : T(U_1(0))$  ist eine Nullumgebung.

**Beweis:** Vergleiche ÜA3, Blatt 2. ■

**Satz 2.4** (Satz von der offenen Abbildung, Satz von Banach-Schauder, open-mapping theorem). Seien  $X, Y$  Banachräume und  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  surjektiv. Dann ist  $T$  offen.

**Beweis:** Wir zeigen, dass (ii) aus Lemma 2.3 gilt.

1. Schritt Wir zeigen  $\exists \varepsilon_0 > 0$ , so dass  $U_{\varepsilon_0}(0) \subseteq \overline{T(U_1(0))}$ . Weil  $T$  surjektiv gilt  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(U_n(0))$ . Da  $Y$  Banachraum, so gilt nach Baire  $\exists N \in \mathbb{N} : \overline{T(U_N(0))} \neq \emptyset \exists y_0 \in \overline{T(U_N(0))}, \varepsilon > 0$ , so dass  $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \overline{T(U_N(0))}$ . Aus  $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \frac{1}{2}U_1(\varepsilon)y_0 + \frac{1}{2}U_1(\varepsilon)-y_0$  und  $\overline{T(U_N(0))} = \frac{1}{2}\overline{T(U_N(0))} + \frac{1}{2}\overline{T(U_N(0))}$  folgt  $U_1(\varepsilon)0 \subseteq \overline{T(U_N(0))} \Rightarrow U_1(\frac{\varepsilon}{N})0 \subseteq \overline{T(U_1(0))}$ .  $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{N}$ .

2. Schritt Wir zeigen  $U_1(\varepsilon_0)0 \subseteq T(U_1(0))$  Sei  $y \in U_1(\varepsilon_0)0$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  mit  $\|y\| < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\bar{y} := \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}y \Rightarrow \|\bar{y}\| < \varepsilon_0 \Rightarrow \bar{y} \in T(U_1(0)) \Rightarrow \exists y_0 = Tx_0 \in T(U_1(0))$  mit  $\|\bar{y} - y_0\| < \alpha\varepsilon_0$ , wobei  $0 < \alpha < 1$  mit  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1-\alpha} < 1$  Betrachte nun  $\frac{\bar{y}-y_0}{\alpha} \in U_1(\varepsilon_0)0 \Rightarrow \exists y_1 = Tx_1 \in T(U_1(0))$  mit  $\|\frac{\bar{y}-y_0}{\alpha} - y_1\| < \alpha\varepsilon_0 \Rightarrow \|\bar{y} - (y_0 + \alpha y_1)\| < \alpha^2\varepsilon_0$  Behandle  $\frac{\bar{y}-(y_0+\alpha y_1)}{\alpha^2}$  mit denselben Methoden, erhalte,  $y_2 = Tx_2 \in T(U_1(0))$  mit  $\|\bar{y} - (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2)\| < \alpha^3\varepsilon_0$  Erhalte so induktiv eine Folge  $(x_n)$  in  $U_1(0)$  mit  $\|\bar{y} - T(\sum_{k=0}^n \alpha^k x_k)\| < \alpha^{n+1} \cdot \varepsilon_0$ . Wegen  $\alpha < 1$  gilt  $\bar{x} := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x_k$  konver.  $\xrightarrow{T \text{ beschränkt}} T\bar{x} = \bar{y}$  Für  $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\bar{x}$  gilt  $Tx = y$  und  $\|x\| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\|\bar{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \underbrace{\|x_k\|}_{<1} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1-\alpha} < 1$

$\Rightarrow y \in T(U_1(0))$ . Also  $U_1(\varepsilon)0 \subseteq T(U_1(0))$ . ■

ÜA:  $X, Y$  Banachräume,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  ist offen (relativ in  $\text{im}T$ )  $\Leftrightarrow \text{im}T$  abgeschlossen.

**Beweis Idee:** “ $\Leftarrow$ “ gilt nach Satz 2.4. ( $\text{im}T$  abgeschlossen  $\Rightarrow \text{im}T$  ist Banachraum)

“ $\Rightarrow$ “ betrachte injektive Abbildung  $\hat{T} : X \setminus \text{Ker}T \rightarrow \text{im}T, x + \text{Ker}T \mapsto Tx$  ■

**Satz 2.5** (Satz von der stetigen Inversen, inverse mapping theorem).  $X, Y$  Banachräume.  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  bijektiv  $\Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$

**Beweis:** Folgt aus open mapping thm und Satz 2.2 (wichtig Banachraum!) ■

**Definition 2.6** (Graph).  $X, Y$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  Abbildung. Der Graph von  $f$  ist  $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

**Definition 2.7.**  $X, Y$  metrische Räume. Dann ist auf  $X \times Y$  eine Metrik via  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) : (d(x_1, x_2)^2 + d(y_1, y_2)^2)^{\frac{1}{2}}$  definiert. (erhält Parallelogrammgleichung und damit Skalarproduktstruktur)

Beachte

- (i)  $X \times Y$  vollständig  $\Leftrightarrow X, Y$  vollständig
- (ii)  $X \times Y$  normierter Raum  $\Leftrightarrow X, Y$  normierte Räume
- (iii)  $X \times Y$  Skalarproduktraum  $\Leftrightarrow X, Y$  Skalarproduktraum.
- (iv) abgeschlossene Metrik ist äquivalent zu  $\max\{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}$  und  $(d(x_1, x_2)^p + d(y_1, y_2)^p)^{\frac{1}{p}}$ ,  $p \in (1, \infty)$

**Definition 2.8** (Graphenabgeschlossenheit).  $X, Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  heißt *graphenabgeschlossen*, wenn  $G(f) \subseteq X \times Y$  abgeschlossen ist.

**Bemerkung 2.9.** 1.  $f$  graphenabgeschlossen  $\Leftrightarrow (x_n)$  in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $f(x_1) \rightarrow y \Rightarrow f(x) = y$

2.  $T : X \rightarrow Y$  lineare Operator  $\Rightarrow G(T) \subseteq X \times Y$  UVR.

3.  $f$  stetig  $\Rightarrow f$  graphenabgeschlossen.

4. Umkehrung von (iii) gilt i.A. nicht: Gegenbeispiel:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$

**Satz 2.10** (Satz vom abgeschlossenen Graphen, closed graph theorem).  $X, Y$  Banachräume,  $T : X \rightarrow Y$ , lineare Operatoren. Dann sind äquivalent:

(i)  $T$  graphenabgeschlossen

(ii)  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

**Beweis TODO:** •  $ii \Rightarrow i$  Klar, weil ...

- Definiere Abbildung,  $S : G(T) \rightarrow X, (x, Tx) \mapsto x \Rightarrow S$  bijektiv und linear. Wegen  $\|S(x, Tx)\|_X = \|x\| \leq (\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}$  gilt  $S \in \mathcal{B}(G(T), X)$  mit  $\|S\| \leq 1$ . Weil  $G(T) \subseteq X \times Y$  und  $X, Y$  Banachräume, ist  $G(T)$  Banachraum.  $\xrightarrow{S^{2.4}} S^{-1} \in \mathcal{B}(X, G(T)) \Rightarrow (\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}} = \|(x, Tx)\|_{X \times Y} = \|S^{-1}(x)\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|x\|_X \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq (\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|S^{-1}\| \cdot \|x\|_X \Rightarrow T \in \mathcal{B}(X, Y)$  ■

**Bemerkung 2.11.** Ein paar Anwendungen

1. Aus Inverse mapping thm folgt:  $(X, \|\cdot\|_1, (X, \|\cdot\|_2) \text{ BRe}, \|\cdot\|_1 \text{ stärker als } \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_2 \text{ stärker als } \|\cdot\|_1$ .

