Sei M topologische Raum mit
$M \neq \emptyset$, M erfüllt zweites Abzählbarkeitsaxiom und ist Hausdorffsch.

Dann heißt M topologische Mannigfaltikeit der Dimension n, falls es zu jedem Punkt $p \in M$ eine in M offene Umgebung U und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ existiert.

(U, φ) nennt man eine `Karte` von M.

Sei M top. Mf. und $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ eine Familie von Karten von M.

Dann heißt $\mathcal{A}$ ein (C^∞)-`Atlas`, falls folgendes gilt:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
2. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta$ ist C^∞ für alle $\alpha, \beta \in A$.

   (Die Abbildungen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ heißen `Karten- oder Koordinatenwechsel`.)

Sei $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas.

Dann heißt $\mathcal{A}$ eine (C^∞)-`differenzierbare Struktur`, falls folgendes erfüllt ist:

3. $\mathcal{A}$ ist maximal in dem Sinne, dass eine Karte (U, φ) bereits zu $\mathcal{A}$ gehört, falls für alle $\alpha \in A$ folgende Abbildungen C^∞
$$\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \varphi(U \cap U_\alpha)$$
$$\text{und } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

Sei M eine n-dim. topologische Mf und $\mathcal{A}$ eine differenzierbare Struktur.

Eine n-`dimensionale Mannigfaltigkeit` ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$.

Notiz 1: Zu jeder diffb. Mf gibt es stets einen abzählbaren Atlas.
(Begründung: Abzählbare Basis von M)

Notiz 2: Ein C^∞ Atlas induziert eine eindeutige *differenzierebare Struktur*.

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine nichtleere Teilmenge.

M heißt n-`dim. Untermannigfaltigkeit von` $\mathbb{R}^k$, wenn es

1. zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ und
2. einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^k$ gibt, so dass

$$\varphi(M \cap U) = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^k | x_{n+1} = \cdots = x_k = 0\} \cap V.$$

Notiz: Man kann eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ auch als differenzierbare Mf auffassen.

Seien $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\})$ und $(N, \{(V_\beta, \psi_\beta) | \beta \in B\})$ differenzierbare Mf und $f : M \to N$ stetig.

Dann heißt f `differenzierbar` oder auch `glatt`, wenn

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$$

für alle $\alpha \in A, \beta \in B$ C^∞ ist.

Wir setzen:

$$C^\infty := \{f : M \to N | f \text{ ist } C^\infty\}$$

Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung.

f heißt ein `Diffeomorphismus`, falls f und f^{-1} differenziert sind.

Existiert ein Diffeomorphismus zwischen zwei differenzierbaren Mf M und N, so heißen M und N diffeomorph.

Es seien $U_i \subset M$, $p \in U_i$, $i = 1, 2$, $f_i \in C^\infty(U_i, \mathbb{R})$ beliebig.

Wir definieren für beliebig $i, j = 1, 2$ und $f_{i,j}$ wie oben eine Äquivalenzrelation

$$f_i \sim f_j :\Leftrightarrow \exists V \subset M, p \in V : f_i|_V = f_j|_V$$

Nun definieren wir folgende Menge

$$\mathcal{F}_p := \{f : U \to \mathbb{R} | U \subset M \text{offen}, p \in U, f \text{differenzierbar}\} / \sim$$

und bezeichnen ihre Elemente als `Funktionskeime` und schreiben für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $p \in U$ für den Funktionskeim $[f]$.

`Bemerkung:` $\mathcal{F}_p$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra mit

$$[f] + [g] := [f + g], [f] \cdot [g] := [fg]$$

Zudem ist

$$v : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}, [f] \mapsto v([f]) := f(p)$$

ist wohldefiniert. Man kann ein Funktionskeim aber in keinen anderen Punkt außer p auswerten.

Es sei M eine diffb. Mf und sei

$$v : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R},$$

eine lineare Abbildung, die die sogenannte Leibniz-Regel erfüllt, d.h.

$$v([f] \cdot [g]) = v([f]) \cdot g(p) + f(p) \cdot v([g]).$$

Dann nennen wir v einen `Tangentialvektor an` M `von` p.

Die Menge

$$T_pM := \{v \text{ ist Tangentialvektor von } M \text{ in } p\}$$

versehen mit der Vektorraumstuktur

$$(v+w)[f] := v([f]) + w([f]), \quad (\alpha v)[f] := \alpha \cdot v([f])$$

heißt `Tangentialraum von` M `in` p.

Ist $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, so schreiben wir $v(f) := v([f])$

.

Sei M differenzierbar Mf, (U, φ) eine Karte um $p \in U$:
$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$.

Ist $u_1, \ldots, u_n$, so, dass

$$u_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u_i(v_1, \ldots, v_n) = v_i$$

ist, so heißen die $u_1, \ldots, u_n$ `Standardkoordinaten von` $\mathbb{R}^n$.

Nun definieren wir durch

$$x_i := u_i \circ \varphi, \quad \text{also} \quad \varphi = (x_1, \ldots, x_n)$$

die `lokalen Koordinaten` $x_1, \ldots, x_n$.

Sei M diffb. Mf, (U, φ) eine Karte um p mit lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$.

Wir definieren

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad [f] \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p [f] := \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)).$$

Nun gilt: $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ ist ein Tangentialvektor an p.

TODO: hier auch Bsp 1.4.5

Sei M eine n-dim diffb. Mf, $p \in M$.

Dann ist

$$\{\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p\}$$

eine Basis von T_pM und für $v \in T_pM$ gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p.$$

Es folgt daraus $\dim(M) = \dim(T_pM)$.

Sei M diffb. Mf, $p \in M$, $F : M \to N$ differenzierbar.

Die lineare Abbildung

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

gegeben durch

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F)$$

nennen wir das `Differential von` F `in` p

.

Sei M,N n-dim bzw. m-dim diffb. Mf, $p \in M$, $F \in C^\infty(M, N)$. Weiter sei

- (U, φ) Karte um p mit lokalen Koordinanten $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ und
- (V, ψ) Karte um $F(p)$ mit lokalen Koordinaten $\psi = (y_1, \dots, y_m)$.

Dann gilt:

Die Matrix von dF_p bzgl der Basen $(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p)$ und $(\frac{\partial}{\partial y_i}\big|_{F(p)})$ ist gleich der Jacobimatrix von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$.

Sei M,N,L differenzierbare Mf, $p \in M$ und
$F \in C^\infty(M, N)$ und $G \in C^\infty(N, L)$.

Dann gilt:

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

Sei M differenzierbare Mf, $a, b \in \mathbb{R}$, $I = (a, b)$.
Zu $c \in C^\infty(I, M)$ sagen wir auch `glatte Kurve in M`.

Weiter definieren wir für $t \in (a, b)$:

$$c'(t) = \dot{c}(t) := dc_t(\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_t) \in T_{c(t)}M.$$

Mit $c : [a, b] \to M$ meinen wir :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \overline{c} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to M \quad : \quad \overline{c}|_{(a,b)} = c$$

Sei M differenzierbare Mf, $F \in C^\infty(M, N)$, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Weiter sei $I = (a, b)$, $0 \in I$ und $c \in C^\infty(I, M)$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$.

Dann gilt:

$$dF_p(v) = (F \circ c)'(0).$$

Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit. I, A beliebige Indexmengen, $\varphi_i \in C^\infty(M)$ für alle $i \in I$ und $(\varphi_i)_{i\in I}$ eine Familie. $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ sei eine offene Überdeckung von M.

Gilt:

1. die Träger der φ_i sind für alle $i \in I$ lokal endlich, d.h.

$$\forall p \in M \exists U \subset M, p \in U : U \cap \operatorname{supp} \varphi_i \neq \emptyset \quad \text{für höchstens endliche viele } i \in I$$

2. Summe der Funktionenswerte ist 1 in jedem Punkt, genauer:

$$\sum_{i\in I} \varphi_i(p) = 1 \forall p \in M \quad \text{und} \quad \varphi_i(p) \geq 0 \forall p \in M, \forall i \in I,$$

so heißt die Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ `eine Zerlegung des Eines von` M.

Gilt:

$$\forall i \in I \; \exists \alpha \in A : \operatorname{supp} \varphi_i \subset U_\alpha,$$

so heißt die Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ der `Überdeckung` $\mathcal{U}$ `untergeordnet`.

Sei M diffb Mf, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von M.

Dann existiert eine abzählbare differenzierbare Zerlegung der Eins, der $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.

Korollar:

Sei $U \subset M$ offen, $A \subset U$ abgeschlossen in M, $f \in C^\infty(U)$.

