

Sei M topologischer Raum mit
 $M \neq \emptyset$, M erfüllt zweites Abzählbarkeitsaxiom und ist
Hausdorffsch.

Dann heißt M topologische Mannigfaltigkeit der
Dimension n , falls es zu jedem Punkt $p \in M$ eine in M
offene Umgebung U und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$
gibt, so dass ein Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$
existiert.

(U, φ) nennt man eine **Karte** von M .

Sei M top. Mf. und $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ eine Familie von Karten von M .

Dann heißt \mathcal{A} ein (C^∞) -Atlas, falls folgendes gilt:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
2. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist C^∞ für alle $\alpha, \beta \in A$.

(Die Abbildungen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ heißen Karten- oder Koordinatenwechsel.)

Sei \mathcal{A} ein C^∞ -Atlas.

Dann heißt \mathcal{A} eine (C^∞) -differenzierbare Struktur, falls folgendes erfüllt ist:

3. \mathcal{A} ist maximal in dem Sinne, dass eine Karte (U, φ) bereits zu \mathcal{A} gehört, falls für alle $\alpha \in A$ folgende Abbildungen C^∞

$$\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi(U \cap U_\alpha)$$

$$\text{und } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

Sei M eine n -dim. topologische Mf und \mathcal{A} eine differenzierbare Struktur.

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, \mathcal{A}) .

NOTIZ 1: Zu jeder diffb. Mf gibt es stets einen abzählbaren Atlas.
(Begründung: Abzählbare Basis von M)

NOTIZ 2: Ein C^∞ Atlas induziert eine eindeutige *differenzierbare Struktur*.

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine nichtleere Teilmenge.

M heißt n -dim. Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k , wenn es

1. zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ und
2. einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ gibt, so dass

$$\varphi(M \cap U) = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^k | x_{n+1} = \dots = x_k = 0\} \cap V.$$

NOTIZ: Man kann eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k auch als differenzierbare Mf auffassen.

Seien $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\})$ und $(N, \{(V_\beta, \psi_\beta) | \beta \in B\})$
differenzierbare Mf und $f : M \rightarrow N$ stetig.

Dann heißt f differenzierbar oder auch **glatt**,
wenn

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta)$$

für alle $\alpha \in A, \beta \in B$ C^∞ ist.

Wir setzen:

$$C^\infty := \{f : M \rightarrow N | f \text{ ist } C^\infty\}$$

Sei $f : M \rightarrow N$ eine bijektive Abbildung.

f heißt ein **Diffeomorphismus**, falls f und f^{-1} differenziert sind.

Existiert ein Diffeomorphismus zwischen zwei differenzierbaren Mf M und N , so heißen M und N diffeomorph.

Es seien $U_i \subset M$, $p \in U_i$, $i = 1, 2$, $f_i \in C^\infty(U_i, \mathbb{R})$ beliebig.

Wir definieren für beliebig $i, j = 1, 2$ und $f_{i,j}$ wie oben eine Äquivalenzrelation

$$f_i \sim f_j :\Leftrightarrow \exists V \subset M, p \in V : f_i|_V = f_j|_V$$

Nun definieren wir folgende Menge

$$\mathcal{F}_p := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid U \subset M \text{ offen}, p \in U, f \text{ differenzierbar}\} / \sim$$

und bezeichnen ihre Elemente als **Funktionskeime** und schreiben für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $p \in U$ für den Funktionskeim $[f]$.

Bemerkung: \mathcal{F}_p ist eine \mathbb{R} -Algebra mit

$$[f] + [g] := [f + g], [f] \cdot [g] := [fg]$$

Zudem ist

$$v : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}, [f] \mapsto v([f]) := f(p)$$

ist wohldefiniert. Man kann ein Funktionskeim aber in keinen anderen Punkt außer p auswerten.

Es sei M eine diffb. Mf und sei

$$v : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R},$$

eine lineare Abbildung, die die sogenannte Leibniz-Regel erfüllt, d.h.

$$v([f] \cdot [g]) = v([f]) \cdot g(p) + f(p) \cdot v([g]).$$

Dann nennen wir v einen **Tangentialvektor** an M von p .

Die Menge

$$T_p M := \{v \text{ ist Tangentialvektor von } M \text{ in } p\}$$

versehen mit der Vektorraumstruktur

$$(v + w)[f] := v([f]) + w([f]), \quad (\alpha v)[f] := \alpha \cdot v([f])$$

heißt Tangentialraum von M in p .

Ist $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, so schreiben wir $v(f) := v([f])$

DEFINITION (LOKALE UND STANDARDKOORDINATEN) DER TANGENTIALRAUM

Sei M differenzierbar Mf, (U, φ) eine Karte um $p \in U$:
$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Ist u_1, \dots, u_n , so, dass

$$u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_i(v_1, \dots, v_n) = v_i$$

ist, so heißen die u_1, \dots, u_n **Standardkoordinaten** von \mathbb{R}^n .

Nun definieren wir durch

$$x_i := u_i \circ \varphi, \quad \text{also} \quad \varphi = (x_1, \dots, x_n)$$

die **lokalen Koordinaten** x_1, \dots, x_n .

Sei M diffb. Mf, (U, φ) eine Karte um p mit lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$.

Wir definieren

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad [f] \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p [f] := \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)).$$

Nun gilt: $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ ist ein Tangentialvektor an p .

TODO: hier auch Bsp 1.4.5

Sei M eine n -dim diffb. Mf, $p \in M$.

Dann ist

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$$

eine Basis von $T_p M$ und für $v \in T_p M$ gilt:

$$v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Es folgt daraus $\dim(M) = \dim(T_p M)$.

Sei M diffb. Mf, $p \in M$, $F : M \rightarrow N$ differenzierbar.

Die lineare Abbildung

$$dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

gegeben durch

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F)$$

nennen wir das Differential von F in p

Sei M, N n -dim bzw. m -dim diffb. Mf, $p \in M$, $F \in C^\infty(M, N)$. Weiter sei

- (U, φ) Karte um p mit lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ und
- (V, ψ) Karte um $F(p)$ mit lokalen Koordinaten $\psi = (y_1, \dots, y_m)$.

Dann gilt:

Die Matrix von dF_p bzgl der Basen $(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)$ und $(\frac{\partial}{\partial y_i}|_{F(p)})$ ist gleich der Jacobimatrix von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$.

Sei M, N, L differenzierbare Mf, $p \in M$ und
 $F \in C^\infty(M, N)$ und $G \in C^\infty(N, L)$.

Dann gilt:

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

Sei M differenzierbare Mf, $a, b \in \mathbb{R}$, $I = (a, b)$.
Zu $c \in C^\infty(I, M)$ sagen wir auch **glatte Kurve** in M .
Weiter definieren wir für $t \in (a, b)$:

$$c'(t) = \dot{c}(t) := dc_t\left(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_t\right) \in T_{c(t)}M.$$

Mit $c : [a, b] \rightarrow M$ meinen wir :

$$\exists \varepsilon > 0, \bar{c} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \rightarrow M \quad : \quad \bar{c}|_{(a,b)} = c$$

SATZ (KETTENREGEL UND KURVEN) DAS DIFFERENTIAL EINER ABBILDUNG

Sei M differenzierbare Mf, $F \in C^\infty(M, N)$, $p \in M$ und $v \in T_p M$. Weiter sei $I = (a, b)$, $0 \in I$ und $c \in C^\infty(I, M)$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$.

Dann gilt:

$$dF_p(v) = (F \circ c)'(0).$$

Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit. I, A beliebige Indexmengen, $\varphi_i \in C^\infty(M)$ für alle $i \in I$ und $(\varphi_i)_{i \in I}$ eine Familie. $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ sei eine offene Überdeckung von M .

Gilt:

1. die Träger der φ_i sind für alle $i \in I$ lokal endlich, d.h.

$$\forall p \in M \exists U \subset M, p \in U : U \cap \text{supp } \varphi_i \neq \emptyset \quad \text{für höchstens endliche viele } i \in I$$

2. Summe der Funktionenswerte ist 1 in jedem Punkt, genauer:

$$\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1 \forall p \in M \quad \text{und} \quad \varphi_i(p) \geq 0 \forall p \in M, \forall i \in I,$$

so heißt die Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ **eine Zerlegung des Eines von M** .

Gilt:

$$\forall i \in I \exists \alpha \in A : \text{supp } \varphi_i \subset U_\alpha,$$

so heißt die Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ der Überdeckung \mathcal{U} **untergeordnet**.