**Beweis:** Sei  $I_X : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2) \xrightarrow{\text{Vor.}} I_X$  beschränkt  $\xrightarrow{\text{IMT}} I_X^{-1} : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$  beschränkt  $\Rightarrow \|\cdot\|_2$  ist stärker als  $\|\cdot\|_1$ . ■

2. Betrachte  $X = C([a, b]), Y = C^1([a, b])$  mit Normen  $\|x\|_X = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| = \|x\|_\infty, \|x\|_Y = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty, X, Y$  Banachräume.

Ist  $T \in \mathcal{B}(C([a, b]))$  mit  $\text{im} T \subset C^1([a, b])$ . Dann ist  $T \in \mathcal{B}(C([a, b]), C^1([a, b]))$

**Beweis:**  $x, x_n \in X, y \in Y$  mit  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0, \|Tx_n - y\|_Y \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x\|_X \rightarrow 0$  und  $\|Tx_n - y\|_X \rightarrow 0$ , da  $\|z\|_X \leq \|z\|_Y \quad \forall z \in Y. \xrightarrow{T \in \mathcal{B}(X)} \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - Tx\| = 0 \Rightarrow y = Tx \Rightarrow T$  graphenabgeschlossen  $\xrightarrow{X, Y \text{ BRe}} T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . ■

**Bemerkung 2.12.**  $T : X \rightarrow Y$  lineare Operatoren. Dann sind äquivalent:

- (i)  $T$  graphenabgeschlossen
- (ii)  $\forall (x_n)$  in  $X$  mit  $x_n \rightarrow 0, y \in Y$  mit  $(Tx_n) \rightarrow y$  folgt  $y = 0$

**Beweis:** Nutze Linearität:

“ $\Rightarrow$ “ klar (Spezialisierung auf Nullfolgen)

“ $\Leftarrow$ “ angenommen  $(x_n) \rightarrow x, T(x_n) \rightarrow y \Rightarrow (x_n - x)$  ist Nullfolge. ■

## 2.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Satz von Banach-Steinhaus

**Satz 2.13** (Satz von Osgood).  $X$  normierter Raum,  $E \subset X$  Teilmenge von 2. Kategorie. Sei  $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}, \alpha \in A\}$  eine Menge von Funktionen.  $\mathcal{F}$  sei auf  $E$  punktweise beschränkt, d.h.  $\forall x \in E \exists M_x > 0$ , so dass  $f_\alpha(x) \leq M_x \quad \forall \alpha \in A$ . Dann existiert abgeschlossene Kugel  $K \subseteq X$ , auf der  $\mathcal{F}$  glm nach oben beschränkt ist. D.h.

$$\exists M > 0 \text{ s.d. } f_\alpha(x) \leq M \quad \forall \alpha \in A, x \in K.$$

**Beweis:** Für  $n \in \mathbb{N}$ , def  $E_n := \{x \in X : f_\alpha(x) \leq n \quad \forall \alpha \in A\} = \bigcap_{\alpha \in A} \underbrace{\{x \in X : f_\alpha(x) \leq n\}}_{\text{abgeschlossen, da f stetig}} \Rightarrow E_n$  abgeschlos-

sen. Ferner gilt  $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  wegen Annahme (punktweise Beschränkt).  $\xrightarrow{2. \text{Kategorie}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  von 2. Kategorie  $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass  $\overset{\circ}{E}_{n_0} = \overline{\overset{\circ}{E}_{n_0}} \neq \emptyset. \Rightarrow$  Für  $U = \overset{\circ}{E}_{n_0} : \sup_{\alpha \in A, x \in U} f_\alpha(x) \leq n_0 =: M$  Insbesondere  $\exists x_0 \in U, \delta > 0$ , so dass  $K := \overline{U_\delta(x_0)} \subseteq U$ . Dann gilt  $\forall \alpha \in A, x \in \overline{U_\delta(x_0)} : f_\alpha(x) \leq M$ . ■

**Korollar 2.14** (Prinzip der glm Beschränktheit).  $X, Y$  normierter Räume,  $E \subset X$  von 2. Kategorie,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$  mit  $\forall x \in E \exists M_x > 0$  so dass  $\|Tx\| \leq M_x \quad \forall T \in \mathcal{F}$ . Dann gilt:

$$\exists M > 0 \text{ so dass } \|T\| \leq M \quad \forall T \in \mathcal{F}$$

**Beweis:** Für  $T \in \mathcal{F}$  definiere  $f_T : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|Tx\| \Rightarrow f_T$  ist stetig  $\forall T \in \mathcal{F}, \{f_T : T \in \mathcal{F}\}$  ist pw. beschränkt  $\xrightarrow{\text{Osgood}} \exists M, r > 0, x_0 \in E : \sup_{\substack{x \in \overline{U_r(x_0)} \\ T \in \mathcal{F}}} \|Tx\| \in M$ . Für  $x \in U_1(0)$  gilt dann

$$\|Tx\| = \left\| \frac{1}{r}T(rx + x_0) - \frac{1}{r}Tx_0 \right\| \leq \frac{1}{r} \underbrace{\|T(rx + x_0)\|}_{\leq M} + \frac{1}{r} \underbrace{\|Tx_0\|}_{\leq M} \leq \frac{2M}{r} \Rightarrow \|T\| \leq \frac{2M}{r} \quad \forall T \in \mathcal{F}. \quad \blacksquare$$

**Korollar 2.15.**  $X$  Banachraum,  $Y$  normierter Raum. Sei  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ , so dass  $\forall x \in X \exists M_x > 0 : \|T_x\| \leq M_x \quad \forall T \in \mathcal{F}$ . Dann existiert ein  $M > 0$ , so dass  $\|T\| \leq M \quad \forall T \in \mathcal{F}$ .

**Beweis:**  $X$  Banachraum  $\xrightarrow{\text{Baire}} X$  von 2. Kategorier. Resultat folgt aus Kor. 2.14. ■

**Korollar 2.16.**  $X$  Banachraum,  $Y$  normierter Raum,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ , so dass

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| = \infty$$

. Dann gilt

$$(i) \exists x_0 \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx_0\| = \infty$$

(ii) Die Menge  $\{x_0 \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx_0\| = \infty\}$  ist dicht.

**Beweis:** Angenommen  $Z \subseteq X$  nicht dicht  $\Rightarrow \exists r > 0, x \in X :$

$$\overline{U_r(x_0)} \subseteq X \setminus Z \Rightarrow \forall x \in \overline{U_r(x_0)} : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$$

$$\xrightarrow{2.14} \sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < \infty \text{ Widerspruch!} \quad \blacksquare$$

TODO: Ein Beispiel für starke Konvergenz aber keine Konvergenz von Operatoren oder sowas.