Dann gibt $g \in C^\infty(M)$ mit $g|_A = f|_A$ und $g|_{M \setminus U} = 0$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

Ist $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für ein $p \in U$ invertierbar, dann gilt

1. es gibt eine Umgebung V von p und W von $f(p)$, so dass $f|_V : V \to W$ in Diffeomorphismus ist.
2. Das Differential von f^{-1} in $q \in W$ ist gegeben durch

$$(df^{-1})_q = (df_{f^{-1}(q)})^{-1}$$

Dieser Satz gilt auch für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$.

Seien M, N differenzierbare Mf gleicher Dimension.
$U \subset M$ offen, $f \in C^{\infty}(U, N)$.

Existiert ein $p \in U$, so dass $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ invertierbar ist, so existiert eine Umgebung V um p und $W \subset N$ um $f(p)$, so dass

$$f|_V : V \to W$$

ein Diffeomorphismus ist.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$.
$f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ mit $f(0) = 0$.

1. Ist $n \leq k$ und das Differential df_0 injektiv, so gibt es ein Diffeomorphismus ψ um $0 \in \mathbb{R}^k$ und φ um $0 \in R^n$, so dass

   $$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-n})$$

   für $(x_1, \dots, x_n)$ in der entsprechenden Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^k$.

2. Für $n \geq k$ analog Aussage für df_0 surjektiv.

M, N seien differenzierbare Mf. $F \in C^{\infty}(M, N)$.

Wenn $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$ injektiv ist, so heißt F eine `Immersion`.

Weiter nennen wir $F(M)$ eine `immersierte Untermannigfaltigkeit von` N.

M, N seien differenzierbare MF.
$F \in C^\infty(M, N)$ sei eine Immersion und injektiv.
$F(M)$ sei mit der Teilraumtopologie ausgestattet.

Falls $F : M \to F(M) \subset N$ ein Homöomorphismus ist, so heißt F eine `Einbettung`.

$F(M)$ heißt dann `eingebettete Untermannigfaltigkeit von` N.

M,N seien n- bzw. k-dim. diffb. Mf,
$F : M \to N$ eine Immersion und $p \in M$.

Dann gibt es eine Umgebung U von p in M und eine Karte (V, ψ) von N um $F(p)$, wobei $\psi = (y_1, \ldots, y_k)$, so dass

1. $y_{n+1}(q) = \cdots = y_k(q) = 0$ für alle $q \in V \cap F(U)$ und
2. $F|_U$ ist eine Einbettung.

Die Karte (V, ψ) heißt `Untermannigfaltigkeitskarte`.

Seien M, N, P diffb. Mf.

1. Satz 1 liefert als Spezialfall: Für $F : M \to \mathbb{R}^k$ ist $F(M)$ gerade eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ im Sinne der früheren Definition. (Kapitel 1.2, Begriff der differenzierbaren Mf)

2. Einschränkung des Abbildungsraum: Für $F \in C^\infty(M, N)$, $i : P \to M$ eine Einbettung.

   Dann heißt $F \circ i \in C^\infty(P, N)$ die `Einschränkung von` F `auf` P.

   Man schreibt auch $F|_P : P \to N$. Dabei ist wegen $i(P) \subset M$, dies als Einschränkung des Abbildungsraum zu interpretieren.

M, N, P seien diffb Mf, $F \in C^\infty(M, N)$, $i : P \to N$ eine Einbettung.
Es sei weiter: $F(M) \subset i(P)$ und $G : M \to P$ durch $F(p) = i(G(p))$ definiert $^{\text{(wohldefiniert, da } i \text{ injektiv)}}$.

Dann gilt:

1. Falls i eine Einbettung ist, so ist G stetig.

2. Falls G stetig ist, so ist G glatt.

M, N differenzierbare Mf, $F \in C^\infty(M, N)$.

Ist für $p \in M$ das Differential $df_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektiv, dann heißt p `regulärer Punkt`.
Andernfalls `kritischer Punkt`.

Sind für $q \in N$ alle Punkte $p \in F^{-1}(q)$ regulär, so heißt q `regulärer Wert`.
Andernfalls `kritischer Wert`.

Es seien M, N n- bzw. k-dim. Mf. $F \in C^\infty(M, N)$, $q \in F(M)$ ein regulärer Wert. Es sei $F^{-1}(q) \subset M$ versehen mit Teilraumtopologie.

Dann gilt:

1. $F^{-1}(q)$ ist eine $n - k$-dim. topologische Mf.
2. Es existiert eine eindeutige differenzierbare Struktur auf $F^{-1}(q)$, so dass $i : F^{-1}(q) \to M$ ein Einbettung ist und damit insbesondere:

   $i(F^{-1}(q))$ ist eine eingebettete Unter-Mf von M.

N seien diffb. Mf. Es sei $M \subset N$ versehen mit der Teilraumtopologie eine topologische Mf.

Dann gilt:

Trägt M eine differenzierbare Sturktur bezüglich derer $i : M \to N$ eine Einbettung ist, so ist diese differenzierbare Struktur eindeutig.

2 Bsp zum Satz vom regulären Wert.

und folgende Bem:

TODO, Auch falls $M \subset N$ gilt , ist T_pM nicht auf natürlicheweise ein Unterraum von T_pN. Betrachte: $di_p(T_pM) \subset N$.
TODO wie identifiziert man T_pM und $di_p(T_pM)$.?

Sei M, E diffb Mf. Für eine $U \subset M$ sei $pr_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U, (u, x_1, \ldots, x_k) \mapsto u$.
Es sei $\pi \in C^\infty(E, M)$ und surjektiv.

Falls für alle $p \in M$ gilt:

1. $E_p := \pi^{-1}(p)$ ist ein k-dimensionaler Vektorraum.
2. Es existiert eine Umgebung $U \subset M$ von p und ein Diffeomorphismus:

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k,$$

so dass gilt:

$$\pi = pr_1 \circ \varphi \text{ und } \varphi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k \overset{\sim}{=} \mathbb{R}^k \text{ ist linear.}$$

Dann heißt das Paar (E, π) ein (C^∞)-**Vektorbündel vom Rang** k **über** M.

- Das Urbild eines(!) Punktes heißt auch Faser, also: $E_p := \pi^{-1}(p)$ heißt `Faser von` p.
- E heißt `Totalraum`.
- M heißt `Basis des Vektorbündels` E
- φ heißt `lokale Trivialisierung`.

Sei M,E diffb Mf. (E, π) ein C^∞-Vektorbündel. Es sei $s \in C^\infty(M, E)$.

Gilt:

$$\pi \circ s = id_M, \text{ also } \pi(s(p)) = p \quad \forall p \in M,$$

so heißt s ein `Schnitt von` E.

Die Menge aller Schnitte von E wird mit $\Gamma(E)$ bezeichnet.

Ist s nur auf einer offenen Teilmenge definiert, so spricht man von einem `lokalen Schnitt von` E.

Notiz: $\Gamma(E)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zudem ist für $s \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(E)$, $(fs)(p) := f(p) \cdot s(p)$ auch $fs \in \Gamma(E)$. Wobei diese skalare Multiplikation in E_p zuverstehen ist.
Algebraisch ist $\Gamma(E)$ ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$.

TODO

Elemente in $\Gamma(TM)$ heißen `(differenzierbare) Vektorfelder auf` M.

Für $U \subset M$ offen und $X \in \Gamma(TU)$ spricht man von `lokalen Vektorfeldern auf` M.

Sei $X \in \Gamma(TM)$, $p \in M$, $f \in C^\infty(M)$, so definieren wir

$$X(f) : M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto X_p(f).$$

$X(f)$ nennt man `Richtungsableitung` ???

TODO Bsp $(\frac{\partial}{\partial x_i})$

für eine Vektorfeld.

TODO

$\Gamma(TU)$ ist ein freier Modul über $C^\infty(U)$ mit Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$

$\Gamma(TM)$ ist ein Modul über $C^\infty(M)$

$X \in \Gamma(TM)$ sind Derivationen auf $C^\infty(M)$.

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Sei V ein K-VR und $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ eine Abbildung, für die gilt:

1. bilinear
2. antisymmetrisch ($[v,w] = -[w,v]$)
3. Jacobiidentiät

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$$

Dann heißt $(V,[\cdot,\cdot])$ eine `Liealgebra`. Die Abbildung $[\cdot,\cdot]$ heißt die `Lieklammer` dieser Liealgebra.

