Inverse Probleme in der Geophysik
Vorlesung (Vertretung K. Spitzer)
TU Bergakademie Freiberg, SS 2020

Teil 3: Auflösung und Singulärwertzerlegung

Thomas Günther (LIAG Hannover)
(Thomas.Guenther@extern.tu-freiberg.de)

11. Mai 2020

Was bisher geschah

Überbestimmte Probleme

Lösung: Methode der kleinsten Quadrate

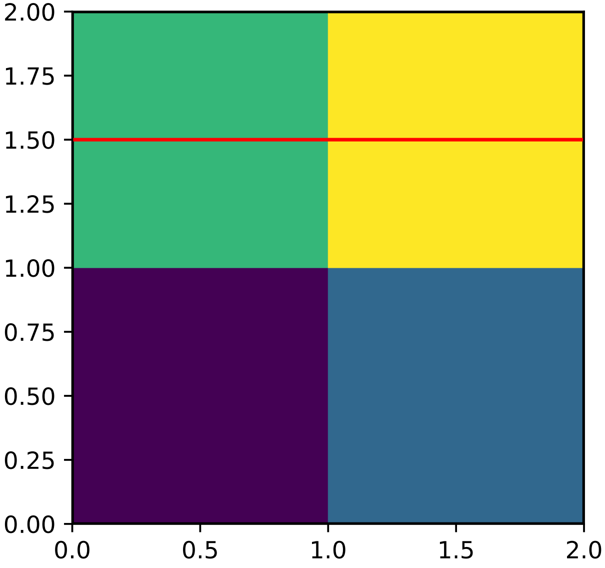
- Einfaches Matrix-Beispiel (3 Gleichungen für 2 Unbekannte)
  Lösung = Kompromiss zwischen allen incl. Fehlerbereiche
- Generalisierte Inverse durch Lösung von Normalengleichung
- Einfluss von Fehlerwerten durch Wichtung
- Einführung von Auflösungsmatritzen
  Überbestimmt = perfekte Modellauflösung, Dateninformation noch anschauen!

IJulia Notebooks unter `https://github.com/halbmy/IJulia` verfügbar

Inhalt der heutigen Veranstaltung

- Zusammenfassung und Fragen
- Kurzer Test Problemtypen
- gemeinsame Diskussion und Abschluss Matrix-Problem (JNB live)
- Wiederholung Auflösungsmatritzen: Modellauflösung, Dateninformation (pdf)
- Übungsbeispiel lineare Regression (JNB live+selbst)
- Normen und Robuste Inversion (JNB live)
- Unterbestimmte und gemischt bestimmte Probleme (pdf+JNB)
  Lösung der kleinsten Modell-Norm (JNB)
- Singulärwertzerlegung (pdf)
  - Matrix-Kompression mit SVD
  - Generalisierte Inverse
  - Auflösungsmatritzen
  - Anwendung auf bisherige Probleme (JNB)

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



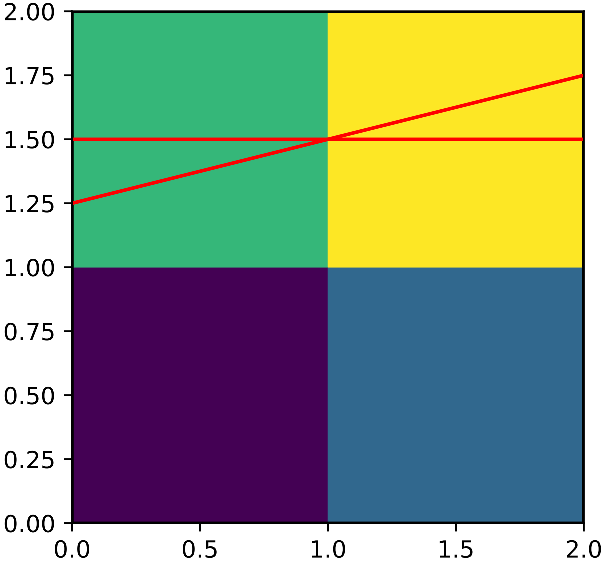
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 1

- (A) Gleichbestimmt
- (B) Überbestimmt
- (C) Unterbestimmt
- (D) Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