**Satz 2.17.**  $X$  Banachraum,  $Y$  normierter Raum.  $(T_n)$  Folge in  $\mathcal{B}(X, Y)$ , so dass

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \quad \forall x \in X.$$

Dann gilt  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt und  $\|T\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|T_n\|$ .

**Beweis:** Linearität von  $T$  ist klar. Weiter gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\|T_n x\| - \|Tx\|\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x - Tx\| = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow \forall x \in X \exists M_x > 0, \text{ sodass } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n x\| \leq M_x$$

$\Rightarrow \exists M > 0$ , so dass  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T\| \leq M < \infty$ . Für  $x \in X$  und jede TF  $(X_{n_k})$ , sodass  $\|T_{n_k}\|$  konvergiert, gilt

$$\|Tx\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_{n_k} x\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_{n_k}\| \|x\| \Rightarrow \|Tx\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|. \quad \blacksquare$$

**Satz 2.18** (Satz von Banach-Steinhaus).  $X, Y$  Banachräume,  $(T_n)$  Folge in  $\mathcal{B}(X, Y)$ . Dann konvergiert  $(T_n)$  punktweise gegen ein  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ , genau dann wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1)  $\exists M > 0$ , so dass  $\|T_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2)  $\exists D \subset X$  dicht, so dass  $(T_n x)$  CF  $\forall x \in D$ .

**Beweis:** “ $\Rightarrow$ “ 1. folgt aus Satz 2.17., 2. ist klar (nehme  $D = X$ )

“ $\Leftarrow$ “ Sei  $x \in X, \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in D : \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3M}, \exists N \in \mathbb{N} : \|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, m \leq N$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \forall n, m \leq N : \|T_m x - T_n x\| &\leq \|T_m x - T_m y\| + \|T_m y - T_n y\| + \|T_n y - T_n x\| \\ &\leq \|T_m\| \|x - y\| + \|T_m y - T_n y\| + \|T_n\| \|x - y\| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow (T_n x)$  ist Cauchyfolge in  $Y \Rightarrow (T_n x)$  konvergiert in  $Y \xrightarrow{2.17.} T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . ■



## Kapitel 3

# Lineare Funktionale und duale Abbildungen

$X$  normierter  $\mathbb{K}$ -VR.

Erinnerung:  $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ ,  $x' \in X'$ ,  $\|x'\| = \|x'\|_{\mathcal{B}(X, \mathbb{K})} = \sup_{x \in U_1(0) \leq X} |x'(x)| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |x'(x)| = \sup_{x \in \overline{U_1(0)}} |x'(x)|$ .

Notation: Anstelle von  $x'(x) = \langle x, x' \rangle_{X, X'}$ ,  $x' \in X'$ ,  $x \in X$ .

$E_{\mathbb{R}} : E$  aufgefasst als Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

### 3.1 Fortsetzungssätze von Hahn-Banach

Thema:  $X$  normierter Raum,  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  lineare,  $E$  UVR.

Frage: Kann ich  $f$  auf  $X$  fortsetzen? (so dass  $f$  linear ist)

**Lemma 3.1.** Sei  $X$   $\mathbb{R}$ -VR,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

1)  $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \geq 0, x \in X$  (Homogenität)

2)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$  (Subadditivität)

Weiters sei  $E \subseteq X$  UVR und  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$ . Dann existiert  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear und  $F|_E = f$  und  $F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$ .

Beweisskizze. Falls  $E = X \Rightarrow$  klar. ( $F = f$ ). Angenommen  $E \subsetneq X \Rightarrow x_0 \in X \setminus E, x_0 \neq 0$ .

1 Schritt: Zunächst Fortsetzung auf eindimensional größeren Raum. TODO

2 Schritt: Definiere Menge von Abbildungen und Unterräume, definiere und zeige Halbordnung, und prüfe dann Voraussetzung vom Lemma von Zorn. Das liefert ein maximales Element, dass dann schon der ganze Raum sein muss. Sonst fände man mit Schritt eins einen größeren Raum, was aber ein Widerspruch zur Annahme bereits das maximale Element benutzt zu haben.

□

**Beweis:** Falls  $E = X$ : klar (Wähle  $F = f$ ). Sei also  $E \subsetneq X \Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus E$ .

Schritt 1:

Setze  $f$  auf  $E \oplus \text{span}\{x_0\}$  fort (Bezeichnung wieder mit  $f$ ) mit  $f(z + \alpha x_0) = f(z) + \alpha \gamma \quad z \in E, \alpha \in \mathbb{R}$ .

Wähle  $\gamma \in \mathbb{R}$  so, dass  $f(z + \alpha x_0) \leq p(z + \alpha x_0)$ . Dabei gilt:

$$\alpha > 0 : \gamma \leq \frac{1}{\alpha} p(z + \alpha x_0) - f(z) = p\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right) - f\left(\frac{z}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \gamma \leq p(z_1 + x_0) - f(z_1) \quad \forall z_1 \in E$$

$$\alpha < 0 : \alpha \gamma \leq p(z + \alpha x_0) - f(z) \Leftrightarrow -\gamma \leq p\left(-\frac{z}{\alpha} - x_0\right) + f\left(\frac{z}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \gamma \geq -p(-z_2 - x_0) - f(z_2) \quad \forall z_2 \in E$$

Also existiert ein geeignetes  $\gamma \in \mathbb{R}$ , falls  $\forall z_1, z_2 \in E$  gilt:

$$-p(-z_2 - x_0) - f(z_2) \leq p(z_1 + x_0) - f(z_1) \Leftrightarrow f(z_1 - z_2) \leq p(-z_2 - x_0) + p(z_1 + x_0).$$

Dies gilt, da  $f(z_1 - z_2) \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} p(z_1 - z_2) \stackrel{2.}{\leq} p(-z_2 - x_0) + p(z_1 + x_0)$ .

Also  $\exists \gamma \in \mathbb{R}$   $\sup_{z \in E} -p(-z + x_0) - f(z) \Rightarrow f : E \oplus \text{span}\{x_0\}$  ist linear und  $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E \oplus \text{span}\{x_0\}$ .

Schritt 2:

Sei  $\mathcal{F} := \{(H, g_H) : E \subset H \subset X \text{ UVR}, g_H|_E = f, g_H(x) \leq p(x) \forall x \in H\}$ .

Sei  $(H_1, g_{H_1}) \leq (H_2, g_{H_2}) \Leftrightarrow H_1 \leq H_2$  mit  $g_{H_2}|_{H_1} = g_{H_1}$  eine Halbordnung (ÜA). Falls  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  totalgeordnet ist, dann ist  $H_0 = \bigcup_{(H, g_H) \in \mathcal{G}} H$  mit  $g_{H_0}z = g_Hz \forall z \in H, (H, g_H) \in \mathcal{G}$  eine obere Schranke von  $\mathcal{G}$

(Wohldefiniertheit folgt aus Totalordnung).