Es ist $\Gamma(TM)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Weiter sei

$$[\cdot,\cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

gegeben durch

$$[X,Y] : M \to T_pM,\ p \mapsto [X,Y]_p := [X,Y](p) = X_pY - Y_pX.$$

Es ist zu zeigen, dass dies wohldefiniert ist, dass also

$$[X,Y]_p : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}, [f] \mapsto [X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

die Leibnisregel erfüllt.

Weiter gilt:

$(\Gamma(TM), [\cdot,\cdot])$ ist eine reelle Lielalgebra.

Sei X ein Vektorfeld auf M, $\alpha : (a, b) \to M$ eine differenzierbare Kurve.

Dann heißt α eine `Integralkurve von X`, falls

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)} \quad \forall t \in (a, b)$$

Sei (U, φ), $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ und $\alpha_i = x_i \circ \alpha$.

Wir setzen

$$F_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}, \quad F_i(\varphi(q)) = (Xx_i)(q) = X_q(x_i)$$

Dann gilt

$$\alpha \text{ ist Integralkurve von } X \Leftrightarrow \alpha_i'(t) = F_i(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)),\ i = 1, \dots, n$$

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar. I bezeichne Intervall.

Dann gilt:

1. **Existenz:**
$$\forall q \in V \; \exists I \ni 0, c \in C^\infty(I, V) \text{ mit } c(0) = q, c'(t) = F(c(t))$$

2. **Eindeutigkeit:** Gilt für $c_i \in C^\infty(I, V)$, $i = 1, 2$
$$c_i'(t) = F(c_i(t)) \quad (i = 1, 2)$$
und
$$\exists t_0 \in I : c_1(t_0) = c_2(t_0)$$
Dann gilt $c_1 = c_2$.

Sei X ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mf. I, J seien Intervall.

Dann gilt:

1. `Existenz:` Es gibt durch jeden $p \in M$ eine Integralkurve von X, d.h.:

$$\forall p \in M \ \exists I \ni 0, \alpha \in C^\infty(I, M) \text{ mit } \alpha(0) = p, \alpha'(t) = X_{\alpha(t)}.$$

2. `Eindeutigkeit:` Sind $\alpha_i : I \to M$ mit $i = 1, 2$ zwei Integralkurven von X mit $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, dann gilt $\alpha_1 = \alpha_2$.

Weiter folgt:

Es gibt zu jedem $p \in M$ eine maximal definierte Integralkurve $\alpha \in C^\infty(I, M)$ mit $\alpha(0) = p$, d.h.

$$\exists \beta \in C^\infty(J, M) \text{ mit } 0 \in J, \beta(0) = p, \beta'(t) = X_{\beta(t)},$$

so gilt

$$J \subset I \text{ und } \alpha|_J = \beta$$

Sei M diffb. Mf, X Vektorfeld auf M.

Dann existiert eine Umgebung U um $p \in M$, ein Intervall I mit $0 \in I$, sowie

$$\Phi \in \mathbb{C}^{\infty}(I \times U, M):$$

so dass gilt

1. $\Phi(0, q) = q$ für alle $q \in U$.
2. $\alpha : I \to M$, $t \mapsto \Phi(t, q)$ ist eine Integralkurve von X mit Anfangsbedingun $\alpha(0) = q$, d.h.
$$\alpha'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, q) = X_{\alpha(t)=\Phi(t,q)}$$

Dann heißt $\Phi \in C^{\infty}(I \times U, M)$ `lokaler Fluss` von X.

Falls $I = \mathbb{R}$, $U = M$ so heißt $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times M, M)$ **`globaler Fluss`**.

Es gilt weiterhin, dass wenn $t, s \in I$, $q \in U$, ist $\Phi(t, q) \in U$ und

$$\Phi(s, \Phi(t, q)) = \Phi(s + t, q)$$

Sei M diffb. Mf, X Vektorfeld auf M.

Dann heißt X `vollständig`, wenn durch jeden Punkt $p \in M$ eine Integralkurve läuft, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, wenn also

$$\forall p \in M \ \exists \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, M) \text{ mit } \alpha(0) = p, \alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist.

Sei M diffb. Mf.

Ist M kompakt, so ist jedes Vektorfeld auf M vollständig.

Sei M diffb. Mf.

Ist X ein vollständiges Vektorfeld, dann existiert ein globaler Fluss auf X.

Definition (Einparametergruppe von Diffeomorphismen)

Sei M diffb. Mf. X ein vollständiges Vektorfeld. $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ der globale Fluss von X.

Wir definieren:

$$\Phi_t : M \to M,\ p \mapsto \Phi_t(p) := \Phi(t, p)$$

Dann ist

$$\Phi_{t+s}(p) = \Phi(t+s, p) = \Phi(t, \Phi(s, p)) = (\Phi_t \circ \Phi_s)(p)$$

also

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s, \quad \Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}, \quad \Phi_0 = id_M$$

Damit definieren wir

Sei $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ und gilt für $\Psi_t : t \mapsto \Psi(t, p)$,

$$\Psi_0 = id_M \quad \text{und} \quad \Psi_{t+s} = \Psi_t \circ \Psi_s \; \forall t, s \in \mathbb{R}$$

so heißt Ψ `Einparametergruppe von Diffeomorphismen`.

Hier ausführen wie vollständige Vektorfelder und Einparametergruppen einandern zugeordnet werden können.
TODO

Es sei V ein endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V.

Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ `nichtentartet`, falls

$$\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists w \in V : \langle v, w \rangle \neq 0.$$

Oder gleich bedeutend damit:

- Die lineare Abbildung $V \to V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ ist injektiv, d.h.

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0$$

- Für (beliebige) $v_1, \ldots, v_n$ Basis von V gilt

$$\det(g_{ij}) \neq 0 \qquad \text{mit } g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Sei V ein endlich-dim. $\mathbb{R}$-VR.
Und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei eine nichtentartete symmetrische Bilinearform.

- Eine nichtentartete symmetrische Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V heißt auch `pseudo-Euklidisches Skalarprodukt`.
- $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt `pseudo-Euklidscher Vektorraum`.
- $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sei ein n-dim. pseudo-Euklidscher Vektorraum und p die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv-definit ist, so heißt $(n-p, n)$ `die Signatur von` V.

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zusätzlich positiv-definit, so ist die Signatur $(0, n)$ und

- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt dann `(Euklidsches) Skalarprodukt`.
- $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt ein `Euklidscher Vektorraum`.

Sei M eine diffb. Mf, $g \in \Gamma(T_2^0(M))$.

Falls gilt

$g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ist für alle $p \in M$ ein pseudo-Euklidisches Skalarprodukt auf T_pM,

so heißt, das symmetrische $(0,2)$-Tensorfeld g eine `pseudo-Riemannsche Metrik`.

Das Paar (M, g) heißt `pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit`.

Sei nun $g_p := g(p)$ für alle $p \in M$ positiv-definit,

dann heißt g eine `Riemannsche Metrik` und (M, g) eine `Riemannsche Mannigfaltigkeit`.

Sei (M, g) eine zusammenhängende pseudo-Riemannsche Mf, so ist die Signatur aus stetigkeitsgründen von g_p konstant auf M.

Allgemein nennt man eine konstante Signatur, die `Signatur von` M.

Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mf der Signatur (1,p).

Dann heißt (M, g) eine `Lorentz-Mannigfaltigkeit`

TODO, per Hand
insbesondere zu Untermannigfaltigkeiten und Produktmannigfaltigkeiten
Auch wie man (g_{ij}) als Matrix auffassen kann und Satz von Sylvester

Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M existiert eine Riemannsche Metrik.

Notiz: Diese Aussage gilt nicht für pseudo-Riemannsche Mf.

Sei M eine differenzierbare Mf.
Weiter sei eine Abbildung gegeben durch

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

die folgende Eigenschaften für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ (C^∞-`linear in 1. Komponente`)
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_Y Z$ (`additiv in 2. Komponente`)
   $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ (`‘‘Produktregel’’ in 2. Komponente`)

Dann heißt ∇ eine `(affinier) Zusammenhang` oder `kovariante Ableitung`.

Sei M differenzierbare Mf, $p \in M$ und ∇ eine affinier Zusammenhang.

Dann gilt für alle $X_1, X_2, Y \in \Gamma(TM)$:

$$\text{Falls } X_1(p) = X_2(p), \text{ so folgt } (\nabla_{X_1} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p)$$

Folgerung: $v \in T_pM$ kann zu einem beliebigen Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ fortgesetzt werden. Sei $Y \in \Gamma(TM)$ so setzen wir:

$$(\nabla_v Y) := (\nabla_X Y)(p).$$

Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung, d.h. dass sie unabhängig von der Wahl der Erweiterung ist, folgt gerade aus Satz 1.