Sei M diffb Mf, \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M .

Dann existiert eine abzählbare differenzierbare Zerlegung der Eins, der \mathcal{U} untergeordnet ist.

Korollar:

Sei $U \subset M$ offen, $A \subset U$ abgeschlossen in M , $f \in C^\infty(U)$.

Dann gibt $g \in C^\infty(M)$ mit $g|_A = f|_A$ und $g|_{M \setminus U} = 0$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

Ist $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ für ein $p \in U$ invertierbar, dann gilt

1. es gibt eine Umgebung V von p und W von $f(p)$, so dass $f|_V : V \rightarrow W$ ein Diffeomorphismus ist.
2. Das Differential von f^{-1} in $q \in W$ ist gegeben durch

$$(df^{-1})_q = (df_{f^{-1}(q)})^{-1}$$

Dieser Satz gilt auch für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$.

Seien M, N differenzierbare Mf gleicher Dimension.
 $U \subset M$ offen, $f \in C^\infty(U, N)$.

Existiert ein $p \in U$, so dass $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$
invertierbar ist, so existiert eine Umgebung V um p
und $W \subset N$ um $f(p)$, so dass

$$f|_V : V \rightarrow W$$

ein Diffeomorphismus ist.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$.
 $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ mit $f(0) = 0$.

1. Ist $n \leq k$ und das Differential df_0 injektiv, so gibt es ein Diffeomorphismus ψ um $0 \in \mathbb{R}^k$ und φ um $0 \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-n})$$

für (x_1, \dots, x_n) in der entsprechenden Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^k$.

2. Für $n \geq k$ analog Aussage für df_0 surjektiv.

M, N seien differenzierbare Mf. $F \in C^\infty(M, N)$.

Wenn $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ für alle $p \in M$ injektiv ist, so heißt F eine **Immersion**.

Weiter nennen wir $F(M)$ eine **immersierte Untermannigfaltigkeit** von N .

M, N seien differenzierbare MF.

$F \in C^\infty(M, N)$ sei eine Immersion und injektiv.

$F(M)$ sei mit der Teilraumtopologie ausgestattet.

Falls $F : M \rightarrow F(M) \subset N$ ein Homöomorphismus ist, so heißt F eine Einbettung.

$F(M)$ heißt dann eingebettete Untermannigfaltigkeit von N .

M, N seien n - bzw. k -dim. diffb. Mf,
 $F : M \rightarrow N$ eine Immersion und $p \in M$.

Dann gibt es eine Umgebung U von p in M und eine Karte (V, ψ) von N um $F(p)$, wobei $\psi = (y_1, \dots, y_k)$, so dass

1. $y_{n+1}(q) = \dots = y_k(q) = 0$ für alle $q \in V \cap F(U)$ und
2. $F|_U$ ist eine Einbettung.

Die Karte (V, ψ) heißt
Untermannigfaltigkeitskarte.

Seien M, N, P diffb. Mf.

1. Satz 1 liefert als Spezialfall: Für $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist $F(M)$ gerade eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^k im Sinne der früheren Definition. (Kapitel 1.2, Begriff der differenzierbaren Mf)
2. Einschränkung des Abbildungsraum: Für $F \in C^\infty(M, N)$, $i : P \rightarrow M$ eine Einbettung.

Dann heißt $F \circ i \in C^\infty(P, N)$ die **Einschränkung von F auf P** .

Man schreibt auch $F|_P : P \rightarrow N$. Dabei ist wegen $i(P) \subset M$, dies als Einschränkung des Abbildungsraum zu interpretieren.

M, N, P seien diffb Mf, $F \in C^\infty(M, N)$, $i : P \rightarrow N$
eine Einbettung.

Es sei weiter: $F(M) \subset i(P)$ und $G : M \rightarrow P$ durch
 $F(p) = i(G(p))$ definiert (wohldefiniert, da i injektiv).

Dann gilt:

1. Falls i eine Einbettung ist, so ist G stetig.
2. Falls G stetig ist, so ist G glatt.

M, N differenzierbare Mf, $F \in C^\infty(M, N)$.

Ist für $p \in M$ das Differential $df_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ surjektiv, dann heißt p regulärer Punkt.

Andernfalls kritischer Punkt.

Sind für $q \in N$ alle Punkte $p \in F^{-1}(q)$ regulär, so heißt q regulärer Wert.

Andernfalls kritischer Wert.

Es seien M, N n - bzw. k -dim. Mf. $F \in C^\infty(M, N)$, $q \in F(M)$ ein regulärer Wert. Es sei $F^{-1}(q) \subset M$ versehen mit Teilraumtopologie.

Dann gilt:

1. $F^{-1}(q)$ ist eine $n - k$ -dim. topologische Mf.
2. Es existiert eine eindeutige differenzierbare Struktur auf $F^{-1}(q)$, so dass $i : F^{-1}(q) \rightarrow M$ eine Einbettung ist und damit insbesondere:
 $i(F^{-1}(q))$ ist eine eingebettete Unter-Mf von M .

N seien diffb. Mf. Es sei $M \subset N$ versehen mit der Teilraumtopologie eine topologische Mf.

Dann gilt:

Trägt M eine differenzierbare Struktur bezüglich derer $i : M \rightarrow N$ eine Einbettung ist, so ist diese differenzierbare Struktur eindeutig.

2 Bsp zum Satz vom regulären Wert.

und folgende Bem:

TODO, Auch falls $M \subset N$ gilt, ist $T_p M$ nicht auf natürlicheweise ein Unterraum von $T_p N$. Betrachte:

$$di_p(T_p M) \subset N.$$

TODO wie identifiziert man $T_p M$ und $di_p(T_p M)$.?

Sei M, E diffb Mf. Für eine $U \subset M$ sei $pr_1 : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U, (u, x_1, \dots, x_k) \mapsto u$.
Es sei $\pi \in C^\infty(E, M)$ und surjektiv.

Falls für alle $p \in M$ gilt:

1. $E_p := \pi^{-1}(p)$ ist ein k -dimensionaler Vektorraum.
2. Es existiert eine Umgebung $U \subset M$ von p und ein Diffeomorphismus:

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

so dass gilt:

$$\pi = pr_1 \circ \varphi \text{ und } \varphi|_{E_q} : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \text{ ist linear.}$$

Dann heißt das Paar (E, π) ein (C^∞) -**Vektorbündel vom Rang k über M** .

- Das Urbild eines(!) Punktes heißt auch Faser, also: $E_p := \pi^{-1}(p)$ heißt **Faser von p** .
- E heißt **Totalraum**.
- M heißt **Basis des Vektorbündels E**
- φ heißt **lokale Trivialisierung**.

Sei M, E diffb. Mf. (E, π) ein C^∞ -Vektorbündel. Es sei $s \in C^\infty(M, E)$.

Gilt:

$$\pi \circ s = id_M, \text{ also } \pi(s(p)) = p \quad \forall p \in M,$$

so heißt s ein **Schnitt** von E .

Die Menge aller Schnitte von E wird mit $\Gamma(E)$ bezeichnet.

Ist s nur auf einer offenen Teilmenge definiert, so spricht man von einem **lokalen Schnitt** von E .

Notiz: $\Gamma(E)$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum. Zudem ist für $s \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(E)$, $(fs)(p) := f(p) \cdot s(p)$ auch $fs \in \Gamma(E)$. Wobei diese skalare Multiplikation in E_p zu verstehen ist.

Algebraisch ist $\Gamma(E)$ ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$.

TODO

Elemente in $\Gamma(TM)$ heißen (differenzierbare)
Vektorfelder auf M .

Für $U \subset M$ offen und $X \in \Gamma(TU)$ spricht man von
lokalen Vektorfeldern auf M .

Sei $X \in \Gamma(TM)$, $p \in M$, $f \in C^\infty(M)$, so definieren wir

$$X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto X_p(f).$$

$X(f)$ nennt man Richtungsableitung ???

TODO Bsp ($\frac{\partial}{\partial x_i}$)

für eine Vektorfeld.

TODO

$\Gamma(TU)$ ist ein freier Modul über $C^\infty(U)$ mit Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$

$\Gamma(TM)$ ist ein Modul über $C^\infty(M)$

$X \in \Gamma(TM)$ sind Derivationen auf $C^\infty(M)$.

