Sei M topologische Raum mit
$M \neq \emptyset$, M erfüllt zweites Abzählbarkeitsaxiom und ist Hausdorffsch.

Dann heißt M topologische Mannigfaltikeit der Dimension n, falls es zu jedem Punkt $p \in M$ eine in M offene Umgebung U und eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ existiert.
(U, φ) nennt man eine Karte von M.

Sei M top. Mf. und $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ eine Familie von Karten von M.

Dann heißt $\mathcal{A}$ ein (C^∞)-`Atlas`, falls folgendes gilt:

1. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
2. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta$ ist C^∞ für alle $\alpha, \beta \in A$. (Die Abbildungen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ heißen `Karten- oder Koordinatenwechsel`.)

Sei $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas.

Dann heißt $\mathcal{A}$ eine (C^∞)-`differenzierbare Struktur`, falls folgendes erfüllt ist:

3. $\mathcal{A}$ ist maximal in dem Sinne, dass eine Karte (U, φ) bereits zu $\mathcal{A}$ gehört, falls

$$\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \varphi(U \cap U_\alpha)$$
$$\text{und } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$$

für alle $\alpha \in A$ C^∞ ist.

Sei M eine n-dim. topologische Mf und $\mathcal{A}$ eine differenzierbare Struktur.

Eine n-`dimensionale Mannigfaltigkeit` ist ein Paar $(M, \mathcal{A})$.

Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine nichtleere Teilmenge.

M heißt n-`dim. Untermannigfaltigkeit von` $\mathbb{R}^k$, wenn es

1. zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ und
2. einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^k$ gibt, so dass

$$\varphi(M \cap U) = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^k | x_{n+1} = \cdots = x_k = 0\} \cap V.$$

Man kann eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ auch als differenzierbare Mf auffassen.

Seien $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\})$ und $(N, \{(V_\beta, \psi_\beta) | \beta \in B\})$ differenzierbare Mf und $f : M \to N$ stetig.

Dann heißt f `differenzierbar` oder auch `glatt`, wenn

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$$

für alle $\alpha \in A, \beta \in B$ C^∞ ist.

Wir setzen:

$$C^\infty := \{f : M \to N | f \text{ ist } C^\infty\}$$

Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung.

f heißt ein `Diffeomorphismus`, falls f und f^{-1} differenziert sind.

Existiert ein Diffeomorphismus zwischen zwei differenzierbaren Mf M und N, so heißen M und N diffeomorph.

Es seien $U_i \subset M$, $p \in U_i$, $i = 1, 2$, $f_i \in C^\infty(U_i, \mathbb{R})$ beliebig.

Wir definieren für beliebig $i, j = 1, 2$ und $f_{i,j}$ wie oben eine Äquivalenzrelation

$$f_i \sim f_j :\Leftrightarrow \exists V \subset M, p \in V : f_i|_V = f_j|_V$$

Nun definieren wir folgende Menge

$$\mathcal{F}_p := \{f : U \to \mathbb{R} | U \subset M \text{offen}, p \in U, f \text{differenzierbar}\}/\sim$$

und bezeichnen ihre Elemente als `Funktionskeime` und schreiben für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $p \in U$ für den Funktionskeim $[f]$.

`Bemerkung:` $\mathcal{F}_p$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra mit

$$[f] + [g] := [f + g], [f] \cdot [g] := [fg]$$

Zudem ist

$$v : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}, [f] \mapsto v([f]) := f(p)$$

ist wohldefiniert. Man kann ein Funktionskeim aber in keinen anderen Punkt außer p auswerten.

Es sei M eine diffb. Mf und sei

$$v : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R},$$

eine lineare Abbildung, die die sogenannte Leibnis-Regel erfüllt, d.h.

$$v([f] \cdot [g]) = v([f]) \cdot g(p) + f(p) \cdot v([g]).$$

Dann nennen wir v einen `Tangentialvektor an` M `von` p.

Die Menge

$$T_pM := \{v \text{ ist Tangentialvektor von } M \text{ in } p\}$$

versehen mit der Vektorraumstuktur

$$(v+w)[f] := v([f]) + w([f]), \quad (\alpha v)[f] := \alpha \cdot v([f])$$

heißt `Tangentialraum von` M `in` p.

Ist $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, so schreiben wir $v(f) := v([f])$

.

Per Hand

Sei M differenzierbar Mf, (U, φ) eine Karte um $p \in U$:
$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$.

Ist $u_1, \ldots, u_n$, so, dass

$$u_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u_i(v_1, \ldots, v_n) = v_i$$

ist, so heißen die $u_1, \ldots, u_n$ `Standardkoordinaten von` $\mathbb{R}^n$.

Nun definieren wir durch

$$x_i := u_i \circ \varphi, \quad \text{also} \quad \varphi = (x_1, \ldots, x_n)$$

die `lokalen Koordinaten` $x_1, \ldots, x_n$.