Sei M diffb. Mf und $A : \overbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}^{s\text{-mal}} \to \Gamma(TM)$ eine s-multilineare Abbildung für die gilt, dass für alle $f \in C^\infty(M)$ und für alle $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$:

$$A(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_s) = fA(X_1, \dots, X_s) \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}.$$

Dann existiert ein $(1, s)$-Tensorfeld $B \in \Gamma(T^1_s(M))$ auf M, so dass

$$A(X_1, \dots, X_s)(p) = B_p(X_1(p), \dots, X_s(p)) \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM), \forall p \in M.$$

· Eine analoge Aussage gilt für (r, s)-Tensorfelder. Hier betrachtet man multilineare Abbildung

$$A : \underbrace{\Gamma(T^*M) \times \cdots \times \Gamma(T^*M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{s\text{-mal}} \to C^\infty(M),$$

die $C^\infty(M)$-linear in jedem Eintrag sind.

TODO Seite 36

$X \mapsto \nabla_X Y$ ist eine $(1,1)$-Tensorfeld.

Sei M eine diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇,
$p \in M$, $v \in T_pM$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$.

Gilt, dass Y_1 und Y_2 in einer Umgebung übereinstimmen, so folgt $\nabla_v Y_1 = \nabla_v Y_2$.

Sei M diffb. Mf, (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ lokale Koordinaten auf M.

Als Konsequenz der Sätze dieses Abschnitts ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} : U \to TU$$

wohldefiniert.

Als Element in $\Gamma(TU)$ können wir es in eine Basis schreiben

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

und definieren darüber die `Christoffel-Symbole` $\Gamma_{ij}^{k} \in C^\infty(U)$, welche den Zusammenhang ∇ auf U bestimmen.

Sei M diffb. Mf, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$

Eine differenzierbare Abbildung

$$X : I \to TM,\ t \mapsto X_t := X(t) \text{ mit } X_t \in T_{c(t)}M\ \forall t \in I$$

heißt `Vektorfeld längs` c.

Wir bezeichnen den Raum der Vektorfelder längs c mit $\Gamma_c(TM)$.

NOTIZ: $\dot{c}$ ist ein Vektorfeld längs c.
Genauso wie $X \circ c$ mit $X \in \Gamma(TM)$, $c \in C^\infty(I, M)$. Andersherum ist nicht jedes Vektorfeld längs einer Kurve Einschränkung eines Vektorfeldes auf M. Diese Aussage sollte jedoch lokal gelten.

NOTIZ: $\Gamma_c(M)$ ist ein Modul über $C^\infty(I)$.

NOTIZ: Für $X \in \Gamma(TM)$ ist $(\nabla_{\dot{c}}X)(t) := \nabla_{\dot{c}(t)}X \in \Gamma_c(TM)$.

Sei M diffb. Mf mit affinem Zusammenhang ∇, $I = [a, b] \in \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$.

Dann existiert eine eindeutige Abbildung

$$\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_c(TM) \to \Gamma_c(TM), \quad X \mapsto \frac{\nabla}{dt} X,$$

die folgende drei Eigenschaften erfüllt für alle $X, Y \in \Gamma_c(TM)$, $f \in C^\infty(I)$:

1. $\frac{\nabla}{dt}(X + Y) = \frac{\nabla}{dt} X + \frac{\nabla}{dt} Y$
2. $\frac{\nabla}{dt}(fX) = f'X + f \frac{\nabla}{dt} X,$

ist $X = Z \circ c$ für ein $Z \in \Gamma(TM)$, so gilt weiter

3. $\frac{\nabla}{dt} X = \nabla_{\dot{c}} Z.$

$\frac{\nabla}{dt}$ heißt auch `kovariante Ableitung längs` c `bzw. einer Kurve`.

Weiter gilt in lokalen Koordinaten (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ und $f_i \in C^\infty(c^{-1}(U))$:

$$\text{Für } X = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \circ c \quad \text{ist} \quad \frac{\nabla}{dt} X = \sum_k \left(f_k' + \sum_{ij} (x_i \circ c)' f_j \Gamma_{ij}^k \circ c \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \circ c$$

Sei M diffb. Mf, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$ und $X \in \Gamma_c(TM)$.

Falls $\frac{\nabla}{dt} X = 0$ gilt, so heißt das Vektorfeld X längs c `parallel`.

Sei M diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$ und sei $v \in T_{c(a)}M$.

Dann existiert ein eindeutiges paralleles Vektorfeld X längs c, so dass $X(a) = v$.

$$\exists! X \in \Gamma_c(TM) : X(a) = v \quad \text{AWP}$$

Notiz: $\Gamma_c(TM)$ ist ein Vektorraum und dieser Satz zeigt, eine Basis dieses Vektorraums zu jedem $t \in I = [a, b]$ eine Basis des Tangentialraums $T_{c(t)}M$ liefert. ((und) andersherum ?)

Sei M diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$
und sei
$X \in \Gamma_c(TM)$ das eindeutige Vektorfeld mit $X(a) = v \in T_{c(a)}$.

Die Abbildung

$$c||_a^b : T_{c(a)} \to T_{c(b)}, \quad v = X(a) \mapsto X(b)$$

heißt `Parallelverschiebung längs` c `von` a `nach` b.

SATZ: $c||_a^b$ ist ein linearer Isomorphismus.

Sei M diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇,
$I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ wobei $\varepsilon > 0$ und $c \in C^\infty(I, M)$ mit
$c(0) = p \in M$, $\dot{c}(0) = v$.

Dann gilt

$$\nabla_v X = \lim_{t \to 0} \frac{c||_t^0 X_{c(t)} - X_p}{t}$$

Sei M diffb. Mf mit affiner Zusammenhang ∇.

Die folgende Abbildung T ist ein $(1,2)$-Tensorfeld:

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \quad (X,Y) \mapsto T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

T heißt `Torison` oder `Torsionstensor`.

Falls $T = 0$, so heißt der Zusammenhang `torisionsfrei`.

Es sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf und ∇ ein Zusammenhang auf M.

Falls für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gilt, dass

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

so heißt der Zusammenhang ∇ `metrisch`.

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf und ∇ ein affiner Zusammenhang von M.
$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$\nabla \text{ ist metrisch} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \langle \frac{\nabla}{dt}X, Y\rangle + \langle X, \frac{\nabla}{dt}Y\rangle \;\; \forall c \in C^{\infty}(I, M),\ \forall X, Y \in \Gamma_c(TM)$$

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pseudo-Riem. Mf.

Dann exisiert genau ein torsionsfreier und metrischer Zusammenhang ∇ auf M.

Dieser ist durch die `Koszul-Formel`

$$\begin{aligned}2\langle\nabla_X Y, Z\rangle =& X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &+ \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle\end{aligned}$$

bestimmt.

Definition: Dieser eindeutiger Zusammenhang heißt `Levi-Civita-Zusammenhang`.

Sei M eine diffb. Mf mit einem affinen Zusammenhang ∇. Lokale Koordinaten: (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$.

Sei $\gamma : I \to M$ eine Kurve, $\dot{\gamma}$ ist dann ein Vektorfeld längs γ. Diese $\dot{\gamma}$ sei parallel, es gilt also

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = 0.$$

Dann heißt γ `Geodätische`.

Wir setzen $\gamma_i = x_i \circ \gamma$

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = \sum_k \left(\gamma_k'' + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \right) \cdot \partial_k \circ \gamma$$

Also

$$\gamma|_U \text{ ist } \texttt{Geodätische} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_k'' + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0 \;\; \forall k$$

Sei M diffb Mf mit affinen Zusammenhang ∇.

Dann gilt:

1. `Existenz` einer Geodäditschen γ:
$$\forall p \in M, v \in T_pM \ \exists \varepsilon > 0,\ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ mit}$$
$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v \quad \text{und} \quad \frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = 0$$

2. `Eindeutigkeit:` Jede weitere Geodätische $\eta : (-\delta, \delta) \to M$ mit denselben Anfangsbedingungen $\eta(0) = p$ und $\eta'(0) = v$ stimmt auf einem Intervall um 0 mit γ überein.

Unter Missachtung des Definitionsbereiches, sagt man, die Geodätische γ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ ist eindeutig und schreibt γ_v.

Sei M diffb. M, $I \subset \mathbb{R}$, $\gamma \in C^\infty(I, M)$, $(U, \varphi), \varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, $\gamma_i := x_i \circ \gamma$.