Mit dem Lemma von Zorn folgt nun:  $\mathcal{F}$  hat ein maximales Element  $(X_0, g_{X_0})$ . Falls  $X_0 \subsetneq X$ , so kann mit Schritt 1 auf  $\tilde{X}_0 = X_0 \oplus \text{span}\{x_0\}$   $x_0 \in X \setminus X_0$  linear fortgesetzt werden. Also ist  $(\tilde{X}_0, f_{\tilde{X}_0}) \succeq (X_0, g_{X_0})$  und dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $(X_0, g_{X_0})$ . ■

**Satz 3.2** (Satz von Hahn-Banach).  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -VR,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  Halbnorm,  $E$  UVR,  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  linear und

$$f(x) \leq p(x) \forall x \in E$$

Dann existiert  $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ , so dass

$$(i) \quad F|_E = f$$

$$(ii) \quad |F(x)| \leq p(x) \forall x \in X$$

*Beweisskizze.* Fall 1  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : Nutze wesentliche Lemma 3.1, dann sind i), ii) Konsequenzen.

Fall 2  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : Setze  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  Etwas rechnen ergibt mit der  $\mathbb{R}$ -Linearität  $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$ . Damit ist auch dieser Fall wesentlich auf den reellen Fall zurückgeführt. Und Lemma 3.1 rechtfertigt folgendes :  
Definiere dann  $F(x) := F_1(x) - iF_1(ix)$ . Prüfe daran alle Eigenschaften *leicht nach*. □

**Beweis:** 1.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : Mit Lemma 3.1.  $\exists F : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear mit  $F|_E = f$  und  $F(x) \leq p(x) \forall x \in X$ .  
Außerdem gilt

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x) \Rightarrow |F(x)| \leq p(x).$$

2.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  mit  $f_1, f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$  sind  $\mathbb{R}$ -linear. Da  $f$  linear ist gilt:

$$f(ix) = if(x) = if_1(x) - f_2(x) \wedge f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix) \Rightarrow f_2(x) = -f_1(ix) \Rightarrow f(x) = f_1(x) - if_1(ix).$$

Also ist  $f_1 : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathbb{R}$ -linear und  $|f_1(y)| \leq p(y) \forall y \in E_{\mathbb{R}}$ . Mit Schritt 1 angewandt auf  $f_1$  an  $X_{\mathbb{R}}$  gilt:

$$\exists F : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sodass } F|_{E_{\mathbb{R}}} = f_1 \text{ und } |F_1(x)| \leq p(x) \forall x \in X_{\mathbb{R}}.$$

Sei  $F(x) = f_1(x) - if_1(ix)$ . zZ.:  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist linear mit  $F|_E = f$  und  $|F(x)| \leq p(x) \forall x \in X$ .  
Linearität: Für  $x, y \in X$ ,  $\alpha = \underbrace{\alpha_1}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\alpha_2}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}$  gilt:

$$F(x+y) = F_1(x+y) - i(F_1((x+y)i)) \stackrel{F_1 \text{ lin.}}{=} F_1(x) + F_1(y) - i(F_1(ix) + F_1(iy)) = F(x) + F(y).$$

und

$$\begin{aligned} F(\alpha x) &= F_1(\alpha x) - iF_1(\alpha ix) = F_1((\alpha_1 + i\alpha_2)x) - iF_1(\underbrace{(\alpha_1 + i\alpha_2)ix}_{=(\alpha_1 i - \alpha_2)x}) \\ &= \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_1(ix) - \alpha_1 iF_1(ix) + \alpha_2 iF_1(x) = \alpha_1 F(x) + \alpha_2 i \underbrace{(-iF_1(ix) + F_1(x))}_{=F(x)} \\ &= \alpha F(x). \end{aligned}$$

$F|_E = f$  folgt aus der Darstellung von  $F$  und  $f$ .

Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$  und  $x \in X$  fest ( $F(x) \in \mathbb{C}$ ) gilt:

$$|F(x)| = zF(x) = F(zx) \stackrel{F(zx) \in \mathbb{R}}{=} F_1(zx) \leq p(zx) = p(x). \quad \blacksquare$$

**Satz 3.3** (topologische Version von Satz 5.2).  $X$  normierter  $\mathbb{K}$ -VR,  $E$  UVR,  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  stetig und linear. Dann existiert  $F : X \rightarrow \mathbb{K}$  linear stetig mit

$$(i) \|F\| = \|f\|$$

$$(ii) F|_E = f$$

*Beweisskizze.* Betrachte  $p(x) := \|f\| \cdot \|x\|$ . Stetigkeit zeigt man über die Beschränktheit von  $F$ . Das liefert auch bereits  $\|F\| \leq \|f\|$ . Die andere Ungleichung folgt, da  $f$  eine Einschränkung von  $F$  ist.  $\square$

**Beweis:** Betrachte  $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$  ist Halbnorm und  $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$  (folgt aus Definition des beschränkten Operators, also Stetigkeit von  $f$ ). Mit Satz 3.2. folgt:

$$\exists F : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mit } F|_E = f \text{ und } |F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \Rightarrow \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$$

Damit ist  $F$  beschränkt, also stetig und  $\|F\| \leq \|f\|$ . Außerdem gilt:

$$\|F\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|.$$

■

**Korollar 3.4.**  $X$  normierter  $\mathbb{K}$ -VR,  $x_0 \in X$ . Dann existiert  $x' \in X'$ , so dass  $\|x'\| = 1$  und  $\langle x_0, x' \rangle = \|x_0\|$ .

*Beweisskizze.* Falls  $x_0 = 0$  ist die Aussage schon mal richtig. Sei  $E := \text{span}x_0$  und

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow \mathbb{K} : cx_0 \mapsto c\|x_0\| \quad x \in \mathbb{K} \\ f(x_0) &= \|x_0\|, \|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} |f(x)| = 1 \quad (UE) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.3}}{\Rightarrow} \exists \end{aligned}$$

□

**Beweis:** Für  $x_0 = 0$  ist die Aussage klar. Sei also  $x_0 \neq 0$ ,  $E := \text{span}\{x_0\}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{K} : cx_0 \mapsto c\|x_0\|$   $c \in \mathbb{K}$ . Dann ist  $f(x) = \|x_0\|$  und  $\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} |f(x)| = 1$  (ÜA). Mit Satz 3.3. folgt:

$$\exists x' : X \rightarrow \mathbb{K}, x'|_E = f \text{ und } \|x'\| = \|f\| = 1 \Rightarrow x'(x_0) = \langle x_0, x' \rangle = f(x_0) = \|x_0\|.$$

■

**Korollar 3.5.**  $X$  normierter VR,  $x_0 \in X$ . Dann gilt, dass  $\|x_0\| = \sup_{x' \in X, \|x'\| \leq 1} |\langle x_0, x' \rangle| = \sup_{x' \in X, \|x'\| = 1} |\langle x_0, x' \rangle|$

**Beweis:**  $\geq \dots \geq$  ist klar. Sei  $x' \in X'$  mit  $\|x'\| = 1 \xrightarrow{\text{Def. Op. Norm}} |\langle x_0, x' \rangle| \leq \|x'\| \cdot \|x_0\| \leq \|x_0\|$ . Wähle  $x'$  wie in Korollar 3.4., dann ist  $|\langle x_0, x' \rangle| = \|x_0\|$ .