Es M diffb. Mf, (U, φ) eine Karte um p mit lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$.

Wir definieren

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad [f] \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p [f] := \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)).$$

Nun gilt: $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ ist ein Tangentialvektor an p.

TODO: hier auch Bsp 1.4.5

Sei M eine n-dim diffb. Mf, $p \in M$.

Dann ist

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p\right\}$$

eine Basis von T_pM und für $v \in T_pM$ gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p.$$

Es folgt daraus $\dim(M) = \dim(T_pM)$.

Sei M diffb. Mf, $p \in M$, $F : M \to N$ differenzierbar.

Die lineare Abbildung

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

gegeben durch

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F)$$

nennen wir das `Differential von` F `in` p

.

Sei M,N n-dim bzw. m-dim diffb. Mf, $p \in M$, $F \in C^\infty(M, N)$. Weiter sei

- (U, φ) Karte um p mit lokalen Koordinanten $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ und
- (V, ψ) Karte um $F(p)$ mit lokalen Koordinaten $\psi = (y_1, \ldots, y_m)$.

Dann gilt:

Die Matrix von dF_p bzgl der Basen $(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p)$ und $(\frac{\partial}{\partial y_i}\big|_{F(p)})$ ist gleich der Jacobimatrix von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$.

Sei M,N,L differenzierbare Mf, $p \in M$ und $F \in C^\infty(M,N)$ und $G \in C^\infty(N,L)$.

Dann gilt:

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

Sei M differenzierbare Mf, $a, b \in \mathbb{R}$, $I = (a, b)$.
Zu $c \in C^\infty(I, M)$ sagen wir auch `glatte Kurve in M`.

Weiter definiere wir für $t \in (a, b)$:

$$c'(t) = \dot{c}(t) := dc_t(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_t) \in T_{c(t)}M.$$

Mit $c : [a, b] \to M$ meinen wir :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \overline{c} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \to M \quad : \quad \overline{c}|_{(a,b)} = c$$

Sei M differenzierbare Mf, $F \in C^\infty(M, N)$, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Weiter sei $I = (a, b)$, $0 \in I$ und $c \in C^\infty(I, M)$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$.

Dann gilt:

$$dF_p(v) = (F \circ c)'(0).$$

Definition 1.6.1 ((differenzierbare) Zerlegung der Eins)

Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit. I, A beliebige Indexmengen, $\varphi_i \in C^\infty(M)$ für alle $i \in I$ und $(\varphi_i)_{i\in I}$ eine Familie. $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ sei eine offene Überdeckung von M.

Gilt:

1. die Träger der φ_i sind für alle $i \in I$ lokal endlich, d.h.

$$\forall p \in M \exists U \subset M, p \in U : U \cap \operatorname{supp} \varphi_i \neq \emptyset \quad \text{für höchstens endliche viele } i \in I$$

2. Summe der Funktionenswerte ist 1 in jedem Punkt, genauer:

$$\sum_{i\in I} \varphi_i(p) = 1 \forall p \in M \qquad \text{und} \qquad \varphi_i(p) \geq 0 \forall p \in M, \forall i \in I,$$

so heißt die Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ **eine Zerlegung des Eines von** M.

Gilt:

$$\forall i \in I \ \exists \alpha \in A : \operatorname{supp} \varphi_i \subset U_\alpha,$$

so heißt die Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ der **Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnet**.

Satz 1.6.2 (Existenz der Zerlegung der Eins)

$$\text{Sei } M \text{ diffb Mf}, \mathcal{U} \text{ eine offene Überdeckung von } M.$$

Dann existiert eine abzählbare differenzierbare Zerlegung der Eins, der $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.

Korollar:

$$\text{Sei } U \subset M \text{ offen}, A \subset U \text{ abgeschlossen in } M,\ f \in C^\infty(U)$$

Dann gibt $g \in C^\infty(M)$ mit $g|_A = f|_A$ und $g|_{M \setminus U} = 0$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

Ist $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für ein $p \in U$ invertierbar, dann gilt

1. es gibt eine Umgebung V von p und W von $f(p)$, so dass $f|_V : V \to W$ in Diffeomorphismus ist.
2. Das Differential von f^{-1} in $q \in W$ ist gegeben durch

$$(df^{-1})_q = (df_{f^{-1}(q)})^{-1}$$

Dieser Satz gilt auch für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$.

Seien M, N differenzierbare Mf gleicher Dimension.
$U \subset M$ offen, $f \in C^\infty(U, N)$.

Existiert ein $p \in U$, so dass $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ invertierbar ist, so existiert eine Umgebung V um p und $W \subset N$ um $f(p)$, so dass

$$f|_V : V \to W$$

ein Diffeomorphismus ist.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$.
$f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ mit $f(0) = 0$. Sei df_0

1. Ist $n \leq k$ und das Differential df_0 injektiv, so gibt es ein Diffeomorphismus ψ :

TODO

M, N seien differenzierbare Mf. $F \in C^\infty(M, N)$.