Dann ist

$$\gamma|_U \text{ Geodätische } \Leftrightarrow \gamma|_U \text{ löst } \begin{cases} \dot{\gamma}_k = \eta_k \\ \dot{\eta}_k = -\sum_{i,j} \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_k \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \end{cases} \qquad \#$$

Wir betrachten nun eine Kurve auf TM und zwar $\gamma \in C^\infty(I, TM)$, um damit zu arbeiten sammlen wir hier ein paar Abbildung und Eigenschaften:

- $\pi : TM \to M, (p, v) \mapsto p$
- $\psi : TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, (p, v) \mapsto (\varphi(\pi(p, v)), v(x_1), \ldots, v(x_n))$, d.h. mit $y_i(p, v) = v(x_i)$ ist für $\psi = (x_1 \circ \pi, \ldots, x_n \circ \pi, y_1, \ldots, y_n)$ (TU, ψ) eine Karte von TM.
- Angewendet auf $(\gamma, \dot{\gamma})$ gilt mit $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ und $\dot{\gamma}_i = x_i \circ \dot{\gamma}$

$$\psi(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t), \dot{\gamma}_1(t), \ldots, \dot{\gamma}_n(t))$$

- Nun sei $X \in \Gamma(T(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n))$ für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \varphi(U)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch:

$$X(a, b) = (b_1, \ldots, b_n, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 \circ \varphi^{-1}(a) \cdot b_i b_j, \ldots, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^n \circ \varphi^{-1}(a) \cdot b_i b_j)$$

- Dann gilt, dass eine Kurve $\alpha : I \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ genau dann eine Integralkurve von X ist wenn (γ_i, η_i) Lösung von # sind.

Sei $\alpha(t) = \psi(\gamma(t), \gamma'(t))$ und $(\dot{\alpha}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t), \dot{\eta}_1(t), \dots, \dot{\eta}_n(t))$, $i \in \{1, \dots, 2n\}$

$$\begin{aligned} \gamma \text{ ist Geodätiche} \Leftrightarrow &\quad u_i \circ \dot{\alpha}(t) = u_i \circ X(\alpha(t)) \\ (\Leftrightarrow &\quad \text{z.B. } \dot{\gamma}_i = \eta_i \text{ oder } \dot{\eta}_i = -\sum_{i,j} \Gamma^i_{ij} \circ \gamma \cdot \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \end{aligned}$$

- Betrachte nun: $Y \in \Gamma(TUU)$, ein Vektorfeld also, definiert über

$$Y = (d\psi^{-1}) \circ X \circ \psi : TU \to TUU, (p, v) \mapsto Y(p, v)$$

  Wir holen also die Gleichung von oben zurück nach TU und die Integralkurve von Y ist genau $\dot{\gamma} : I \to TU$. Mit diesen Überlegung folgt dann der nächste Satz.

- Schließlich kann man dieses Resultat auf ganz M fortsetzen.

Siehe Konstruktion für Y.
Der lokale Fluss von $Y \in \Gamma(TUU)$ heißt geodätsicher Fluss.

Dies ist so zu verstehen:

Dann ist der lokale Fluss eine Abbildung $\Phi : I \times TU \to TU$ mit $\Phi(0, v) = v$

und $\Phi(t, v) = \gamma_v(t)$ ist Integralkurve von Y.

Sei M diffb Mf mit Zusammenhang ∇. Sei Φ der geodätische Fluss um die Punkt $0 = 0_p \in T_pM$, so gilt:

$$\forall p \in M\ \exists 0_p \in V \overset{\text{off}}{\subset} TM, \delta > 0, \Phi \in C^\infty((-\delta, \delta) \times V, TM) : \exists! \Phi_v : t \mapsto \Phi(t, v),$$

wobei Φ_v Integralkurve von Y ist.

Es $c : [a, b] \to M$ eine stetige Abbildung. Existiert eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, so dass $c|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^\infty$ für alle $i = 0, \ldots, k-1$ ist, so heißt c **stückweise differenzierbare Kurve**.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mf und $c : [a, b] \to M$ eine stückweise differenzierbare Kurve, so definieren wir durch

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt,$$

die **Länge** der Kurve c. Die Länge einer stückweise differenzierbaren Kurve ist endlich.

Weitere Definitionen:

- Für $p, q \in M$ sei Ω_{pq} die Menge aller stückweise diffb. Kurven in M von p nach q.

- Eine monotone, surjektive Abbildung $\varphi \in C^\infty([c, d], [a, b])$ heißt **differenzierbare Umparametrisierung**.

- Eine Kurve heißt zur Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{c}\| = 1$ ist und (proportional) zur Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{c}\|$ konstant ist

Es gelten folgende Aussagen:

1. - $L(c) \geq 0$;
   - $L(c) = 0$ genau dann, wenn c konstant ist.
2. Sind $c_1 : [a, b] \to M$, $c_2 : [b, c] \to M$ zwei stückweise differenzierbare Kurven mit $c_1(b) = c_2(b)$, so ist

$$L(c_1 \cup c_2) = L(c_1) + L(c_2),$$

   wobei $c_1 \cup c_2$ die Konkatenation von c_1 und c_2 bezeichnet.
3. Es sei $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ eine differenzierbare Umparametrisierung, $c : [a, b] \to M$ ein beliebiger stückweise differenzierbarer Weg. Dann gilt $L(c \circ \varphi) = L(c)$.

Es sei:

$$d(p,q) = \inf\{L(c) | c \in \Omega_{pq}\}.$$

Dann gilt

1. (M,d) ist ein metrischer Raum.
2. Die durch d induzierte Topologie auf M stimmt mit der ürsprünglichen Topologie von M als Mannigfaltikeit überein.

Sei $\gamma : [0,1] \to M$ eine stückweise differenzierbare, proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) =: p$, $\gamma(1) =: q$ und gilt

$$L(\gamma) \leq L(c) \quad \forall c \in \Omega_{pq}.$$

Dann ist γ Geodätische.

Sei (M, g) (pseudo)-Riemannsche Mf, $p \in M$. Sei $V \subset T_pM$ offene Umgebung von $0 \in T_pM$.

Ist $\exp_p$ auf V ein Diffeomorphismus aufs Bild, so heißt $\exp_p(V)$ eine `normale Umgebung von` p.

Ist (M, g) Riemannsche Mf und ist $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(0) \subset V$. Dann heißt $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ ein `geodätsicher Ball um` p.

Sei $p \in M$, U eine normale Umgebung von p, $B \subset U$ ein geodätischer Ball um p, $\gamma : [0,1] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$, die ganz in B verläuft und $\gamma(1) = p'$.

Dann gilt

$$L(\gamma) \leq L(c) \quad \forall c \in \Omega_{pp'} \qquad \text{insbesondere:} \quad L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$$

Falls $L(\gamma) = L(c)$, dann gilt

- $\gamma([0,1]) = c([0,1])$ und c ist Umparametrisierung von γ.
- Insbesondere: Für jeden Punkt $q \in B$ gibt es bis auf Umparametrisierung genau eine minimierende Geodätische, die p mit q verbindet.

Bemerkung: die Parametrisierung auf $[0,1]$ ist nicht relevant.

Es sei $f : (a,b) \times (c,d) \to M$, $(t,s) \mapsto f(t,s)$ eine differenzierbare Abbildung.

Dann gilt:

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}$$

TODO: Vielleicht ein Wort dazu wie diese Ableitung zu verstehen sind

Es sei $p \in M$, $v \in T_pM$ so, dass $\exp_p v$ definiert ist und $w \in T_v(T_pM) \stackrel{\sim}{=} T_pM$.

Dann gilt:

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Voraussetzung weiter wie in HS2. Sei weiter
$$\gamma(t) = \exp_p(tw).$$

Dann gilt:

$$d(p, \gamma(t)) = \|tw\| = L(\gamma|_{[0,t]}).$$

Insbesondere: Betrachten wir M als metrischen Raum, so gilt für den geodätischen Ball $B = \exp_p(B_\varepsilon(0))$, dass
$$B = B_\varepsilon(p).$$

Es sei

$$F : TM \to M \times M, \quad v \mapsto (\pi(v), \exp(v)).$$

Dann ist

$$\forall p \in M : dF_{0_p} : T_{0_p}TM \to T_{(p,p)}(M \times M) \stackrel{\sim}{=} T_pM \oplus T_pM$$

ist eine Isomorphismus.

$$\forall p \in M \; \exists \text{ offene Umgebung } U \text{ von } p, \varepsilon > 0 : \forall q \in U$$

folgendes gilt:

1. Die Abbildung $\exp_q$, eingeschränkt auf $B_\varepsilon(0) \subset T_qM$ ist ein Diffeomorphismus aufs Bild.
2. $U \subset \exp_q(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(q)$.