■

**Satz 3.6.**  $X$  normierter  $\mathbb{K}$ -VR.  $X'$  separabel  $\Rightarrow X$  separabel.

*Beweisskizze.* (i)  $X'$  separabel  $\Rightarrow S := \{x' \in X' : \|x'\| = 1\}$  ist separabel.

(ii) Schreibe  $S$  als Abschluss einer abzählbaren Mengen. Alle Element haben Norm 1 und damit existieren Werte von den Operatoren die größer sind als  $\frac{1}{2}$ . Die Elemente aus  $S$  aufgespannt über eine abzählbare Menge von  $K$  ist abzählbare. Nun muss der Abschluss dieses Spannes schon  $X$  selber sein. Wäre dies nicht so, dann gäbe es ein Element das weder im Abschluss des Spannes noch  $X$  ist.

(iii) ÜA:  $\exists x' \in X'$  mit  $\|x'\| = 1$ ,  $\ker x' > E$ ,  $\langle x_0, x' \rangle \neq 0$

Dann null der Operatoren dieser Operator als Elemente in  $E$ . Wegen der Norm 1 ist dieser Operator in  $S$  und hat wegen einer Ungleichungskette echten Abstand von allen anderen Elementen in  $S$ . Dies ist ein Widerspruch zur Dichtheit von  $S$ .

□

**Beweis:** 1)  $X'$  separabel  $\Rightarrow \underbrace{\{x' \in X' : \|x'\| = 1\}}_{=: S}$  ist separabel (Dreiecksungleichung).

2)  $S = \overline{\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}}$ ,  $x'_n \in S$ . Da  $\|x'_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  existieren  $x_n \in X : \|x_n\| = 1$  und  $\langle x_n, x'_n \rangle \geq \frac{1}{2} \quad \forall n$  (Definition der Operatornorm  $\mathcal{B}(X, \mathbb{K}) = X'$ ).

Sei  $E := \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ . Angenommen  $E = X \Rightarrow \text{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ist Dicht in  $X$ .

Falls  $E \neq X$ , so existiert  $x_0 \in X \setminus E$ .

3)  $x' \in X'$  mit  $\|x'\| = 1, \text{Ker } x' \supset E \text{ (ÜA)}, \langle x_0, x' \rangle \neq 0 \stackrel{x_n \in E}{\Rightarrow} \langle x_n, x' \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Also ist

$$\frac{1}{2} \leq \langle x_n, x'_n \rangle = \langle x_n, x'_n \rangle - \langle x_n, x' \rangle = \langle x_n, x'_n - x' \rangle \leq \underbrace{\|x_n\|}_{=1} \cdot \|x'_n - x'\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow x' \in S = \{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$  aber  $\|x' - x'_n\| \geq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow$  Widerspruch zur Dichtheit von  $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$  in  $S$ . ■

## 3.2 Dualraum und Reflexivität

Es wird der Dualraum genauer untersucht. Der Bidualraum wird als Dualraum des Dualraums eingeführt. Man findet eine kanonische Injektion von Raum in den Bidualraum (über das Funktional zu einem Funktional). Ist der Bidualraum immer gleich dem Raum? Diese Eigenschaft soll reflexiv heißen. Welchen Zusammenhang besteht zwischen reflexiv und vollständig?

Hat man mehr Struktur durch einen Hilbertraum findet man eine explizite Darstellung eines Funktional über das Skalarprodukt. Wie stehen da reflexiv und vollständig in Beziehung?

Wir verallgemeinern den Orthogonalraum auf normierter Räume und seinen Dualraum. Welche topologische Eigenschaften haben solche Räume? Gibt es Normisomorphismen?

**Definition 3.7.**  $X'' = (X')'$  heißt Bidualraum.

Bemerkung:  $X = \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $X' = \mathbb{R}^{1 \times n}$

Frage:  $X'' = X$

*Bemerkung 3.8.* Vorüberlegung: Sei  $x_0 \in X$  betrachte  $f_{x_0} : X' \rightarrow \mathbb{K}, y' \mapsto \langle x_0, y' \rangle$ .  $f_{x_0} \in (X')'$ ?,  
 Ja, weil  $\|f_{x_0}\| = \|f_{x_0}\|_{\mathcal{B}(X', \mathbb{K})} = \sup |\langle x_0, x' \rangle| = \|x_0\|$ .  $f_0$  linear klar.

$\Rightarrow J_X : X \rightarrow X'' : x \mapsto f_x = \langle x, \cdot \rangle$  ist linear, isometrisch.

$\Rightarrow J_X \subset X''$  auf diese Art kann  $X$  als Teilraum von  $X''$  aufgefasst werden.

**Definition 3.9.**  $X$  normierter VR heißt reflexiv, falls  $J_X(X) = X''$ . In diesem Fall ist  $J_X : X \rightarrow X''$  ein Isomorphismus.

**Lemma 3.10.**  $X$  normierter VK. Dann gilt:  $X$  reflexiv  $\Rightarrow X$  vollständig.

**Beweis:**  $X''$  ist vollständig (weil  $X'' = \mathcal{B}(X', \mathbb{K})$  und da  $\mathbb{K}$  vollständig ist).

da  $J_X : X \rightarrow X''$  isometrisch isomorph ist, ist auch  $X$  vollständig. ■

Zunächst Charakterisierung des HR-Falls

**Satz 3.11** (Darstellungssatz Fréchet-Riesz). Sei  $X$  Hilbertraum. Dann ist

$$R_X : X \rightarrow X', x \mapsto (\cdot, x) = (y \mapsto (y, x))$$

anti-linear, isometrische Bijektion. D.h.

$$(i) R_X(x) = (y \mapsto (y, x)) \in X' \quad \forall x \in X$$

$$(ii) \forall x' \in X' \exists! x \in X : \langle y, x' \rangle = (y, x) \quad \forall y \in X$$

*Beweisskizze.* (i)  $R_x$  wohldefiniert, isometrisch, anti-linear: nachrechnen!

(ii)  $R_x$  surjektiv: Wenn wir nicht das Nullfunktional haben, dann finden wir ein  $z \neq 0$  im orthogonalen Komplement des Kerns. Konstruiere für dieses  $z$  ein Funktional durch  $x' = (\cdot, xz)$  mit  $c \in \mathbb{C}$ . Diese Konstruktion gilt dann auch für Elemente im Kern. □

**Beweis:** 1)  $R_X$  ist wohldefiniert, semilinear und isometrisch.

Sei  $x \in X$ . Dann ist  $y \mapsto (y, x)$  linear (folgt aus der Linearität des Skalarprodukts). Es gilt

$$|\langle y, R_X x \rangle| \stackrel{\text{Def. } R_X}{=} |(y, x)| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|y\| \cdot \|x\| \stackrel{\forall y \in X}{\Rightarrow} R_X x \in X' \text{ mit } \|R_X x\| \leq \|x\|.$$

Setze  $y = x$  ein:  $|\langle x, R_X x \rangle| = |(x, x)| = \|x\|^2 \stackrel{\text{Def.}}{\stackrel{\text{Op. Norm}}{\Rightarrow}} \|R_X x\| \geq \|x\| \Rightarrow \|R_X x\| = \|x\|.$

$R_X(x+y) = R_Xx + R_Xy$  klar. Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$\langle y, R_X \alpha x \rangle = \langle y, \alpha x \rangle = \bar{\alpha} \langle y, x \rangle = \bar{\alpha} \langle y, R_X x \rangle \Rightarrow R_X \alpha x = \bar{\alpha} R_X x.$$

2)  $R_X$  ist surjektiv.