Wenn $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$ injektiv ist, so heißt F eine `Immersion`.

Weiter nennen wir $F(M)$ eine `immersierte Untermannigfaltigkeit von` N.

M, N seien differenzierbare MF.
$F \in C^\infty(M, N)$ sei eine Immersion und injektiv.
$F(M)$ sei mit der Teilraumtopologie ausgestattet.

Falls $F : M \to F(M) \subset N$ ein Homöomorphismus ist, so heißt F eine `Einbettung`.

$F(M)$ heißt dann `eingebettete Untermannigfaltigkeit von` N.

M,N seien n- bzw. k-dim. diffb. Mf,
$F : M \to N$ eine Immersion und $p \in M$.

Dann gibt es eine Umgebung U von p in M und eine Karte (V, ψ) von N um $F(p)$, wobei $\psi = (y_1, \ldots, y_k)$, so dass

1. $y_{n+1}(q) = \cdots = y_k(q) = 0$ für alle $q \in V \cap F(U)$ und
2. $F|_U$ ist eine Einbettung.

Die Karte (V, ψ) heißt `Untermannigfaltigkeitskarte`.

Seien M, N, P diffb. Mf.

1. Satz 1 liefert als Spezialfall: Für $F : M \to \mathbb{R}^k$ ist $F(M)$ gerade eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$ im Sinne der früheren Definition. (Kapitel 1.2, Begriff der differenzierbaren Mf)

2. Einschränkung des Abbildungsraum: Für $F \in C^\infty(M, N)$, $i : P \to M$ eine Einbettung.

   Dann heißt $F \circ i \in C^\infty(P, N)$ die `Einschränkung von` F `auf` P.

   Man schreibt auch $F|_P : P \to N$. Dabei ist wegen $i(P) \subset M$, dies als Einschränkung des Abbildungsraum zu interpretieren.

M, N, P seien diffb Mf, $F \in C^\infty(M, N)$, $i : P \to N$ eine Einbettung.
Es sei weiter: $F(M) \subset i(P)$ und $G : M \to P$ durch $F(p) = i(G(p))$ definiert (wohldefiniert, da i injektiv).

Dann gilt:

1. Falls i eine Einbettung ist, so ist G stetig.
2. Falls G stetig ist, so ist G glatt.

M, N differenzierbare Mf, $F \in C^\infty(M, N)$.

Ist für $p \in M$ das Differential $df_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektiv, dann heißt p `regulärer Punkt`.
Andernfalls `kritischer Punkt`.

Sind für $q \in N$ alle Punkte $p \in F^{-1}(q)$ regulär, so heißt q `regulärer Wert`.
Andernfalls `kritischer Wert`.

Es seien M, N n- bzw. k-dim. Mf. $F \in C^\infty(M, N)$, $q \in F(M)$ ein regulärer Wert. Es sei $F^{-1}(q) \subset M$ versehen mit Teilraumtopologie.

Dann gilt:

1. $F^{-1}(q)$ ist eine $n - k$-dim. topologische Mf.
2. Es existiert eine eindeutige differenzierbare Struktur auf $F^{-1}(q)$, so dass $i : F^{-1}(q) \to M$ ein Einbettung ist und damit insbesondere:

   $i(F^{-1}(q))$ ist eine eingebettete Unter-Mf von M.

N seien diffb. Mf. Es sei $M \subset N$ versehen mit der Teilraumtopologie eine topologische Mf.

Dann gilt:

Trägt M eine differenzierbare Sturktur bezüglich derer $i : M \to N$ eine Einbettung ist, so ist diese differenzierbare Struktur eindeutig.

2 Bsp zum Satz vom regulären Wert.

und folgende Bem:

TODO, Auch falls $M \subset N$ gilt , ist T_pM nicht auf natürlicheweise ein Unterraum von T_pN. Betrachte:

$$di_p(T_pM) \subset N.$$

TODO wie identifiziert man T_pM und $di_p(T_pM)$.?

Sei M, E diffb Mf. Für eine $U \subset M$ sei $pr_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U, (u, x_1, \dots, x_k) \mapsto u$.
Es sei $\pi \in C^\infty(E, M)$ und surjektiv.

Falls für alle $p \in M$ gilt:

1. $E_p := \pi^{-1}(p)$ ist ein k-dimensionaler Vektorraum.

2. Es existiert eine Umgebung $U \subset M$ von p und ein Diffeomorphismus:

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k,$$

so dass gilt:

$$\pi = pr_1 \circ \varphi \text{ und } \varphi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \text{ ist linear.}$$

Dann heißt das Paar (E, π) ein (C^∞)-`Vektorbündel vom Rang` k `über` M.