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Sei V ein K -VR und $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ eine Abbildung, für die gilt:

1. bilinear
2. antisymmetrisch ($[v, w] = -[w, v]$)
3. Jacobiidentität

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Dann heißt $(V, [\cdot, \cdot])$ eine **Liealgebra**. Die Abbildung $[\cdot, \cdot]$ heißt die **Lieklammer** dieser Liealgebra.

Es ist $\Gamma(TM)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum. Weiter sei

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

gegeben durch

$$[X, Y] : M \rightarrow T_p M, p \mapsto [X, Y]_p := [X, Y](p) = X_p Y - Y_p X.$$

Es ist zu zeigen, dass dies wohldefiniert ist, dass also

$$[X, Y]_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}, [f] \mapsto [X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

die Leibnisregel erfüllt.

Weiter gilt:

$(\Gamma(TM), [\cdot, \cdot])$ ist eine reelle Liealgebra.

Sei X ein Vektorfeld auf M , $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve.

Dann heißt α eine Integralkurve von X , falls

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)} \quad \forall t \in (a, b)$$

Sei (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ und $\alpha_i = x_i \circ \alpha$.

Wir setzen

$$F_i : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_i(\varphi(q)) = (X x_i)(q) = X_q(x_i)$$

Dann gilt

$$\alpha \text{ ist Integralkurve von } X \Leftrightarrow \alpha'_i(t) = F_i(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)), \quad i = 1, \dots, n$$

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. I bezeichne Intervall.

Dann gilt:

1. **Existenz:**

$$\forall q \in V \exists I \ni 0, c \in C^\infty(I, V) \text{ mit } c(0) = q, c'(t) = F(c(t))$$

2. **Eindeutigkeit:** Gilt für $c_i \in C^\infty(I, V)$, $i = 1, 2$

$$c'_i(t) = F(c_i(t)) \quad (i = 1, 2)$$

und

$$\exists t_0 \in I : c_1(t_0) = c_2(t_0)$$

Dann gilt $c_1 = c_2$.

Sei X ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mf. I, J seien Intervall.

Dann gilt:

1. **Existenz:** Es gibt durch jeden $p \in M$ eine Integralkurve von X , d.h.:

$$\forall p \in M \exists I \ni 0, \alpha \in C^\infty(I, M) \text{ mit } \alpha(0) = p, \alpha'(t) = X_{\alpha(t)}.$$

2. **Eindeutigkeit:** Sind $\alpha_i : I \rightarrow M$ mit $i = 1, 2$ zwei Integralkurven von X mit $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, dann gilt $\alpha_1 = \alpha_2$.

Weiter folgt:

Es gibt zu jedem $p \in M$ eine maximal definierte Integralkurve $\alpha \in C^\infty(I, M)$ mit $\alpha(0) = p$, d.h.

$$\exists \beta \in C^\infty(J, M) \text{ mit } 0 \in J, \beta(0) = p, \beta'(t) = X_{\beta(t)},$$

so gilt

$$J \subset I \text{ und } \alpha|_J = \beta$$

Sei M diffb. Mf, X Vektorfeld auf M .

Dann existiert eine Umgebung U um $p \in M$, ein Intervall I mit $0 \in I$, sowie

$$\Phi \in C^\infty(I \times U, M) :$$

so dass gilt

1. $\Phi(0, q) = q$ für alle $q \in U$.
2. $\alpha : I \rightarrow M, t \mapsto \Phi(t, q)$ ist eine Integralkurve von X mit Anfangsbedingung $\alpha(0) = q$, d.h.

$$\alpha'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, q) = X_{\alpha(t) = \Phi(t, q)}$$

Dann heißt $\Phi \in C^\infty(I \times U, M)$ **lokaler Fluss** von X .

Falls $I = \mathbb{R}$, $U = M$ so heißt $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ **globaler Fluss**.

Es gilt weiterhin, dass wenn $t, s \in I$, $q \in U$, ist $\Phi(t, q) \in U$ und

$$\Phi(s, \Phi(t, q)) = \Phi(s + t, q)$$

Sei M diffb. Mf, X Vektorfeld auf M .

Dann heißt X **vollständig**, wenn durch jeden Punkt $p \in M$ eine Integralkurve läuft, die auf ganz \mathbb{R} definiert ist, wenn also

$\forall p \in M \exists \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$ mit $\alpha(0) = p, \alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \forall t \in \mathbb{R}$
erfüllt ist.

Sei M diffb. Mf.

Ist M kompakt, so ist jedes Vektorfeld auf M vollständig.

Sei M diffb. Mf.

Ist X ein vollständiges Vektorfeld, dann existiert ein globaler Fluss auf X .

DEFINITION (EINPARAMETERGRUPPE VON DIFFEOMORPHISMEN) 11.11.11

FLÜSSE VON VEKTORFELDERN

Sei M diffb. Mf. X ein vollständiges Vektorfeld. $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ der globale Fluss von X .

Wir definieren:

$$\Phi_t : M \rightarrow M, \quad p \mapsto \Phi_t(p) := \Phi(t, p)$$

Dann ist

$$\Phi_{t+s}(p) = \Phi(t+s, p) = \Phi(t, \Phi(s, p)) = (\Phi_t \circ \Phi_s)(p)$$

also

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s, \quad \Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}, \quad \Phi_0 = id_M$$

Damit definieren wir

Sei $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ und gilt für $\Psi_t : t \mapsto \Psi(t, p)$,

$$\Psi_0 = id_M \quad \text{und} \quad \Psi_{t+s} = \Psi_t \circ \Psi_s \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

so heißt Ψ Einparametergruppe von Diffeomorphismen.

Hier ausführen wie vollständige Vektorfelder und
Einparametergruppen einandern zugeordnet werden
können.
TODO

Es sei V ein endlich-dim. \mathbb{R} -Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V .

Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **nichtentartet**, falls

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \exists w \in V : \langle v, w \rangle \neq 0.$$

Oder gleich bedeutend damit:

- Die lineare Abbildung $V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ ist injektiv, d.h.

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0$$

- Für (beliebige) v_1, \dots, v_n Basis von V gilt

$$\det(g_{ij}) \neq 0 \quad \text{mit } g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Sei V ein endlich-dim. \mathbb{R} -VR.

Und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei eine nichtentartete symmetrische Bilinearform.

- Eine nichtentartete symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V heißt auch **pseudo-Euklidisches Skalarprodukt**.
- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **pseudo-Euklidischer Vektorraum**.
- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei ein n -dim. pseudo-Euklidischer Vektorraum und p die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv-definit ist, so heißt $(n - p, n)$ die **Signatur** von V .

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zusätzlich positiv-definit, so ist die Signatur $(0, n)$ und

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt dann (Euklidisches) **Skalarprodukt**.
- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt ein **Euklidischer Vektorraum**.

Sei M eine diffb. Mf, $g \in \Gamma(T_2^0(M))$.

Falls gilt

$g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ist für alle $p \in M$ ein pseudo-Euklidisches Skalarprodukt auf $T_p M$,

so heißt, das symmetrische $(0, 2)$ -Tensorfeld g eine **pseudo-Riemannsche Metrik**.

Das Paar (M, g) heißt **pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Sei nun $g_p := g(p)$ für alle $p \in M$ positiv-definit,

dann heißt g eine **Riemannsche Metrik** und (M, g) eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Sei (M, g) eine zusammenhängende pseudo-Riemannsche Mf, so ist die Signatur aus stetigkeitsgründen von g_p konstant auf M .

Allgemein nennt man eine konstante Signatur, die **Signatur von M** .

Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mf der Signatur $(1, p)$.

Dann heißt (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit

TODO, per Hand
insbesondere zu Untermannigfaltigkeiten und
Produktmannigfaltigkeiten
Auch wie man (g_{ij}) als Matrix auffassen kann und Satz
von Sylvester

Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M
existiert eine Riemannsche Metrik.

Notiz: Diese Aussage gilt nicht für
pseudo-Riemannsche Mf.

Sei M eine differenzierbare Mf.
Weiter sei eine Abbildung gegeben durch

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

die folgende Eigenschaften für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ (C^∞ -linear in 1. Komponente)
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ (additiv in 2. Komponente)
 $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ (‘‘Produktregel’’ in 2. Komponente)

Dann heißt ∇ eine (affinier) Zusammenhang oder kovariante Ableitung.

Sei M differenzierbare Mf, $p \in M$ und ∇ eine affiner Zusammenhang.