Sei  $x' \in X'$ . Falls  $x' = 0$ , dann wähle  $x = 0$  und es gilt  $R_X 0 = 0$ .

Angenommen  $x' \neq 0 \Rightarrow \text{Ker } x' \neq X$ . Weil  $X$  Hilbertraum ist, gilt:

$$X = \text{Ker } x' \oplus (\text{Ker } x')^\perp \Rightarrow \exists z \neq 0, z \in (\text{Ker } x')^\perp.$$

Ansatz:  $x' = (\cdot, cz)$  mit  $c \in \mathbb{C}$  (OBdA ist  $X$  ein  $\mathbb{C} - HR$ ), also  $\langle y, x' \rangle = \langle y, cz \rangle \forall y \in X$ .

$$\text{Für } y = z : \langle z, x' \rangle = \langle z, cz \rangle \Rightarrow \bar{c} = \frac{\langle z, x' \rangle}{\langle z, z \rangle} \Rightarrow c = \frac{\overline{\langle z, x' \rangle}}{\langle z, z \rangle}.$$

Beh.:  $\forall y \in X : \langle y, x' \rangle \stackrel{!}{=} \langle y, cz \rangle$

$$\begin{aligned} \langle y, x' \rangle = \bar{c} \langle y, z \rangle &= \frac{\langle z, x' \rangle}{\langle z, z \rangle} \langle y, z \rangle \Leftrightarrow \langle y, x' \rangle \langle z, z \rangle = \langle z, x' \rangle \langle y, z \rangle \\ &\Leftrightarrow (\langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y \perp z \end{aligned}$$

Da  $z \in (\text{Ker } x')^\perp$  verbleibt zu Zeigen, dass  $\langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y \in \text{Ker } x'$ :

$$0 = \langle y, x' \rangle \langle z, x' \rangle - \langle z, x' \rangle \langle y, x' \rangle = \langle \langle y, x' \rangle z - \langle z, x' \rangle y, x' \rangle.$$

Wir haben für  $x' \in X'$  also ein  $x \in Xx = cz$  konstruiert, sodass  $x' = \underbrace{(\cdot, x)}_{R_X x}$ . Daraus folgt die

Surjektivität. ■

**Korollar.** Beschränkte lineare Abbildung  $L^2(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann wird diese beschrieben durch ein Element aus  $L^2(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{K}$ .

**Satz 3.12.**  $X$  Hilbertraum  $\Rightarrow X$  reflexiv ( $J_X X = X''$ )

*Beweisskizze.* Zu zeigen:  $J_x$  surjektiv.

(i) z.Z.:  $X'$  Hilbertraum. Nutze Bijektivität von  $R_x$  und Isometrie.

Wende dann als nächstes Satz 5.11 zweimal an, das liefert einen Kandidaten für  $x$  und  $x''$ . Dann bleibt zu zeigen, dass  $J_x x = x''$  erfüllt. Dies sind zwei Funktionale und ihre Gleichheit zeigt man durch nachrechnen, dass sie punktweise gleich sind.

□

**Beweis:** z.Z.:  $J_X$  ist surjektiv.

1)  $X'$  ist Hilbertraum.

Seien  $x', y' \in X'$ . Definiere  $(x', y')'_X := (R_X^{-1} y', R_X^{-1} x')$ .

$(\cdot, \cdot)'_X$  ist Skalarprodukt (folgt aus den Eigenschaften von  $R_X$ ) mit  $(x', x')'_X = \|R_X^{-1} x'\|^2 = \|x\|^2$ .

2) Sei  $x'' \in X''$ . Gesucht ist  $x \in X : J_X x = x''$ . Wende Satz 3.11. auf HR  $X'$  folgendermaßen an:

Sei  $x' := R_X^{-1} x''$ . Wende Satz 3.11. nun auf  $X$  an:  $x := R_X^{-1} x' \in X$ .

$$\begin{aligned} \forall y' \in X' : \langle y', x'' \rangle &= (y', x')'_X \stackrel{\text{Def.}(\cdot, \cdot)'_X}{=} (R_X^{-1} x', R_X^{-1} y')_X \\ &= \underbrace{\langle R_X^{-1} x', y' \rangle}_{=x} \stackrel{\text{Def.} J_X}{=} \langle y', J_X x \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x'' = J_X x$$

■

**Definition 3.13.**  $X$  normierter  $\mathbb{K}$ -VR,  $M \subset X$ ,  $N \subset X'$ . Dann heißt

$$M^\perp := \{x' \in X' : \langle x, x' \rangle = 0 \ \forall x \in M\}$$

Orthogonalraum von  $M$ .

$$N_\perp := \{x \in X : \langle x, x' \rangle = 0 \ \forall x' \in N\}$$

Orthogonalraum von  $N$ .

Klar:  $M^\perp \subset X'$ ,  $N_\perp \subset X$ .

**Lemma 3.14.**  $X$  normierter Raum.  $M \subset X$ ,  $N \subset X'$ . Dann

(i)  $M^\perp \subset X'$  abgeschlossen UVR.

(ii)  $N_\perp \subset X$  abgeschlossen UVR.

(iii)  $M \subset (M^\perp)_\perp$

(iv)  $N_\perp \subset N^\perp$ , wobei  $N_\perp \subset X$ ,  $N^\perp \subset X''$  als UVR von  $X''$  aufgefasst werden.

*Beweisskizze.* (i) Folge nehmen und sehen das sie in der Menge bleibt.

(ii) Schnitt über die Kerne, die als abgeschlossenen Mengen abgeschlossen bleiben.

(iii) Mengeinklusion

(iv) Mengeninklusion

□

**Beweis:** TODO

■

ÜA:  $X$  normierter Raum,  $x_0 \notin \overline{E}$ ,  $E \subset X$  UVR. Dann existiert  $x' \in X'$  mit  $\text{Kern } x' \subset \overline{E}$  und  $\langle x_0, x' \rangle \neq 0$ .

**Satz 3.15.**  $X$  normierter Raum,  $M \subset X$  UVR. Dann gilt

$$\overline{E} = (E^\perp)_\perp$$

*Beweisskizze.* Mengeninklusion in beide Richtung. Die eine mit Lemma 3.14 (iii), die andere braucht die ÜA. □

**Beweis:** TODO

■

**Korollar 3.16.**  $X$  normierter Raum,  $E \subset X$  UVR. Dann gilt  $E$  abgeschlossen  $\Leftrightarrow E = (E^\perp)_\perp$

**Satz 3.17** (Übung).  $X$  normierter Raum.  $M \subset X$  abgeschlossen UVR. Dann

(i)  $X'/M^\perp$  ist normisomorph zu  $M'$ .

(ii)  $(X/M)'$  ist normisomorph zu  $M^\perp$ .