- Das Urbild eines(!) Punktes heißt auch Faser, also: $E_p := \pi^{-1}(p)$ heißt `Faser von` p.

- E heißt `Totalraum`.

- M heißt `Basis des Vektorbündels` E

- φ heißt `lokale Trivialisierung`.

TODO Bem. 1.8.2

Sei M,E diffb Mf. (E, π) ein C^∞-Vektorbündel. Es sei $s \in C^\infty(M, E)$.

Gilt:

$$\pi \circ s = id_M, \text{ also } \pi(s(p)) = p \quad \forall p \in M,$$

so heißt s ein `Schnitt von` E.

Die Menge aller Schnitte von E wird mit $\Gamma(E)$ bezeichnet.

Ist s nur auf einer offenen Teilmenge definiert, so spricht man von einem **`lokalen Schnitt von`** E.

Notiz: $\Gamma(E)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zudem ist für $s \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(E)$, $(fs)(p) := f(p) \cdot s(p)$ auch $fs \in \Gamma(E)$. Wobei diese skalare Multiplikation in E_p zuverstehen ist.
Algebraisch ist $\Gamma(E)$ ein Modul über dem Ring $C^\infty(M)$.

TODO

Elemente in $\Gamma(TM)$ heißen `(differenzierbare) Vektorfelder auf` M.

Für $U \subset M$ offen und $X \in \Gamma(TU)$ spricht man von `lokalen Vektorfeldern auf` M.

Sei $X \in \Gamma(TM)$, $p \in M$, $f \in C^\infty(M)$, so definieren wir

$$X(f) : M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto X_p(f).$$

$X(f)$ nennt man `Richtungsableitung` ???

TODO Bsp $(\frac{\partial}{\partial x_i})$

für eine Vektorfeld.

TODO

$\Gamma(TU)$ ist ein freier Modul über $C^\infty(U)$ mit Basis $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$

$\Gamma(TM)$ ist ein Modul über $C^\infty(M)$

$X \in \Gamma(TM)$ sind Derivationen auf $C^\infty(M)$.

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Sei V ein K-VR und $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ eine Abbildung, für die gilt:

1. bilinear
2. antisymmetrisch ($[v, w] = -[w, v]$)
3. Jacobiidentiät

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Dann heißt $(V, [\cdot,\cdot])$ eine `Liealgebra`. Die Abbildung $[\cdot,\cdot]$ heißt die `Lieklammer` dieser Liealgebra.

Es ist $\Gamma(TM)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Weiter sei

$$[\cdot,\cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

gegeben durch

$$[X,Y] : M \to T_pM,\ p \mapsto [X,Y]_p := [X,Y](p) = X_pY - Y_pX.$$

Es ist zu zeigen, dass dies wohldefiniert ist, dass also

$$[X,Y]_p : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}, [f] \mapsto [X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

die Leibnisregel erfüllt.

Weiter gilt:

$(\Gamma(TM), [\cdot,\cdot])$ ist eine reelle Lielalgebra.

Sei X ein Vektorfeld auf M, $\alpha : (a, b) \to M$ eine differenzierbare Kurve.

Dann heißt α eine `Integralkurve von X`, falls

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)} \quad \forall t \in (a, b)$$

Sei (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\alpha_i = x_i \circ \alpha$.

Wir setzen

$$F_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}, \quad F_i(\varphi(q)) = (Xx_i)(q) = X_q(x_i)$$

Dann gilt

$$\alpha \text{ ist Integralkurve von } X \Leftrightarrow \alpha_i'(t) = F_i(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)),\ i = 1, \ldots, n$$

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar. I bezeichne Intervall.

Dann gilt:

1. **Existenz:**
$$\forall q \in V \; \exists I \ni 0, c \in C^\infty(I, V) \text{ mit } c(0) = q, c'(t) = F(c(t))$$

2. **Eindeutigkeit:** Gilt für $c_i \in C^\infty(I, V)$, $i = 1, 2$
$$c_i'(t) = F(c_i(t)) \quad (i = 1, 2)$$

   und
$$\exists t_0 \in I : c_1(t_0) = c_2(t_0)$$

   Dann gilt $c_1 = c_2$.

Sei X ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mf. I, J seien Intervall.

Dann gilt:

1. `Existenz:` Es gibt durch jeden $p \in M$ eine Integralkurve von X, d.h.:

$$\forall p \in M \; \exists I \ni 0, \alpha \in C^\infty(I, M) \text{ mit } \alpha(0) = p, \alpha'(t) = X_{\alpha(t)}.$$

2. `Eindeutigkeit:` Sind $\alpha_i : I \to M$ mit $i = 1, 2$ zwei Integralkurven von X mit $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, dann gilt $\alpha_1 = \alpha_2$.