Dann gilt für alle $X_1, X_2, Y \in \Gamma(TM)$:

$$\text{Falls } X_1(p) = X_2(p), \text{ so folgt } (\nabla_{X_1} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p)$$

FOLGERUNG: $v \in T_p M$ kann zu einem beliebigen Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ fortgesetzt werden. Sei $Y \in \Gamma(TM)$ so setzen wir:

$$(\nabla_v Y) := (\nabla_X Y)(p).$$

Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung, d.h. dass sie unabhängig von der Wahl der Erweiterung ist, folgt gerade aus Satz 1.

Sei M diffb. Mf und $A : \overbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}^{s\text{-mal}} \rightarrow \Gamma(TM)$ eine s -multilineare Abbildung für die gilt, dass für alle $f \in C^\infty(M)$ und für alle $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$:

$$A(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_s) = fA(X_1, \dots, X_s) \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}.$$

Dann existiert ein $(1, s)$ -Tensorfeld $B \in \Gamma(T_s^1(M))$ auf M , so dass

$$A(X_1, \dots, X_s)(p) = B_p(X_1(p), \dots, X_s(p)) \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM), \forall p \in M.$$

· Eine analoge Aussage gilt für (r, s) -Tensorfelder. Hier betrachtet man multilineare Abbildung

$$A : \underbrace{\Gamma(T^*M) \times \cdots \times \Gamma(T^*M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{s\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M),$$

die $C^\infty(M)$ -linear in jedem Eintrag sind.

TODO Seite 36

$X \mapsto \nabla_X Y$ ist eine $(1, 1)$ -Tensorfeld.

Sei M eine diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇ ,
 $p \in M$, $v \in T_p M$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$.

Gilt, dass Y_1 und Y_2 in einer Umgebung
übereinstimmen, so folgt $\nabla_v Y_1 = \nabla_v Y_2$.

Sei M diffb. Mf, (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ lokale Koordinaten auf M .

Als Konsequenz der Sätze dieses Abschnitts ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} : U \rightarrow TU$$

wohldefiniert.

Als Element in $\Gamma(TU)$ können wir es in eine Basis schreiben

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

und definieren darüber die **Christoffel-Symbole** $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$, welche den Zusammenhang ∇ auf U bestimmen.

Sei M diffb. Mf, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$

Eine differenzierbare Abbildung

$$X : I \rightarrow TM, t \mapsto X_t := X(t) \text{ mit } X_t \in T_{c(t)}M \forall t \in I$$

heißt **Vektorfeld längs c** .

Wir bezeichnen den Raum der Vektorfelder längs c mit $\Gamma_c(TM)$.

NOTIZ: \dot{c} ist ein Vektorfeld längs c .

Genauso wie $X \circ c$ mit $X \in \Gamma(TM)$, $c \in C^\infty(I, M)$. Andersherum ist nicht jedes Vektorfeld längs einer Kurve Einschränkung eines Vektorfeldes auf M . Diese Aussage sollte jedoch lokal gelten.

NOTIZ: $\Gamma_c(M)$ ist ein Modul über $C^\infty(I)$.

NOTIZ: Für $X \in \Gamma(TM)$ ist $(\nabla_{\dot{c}}X)(t) := \nabla_{\dot{c}(t)}X \in \Gamma_c(TM)$.

Sei M diffb. Mf mit affinem Zusammenhang ∇ , $I = [a, b] \in \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$.

Dann existiert eine eindeutige Abbildung

$$\frac{\nabla}{dt} : \Gamma_c(TM) \rightarrow \Gamma_c(TM), \quad X \mapsto \frac{\nabla}{dt} X,$$

die folgende drei Eigenschaften erfüllt für alle $X, Y \in \Gamma_c(TM)$, $f \in C^\infty(I)$:

1. $\frac{\nabla}{dt}(X + Y) = \frac{\nabla}{dt}X + \frac{\nabla}{dt}Y$
2. $\frac{\nabla}{dt}(fX) = f'X + f\frac{\nabla}{dt}X,$

ist $X = Z \circ c$ für ein $Z \in \Gamma(TM)$, so gilt weiter

3. $\frac{\nabla}{dt}X = \nabla_{\dot{c}}Z.$

$\frac{\nabla}{dt}$ heißt auch **kovariante Ableitung längs c bzw. einer Kurve**.

Weiter gilt in lokalen Koordinaten (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ und $f_i \in C^\infty(c^{-1}(U))$:

$$\text{Für } X = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \circ c \quad \text{ist} \quad \frac{\nabla}{dt}X = \sum_k \left(f'_k + \sum_{ij} (x_i \circ c)' f_j \Gamma_{ij}^k \circ c \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \circ c$$

Sei M diffb. Mf, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$ und $X \in \Gamma_c(TM)$.

Falls $\frac{\nabla}{dt}X = 0$ gilt, so heißt das Vektorfeld X längs c parallel.

Sei M diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇ , $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$
und sei $v \in T_{c(a)}M$.

Dann existiert ein eindeutiges paralleles Vektorfeld X längs c , so dass
 $X(a) = v$.

$$\exists! X \in \Gamma_c(TM) : X(a) = v \quad \text{AWP}$$

NOTIZ: $\Gamma_c(TM)$ ist ein Vektorraum und dieser Satz zeigt, eine Basis dieses Vektorraums zu jedem $t \in I = [a, b]$ eine Basis des Tangentialraums $T_{c(t)}M$ liefert. ((und) andersherum ?)

Sei M diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇ , $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $c \in C^\infty(I, M)$
 und sei
 $X \in \Gamma_c(TM)$ das eindeutige Vektorfeld mit $X(a) = v \in T_{c(a)}$.

Die Abbildung

$$c||_a^b : T_{c(a)} \rightarrow T_{c(b)}, \quad v = X(a) \mapsto X(b)$$

heißt **Parallelverschiebung längs c von a nach b** .

SATZ: $c||_a^b$ ist ein linearer Isomorphismus.

Sei M diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇ ,
 $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ wobei $\varepsilon > 0$ und $c \in C^\infty(I, M)$ mit
 $c(0) = p \in M$, $\dot{c}(0) = v$.

Dann gilt

$$\nabla_v X = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c|_t^0 X_{c(t)} - X_p}{t}$$

Sei M diffb. Mf mit affiner Zusammenhang ∇ .

Die folgende Abbildung T ist ein $(1,2)$ -Tensorfeld:

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM), \quad (X, Y) \mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

T heißt **Torison** oder **Torsionstensor**.

Falls $T = 0$, so heißt der Zusammenhang **torisionsfrei**.

Es sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf und ∇ ein Zusammenhang auf M .

Falls für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ gilt, dass

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

so heißt der Zusammenhang ∇ **metrisch**.

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf und ∇ ein affiner Zusammenhang von M .
 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$\nabla \text{ ist metrisch} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{\nabla}{dt} X, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\nabla}{dt} Y \right\rangle \quad \forall c \in C^\infty(I, M), \quad \forall X, Y \in \Gamma_c(TM)$$

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pseudo-Riem. Mf.

Dann existiert genau ein torsionsfreier und metrischer Zusammenhang ∇ auf M .

Dieser ist durch die Koszul-Formel

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = & X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ & + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle \end{aligned}$$

bestimmt.

DEFINITION: Dieser eindeutiger Zusammenhang heißt Levi-Civita-Zusammenhang.

Sei M eine diffb. Mf mit einem affinen Zusammenhang ∇ . Lokale Koordinaten: (U, φ) ,
 $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$.

Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve, $\dot{\gamma}$ ist dann ein Vektorfeld längs γ . Diese $\dot{\gamma}$ sei parallel, es gilt also

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = 0.$$

Dann heißt γ **Geodätische**.

Wir setzen $\gamma_i = x_i \circ \gamma$

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = \sum_k \left(\gamma_k'' + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \right) \cdot \partial_k \circ \gamma$$

Also

$$\gamma|_U \text{ ist Geodätische} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_k'' + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0 \quad \forall k$$

Sei M diffb Mf mit affinen Zusammenhang ∇ .

Dann gilt:

1. **Existenz** einer Geodäitschen γ :

$\forall p \in M, v \in T_p M \exists \varepsilon > 0, \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v \quad \text{und} \quad \frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = 0$$

2. **Eindeutigkeit:** Jede weitere Geodätische $\eta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ mit denselben Anfangsbedingungen $\eta(0) = p$ und $\eta'(0) = v$ stimmt auf einem Intervall um 0 mit γ überein.