Dies bedeutet:

U ist eine normale Umgebung eines jeden Punktes.

`Bemerkung:` Aus diesem Lemma und HS 2, folgt, dass für je zwei Punkte $q_1, q_2 \in U$ bis auf Umparametrisierung eine eindeutige minimierende Geodätische γ (mit Länge $< \varepsilon$) existiert, die q_1 und q_2 miteinander verbindet. Man bezeichnet eine solche Umgebung als geodätisch konvex.

Aus Lemma 2 und HS 2, folgt, dass für je zwei Punkte $q_1, q_2 \in U$ bis auf Umparametrisierung eine eindeutige minimierende Geodätische γ (mit Länge $< \varepsilon$) existiert, die q_1 und q_2 miteinander verbindet.
Man bezeichnet eine solche Umgebung als geodätisch konvex.

Sei (M, g) eine pseudo-Riem. Mf mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇.

Gilt, dass für alle $p \in M$ die Exponentialabbildung

$$\exp_p : T_pM \to M$$

auf ganz T_pM definiert ist, d.h. jede Geodätische von M kann auf ganz $\mathbb{R}$ erweitert werden, dann nnen wir (M, g) `(geodätisch) vollständig`.

Es sei (M, g) zusammenhängende Riem. Mf, $p \in M$.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. exp_p ist auf ganz T_pM definiert

2. Abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von M sind kompakt.

3. M ist als metrischer Raum vollständig.

4. M ist geodätisch vollständig.

Außerdem implizieren obige Bedingungen

5. Zu jedem $q \in M$ gibt es eine Geodätische γ, die p und q verbindet, so dass $L(\gamma) = d(p, q)$.

   (i) Bemerkung: Aus 5. $\not\Rightarrow$ 3.: Betrachte konvexe offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

   (ii) Korollar: Zwischen je zwei $p, q \in M$ (wie oben und vollständig) existiert eine Geodätische der Länge $d(p, q)$. (Nicht eindeutig: Siehe S^n)

   (iii) Korollar: M (wie oben & kompakt) ist vollständig.

   (iv) Bemerkung: Auf nichtkompakten Riemn. Mf kann die Vollständigkeit von der gewählten Metrik abhängen.

Sei (M, g), (N, h) pseudo-R. Mf und $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus.

Falls

$$h_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)) = g_p(v, w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_pM,$$

heißt φ `Isometrie`. Diese Bedingung schreibt man auch $\varphi^*h = g$.

Existiert eine Isometrie zwischen M und N, heißen M und N isometrisch.

Sei (M, g), (N, h) pseudo-R. Mf und $\varphi : M \to N$ ein Isometrie.

Dann gilt für alle Vektorfelder X und Y auf M, dass

$$\varphi_* \nabla^M_X Y = \nabla^N_{\varphi_* X} \varphi_* Y$$

Eine pseudo-Riemannsche Mf heißt `homogen`, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ eine Isometrie $\varphi : S^n \to S^n$ gibt, so dass $\varphi(p) = q$.

Ein Vektorfeld X auf einer pseudo-Riemannsche Mf heißt `Killingfeld`, falls die lokalen Flüsse von X Isometrien sind.

TODO Was heißt das konkret?

Sei M eine diffb. MF, X Vektorfeld auf M, A ein Tensorfeld auf M vom Typ (r, s).

Es sei Φ_t der lokale Fluss von X auf einer offenen Menge $U \subset M$, dann definieren wir für $p \in U$ durch

$$(L_X A)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\Phi_t^* A)_p$$

die `Lie-Ableitung von` A `entlang` X. Diese ist wieder ein Tensorfeld vom Typ (r, s).

TODO B10 Uebung 2

Sei (M, g) pseudo-Riemannsche Mf mit
Levi-Civita-Zusammenhang ∇, X Vektorfeld auf M.

Dann ist folgendes äquivalent:

1. X ist Killingfeld
2. $L_X g = 0$
3. $\langle \nabla_v X, w \rangle + \langle \nabla_w X, v \rangle = 0$ für alle $v, w \in T_pM$,$p \in M$

Sei M differenzierbare Mf und ∇ ein affiner Zusammenhang auf M. Die Abbildung

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM); \quad (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$$

definiert durch

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ist ein $(1, 3)$-Tensorfeld. Er wird der `Riemannsche Krümmungstensor von` ∇ genannt.

Ist (M, g) eine pseudo-Riem. Mf mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇,

so nennt man R auch `Riemannsche Krümmungstensor von` g.

Mögliche Sichtweise auf den Riemannsche Krümmungstensor:

In lokalen Koordinaten eine beliebigen pseudo-Riem. Mf (M, g) gilt

$$R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})Z = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z$$

d.h, R misst, inwieweit die obigen kovarianten Ableitungen miteinander kommutieren.

(M,g), (N,h) seien pseudo-Riem. Mf mit entsprechenden Levi-Civita-Zusammenhängen ∇^M und ∇^N und dazu assoziierten Riemannsche Krümmungstensoren R^M und R^N.

Ist $\varphi : M \to N$ eine Isometrie, so gilt für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$:

$$\varphi_*(R^M(X,Y)Z) = R^N(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z$$

Eine Riemannsche Mannigfaltikeit ist genau dann lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n$, wenn der Krümmungstensor verschwindet.

Satz 1 (formale Eigenschaften von R)

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf mit assoziiertem Krümmungstensor R.

Dann gilt für alle $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$:

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$
2. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (1. Bianchi-Identiät)
3. $\langle R(X,Y)Z, W \rangle = -\langle R(X,Y)W, Z \rangle$
4. $\langle R(X,Y)Z, W \rangle = \langle R(Z,W)X, Y \rangle$

Definition 2 (algebraischer Krümmungstensor)

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sei ein endlich-dim. pseudo-Euklidscher VR.

Eine trilineare Abbildung

$$R : V \times V \times V \to V, \quad (u, v, w) \mapsto R(u, v)w,$$

welche die vier formalen Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors erfüllt heißt `algebraischer Krümmungstensor`.

Für den Krümmungstensor R einer pseudo-Riem. Mf (M, g) mit $p \in M$ sind also alle Abbildung:

$$R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$$

algebraischer Krümmungstensoren.

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein pseudo-Eukl. VR. $\sigma \subset V$ sei ein 2d-Unterraum, auch `2-Ebene` genannt, und eine $\{u, v\}$ eine Basis.

Wir definieren

$$Q(u, v) = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2.$$

Falls $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eingeschränkt auf σ eine nichtentartete symmetrische Bilinearform ist, so nennen wir auch σ `nichtentartet`.

Lemma 1: σ ist genau dann nichtentartet, wenn $Q(u, v) \neq 0$.

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ mit assoziierten Krümmungstensor R. Sei $p \in M$ und $\sigma \subset T_pM$ eine nichtentartete 2-Ebene und $\{u, v\}$ eine Basis σ.

Die Zahl

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{Q(u, v)}$$

definieren wir als die `Schnittkrümmung`.

Lemma 2: Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis $\{u, v\}$.

Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mf, $\kappa \in \mathbb{R}$

Gilt:

$K(\sigma) = \kappa \quad \forall p \in M, \forall$ nichtentartete 2-Ebenen $\sigma \subset T_pM$

So sagen wir M hat `konstante Schnittkrümmung`.

Beispiel: Für $M = \mathbb{R}^n$ gilt $R = 0$ und damit $K(\sigma) = 0$ unabhängig von σ.

Gilt $\kappa = 0$ so heißt der Raum `flach`.

Es seien M, N pseudo-Riemannsche Mf, $p \in M$,
$\varphi : M \to N$ eine Isometrie, $\sigma \subset T_pM$ eine 2-Ebene.

Dann gilt:

$$K^M(\sigma) = K^N(d\varphi_p(\sigma)).$$

BEISPIEL: S^n, versehen mit Standardmetrik, hat konstante Krümmung.

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pseudo-Eukl. VR. Seien u, v zwei linear unabhängige Vektoren, die eine entarte 2-Ebene aufspannen.

Dann existiert zu Umgebung U von v ein $z \in U$, so dass u und z eine nichtentartete Ebene aufspannen.

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein pseudo-Eukl. VR mit zwei Krümmungstensoren R, R' und dazugehörigen Schnittkrümmungen K, K'.