Weiter folgt:

Es gibt zu jedem $p \in M$ eine maximal definierte Integralkurve $\alpha \in C^\infty(I, M)$ mit $\alpha(0) = p$, d.h.

$$\exists \beta \in C^\infty(J, M) \text{ mit } 0 \in J, \beta(0) = p, \beta'(t) = X_{\beta(t)},$$

so gilt

$$J \subset I \text{ und } \alpha|_J = \beta$$

Sei M diffb. Mf, X Vektorfeld auf M.

Dann existiert eine Umgebung U um $p \in M$, ein Intervall I mit $0 \in I$, sowie

$$\Phi \in \mathbb{C}^{\infty}(I \times U, M):$$

so dass gilt

1. $\Phi(0, q) = q$ für alle $q \in U$.
2. $\alpha : I \to M$, $t \mapsto \Phi(t, q)$ ist eine Integralkurve von X, d.h.

$$\alpha'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, q) = X_{\alpha(t)=\Phi(t,q)}$$

Sei M diffb. Mf, X Vektorfeld auf M. (Vor. Satz. 1.10.5)

Dann heißt $\Phi \in C^\infty(I \times U, M)$ `lokaler Fluss` von X.

Falls $I = \mathbb{R}$ so heißt Φ `globaler Fluss`.

Es gilt weiterhin, dass wenn $t, s \in I$, $q \in U$, ist $\Phi(t, q) \in U$ und

$$\Phi(s, \Phi(t, q)) = \Phi(s + t, q)$$

Sei M diffb. Mf, X Vektorfeld auf M.

Dann heißt X `vollständig`, wenn durch jeden Punkt $p \in M$ eine Integralkurve läuft, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, wenn also

$$\forall p \in M \; \exists \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, M) \text{ mit } \alpha(0) = p, \alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \; \forall t \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist.

Sei M diffb. Mf.

Ist M kompakt, so ist jedes Vektorfeld auf M vollständig.

Sei M diffb. Mf.

Ist X ein vollständiges Vektorfeld, dann existiert ein globaler Fluss auf X.

Definition (Einparametergruppe von Diffeomorphismen)

Sei M diffb. Mf. X ein vollständiges Vektorfeld. $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ der globale Fluss von X.

Wir definieren:

$$\Phi_t : M \to M,\ p \mapsto \Phi_t(p) := \Phi(t, p)$$

Dann ist

$$\Phi_{t+s}(p) = \Phi(t + s, p) = \Phi(t, \Phi(s, p)) = (\Phi_t \circ \Phi_s)(p)$$

also

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s, \quad \Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}, \quad \Phi_0 = id_M$$

Damit definieren wir

Sei $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R} \times M, M)$ und gilt für $\Psi_t : t \mapsto \Psi(t, p)$,

$$\Psi_0 = id_M \quad \text{und} \quad \Psi_{t+s} = \Psi_t \circ \Psi_s \; \forall t, s \in \mathbb{R}$$

so heißt Ψ `Einparametergruppe von Diffeomorphismen`.

Hier ausführen wie vollständige Vektorfelder und Einparametergruppen einandern zugeordnet werden können.
TODO

Es sei V ein endlich-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V.

Dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ `nichtentartet`, falls

$$\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists w \in V : \langle v, w \rangle \neq 0.$$

Oder gleich bedeutend damit:

- Die lineare Abbildung $V \to V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ ist injektiv, d.h.

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0$$

- Für (beliebige) $v_1, \ldots, v_n$ Basis von V gilt

$$\det(g_{ij}) \neq 0 \quad \text{mit } g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

Sei V ein endlich-dim. $\mathbb{R}$-VR.
Und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei eine nichtentartete symmetrische Bilinearform.

- Eine nichtentartete symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V heißt auch `pseudo-Euklidisches Skalarprodukt`.
- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt `pseudo-Euklidscher Vektorraum`.
- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sei ein n-dim. pseudo-Euklidscher Vektorraum und p die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv-definit ist, so heißt $(n-p, n)$ `die Signatur von` V.

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zusätzlich positiv-definit, so ist die Signatur $(0, n)$ und

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt dann `(Euklidsches) Skalarprodukt`.
- $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt ein `Euklidscher Vektorraum`.

Sei M eine diffb. Mf, $g \in \Gamma(T_2^0(M))$.

Falls gilt

$g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ist für alle $p \in M$ ein pseudo-Euklidisches Skalarprodukt auf T_pM,

so heißt, das symmetrische $(0,2)$-Tensorfeld g eine `pseudo-Riemannsche Metrik`.

Das Paar (M, g) heißt `pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit`.

Sei nun $g_p := g(p)$ für alle $p \in M$ positiv-definit,

dann heißt g eine `Riemannsche Metrik` und (M, g) eine `Riemannsche Mannigfaltigkeit`.

Sei (M, g) eine zusammenhängende pseudo-Riemannsche Mf, so ist die Signatur aus stetigkeitsgründen von g_p konstant auf M.