Unter Missachtung des Definitionsbereiches, sagt man, die Geodätische γ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ ist eindeutig und schreibt γ_v .

Sei M diffb. M, $I \subset \mathbb{R}$, $\gamma \in C^\infty(I, M)$, (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$, $\gamma_i := x_i \circ \gamma$.

Dann ist

$$\gamma|_U \text{ Geodätische} \Leftrightarrow \gamma|_U \text{ löst } \begin{cases} \dot{\gamma}_k = \eta_k \\ \dot{\eta}_k = -\sum_{i,j} \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \end{cases} \quad \#$$

Wir betrachten nun eine Kurve auf TM und zwar $\gamma \in C^\infty(I, TM)$, um damit zu arbeiten sammeln wir hier ein paar Abbildung und Eigenschaften:

- $\pi : TM \rightarrow M, (p, v) \mapsto p$
- $\psi : TU \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, (p, v) \mapsto (\varphi(\pi(p, v)), v(x_1), \dots, v(x_n))$, d.h. mit $y_i(p, v) = v(x_i)$ ist für $\psi = (x_1 \circ \pi, \dots, x_n \circ \pi, y_1, \dots, y_n)$ (TU, ψ) eine Karte von TM .
- Angewendet auf $(\gamma, \dot{\gamma})$ gilt mit $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ und $\dot{\gamma}_i = x_i \circ \dot{\gamma}$

$$\psi(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t), \dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))$$

- Nun sei $X \in \Gamma(T(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n))$ für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \varphi(U)$ und $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch:

$$X(a, b) = (b_1, \dots, b_n, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^1 \circ \varphi^{-1}(a) \cdot b_i b_j, \dots, -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^n \circ \varphi^{-1}(a) \cdot b_i b_j)$$

- Dann gilt, dass eine Kurve $\alpha : I \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ genau dann eine Integralkurve von X ist wenn (γ_i, η_i) Lösung von $\#$ sind.

Sei $\alpha(t) = \psi(\gamma(t), \gamma'(t))$ und $(\dot{\alpha}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t), \dot{\eta}_1(t), \dots, \dot{\eta}_n(t)), i \in \{1, \dots, 2n\})$

$$\gamma \text{ ist Geodätische} \Leftrightarrow u_i \circ \dot{\alpha}(t) = u_i \circ X(\alpha(t))$$

$$(\Leftrightarrow \text{ z.B. } \dot{\gamma}_i = \eta_i \text{ oder } \dot{\eta}_i = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^i \circ \gamma \cdot \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j$$

- Betrachte nun: $Y \in \Gamma(TUU)$, ein Vektorfeld also, definiert über

$$Y = (d\psi^{-1}) \circ X \circ \psi : TU \rightarrow TUU, (p, v) \mapsto Y(p, v)$$

Wir holen also die Gleichung von oben zurück nach TU und die Integralkurve von Y ist genau $\dot{\gamma} : I \rightarrow TU$. Mit diesen Überlegung folgt dann der nächste Satz.

- Schließlich kann man dieses Resultat auf ganz M fortsetzen.

Siehe Konstruktion für Y .

Der lokale Fluss von $Y \in \Gamma(TUU)$ heißt geodätsicher Fluss.

Dies ist so zu verstehen:

Dann ist der lokale Fluss eine Abbildung $\Phi : I \times TU \rightarrow TU$ mit $\Phi(0, v) = v$

und $\Phi(t, v) = \gamma_v(t)$ ist Integralkurve von Y .

Sei M diffb Mf mit Zusammenhang ∇ . Sei Φ der geodätische Fluss um die Punkt $0 = 0_p \in T_p M$, so gilt:

$$\forall p \in M \exists 0_p \in V \overset{\text{off}}{\subset} TM, \delta > 0, \Phi \in C^\infty((-\delta, \delta) \times V, TM) : \exists ! \Phi_v : t \mapsto \Phi(t, v),$$

wobei Φ_v Integralkurve von Y ist.

Es $c : [a, b] \rightarrow M$ eine stetige Abbildung. Existiert eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, so dass $c|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^\infty$ für alle $i = 0, \dots, k-1$ ist, so heißt c **stückweise differenzierbare Kurve**.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mf und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise differenzierbare Kurve, so definieren wir durch

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt,$$

die **Länge** der Kurve c . Die Länge einer stückweise differenzierbaren Kurve ist endlich.

Weitere Definitionen:

- Für $p, q \in M$ sei Ω_{pq} die Menge aller stückweise diffb. Kurven in M von p nach q .
- Eine monotone, surjektive Abbildung $\varphi \in C^\infty([c, d], [a, b])$ heißt **differenzierbare Umparametrisierung**.
- Eine Kurve heißt zur Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{c}\| = 1$ ist und (proportional) zur Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{c}\|$ konstant ist

Es gelten folgende Aussagen:

1.
 - $L(c) \geq 0$;
 - $L(c) = 0$ genau dann, wenn c konstant ist.
2. Sind $c_1 : [a, b] \rightarrow M$, $c_2 : [b, c] \rightarrow M$ zwei stückweise differenzierbare Kurven mit $c_1(b) = c_2(b)$, so ist

$$L(c_1 \cup c_2) = L(c_1) + L(c_2),$$

wobei $c_1 \cup c_2$ die Konkatenation von c_1 und c_2 bezeichnet.

3. Es sei $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine differenzierbare Umparametrisierung, $c : [a, b] \rightarrow M$ ein beliebiger stückweise differenzierbarer Weg. Dann gilt $L(c \circ \varphi) = L(c)$.

Es sei:

$$d(p, q) = \inf\{L(c) \mid c \in \Omega_{pq}\}.$$

Dann gilt

1. (M, d) ist ein metrischer Raum.
2. Die durch d induzierte Topologie auf M stimmt mit der ursprünglichen Topologie von M als Mannigfaltigkeit überein.

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine stückweise differenzierbare,
proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve
mit $\gamma(0) =: p$, $\gamma(1) =: q$ und gilt

$$L(\gamma) \leq L(c) \quad \forall c \in \Omega_{pq}.$$

Dann ist γ Geodätische.

Sei (M, g) (pseudo)-Riemannsche Mf, $p \in M$. Sei $V \subset T_p M$ offene Umgebung von $0 \in T_p M$.

Ist \exp_p auf V ein Diffeomorphismus aufs Bild, so heißt $\exp_p(V)$ eine **normale Umgebung** von p .

Ist (M, g) Riemannsche Mf und ist $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(0) \subset V$. Dann heißt $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ ein **geodätsicher Ball** um p .

Sei $p \in M$, U eine normale Umgebung von p , $B \subset U$ ein geodätischer Ball um p , $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$, die ganz in B verläuft und $\gamma(1) = p'$.

Dann gilt

$$L(\gamma) \leq L(c) \quad \forall c \in \Omega_{pp'} \quad \text{insbesondere:} \quad L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$$

Falls $L(\gamma) = L(c)$, dann gilt

- $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ und c ist Umparametrisierung von γ .
- Insbesondere: Für jeden Punkt $q \in B$ gibt es bis auf Umparametrisierung genau eine minimierende Geodätische, die p mit q verbindet.

Bemerkung: die Parametrisierung auf $[0, 1]$ ist nicht relevant.

Es sei $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$, $(t, s) \mapsto f(t, s)$ eine differenzierbare Abbildung.

Dann gilt:

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}$$

TODO: Vielleicht ein Wort dazu wie diese Ableitung zu verstehen sind

Es sei $p \in M$, $v \in T_p M$ so, dass $\exp_p v$ definiert ist und $w \in T_v(T_p M) \stackrel{\sim}{=} T_p M$.

Dann gilt:

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Voraussetzung weiter wie in HS2. Sei weiter

$$\gamma(t) = \exp_p(tw).$$

Dann gilt:

$$d(p, \gamma(t)) = \|tw\| = L(\gamma|_{[0,t]}).$$

Insbesondere: Betrachten wir M als metrischen Raum, so gilt für den geodätischen Ball $B = \exp_p(B_\varepsilon(0))$, dass

$$B = B_\varepsilon(p).$$

Es sei

$$F : TM \rightarrow M \times M, \quad v \mapsto (\pi(v), \exp(v)).$$

Dann ist

$$\forall p \in M : dF_{0_p} : T_{0_p}TM \rightarrow T_{(p,p)}(M \times M) \cong T_pM \oplus T_pM$$

ist eine Isomorphismus.