**Satz 3.18.**  $X$  reflexiv normierter Raum. Dann

(i)  $X$  Banachraum

(ii)  $X'$  reflexiv.

*Beweisskizze.* (i) Folgt aus Satz 1.12.

(ii) Betrachte kanonische Injektion und zeige dann die Surjektivität.

□

**Beweis:** TODO

■

**Satz 3.19.**  $X$  Banachraum. Dann gilt

$$X \text{ reflexiv} \Leftrightarrow X' \text{ reflexiv}.$$

*Beweisskizze.*  $\Rightarrow$  Satz 3.18

$\Leftarrow$  nerviger Beweis.

□

**Beweis:** TODO

■

### 3.3 Duale und adjungierte Abbildungen

In diesem Abschnitt wird die duale Abbildung definiert. Wann ist dieser stetig? Was wissen über sein Kern und sein Bild? Wie hängen Injektivität und Surjektivität vom Operator und seinem Dualen zusammen. Was ist mit dem Dualen des Dualen? Welche Rechenregeln gelten? Folgt aus der Bijektivität eines Operatoren die Bijektivität seines Dualen und umgekehrt?

Wenn wir sogar einen Hilbertraum haben, können wir (noch stärker) einen adjungiert Operator einführen und diesen mit Hilfe der Riesz-Einbettung eindeutig charakterisieren. Auch für den adjungierten Operatoren werden einige Rechenregel gezeigt. Welche Gleichheiten gelten für Bild und Kern von Operatoren und seinem Adjungierten?

**Definition 3.20.**  $X, Y$  normierte Räume,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Die Abb  $T' : Y' \rightarrow X'$  mit

$$\langle x', T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle \quad \forall y' \in Y', x \in X.$$

heißt der zu  $T$  duale Operator.

Einfach zu sehen:  $T'$  ist eine linearer Operator, weil TODO.

**Satz 3.21.**  $X, Y$  normierter Räume,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann gilt

$$(i) \quad T' \in \mathcal{B}(Y', X') \text{ mit } \|T'\| = \|T\|$$

$$(ii) \quad \text{Ker } T' = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\text{Im } T} = Y$$

*Beweisskizze.* (i) Abschätzung in beide Richtung.

- (ii) Injektivität vom dualen Operatoren voraussetzen; ein Funktional das alle Elemente von  $x$  null, ist es das Nullfunktional. Angenommen das Bild ist nicht abgeschlossen, dass muss es ein Element geben, dass ungleich null ist. Widerspruch.

Andere Richtung, irgendetwas mit Stetigkeit und Dichtheit vom Bild.

□

**Beweis:** TODO

■

**Korollar 3.22.**  $X$  Banachraum,  $Y$  normierter Raum.  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ , so dass ein  $m > 0$  existiert mit

$$m \|x\| \leq \|Tx\| \quad \forall x \in X$$

. ( $T$  injektiv und hat abgeschlossenes Bild) Dann sind äquivalent

$$(i) \quad T \text{ surjektiv}$$

$$(ii) \quad T' \text{ injektiv}$$

*Beweisskizze.*  $T'$  injektiv gilt genau dann wenn der Abschluss vom Bild  $Y$  ist und dies gilt wegen der geforderten Ungleichung genau dann wenn, bereits nur das Bild gleich  $Y$ .

□

**Beweis:** TODO

■

**Satz 3.23.**  $X, Y$  normierter Räume,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann

$$(i) \quad T'' \in \mathcal{B}(X'', Y'') \text{ und } T = T''|_{\text{im } J_X} \text{ (genauer: } T''J_X = J_Y T \text{). Insbesondere } T'' = T, \text{ wenn } X \text{ reflexiv ist.}$$

$$(ii) \quad S \in \mathcal{B}(X, Y), \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow (\alpha S + \beta T)' = \alpha S' + \beta T'$$

$$(iii) \quad S \in \mathcal{B}(Y, Z) \Rightarrow (ST)' = T'S'$$

*Beweisskizze.*

□

**Beweis:** TODO

■

Notiz: hier motivation für folgendes Korollar mündlich.

**Korollar 3.24.**  $X, Y$  Banachräume,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann gilt

$$(T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \Leftrightarrow T \text{ bijektiv} \Leftrightarrow T' \text{ bijektiv} (\Leftrightarrow (T')^{-1} \in \mathcal{B}(X', Y'))$$

**Beweis:** TODO ■

Jetzt Fokus auf den Hilbertraum. Grob ist der Hilbertraum sein eigener Dualraum.

**Definition 3.25.**  $(X, (\cdot, \cdot)_X), (Y, (\cdot, \cdot)_Y)$  Skalarprodukträume.  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Ein Operator  $T^* \in \mathcal{B}(Y, X)$  heißt zu  $T$  adjungierter Operator, wenn

$$(Tx, y)_Y = (x, T^*y)_X \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

**Beispiel 3.26.**  $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$  mit euklidischem Skalarprodukt.  $A \in \mathbb{K}^{n \times m} = \mathcal{B}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \Rightarrow A^* = \overline{A}^T$

**Satz 3.27.**  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  Hilbertraum,  $(Y, (\cdot, \cdot)_Y)$  Skalarproduktraum. Dann existiert ein eindeutiges  $T^* \in \mathcal{B}(Y, X)$ . Für die Riesz-Einbettung  $R_X : X \rightarrow X', R_Y : Y \rightarrow Y'$  gilt

$$T^* = R_X^{-1} T' R_Y.$$

Im folgenden Satz sind die Voraussetzungen zum Teil etwas stärker als sie sein müssten.

**Satz 3.28.**  $X, Y, Z$  Hilberträume,  $S, T \in \mathcal{B}(X, Y), U \in \mathcal{B}(Y, Z)$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Dann gilt

- (i)  $(S + T)^* = S^* + T^*$ , da  $(S + T)^* = R_X^{-1}(S + T)'R_Y = R_X^{-1}S'R_Y + R_X^{-1}T'R_Y = S^* + T^*$ .
- (ii)  $(UT)^* = T^*U^*$ , da  $(UT)^* = R_Y^{-1}(UT)'R_Z = R_X^{-1}T'R_Y R_Y^{-1}U'R_Z = T^*U^*$
- (iii)  $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$ , da  $(\alpha T)^* = R_X^{-1}(\alpha T)'R_Y = R_X^{-1}\alpha T'R_Y = \overline{\alpha}R_X^{-1}T'R_Y = \alpha T^*$
- (iv)  $(id_X)^* = id_X$ , da TODO
- (v)  $T^{**} = T$ , da TODO
- (vi)  $\|T^*\| = \|T\|$ , da TODO
- (vii) Existiert  $T^{-1}$ , dann auch  $(T^*)^{-1}$ , und es gilt  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$  (Folgt aus Kor. 3.24)

**Satz 3.29.**  $X, Y$  Hilberträume,  $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Dann gilt

- (i)  $(imA)^\perp = KerA^*$
- (ii)  $(imA^*)^\perp = KerA$
- (iii)  $\overline{imA} = (KerA^*)^\perp$
- (iv)  $\overline{imA^*} = (KerA)^\perp$