Gilt:

$$K(\sigma) = K'(\sigma) \quad \forall \text{ nichtentartete 2-Ebenen } \sigma \subset V,$$

dann ist

$$R = R'$$

Es $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf mit konstanter Schnittkrümmung κ.

Dann hat der Riemmansche Krümmungstensor von g folgende Gestalt:

$$R(u, v)w = \kappa \cdot (\langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v).$$

Definition 4 (pseudo ONB, Ricci-Tensor) Schnittkrümmung & Co

Sei (M, g) pseudo-Riem. Mf, $p \in M$ und R ein Krümmungstensor.

Der `Ricci-Tensor` Ric ist ein $(0,2)$ Tensorfeld, definiert durch

$$Ric(X, Y)(p) = Spur(v \mapsto R_p(v, X(p))Y(p)).$$

Ist $B := \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von T_pM für die gilt

$$\langle e_i, e_i \rangle = \pm \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

so heißt B `pseudo-ONB von` T_pM.

Für so ein B können wir Ric schreiben als

$$Ric(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i \rangle \cdot \langle R_p(e_i, X(p))Y(p), e_i \rangle.$$

Daraus liest man ab, das Ric symmetrisch ist.

Es gilt auch : $Ric = C_1^1(R)$ TODO

Intepretation 1: Ist $v \in T_pM$, dann kann man $Ric(v, v)$ als Mittel über die Schnittkrümmung aller 2-Ebenen, die v enthalten, verstehen.

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pseudo-Riem. Mf, $p \in M$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ pseudo ONB von T_pM.

Die `Skalarkrümmung` $scal \in C^\infty(M)$ ist definiert durch

$$scal(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i \rangle Ric(e_i, e_i).$$

INTERPRETATION 1: Mittel aller Schnittkrümmung in $p \in M$.

Sei (M,g) eine Riemannsche Mf, R der Krümmungstensor von g, $c \in C^\infty([a,b],M)$, $\varepsilon > 0$.

$$f : \underbrace{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]}_{=:I} \to M, \quad (s,t) \mapsto f(s,t) = f_s(t) \quad \text{mit} \quad f_0(t) = c(t)\ \forall t \in [a,b]$$

heißt `Variation von c`. Es ist $f \in C^\infty(I,M)$.

Sei $V \in \Gamma_f(TM)$, also $V : (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \to TM$ ist glatt mit $V(s,t) \in T_{f(s,t)}M$.

LEMMA: Es gilt $$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\nabla}{\partial t}V = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\nabla}{\partial s}V + R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})V.$$

Sei nun für alle $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ die Kurve f_s eine Geodätische. Insbesondere sei $f_0 =: \gamma$.

Wir definieren das Vektorfeld J längs γ namens `Variationsvektorfeld von` f mit

$$J : [a,b] \to TM,\ t \mapsto J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(s=0,t) = \frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0}(t)$$

SATZ 1: J erfüllt $\underbrace{\frac{\nabla}{dt}^2 J + R(J,\dot\gamma)\dot\gamma = 0}_{\text{(JACOBIGLEICHUNG)}} \Leftrightarrow \exists$ Variation $f : I \to M$ mit J als Variationsvektorfeld.

DEFINITION: Allgemein heißt ein Vektorfeld längs einer Geodätischen γ, welches die Jacobigleichung erfüllt, `Jacobifeld`.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mf, R der Krümmungstensor von g,
$\gamma : [0, b] \to M$ sei eine Geodätische und J ein Jacobifeld längs γ mit $J(0) = 0$,
$v = \dot{\gamma}(0)$, $w = \frac{\nabla}{dt} J(0)$.

Dann gilt

$$J(t) = (d \exp_p)_{tv}(tw)$$

Sei (M, g) n-dim. Riem. Mf, $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodätische in M.

Dann bilden die Jacobifelder längs γ einen $2n$-dim Vektorraum. Genauer:

$$\forall v, w \in T_{\gamma(a)}M \quad \exists! \text{ Jacobifeld } J : \quad J(a) = v,\ \frac{\nabla}{dt}J(b) = w$$

$$I : \{\text{Jacobifelder längs } \gamma\} \to T_pM \oplus T_pM, \quad J \mapsto (J(a), \frac{\nabla}{dt}J(b)) \quad \text{ist ein Isomorphismu}$$

(TODO: Lösung von DGL bilden Vektorraum)

1. $\dot{\gamma}$ immer Jacobifeld
2. $J(t) = t\dot{\gamma}(t)$ Jacobifeld
3. $J(t) = f(t)\dot{\gamma}(t)$
4. Sei $\gamma \in C^\infty([0,a], M)$. Betrachte die Variation $f(s,t) = \exp_p(tv(s))$, wobei $v(s)$ Kurve in T_pM ist. Setze $v = v(0)$ und $w = v'(0) \in T_pM$. Für alle s ist $f_s \in C^\infty$ eine Geodätische, also folgt

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$$

ein Jacobifeld längs γ_v mit $J(0) = 0$ ist.

Sei M Riemannsche Mf mit konstanter Krümmung κ. Es sei $\gamma : [0, a] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in M.
Weiter sei J ein Jacobifeld längs γ mit $J(0) = 0$ und $J(t) \perp \dot{c}(t)$.
Weiterhin sei X das eindeutige parallele Vektorfeld längs γ mit $X(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$.

Dann gilt:

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{\kappa})}{\sqrt{k}} X(t) & \kappa > 0 \\ tX(t) & \kappa = 0 \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-\kappa})}{\sqrt{-k}} X(t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

Sei (M, g) eine n-dim. Riemannsche Mf, $\gamma : [a, b] \to M$ eine nichtkonstante Geodätische in M mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$.

Existiert ein Jacobifeld J entlang γ mit $J(a) = 0$ und $J(b) = 0$, das nirgends verschwindet, so sagen wir

q `ist entlang` γ `zu` p `konjugiert` *oder auch* p, q sind `konjugierter Punkt entlang` γ.

Sei γ wie oben, dann gilt:

$$\{J \text{ ist Jacobifeld entlang } \gamma \mid q \text{ ist entlang } \gamma \text{ zu } p \text{ konjugiert}\}$$

ist ein $(n-1)$-dim. Vektorraum. Diese Dimension wird auch `Vielfachheit des konjugierten Punktes` q genannt.

BEIPIEL 1: S^n TODO

BEIPIEL 2: $\kappa <= 0$ TODO

(M, g) n-dim. Riemannsche Mf, $\gamma : [0, a] \to M$ eine Geodätische mit $p = \gamma(0)$, $v = \dot{\gamma}(0)$.

Dann gilt

1. Der Punkt $\gamma(t_0)$ für $t_0 \in [0, a]$ ist genau dann entlang γ zu p konjungiert, wenn $t_0 v$ ein kritischer Punkt von $\exp_p$ ist.
2. Die Vielfachheit von $\gamma(t_0)$ ist gleich der Dimension des Kerns von $(d\exp)_p(t_0 v)$.

(M, g) sei vollständige Riemannsche Mannigfaltikeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung, d.h. $K(\sigma) \leq 0$ für alle 2-Ebenen $\sigma \subset T_pM$, $\forall p \in M$.

Dann gibt es keine konjugierten Punkte in M, d.h.

$$\exp_p : T_pM \to M \quad \forall p \in M$$

ist ein lokaler Diffeomorphismus auf ganz T_pM.

Sei (M, g) zusammenhängende und vollständige Riem. Mf mit nichtpositiver Schnittkrümmung.

Dann ist

$$\exp_p : T_pM \to M \quad \forall p \in M$$

eine differenzierbare Überlagerung.

Sei (M, g) vollständige, einfach zusammenhängende Riem Mf mit nichtpositiver Schnittkrümmung.

Dann ist

$$\exp_p : T_pM \to M \quad \forall p \in M$$

ein Diffeomorphismus.

Insbesondere existiert für beliebige Punkt $p, q \in M$, genau eine Geodätische von p nach q.

Sei (M, g) ein Riemannsche Mf, $c \in C^\infty([0,a], M)$ mit Länge

$$L(c) = \int_0^a \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Sei weiter $\varepsilon > 0$ und $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ eine Variation von c.

Wir nennen die Abbildung E

$$E : \Omega_{0,a} \to \mathbb{R},\ c \mapsto E(c) = \int_0^a \|\dot{c}(t)\|^2 dt$$

das **Energiefunktional**.

Notiz 1: Weiter gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\left(\int_0^a \|\dot{c}(t)\| \cdot 1 dt\right)^2 = \quad \boxed{L(c)^2 \leq aE(c)} \quad = \left(\int_0^a \|\dot{c}(t)\|^2 dt\right) \cdot \left(\int_0^a 1 dt\right)$$

Mit Gleichheit genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist

Notiz 2: Aussagen in 3.5 gelten z.T. auch für L, falls c eine reguläre Kurve ist.