$\forall p \in M \exists$ offene Umgebung U von $p, \varepsilon > 0 : \forall q \in U$

folgendes gilt:

1. Die Abbildung \exp_q , eingeschränkt auf $B_\varepsilon(0) \subset T_q M$ ist ein Diffeomorphismus aufs Bild.
2. $U \subset \exp_q(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(q)$.

Dies bedeutet:

U ist eine normale Umgebung eines jeden Punktes.

Bemerkung: Aus diesem Lemma und HS 2, folgt, dass für je zwei Punkte $q_1, q_2 \in U$ bis auf Umparametrisierung eine eindeutige minimierende Geodätische γ (mit Länge $< \varepsilon$) existiert, die q_1 und q_2 miteinander verbindet. Man bezeichnet eine solche Umgebung als geodätisch konvex.

Aus Lemma 2 und HS 2, folgt, dass für je zwei Punkte $q_1, q_2 \in U$ bis auf Umparametrisierung eine eindeutige minimierende Geodätische γ (mit Länge $< \varepsilon$) existiert, die q_1 und q_2 miteinander verbindet.

Man bezeichnet eine solche Umgebung als geodätisch konvex.

Sei (M, g) eine pseudo-Riem. Mf mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ .

Gilt, dass für alle $p \in M$ die Exponentialabbildung

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M$$

auf ganz $T_p M$ definiert ist, d.h. jede Geodätische von M kann auf ganz \mathbb{R} erweitert werden, dann nnen wir (M, g) (geodätisch) vollständig.

SATZ UND BEMERKUNGEN (SATZ VON HOPF-RINOW) 10 SATZ VON HOPF-RINOW

Es sei (M, g) zusammenhängende Riem. Mf, $p \in M$.

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. \exp_p ist auf ganz $T_p M$ definiert
2. Abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von M sind kompakt.
3. M ist als metrischer Raum vollständig.
4. M ist geodätisch vollständig.

Außerdem implizieren obige Bedingungen

5. Zu jedem $q \in M$ gibt es eine Geodätische γ , die p und q verbindet, so dass $L(\gamma) = d(p, q)$.

- (i) BEMERKUNG: Aus 5. \nRightarrow 3.: Betrachte konvexe offene Teilmenge des \mathbb{R}^n
- (ii) KOROLLAR: Zwischen je zwei $p, q \in M$ (wie oben und vollständig) existiert eine Geodätische der Länge $d(p, q)$. (Nicht eindeutig: Siehe S^n)
- (iii) KOROLLAR: M (wie oben & kompakt) ist vollständig.
- (iv) BEMERKUNG: Auf nichtkompakten Riemn. Mf kann die Vollständigkeit von der gewählten Metrik abhängen.

Sei (M, g) , (N, h) pseudo-R. Mf und $\varphi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus.

Falls

$$h_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)) = g_p(v, w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_p M,$$

heißt φ **Isometrie**. Diese Bedingung schreibt man auch $\varphi^*h = g$.

Existiert eine Isometrie zwischen M und N , heißen M und N isometrisch.

Sei $(M, g), (N, h)$ pseudo-R. Mf und $\varphi : M \rightarrow N$ ein Isometrie.

Dann gilt für alle Vektorfelder X und Y auf M , dass

$$\varphi_* \nabla_X^M Y = \nabla_{\varphi_* X}^N \varphi_* Y$$

Eine pseudo-Riemannsche Mf heißt **homogen**, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ eine Isometrie $\varphi : S^n \rightarrow S^n$ gibt, so dass $\varphi(p) = q$.

Ein Vektorfeld X auf einer pseudo-Riemannsche Mf heißt **Killingfeld**, falls die lokalen Flüsse von X Isometrien sind.

TODO Was heißt das konkret?

Sei M eine diffb. MF, X Vektorfeld auf M , A ein Tensorfeld auf M vom Typ (r, s) .

Es sei Φ_t der lokale Fluss von X auf einer offenen Menge $U \subset M$, dann definieren wir für $p \in U$ durch

$$(L_X A)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} (\Phi_t^* A)_p$$

die Lie-Ableitung von A entlang X . Diese ist wieder ein Tensorfeld vom Typ (r, s) .

TODO B10 Uebung 2

Sei (M, g) pseudo-Riemannsche Mf mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ , X Vektorfeld auf M .

Dann ist folgendes äquivalent:

1. X ist Killingfeld
2. $L_X g = 0$
3. $\langle \nabla_v X, w \rangle + \langle \nabla_w X, v \rangle = 0$ für alle $v, w \in T_p M, p \in M$

Sei M differenzierbare Mf und ∇ ein affiner Zusammenhang auf M . Die Abbildung

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM); \quad (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$$

definiert durch

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ist ein $(1, 3)$ -Tensorfeld. Er wird der **Riemannsche Krümmungstensor** von ∇ genannt.

Ist (M, g) eine pseudo-Riem. Mf mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ , so nennt man R auch **Riemannsche Krümmungstensor** von g .

Mögliche Sichtweise auf den Riemannsche
Krümmungstensor:

In lokalen Koordinaten eine beliebigen pseudo-Riem.
Mf (M, g) gilt

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)Z = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Z$$

d.h, R misst, inwieweit die obigen kovarianten
Ableitungen miteinander kommutieren.

(M, g) , (N, h) seien pseudo-Riem. Mf mit entsprechenden Levi-Civita-Zusammenhängen ∇^M und ∇^N und dazu assoziierten Riemannsche Krümmungstensoren R^M und R^N .

Ist $\varphi : M \rightarrow N$ eine Isometrie, so gilt für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$:

$$\varphi_*(R^M(X, Y)Z) = R^N(\varphi_*X, \varphi_*Y)\varphi_*Z$$

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist genau dann lokal isometrisch zu \mathbb{R}^n , wenn der Krümmungstensor verschwindet.

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf mit assoziiertem Krümmungstensor R .

Dann gilt für alle $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (1. Bianchi-Identität)
3. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$
4. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei ein endlich-dim. pseudo-Euklidischer VR.

Eine trilineare Abbildung

$$R : V \times V \times V \rightarrow V, \quad (u, v, w) \mapsto R(u, v)w,$$

welche die vier formalen Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors erfüllt heißt **algebraischer Krümmungstensor**.

Für den Krümmungstensor R einer pseudo-Riem. Mf (M, g) mit $p \in M$ sind also alle Abbildung:

$$R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

algebraischer Krümmungstensoren.

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein pseudo-Eukl. VR. $\sigma \subset V$ sei ein 2d-Unterraum, auch **2-Ebene** genannt, und eine $\{u, v\}$ eine Basis.

Wir definieren

$$Q(u, v) = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2.$$

Falls $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eingeschränkt auf σ eine nichtentartete symmetrische Bilinearform ist, so nennen wir auch σ **nichtentartet**.

LEMMA 1: σ ist genau dann nichtentartet, wenn $Q(u, v) \neq 0$.

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ mit assoziierten Krümmungstensor R . Sei $p \in M$ und $\sigma \subset T_p M$ eine nichtentartete 2-Ebene und $\{u, v\}$ eine Basis σ .

Die Zahl

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{Q(u, v)}$$

definieren wir als die **Schnittkrümmung**.

LEMMA 2: Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis $\{u, v\}$.

Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mf, $\kappa \in \mathbb{R}$

Gilt:

$$K(\sigma) = \kappa \quad \forall p \in M, \forall \text{ nichtentartete 2-Ebenen } \sigma \subset T_p M$$

So sagen wir M hat **konstante Schnittkrümmung**.

BEISPIEL: Für $M = \mathbb{R}^n$ gilt $R = 0$ und damit

$K(\sigma) = 0$ unabhängig von σ .

Gilt $\kappa = 0$ so heißt der Raum **flach**.

Es seien M, N pseudo-Riemannsche Mf, $p \in M$,
 $\varphi : M \rightarrow N$ eine Isometrie, $\sigma \subset T_p M$ eine 2-Ebene.

Dann gilt:

$$K^M(\sigma) = K^N(d\varphi_p(\sigma)).$$

BEISPIEL: S^n , versehen mit Standardmetrik, hat konstante Krümmung.

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pseudo-Eukl. VR. Seien u, v zwei linear unabhängige Vektoren, die eine entarte 2-Ebene aufspannen.

Dann existiert zu Umgebung U von v ein $z \in U$, so dass u und z eine nichtentartete Ebene aufspannen.

Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein pseudo-Eukl. VR mit zwei Krümmungstensoren R, R' und dazugehörigen Schnittkrümmungen K, K' .

Gilt:

$$K(\sigma) = K'(\sigma) \quad \forall \text{ nichtentartete 2-Ebenen } \sigma \subset V,$$

dann ist

$$R = R'$$

Es $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine pseudo-Riem. Mf mit konstanter
Schnittkrümmung κ .

Dann hat der Riemmansche Krümmungstensor von g
folgende Gestalt:

$$R(u, v)w = \kappa \cdot (\langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v).$$

DEFINITION 4 (PSEUDO ONB, RICCI-TENSOR) SCHNITTKRÜMMUNG & CO

Sei (M, g) pseudo-Riem. Mf, $p \in M$ und R ein Krümmungstensor.

Der **Ricci-Tensor** Ric ist ein $(0, 2)$ Tensorfeld, definiert durch

$$Ric(X, Y)(p) = Spur(v \mapsto R_p(v, X(p))Y(p)).$$

Ist $B := \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von $T_p M$ für die gilt

$$\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad \langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

so heißt B **pseudo-ONB** von $T_p M$.

Für so ein B können wir Ric schreiben als

$$Ric(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle \cdot \langle R_p(e_i, X(p))Y(p), e_i \rangle.$$

Daraus liest man ab, dass Ric symmetrisch ist.

Es gilt auch : $Ric = C_1^1(R)$ TODO

INTERPRETATION 1: Ist $v \in T_p M$, dann kann man $Ric(v, v)$ als Mittel über die Schnittkrümmung aller 2-Ebenen, die v enthalten, verstehen.

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pseudo-Riem. Mf, $p \in M$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ pseudo ONB von $T_p M$.

Die **Skalarkrümmung** $scal \in C^\infty(M)$ ist definiert durch

$$scal(p) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle Ric(e_i, e_i).$$

INTERPRETATION 1: Mittel aller Schnittkrümmung in $p \in M$.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mf, R der Krümmungstensor von g , $c \in C^\infty([a, b], M)$, $\varepsilon > 0$.

$$f : \underbrace{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]}_{=: I} \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto f(s, t) = f_s(t) \quad \text{mit} \quad f_0(t) = c(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

heißt **Variation von c**. Es ist $f \in C^\infty(I, M)$.

Sei $V \in \Gamma_f(TM)$, also $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$ ist glatt mit $V(s, t) \in T_{f(s, t)}M$.

LEMMA: Es gilt

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} V = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} V + R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V.$$

Sei nun für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Kurve f_s eine Geodätische. Insbesondere sei $f_0 =: \gamma$.

Wir definieren das Vektorfeld J längs γ namens **Variationsvektorfeld von f** mit

$$J : [a, b] \rightarrow TM, \quad t \mapsto J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(s=0, t) = \frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0}(t)$$

SATZ 1: J erfüllt $\underbrace{\frac{\nabla^2}{dt} J + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}}_{\text{(JACOBIGLEICHUNG)}} = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ Variation } f : I \rightarrow M \text{ mit } J \text{ als Variationsvektorfeld.}$

DEFINITION: Allgemein heißt ein Vektorfeld längs einer Geodätischen γ , welches die Jacobigleichung erfüllt, **Jacobifeld**.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mf, R der Krümmungstensor von g ,
 $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ sei eine Geodätische und J ein Jacobifeld längs γ mit $J(0) = 0$,
 $v = \dot{\gamma}(0)$, $w = \frac{\nabla}{dt} J(0)$.

Dann gilt

$$J(t) = (d \exp_p)_{tv}(tw)$$

Sei (M, g) n -dim. Riem. Mf, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische in M .

Dann bilden die Jacobifelder längs γ einen $2n$ -dim Vektorraum. Genauer:

$$\forall v, w \in T_{\gamma(a)}M \quad \exists! \text{ Jacobifeld } J : \quad J(a) = v, \quad \frac{\nabla}{dt} J(b) = w$$

$$I : \{\text{Jacobifelder längs } \gamma\} \rightarrow T_p M \oplus T_p M, \quad J \mapsto (J(a), \frac{\nabla}{dt} J(b)) \quad \text{ist ein Isomorphismus}$$

(TODO: Lösung von DGL bilden Vektorraum)

1. $\dot{\gamma}$ immer Jacobifeld
2. $J(t) = t\dot{\gamma}(t)$ Jacobifeld
3. $J(t) = f(t)\dot{\gamma}(t)$
4. Sei $\gamma \in C^\infty([0, a], M)$. Betrachte die Variation $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$, wobei $v(s)$ Kurve in T_pM ist. Setze $v = v(0)$ und $w = v'(0) \in T_pM$. Für alle s ist $f_s \in C^\infty$ eine Geodätische, also folgt

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$$

ein Jacobifeld längs γ_v mit $J(0) = 0$ ist.

Sei M Riemannsche Mf mit konstanter Krümmung κ . Es sei $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in M .

Weiter sei J ein Jacobifeld längs γ mit $J(0) = 0$ und $J(t) \perp \dot{c}(t)$.

Weiterhin sei X das eindeutige parallele Vektorfeld längs γ mit $X(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$.

Dann gilt:

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa}} X(t) & \kappa > 0 \\ tX(t) & \kappa = 0 \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-\kappa})}{\sqrt{-\kappa}} X(t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

Sei (M, g) eine n -dim. Riemannsche Mf, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine nichtkonstante Geodätische in M mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$.

Existiert ein Jacobifeld J entlang γ mit $J(a) = 0$ und $J(b) = 0$, das nirgends verschwindet, so sagen wir

q ist entlang γ zu p konjugiert oder auch p, q sind konjugierter Punkt entlang γ .

Sei γ wie oben, dann gilt:

$$\{J \text{ ist Jacobifeld entlang } \gamma \mid q \text{ ist entlang } \gamma \text{ zu } p \text{ konjugiert}\}$$

ist ein $(n - 1)$ -dim. Vektorraum. Diese Dimension wird auch Vielfachheit des konjugierten Punktes q genannt.

BEIPIEL 1: S^n TODO

BEIPIEL 2: $\kappa \leq 0$ TODO

(M, g) n -dim. Riemannsche Mf, $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ eine Geodätische mit $p = \gamma(0)$,
 $v = \dot{\gamma}(0)$.

Dann gilt

1. Der Punkt $\gamma(t_0)$ für $t_0 \in [0, a]$ ist genau dann entlang γ zu p konjugiert, wenn $t_0 v$ ein kritischer Punkt von \exp_p ist.
2. Die Vielfachheit von $\gamma(t_0)$ ist gleich der Dimension des Kerns von $(d \exp)_p(t_0 v)$.

(M, g) sei vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung, d.h. $K(\sigma) \leq 0$ für alle 2-Ebenen $\sigma \subset T_p M$, $\forall p \in M$.

Dann gibt es keine konjugierten Punkte in M , d.h.

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M \quad \forall p \in M$$

ist ein lokaler Diffeomorphismus auf ganz $T_p M$.

Sei (M, g) zusammenhängende und vollständige Riem.
Mf mit nichtpositiver Schnittkrümmung.

Dann ist

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M \quad \forall p \in M$$

eine differenzierbare Überlagerung.

Sei (M, g) vollständige, einfach zusammenhängende Riem Mf mit nichtpositiver Schnittkrümmung.

Dann ist

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M \quad \forall p \in M$$

ein Diffeomorphismus.

Insbesondere existiert für beliebige Punkt $p, q \in M$, genau eine Geodätische von p nach q .

Sei (M, g) ein Riemannsche Mf, $c \in C^\infty([0, a], M)$ mit Länge

$$L(c) = \int_0^a \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Sei weiter $\varepsilon > 0$ und $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ eine Variation von c .

Wir nennen die Abbildung E

$$E : \Omega_{0,a} \rightarrow \mathbb{R}, \quad c \mapsto E(c) = \int_0^a \|\dot{c}(t)\|^2 dt$$

das **Energiefunktional**.

NOTIZ 1: Weiter gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\left(\int_0^a \|\dot{c}(t)\| \cdot 1 dt \right)^2 = \boxed{L(c)^2 \leq a E(c)} = \left(\int_0^a \|\dot{c}(t)\|^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^a 1 dt \right)$$

Mit Gleichheit genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist

NOTIZ 2: Aussagen in 3.5 gelten z.T. auch für L , falls c eine reguläre Kurve ist.