### 3.4 Schwache Konvergenz

**Definition 3.30.**  $X$  normierter Raum. Eine Folge  $(x_n)$  in  $X$  heißt

a) schwache Cauchy-Folge, wenn

$$\langle x_n, x' \rangle \text{ CF ist } \forall x' \in X$$

b) schwach konvergent gegen  $x \in X$ , wenn

$$\langle x_n, x' \rangle \rightarrow \langle x, x' \rangle \quad \forall x' \in X'$$

(schreibe  $x_n \rightharpoonup x$ )



Eine Folge  $(x'_n)$  in  $X'$  heißt

a) *schwach\* Cauchy-Folge*, wenn

$$\langle x, x'_n \rangle \text{ CF ist } \forall x \in X$$

b) *schwach\* konvergent* gege  $x' \in X'$ , wenn

$$\langle x, x'_n \rangle \rightarrow \langle x, x' \rangle \quad \forall x \in X$$

$$(\text{schreibe } x'_n \xrightarrow{*} x')$$

Eine Menge  $M \subset X$  ( $M \subset X'$ ) heißt *schwach (schwach\*) Folgenkompakt*, wenn jede Folge in  $M$  eine schwach (schwach\*) konvergente Teilfolge besitzt, deren schwacher (schwacher \*) Grenzwert in  $M$  liegt.

*Bemerkung 3.31.* a)  $x_n \rightarrow x \Rightarrow J_x x_n \xrightarrow{*} J_x x_n$ , da  $\langle x_n, x' \rangle = \langle x', J_x x_n \rangle$

b) Wenn  $(x_n)$  schwach konvergiert, dann ist der schwache Limes eindeutig.  $x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow y$   
 $\langle x, x' \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x' \rangle = \langle y, x' \rangle \quad \forall x' \in X' \Rightarrow 0 = \langle x - y, x' \rangle \quad \forall x' \in X' \xrightarrow{\text{Kor 3.4}} x - y = 0 \Rightarrow x = y$

c)  $x'_n \xrightarrow{*} x'$ , dann  $(\|x'_n\|)$  beschränkt und  $\|x'\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x'_n\|$  (Banach-Steinhaus)

d)  $x_n \rightarrow x$ , dann  $(\|x_n\|)$  beschränkt und  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$  (gilt wegen a) und c))

e)  $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightarrow x$   
 $x'_n \rightarrow x' \Rightarrow x'_n \xrightarrow{*} x'$

f) Umkehrung in e) gilt i.A nicht: z.B. betrachte  $e_n = (\delta_{in})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ . Dann gilt für  $x' \in \ell^{2'} : x = R_{\ell^2}^{-1} x' = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_n, x' \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (e_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = 0 \Rightarrow e_n \rightarrow 0$

g)  $x_n \rightarrow x, x'_n \xrightarrow{*} x' \text{ df } \langle x_n, x'_n \rangle \rightarrow \langle x, x' \rangle$ , weil  $|\langle x_n, x'_n \rangle - \langle x, x' \rangle| \leq |\langle x, x' - x'_n \rangle| + \|x_n\| \cdot \|x'_n\| \rightarrow 0$

h)  $x_n \rightarrow x, x'_n \rightarrow x' \Rightarrow \langle x_n, x'_n \rangle \rightarrow \langle x, x' \rangle$  wie in g).

i) Aus  $x_n \rightarrow x, x'_n \xrightarrow{*} x'$  folgt i.A. nicht  $\langle x_n, x'_n \rangle \rightarrow \langle x, x' \rangle$ .

Bsp.  $x_n = e_n \in \ell^2, x'_n = R_{\ell^2} e_n \Rightarrow x_n \rightarrow 0, x'_n \xrightarrow{*} 0$ , aber  $\langle x_n, x'_n \rangle = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

j)  $\dim X < \infty \Rightarrow (x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightarrow x) \& (x'_n \xrightarrow{*} x \Leftrightarrow x'_n \rightarrow x')$

k)  $X$  reflexiv, dann  $x'_n \rightarrow x \Leftrightarrow x'_n \xrightarrow{*} x'$  ("  $\Rightarrow$  " gilt auch ohne Reflexivität)

GANZ viel zu Beispielen in  $\ell_p$  Räumen.

**Satz 3.32** (Satz von Banach-Alaoglu).  $X$  separabler Banachraum. Dann gilt  $\overline{U_1^{x'}(0)} = \{x' \in X' : \|x'\| \leq 1\}$  ist schwach\* folgenkompakt.

*Beweisskizze.* Nehme solange Teilfolgen bis man nicht mehr weiß was die Folge eigentlich ist. Und dann mit Banach-Steinhaus argumentieren: Fertig.  $\square$

**Beweis:** TODO ■

**Lemma 3.33.**  $X$  normierter Raum. Dann

$$X \text{ reflexiv} \Leftrightarrow \text{Jeder abgeschlossen UVR von } X \text{ ist reflexiv.}$$

*Beweisskizze.*  $\square$

**Satz 3.34.**  $X$  reflexiv. Dann ist  $U_1(0) \subset X$  schwach folgenkompakt.

# Anhang A

## Etwaige Begriffe

1. **Hausdorffsch, Hausdorffeigenschaft** - Eine Menge heißt *hausdorffsch*, wenn je zwei versch. Punkte stets disjunkte Umgebungen haben. Metrische Räume sind zum Beispiel hausdorffsch, da zwei versch. Punkte stets einen Abstand  $> 0$  haben. Für ein Gegenbeispiel  $\nearrow$  topologischer Raum

2. **essentiell beschränkt** -  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  sei ein Maßraum. Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt essentiell beschränkt, falls

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \in \mathfrak{A} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| < \infty$$

oder auch:  $f$  ist fast überall beschränkt. Ein Beispiel ist  $f(x) := x \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$  und  $\mu = \lambda$ , da  $f$  nur auf  $\mathbb{Q}$  nicht null ist, und  $\mathbb{Q}$  ist Lebesgue-Nullmenge.

3. **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{T})$  - Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T} \subseteq P(X)$ . Die Elemente von  $\mathcal{T}$  sind die *offenen Mengen*.  $\mathcal{T}$  definiert eine *Topologie*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- (ii)  $A_i \in \mathcal{T}$  für  $i \in I$ ,  $\mathbb{N} \supset I$  endlich  $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
- (iii)  $A_i \in \mathcal{T}$  für  $i \in I$ ,  $I$  bel. Indexmenge  $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$  ist der *topologische Raum*.

Ein Beispiel, für einen topologischen Raum sind die metrischen Räume  $(X, d)$ :  $d$  induziert dann eine Topologie auf  $X$ , die offenen Mengen sind nämlich durch  $d$  bestimmt.

Sei  $M := \{1, 2\}, \dots$

$\mathcal{T} := \{\emptyset, M\}$ . Die triviale Topologie, nur  $\emptyset$  und  $M$  sind offen.

$\mathcal{T} := P(M)$ . Die diskrete Topologie, alle Mengen sind offen. Die diskrete Metrik induziert genau diese Topologie.

$\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ .  $M$  ist hier nicht hausdorffsch, denn egal welche Umgebung man um 2 betrachtet, man kann nicht erreichen, dass 1 nicht in der gleichen ist.