Sei (M, g) Riemannsche Mf, $p, q \in M$ sowie $\gamma : [a, b] \to M$ eine die Länge minimierende Geodätische von p nach q.

Dann gilt für alle $c \in C^\infty([0, a], M)$ von p nach q:

$$E(\gamma) \leq E(c).$$

Mit Gleichheit genau dann, wenn c eine die Länge minimierende Geodätische ist.

Sei (M, g) Riemannsche Mf, $c \in C^\infty([0,a], M)$,
$V \in \Gamma_c(TM)$ und $\varepsilon > 0$.

Dann existiert eine Variation f

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,a] \to M$$

mit Variationsvektorfeld V.

Ist noch $V(0) = 0$ und $V(a) = 0$,

so können wir annehmen, dass

$$f(s,0) = c(0) \text{ und } f(s,a) = c(a) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Wir sagen dazu, dass die Variation f `eigentlich` ist.

$(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mf, $c \in C^\infty([0,a], M)$, $\varepsilon > 0$,f eine Variation von c mit $f_s(t)$ $C^\infty([0,a], M)$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Es sei weiter

$$E(s) := E(f_s) = \int_0^a \|\dot{f}_s(t)\|^2 dt$$

und V bezeichne das Variationsvektorfeld der Variation f.

Dann gilt:

$$\frac{1}{2}\dot{E}(0) = -\int_0^a \langle V(t), \frac{\nabla}{dt}\dot{c}(t)\rangle dt - \langle V(0), \dot{c}(0)\rangle + \langle V(a), \dot{c}(a)\rangle.$$

Korollar: $c \in C^\infty([0,a], M)$ ist genau dann eine Geodätische, wenn für jede eigentliche Variation f von c gilt, dass $\dot{E}(0) = 0$.

$(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mf mit R als Krümmungstensor von $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $c \in C^\infty([0,a], M)$, $\varepsilon > 0$, f eine Variation von c mit $f_s(t)$ $C^\infty([0,a], M)$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. V bezeichne das Variationsvektorfeld der Variation f.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ddot{E}(0) = &- \int_0^a \langle \frac{\nabla^2}{dt^2} V + R(V,\dot{c})\dot{c}, V\rangle(t)dt \\ &- \langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \dot{c}\rangle(0,0) + \langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}, \dot{c}\rangle(0,a) \\ &- \langle V(0), \frac{\nabla}{dt}V(0)\rangle|_{t=0} + \langle V(a), \frac{\nabla}{dt}V(a)\rangle|_{t=a}.\end{aligned}$$

Notiz 1: Ist f eine eigentliche Variation von c, fallen alle bis auf den ersten Summanden weg.

Notiz 2: Der erste Eintrag in $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im ersten Summanden ist gerade die Jacobigleichung.

Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gebe ein $r > 0$, so dass

$$Ric_p(v,v) \geq \frac{n-1}{r^2}\langle v,v\rangle > 0 \quad \forall p \in M,\ \forall v \in T_pM$$

Dann ist M kompakt und der `Durchmesser` von M

$$\operatorname{diam}(M) := \sup_{p,q\in M} d(p,q)$$

erfüllt

$$\operatorname{diam}(M) \leq \pi r.$$

Weiterhin ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ ist endlich.

Sei M n-dim. Mf, $(\overline{M}, \overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Riemannsche Mf der Dimension $n+k$. Sei $i : M \to \overline{M}$ eine Immersion. Mittels

$$\langle v, w \rangle := \langle di_p(v), di_p(w) \rangle \qquad \text{für } p \in M,\ v, w \in T_pM$$

zieht man die Metrik von $\overline{M}$ auf M zurück (`isometrischen Immersion`).

Alle Betrachtungen sind lokal und damit kann o.B.d.A. i als Einbettung angenommen werden. In diesem Sinn betrachten wir $M \subset \overline{M}$, da $i(M) \overset{\sim}{=} M$.

Sei (U, φ) Unter-Mfskarte mit $\varphi = (x_1, \dots, x_{n+k})$ und $(U \cap M, \psi)$ mit $\psi := (x_1, \dots, x_n)$ eine Karte von M. φ sei sogewählt, das $\varphi(U)$ invariant unter der Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$ ist. Mithilfe dieser Karten können wir eine gegebene Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf U Fortsetzen der Einschränkung $f|_{U \cap M}$:

$$\overline{f} = f \circ \psi^{-1} \circ \pi \circ \varphi$$

Ähnlich kann man mit lokalen Vektorfelder auf M verfahren. Es seien $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n+k}})$ die zu φ assoziierten lokalen Basisfelder. Schränken wir diese auf $U \cap M$ ein, so hat man die lokalen Basisfelder der Karte ψ von M. Für $X \in \Gamma(TU \cap M)$ können wir schreiben

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{U \cap M}$$

Und erhalten für

$$\overline{X} := \sum_{i=1}^{n} \overline{f}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ein } \overline{X} \in \Gamma(TU) \text{ mit } \overline{X}|_M = X.$$

Dies kann auch so ausdrücken

$$\overline{X} \circ i = di(X),$$

d.h. X und $\overline{X}$ sind i-verwandt.

Alles wie im setup. Sei $p \in M \subset \overline{M}$. Mittels Isomorphie sei $T_pM = di(T_pM)$

Wir definieren den `Normalenraum` von M in $\overline{M}$ in p durch

$$\nu_p M := \{v \in T_p\overline{M} | v \perp T_pM\}.$$

Wir nennen $\nu M := \sqcup_{p\in M} \nu_p M$ das `Normalenbündel`.

Betrachte die Zerlegung:

$$T_p\overline{M} = T_pM \otimes \nu_p M \text{ und } T_pM \ni v = \overbrace{v^\top}^{\text{tang. Anteil}} + \overbrace{v^\perp}^{\text{normalen Anteil}}$$

Seien $X, Y \in \Gamma(TU \cap M)$ beliebig fortgesetz zu $\overline{X}, \overline{Y} \in \Gamma(TU)$ und betrachte

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp.$$

Wir definieren die `zweite Fundamentalform` α `von M` durch

$$\alpha(X, Y)(p) := (\overline{\nabla}_{\overline{X}_p}\overline{Y})^\perp$$

LEMMA: Die zweite Fundamentalform α ist wohldefiniert, symmetrisch in X und Y und C^∞-linear.

GAUSS-FORMEL: $$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})(p) = (\overline{\nabla}_X Y)(p) = (\nabla_X Y)(p) + (\alpha(X, Y))(p)$$

Es gilt

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt}Y = \frac{\nabla}{dt}Y + \alpha(\dot{c}, Y)$$

DEFINITION: Eine Unter-Mf $M \subset \overline{M}$ heißt `totalgeodätisch in` $\overline{M}$, wenn $\forall p \in M$, $\forall v \in T_pM$ die Geodätische in $\overline{M}$ durch p in Richtung v komplett in M verläuft. Dies gilt genau dann, wenn die zweite Fundamentalform verschwindet.

WEINGARTEN-ABBILDUNG: Für die Erweiterung $\bar{\xi} \in \Gamma(\nu U)$ gibt lokal folgendes Sinn

$$\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle = -\langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle.$$

GAUSS-GLEICHUNG: Für alle $x, y, z, w \in T_pM$ gilt

$$\langle \overline{R}(x, y)z, w \rangle = \langle R(x, y)z, w \rangle - \langle \alpha(x, w), \alpha(y, z) \rangle + \langle \alpha(x, z), \alpha(y, w) \rangle$$

KOROLLAR: Hat $\overline{M}$ kostanten Schnittkrümmung κ so gilt

$$K(\sigma) = \kappa + \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - \|\alpha(x, y)\|^2$$

Ist M also totalgeodätisch in $\overline{M}$, dann hat M ebenfalls konst. Schnittk.

Wir definieren den Weingartenoperator A_ξ durch

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Damit wird aus der der Weingartengleichung

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle.$$

Zu dem ist $A_\xi : T_pM \to T_pM$ ein linearer selbstadjungierter Operator. Dieser ist orthogonal diagonalisierbar. Die Eigenvektoren nennen wir `Hauptkrümmungsrichtung` und die Eigenwerte `Hauptkrümmung`.

WAS FEHLT: Beispiel,Normalenzusammenhang, komische Abbildung, Codazzi-Gleichung, Bemerkung, 5.2.