Sei (M, g) Riemannsche Mf, $p, q \in M$ sowie $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine die Länge minimierende Geodätische von p nach q .

Dann gilt für alle $c \in C^\infty([0, a], M)$ von p nach q :

$$E(\gamma) \leq E(c).$$

Mit Gleichheit genau dann, wenn c eine die Länge minimierende Geodätische ist.

Sei (M, g) Riemannsche Mf, $c \in C^\infty([0, a], M)$,
 $V \in \Gamma_c(TM)$ und $\varepsilon > 0$.

Dann existiert eine Variation f

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$$

mit Variationsvektorfeld V .

Ist noch $V(0) = 0$ und $V(a) = 0$,

so können wir annehmen, dass

$$f(s, 0) = c(0) \text{ und } f(s, a) = c(a) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Wir sagen dazu, dass die Variation f **eigentlich** ist.

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mf, $c \in C^\infty([0, a], M)$, $\varepsilon > 0$, f eine Variation von c mit $f_s(t) \in C^\infty([0, a], M)$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Es sei weiter

$$E(s) := E(f_s) = \int_0^a \|\dot{f}_s(t)\|^2 dt$$

und V bezeichne das Variationsvektorfeld der Variation f .

Dann gilt:

$$\frac{1}{2} \dot{E}(0) = - \int_0^a \langle V(t), \frac{\nabla}{dt} \dot{c}(t) \rangle dt - \langle V(0), \dot{c}(0) \rangle + \langle V(a), \dot{c}(a) \rangle.$$

KOROLLAR: $c \in C^\infty([0, a], M)$ ist genau dann eine Geodätische, wenn für jede eigentliche Variation f von c gilt, dass $\dot{E}(0) = 0$.

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mf mit R als Krümmungstensor von $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
 $c \in C^\infty([0, a], M)$, $\varepsilon > 0$, f eine Variation von c mit $f_s(t) \in C^\infty([0, a], M)$ für
 alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. V bezeichne das Variationsvektorfeld der Variation f .

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ddot{E}(0) = & - \int_0^a \left\langle \frac{\nabla^2}{dt^2} V + R(V, \dot{c}) \dot{c}, V \right\rangle(t) dt \\ & - \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \dot{c} \right\rangle(0, 0) + \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \dot{c} \right\rangle(0, a) \\ & - \left\langle V(0), \frac{\nabla}{dt} V(0) \right\rangle|_{t=0} + \left\langle V(a), \frac{\nabla}{dt} V(a) \right\rangle|_{t=a}. \end{aligned}$$

NOTIZ 1: Ist f eine eigentliche Variation von c , fallen alle bis auf den ersten Summanden weg.

NOTIZ 2: Der erste Eintrag in $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im ersten Summanden ist gerade die Jacobigleichung.

Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gebe ein $r > 0$, so dass

$$\operatorname{Ric}_p(v, v) \geq \frac{n-1}{r^2} \langle v, v \rangle > 0 \quad \forall p \in M, \forall v \in T_p M$$

Dann ist M kompakt und der **Durchmesser** von M

$$\operatorname{diam}(M) := \sup_{p, q \in M} d(p, q)$$

erfüllt

$$\operatorname{diam}(M) \leq \pi r.$$

Weiterhin ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ endlich.

Sei M n -dim. Mf, $(\overline{M}, \overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Riemannsche Mf der Dimension $n + k$. Sei $i : M \rightarrow \overline{M}$ eine Immersion. Mittels

$$\langle v, w \rangle := \langle di_p(v), di_p(w) \rangle \quad \text{für } p \in M, v, w \in T_p M$$

zieht man die Metrik von \overline{M} auf M zurück (**isometrischen Immersion**).

Alle Betrachtungen sind lokal und damit kann o.B.d.A. i als Einbettung angenommen werden. In diesem Sinn betrachten wir $M \subset \overline{M}$, da $i(M) \cong M$.

Sei (U, φ) Unter-Mfskarte mit $\varphi = (x_1, \dots, x_{n+k})$ und $(U \cap M, \psi)$ mit $\psi := (x_1, \dots, x_n)$ eine Karte von M . φ sei sogewählt, das $\varphi(U)$ invariant unter der Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist. Mithilfe dieser Karten können wir eine gegebene Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf U Fortsetzen der Einschränkung $f|_{U \cap M}$:

$$\overline{f} = f \circ \psi^{-1} \circ \pi \circ \varphi$$

Ähnlich kann man mit lokalen Vektorfelder auf M verfahren. Es seien $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+k}})$ die zu φ assoziierten lokalen Basisfelder. Schränken wir diese auf $U \cap M$ ein, so hat man die lokalen Basisfelder der Karte ψ von M . Für $X \in \Gamma(TU \cap M)$ können wir schreiben

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{U \cap M}$$

Und erhalten für

$$\overline{X} := \sum_{i=1}^n \overline{f}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ein } \overline{X} \in \Gamma(TU) \text{ mit } \overline{X}|_M = X.$$

Dies kann auch so ausdrücken

$$\overline{X} \circ i = di(X),$$

d.h. X und \overline{X} sind i -verwandt.

Alles wie im setup. Sei $p \in M \subset \overline{M}$. Mittels Isomorphie sei $T_p M = di(T_p M)$

Wir definieren den **Normalenraum** von M in \overline{M} in p durch

$$\nu_p M := \{v \in T_p \overline{M} | v \perp T_p M\}.$$

Wir nennen $\nu M := \sqcup_{p \in M} \nu_p M$ das **Normalenbündel**.

Betrachte die Zerlegung:

$$T_p \overline{M} = T_p M \otimes \nu_p M \text{ und } T_p M \ni v = \underbrace{v^\top}_{\text{tang. Anteil}} + \underbrace{v^\perp}_{\text{normalen Anteil}}$$

Seien $X, Y \in \Gamma(TU \cap M)$ beliebig fortgesetzt zu $\overline{X}, \overline{Y} \in \Gamma(TU)$ und betrachte

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top + (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp.$$

Wir definieren die **zweite Fundamentalform** α von M durch

$$\alpha(X, Y)(p) := (\overline{\nabla}_{\overline{X}_p} \overline{Y})^\perp$$

LEMMA: Die zweite Fundamentalform α ist wohldefiniert, symmetrisch in X und Y und C^∞ -linear.

GAUSS-FORMEL:
$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})(p) = (\overline{\nabla}_X Y)(p) = (\nabla_X Y)(p) + (\alpha(X, Y))(p)$$

Es gilt

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt}Y = \frac{\nabla}{dt}Y + \alpha(\dot{c}, Y)$$

DEFINITION: Eine Unter-Mf $M \subset \bar{M}$ heißt **totalgeodätisch in \bar{M}** , wenn $\forall p \in M, \forall v \in T_p M$ die Geodätische in \bar{M} durch p in Richtung v komplett in M verläuft. Dies gilt genau dann, wenn die zweite Fundamentalform verschwindet.

WEINGARTEN-ABBILDUNG: Für die Erweiterung $\bar{\xi} \in \Gamma(\nu U)$ gibt lokal folgendes Sinn

$$\langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle = -\langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle.$$

GAUSS-GLEICHUNG: Für alle $x, y, z, w \in T_p M$ gilt

$$\langle \bar{R}(x, y)z, w \rangle = \langle R(x, y)z, w \rangle - \langle \alpha(x, w), \alpha(y, z) \rangle + \langle \alpha(x, z), \alpha(y, w) \rangle$$

KOROLLAR: Hat \bar{M} konstanten Schnittkrümmung κ so gilt

$$K(\sigma) = \kappa + \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - \|\alpha(x, y)\|^2$$

Ist M also totalgeodätisch in \bar{M} , dann hat M ebenfalls konst. Schnittk.

Wir definieren den Weingartenoperator A_ξ durch

$$A_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Damit wird aus der der Weingartengleichung

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle.$$

Zu dem ist $A_\xi : T_p M \rightarrow T_p M$ ein linearer selbstadjungierter Operator. Dieser ist orthogonal diagonalisierbar. Die Eigenvektoren nennen wir **Hauptkrümmungsrichtung** und die Eigenwerte **Hauptkrümmung**.

WAS FEHLT: Beispiel, Normalenzusammenhang, komische Abbildung, Codazzi-Gleichung, Bemerkung, 5.2.

