Inverse Probleme in der Geophysik
Vorlesung (Vertretung K. Spitzer)
TU Bergakademie Freiberg, SS 2020

Teil 8: Von linearen zu nichtlinearen Inversionsproblemen

Thomas Günther (LIAG Hannover)
(Thomas.Guenther@extern.tu-freiberg.de)

15. Juni 2020

Abschluss lineare und Beginn nichtlineare Probleme

Inhalt der heutigen Veranstaltung

- Noch ein paar Anregungen als Ergänzung
  - Datenmisfit anschauen!
  - Informationsdichtematrix
  - Checkerboard-Test
- Freies Üben und Fragen
- Belegaufgaben Teil 1: Strahlentomographie
  - Skizzierung der zugrunde liegenden Gleichungen
  - Inversion synthetischer Daten mit realistischen Größen
  - Parameter-Studien mit verschiedenen Verfahren
- Einführung nichtlineare Probleme und deren Linearisierung
- Modelltransformationen

Nichtlineare Inversionsprobleme

Bisher (linear): $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} + \mathbf{n}$

Meist hängen die Daten nicht-linear vom Modell ab!

Beispiel: Nichtlineare Strahlenwege $\mathbf{d} = \mathbf{G}(\mathbf{m})\mathbf{m} + \mathbf{n}$

Allgemeine Schreibweise: $\mathbf{d} = \mathbf{f}(\mathbf{m}) + \mathbf{n}$

Taylor-Entwicklung um Modell $\mathbf{m}^0$

$$\mathbf{f}(\mathbf{m}^0 + \Delta\mathbf{m}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{m}^0) + \frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}_j}\Delta\mathbf{m} = \mathbf{f}(\mathbf{m}^0) + \mathbf{S}\Delta\mathbf{m}$$

Die Matrix $\mathbf{S}$ enthält die Frechet-Ableitungen und wird auch Sensitivitätsmatrix genannt

Damit erhalten wir ein lineares Inversionsproblem (der Modell/Datendifferenzen)

$$\mathbf{S}\Delta\mathbf{m} = \Delta\mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}^0)$$

Beachte: Taylor-Entwicklung gilt nur in der Nähe von $\mathbf{m}^0$! Also neu berechnen.

Nichtlineare Inversionsprobleme

Iterative Lösung nichtlinearer inverser Probleme

ausgehend von einem Start-Modell $\mathbf{m}^0$ errechnet man iterativ (n=0,1,2,...) immer neue Modelle

$$\mathbf{m}^{n+1} = \mathbf{m}^n + \quad \Delta\mathbf{m}^n$$

durch Lösung des linearen Inversionsproblems

$$\mathbf{S}^n \Delta\mathbf{m}^n = \Delta\mathbf{d}^n = \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}^n)$$

Nichtlineare Inversionsprobleme

Iterative Lösung nichtlinearer inverser Probleme

ausgehend von einem Start-Modell $\mathbf{m}^0$ errechnet man iterativ (n=0,1,2,...) immer neue Modelle

$$\mathbf{m}^{n+1} = \mathbf{m}^n + \tau^n \Delta \mathbf{m}^n$$

durch Lösung des linearen Inversionsproblems

$$\mathbf{S}^n \Delta \mathbf{m}^n = \Delta \mathbf{d}^n = \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}^n)$$

Der Parameter τ wird auch als Schrittweite bezeichnet und kann optimiert werden, je nachdem wie weit die Taylor-Approximation gilt.

Modelltransformationen

Sei $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} + \mathbf{n}$ (z.B. Slowness)
Nehmen wir an, wir invertieren eine andere Größe $\hat{m}(m)$, z.B. Geschwindigkeit. Dann ist das Problem nicht mehr linear.
Die Frechet-Ableitungen berechnen sich mit:

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial \hat{m}_j} = \frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j} \frac{\partial m_j}{\partial \hat{m}_j}$$

Mit $\hat{m} = v = 1/s$ ergibt sich $\partial s/\partial v = -1/v^2 = -s^2$

Modelltransformationen

Logarithmische Parameter

Geschwindigkeit oder Slowness? Spez. Widerstand oder Leitfähigkeit?
Oft invertiert man Logarithmen, da so gesichert ist, dass die Parameter positiv bleiben:
Mit $\hat{m} = \log s$ ergibt sich $\partial s / \partial \log s = 1/(\partial \log s / \partial s) = s$, also eine Skalierung von **S** mit s
Update: $\log m^{n+1} = \log m^n + \Delta m \Rightarrow m^{n+1} = m^n \cdot e^{\Delta m}$

Parametergrenzen

Die Wahl des Logarithmus bietet eine natürliche untere Grenze 0 für das Modell, daher ist es so beliebt (physikalische Plausibilität)
Eine alternative untere Grenze kann gewählt werden mit $\hat{m} = \log(m - m_L)$
Eine obere Grenze kann gewählt werden mit $\hat{m} = \log(m_U - m)$, oder eine Kombination aus beiden:

$$\hat{m} = \log(m - m_L) - \log(m_U - m) = \log \frac{m - m_L}{m_U - m}$$