Allgemein nennt man eine konstante Signatur, die `Signatur von` M.

Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mf der Signatur (1,p).

Dann heißt (M, g) eine `Lorentz-Mannigfaltigkeit`

TODO, per Hand
insbesondere zu Untermannigfaltigkeiten und
Produktmannigfaltigkeiten
Auch wie man (g_{ij}) als Matrix auffassen kann und Satz
von Sylvester

Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M existiert eine Riemannsche Metrik.

Notiz: Diese Aussage gilt nicht für pseudo-Riemannsche Mf.

Sei M eine differenzierbare Mf.
Weiter sei eine Abbildung gegeben durch

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

die folgende Eigenschaften für alle $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ und für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ (C^∞-`linear in 1. Komponente`)
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_Y Z$ (`additiv in 2. Komponente`)
   $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ (`‘‘Produktregel’’ in 2. Komponente`)

Dann heißt ∇ eine `(affinier) Zusammenhang` oder `kovariante Ableitung`.

Sei M differenzierbare Mf, $p \in M$ und ∇ eine affinier Zusammenhang.

Dann gilt für alle $X_1, X_2, Y \in \Gamma(TM)$:

$$\text{Falls } X_1(p) = X_2(p), \text{ so folgt } (\nabla_{X_1} Y)(p) = (\nabla_{X_2} Y)(p)$$

Folgerung: $v \in T_pM$ kann zu einem beliebigen Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$ fortgesetzt werden. Sei $Y \in \Gamma(TM)$ so setzen wir:

$$(\nabla_v Y) := (\nabla_X Y)(p).$$

Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung, d.h. dass sie unabhängig von der Wahl der Erweiterung ist, folgt gerade aus Satz 1.

Sei M diffb. Mf und $A : \overbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}^{s\text{-mal}} \to \Gamma(TM)$ eine s-multilineare Abbildung für die gilt, dass für alle $f \in C^\infty(M)$ und für alle $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$:

$$A(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_s) = fA(X_1, \dots, X_s) \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}.$$

Dann existiert ein $(1, s)$-Tensorfeld $B \in \Gamma(T^1_s(M))$ auf M, so dass

$$A(X_1, \dots, X_s)(p) = B_p(X_1(p), \dots, X_s(p)) \quad \forall X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM), \forall p \in M.$$

· Eine analoge Aussage gilt für (r, s)-Tensorfelder. Hier betrachtet man multilineare Abbildung

$$A : \underbrace{\Gamma(T^*M) \times \cdots \times \Gamma(T^*M)}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\Gamma(TM) \times \cdots \times \Gamma(TM)}_{s\text{-mal}} \to C^\infty(M),$$

die $C^\infty(M)$-linear in jedem Eintrag sind.

TODO Seite 36

$X \mapsto \nabla_X Y$ ist eine $(1,1)$-Tensorfeld.

Sei M eine diffb. Mf mit affinen Zusammenhang ∇,
$p \in M$, $v \in T_pM$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$.

Gilt, dass Y_1 und Y_2 in einer Umgebung übereinstimmen, so folgt $\nabla_v Y_1 = \nabla_v Y_2$.

Sei M diffb. Mf, (U, φ), $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ lokale Koordinaten auf M.

Als Konsequenz der Sätze dieses Abschnitts ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} : U \to TU$$

wohldefiniert.

Als Element in $\Gamma(TU)$ können wir es in eine Basis schreiben

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

und definieren darüber die `Christoffel-Symbole` $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$, welche den Zusammenhang ∇ auf U bestimmen.

$$\text{Sei } M \text{ diffb. Mf, } I = [a, b] \subset \mathbb{R},\ c \in C^\infty(I, M)$$

Eine differenzierbare Abbildung

$$X : I \to TM \text{ mit } X_t := X(t) \in T_{c(t)}M$$

heißt `Vektorfeld längs` c.

Wir bezeichnen den Raum der Vektorfelder längs c mit $\Gamma_c(TM)$.

Beispiel: $\dot{c}$ ist ein Vektorfeld längs c.

Notiz: $\Gamma_c(M)$ ist ein Modul über $C^\infty(I)$.

Sei M eine diffb. Mf mit einem affinen Zusammenhang ∇. Lokale Koordinaten: (U, φ), $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$.

Sei $\gamma : I \to M$ eine Kurve, $\dot{\gamma}$ ist dann ein Vektorfeld längs γ. Diese $\dot{\gamma}$ sei parallel, es gilt also

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = 0.$$

Dann heißt γ `Geodätische`.

Wir setzen $\gamma_i = x_i \circ \gamma$

$$\frac{\nabla}{dt}\dot{\gamma} = \sum_k \left(\gamma_k'' + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \right) \cdot \partial_k \circ \gamma$$

Also

$$\gamma|_U \text{ ist } \texttt{Geodätische} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_k'' + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0 \;\; \forall k$$

Sei M diffb Mf mit affinen Zusammenhang ∇.

Dann gilt:

1. `Existenz` einer Geodäditschen γ:
$$\forall p \in M, v \in T_pM \; \exists \varepsilon > 0,\; \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ mit}$$
$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v \quad \text{und} \quad \frac{\nabla}{dt}\dot\gamma = 0$$

2. `Eindeutigkeit:` Jede weitere Geodätische $\eta : (-\delta, \delta) \to M$ mit denselben Anfangsbedingungen $\eta(0) = p$ und $\eta'(0) = v$ stimmt auf einem Intervall um 0 mit γ überein.

Unter Missachtung des Definitionsbereiches, sagt man, die Geodätische γ mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ ist eindeutig und schreibt γ_v.

TODO
Diese Konstruktion gerne texen

TODO : Konstruktion S.46
Der lokale Fluss von Y heißt geodätsicher Fluss.

Dies ist so zu verstehen:

Y ist Vektorfeld auf TTU. Eine Integralkurve zu Y heiße $\gamma : I \to TU$. Dann ist der lokale Fluss eine Abbildung $\Phi : I \times TU \to TTU \overset{\sim}{=} TU$ mit $\Phi(t, v) = \dot{\gamma}_v(t)$ für alle $t \in I$, die noch zusätzliche Bedingung erfüllt.

Sei M diffb Mf mit Zusammenhang ∇. Sei Φ der geodätische Fluss um die Punkt $0 = 0_p \in T_pM$, so gilt:

$$\forall p \in M \; \exists 0_p \in V \overset{\text{off}}{\subset} TM, \delta > 0, \Phi \in C^\infty((-\delta, \delta) \times V, TM) : \exists! \Phi_v : t \mapsto \Phi(t, v),$$

wobei Φ_v Integralkurve von Y ist.

Es $c : [a, b] \to M$ eine stetige Abbildung. Existiert eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, so dass $c|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^\infty$ für alle $i = 0, \ldots, k-1$ ist, so heißt c **stückweise differenzierbare Kurve**.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mf und $c : [a, b] \to M$ eine stückweise differenzierbare Kurve, so definieren wir durch

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt,$$

die **Länge** der Kurve c. Die Länge einer stückweise differenzierbaren Kurve ist endlich.

Weitere Definitionen:

- Für $p, q \in M$ sei Ω_{pq} die Menge aller stückweise diffb. Kurven in M von p nach q.
- Eine monotone, surjektive Abbildung $\varphi \in C^\infty([c, d], [a, b])$ heißt **differenzierbare Umparametrisierung**.
- Eine Kurve heißt zur Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{c}\| = 1$ ist und (proportional) zur Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{c}\|$ konstant ist

Es gelten folgende Aussagen:

1. - $L(c) \geq 0$;
   - $L(c) = 0$ genau dann, wenn c konstant ist.
2. Sind $c_1 : [a, b] \to M$, $c_2 : [b, c] \to M$ zwei stückweise differenzierbare Kurven mit $c_1(b) = c_2(b)$, so ist
$$L(c_1 \cup c_2) = L(c_1) + L(c_2),$$
wobei $c_1 \cup c_2$ die Konkatenation von c_1 und c_2 bezeichnet.
3. Es sei $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ eine differenzierbare Umparametrisierung, $c : [a, b] \to M$ ein beliebiger stückweise differenzierbarer Weg. Dann gilt $L(c \circ \varphi) = L(c)$.

Es sei:

$$d(p,q) = \inf\{L(c)|c \in \Omega_{pq}\}.$$

Dann gilt

1. (M,d) ist ein metrischer Raum.
2. Die durch d induzierte Topologie auf M stimmt mit der ürsprünglichen Topologie von M als Mannigfaltikeit überein.

Sei $\gamma : [0,1] \to M$ eine stückweise differenzierbare, proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) =: p$, $\gamma(1) =: q$ und gilt

$$L(\gamma) \leq L(c) \quad \forall c \in \Omega_{pq}.$$

Dann ist γ Geodätische.

Sei (M, g) (pseudo)-Riemannsche Mf, $p \in M$. Sei $V \subset T_pM$ offene Umgebung von $0 \in T_pM$.

Ist $\exp_p$ auf V ein Diffeomorphismus aufs Bild, so heißt $\exp_p(V)$ eine `normale Umgebung von` p.

Ist (M, g) Riemannsche Mf und ist $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(0) \subset V$. Dann heißt $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ ein `geodätsicher Ball um` p.

Sei $p \in M$, U eine normale Umgebung von p, $B \subset U$ ein geodätischer Ball um p, $\gamma : [0,1] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$, die ganz in B verläuft und $\gamma(1) = p'$.

Dann gilt

$$L(\gamma) \leq L(c) \quad \forall c \in \Omega_{pp'} \qquad \text{insbesondere:} \quad L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$$

Falls $L(\gamma) = L(c)$, dann gilt

- $\gamma([0,1]) = c([0,1])$ und c ist Umparametrisierung von γ.
- Insbesondere: Für jeden Punkt $q \in B$ gibt es bis auf Umparametrisierung genau eine minimierende Geodätische, die p mit q verbindet.

Bemerkung: die Parametrisierung auf $[0,1]$ ist nicht relevant.

Es sei $f : (a,b) \times (c,d) \to M$, $(t,s) \mapsto f(t,s)$ eine differenzierbare Abbildung.

Dann gilt:

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}$$

Es sei $p \in M$, $v \in T_pM$ so, dass $\exp_p v$ definiert ist und $w \in T_v(T_pM) \overset{\sim}{=} T_pM$.

Dann gilt:

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Voraussetzung weiter wie in HS2. Sei weiter
$\gamma(t) = \exp_p(tw)$.

Dann gilt:

$$d(p, \gamma(t)) = \|tw\| = L(\gamma|_{[0,t]}).$$

Insbesondere: Betrachten wir M als metrischen Raum, so gilt für den geodätischen Ball $B = \exp_p(B_\varepsilon(0))$, dass
$B = B_\varepsilon(p)$.

Es sei

$$F : TM \to M \times M, \quad v \mapsto (\pi(v), \exp(v)).$$

Dann ist

$$\forall p \in M : dF_{0_p} : T_{0_p}TM \to T_{(p,p)}(M \times M) \overset{\sim}{=} T_pM \oplus T_pM$$

ist eine Isomorphismus.

$$\forall p \in M \ \exists \text{ offene Umgebung } U \text{ von } p, \varepsilon > 0 : \forall q \in U$$

folgendes gilt:

1. Die Abbildung $\exp_q$, eingeschränkt auf $B_\varepsilon(0) \subset T_qM$ ist ein Diffeomorphismus aufs Bild.
2. $U \subset \exp_q(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(q)$.

Dies bedeutet:

U ist eine normale Umgebung eines jeden Punktes.

`Bemerkung:` Aus diesem Lemma und HS 2, folgt, dass für je zwei Punkte $q_1, q_2 \in U$ bis auf Umparametrisierung eine eindeutige minimierende Geodätische γ (mit Länge $< \varepsilon$) existiert, die q_1 und q_2 miteinander verbindet. Man bezeichnet eine solche Umgebung als geodätisch konvex.

Aus Lemma 2 und HS 2, folgt, dass für je zwei Punkte $q_1, q_2 \in U$ bis auf Umparametrisierung eine eindeutige minimierende Geodätische γ (mit Länge $< \varepsilon$) existiert, die q_1 und q_2 miteinander verbindet.
Man bezeichnet eine solche Umgebung als geodätisch konvex.

Sei (M, g), (N, h) pseudo-R. Mf und $\varphi : M \to N$ ein Diffeomorphismus.

Falls

$$h_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)) = g_p(v, w) \quad \forall p \in M, v, w \in T_pM,$$

heißt φ `Isometrie`. Diese Bedingung schreibt man auch $\varphi^* h = g$.

Existiert eine Isometrie zwischen M und N, heißen M und N isometrisch.

Sei (M, g), (N, h) pseudo-R. Mf und $\varphi : M \to N$ ein Isometrie.

Dann gilt für alle Vektorfelder X und Y auf M, dass

$$\varphi_* \nabla^M_X Y = \nabla^N_{\varphi_* X} \varphi_* Y$$

Eine pseudo-Riemannsche Mf heißt `homogen`, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ eine Isometrie $\varphi : S^n \to S^n$ gibt, so dass $\varphi(p) = q$.

Ein Vektorfeld X auf einer pseudo-Riemannsche Mf heißt `Killingfeld`, falls die lokalen Flüsse von X Isometrien sind.
TODO Was heißt das konkret?

Sei M eine diffb. MF, X Vektorfeld auf M, A ein Tensorfeld auf M vom Typ (r, s).

Es sei Φ_t der lokale Fluss von X auf einer offenen Menge $U \subset M$, dann definieren wir für $p \in U$ durch

$$(L_X A)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=1} (\Phi_t^* A)_p$$

die `Lie-Ableitung von` A `entlang` X`.` Diese ist wieder ein Tensorfeld vom Typ (r, s).
TODO B10 Uebung 2

Sei (M, g) pseudo-Riemannsche Mf mit
Levi-Civita-Zusammenhang ∇, X Vektorfeld auf M.

Dann ist folgendes äquivalent:

1. X ist Killingfeld
2. $L_X g = 0$
3. $\langle \nabla_v X, w \rangle + \langle \nabla_w X, v \rangle = 0$ für alle $v, w \in T_pM$,$p \in M$