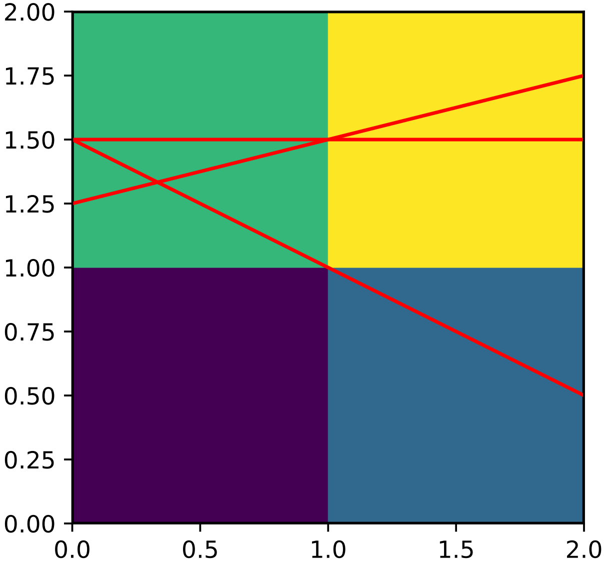
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 2

- A Gleichbestimmt
- B Überbestimmt
- C Unterbestimmt
- D Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



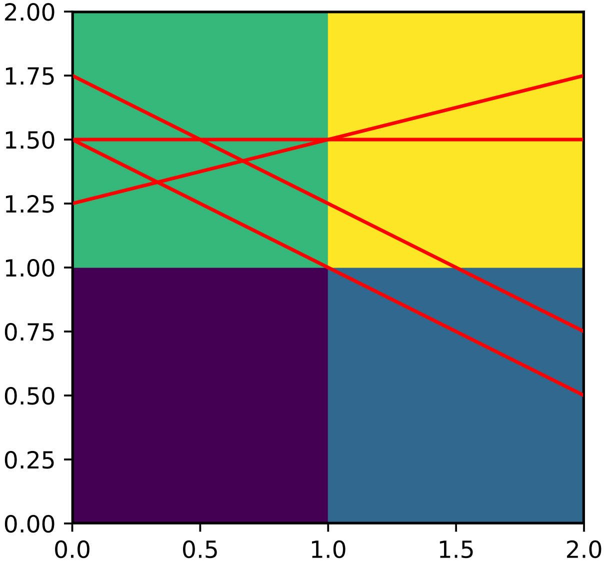
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 3

- A Gleichbestimmt
- B Überbestimmt
- C Unterbestimmt
- D Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



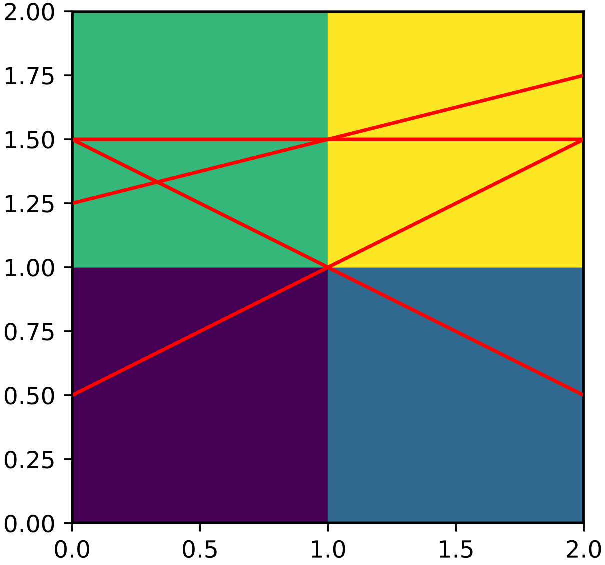
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 4

- A Gleichbestimmt
- B Überbestimmt
- C Unterbestimmt
- D Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



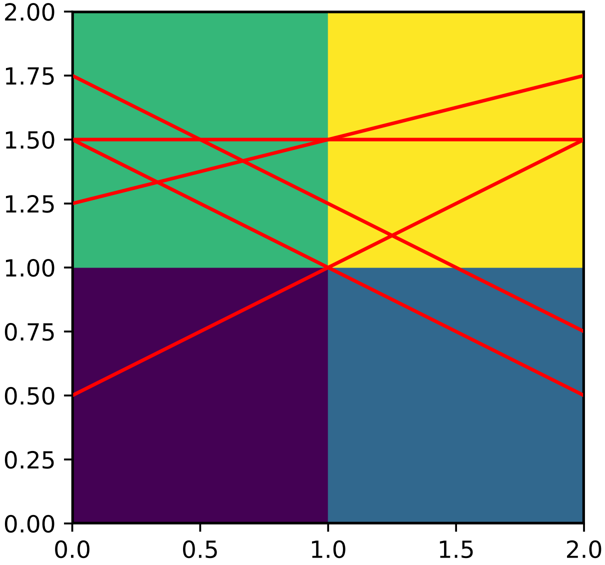
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 5

- A Gleichbestimmt
- B Überbestimmt
- C Unterbestimmt
- D Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



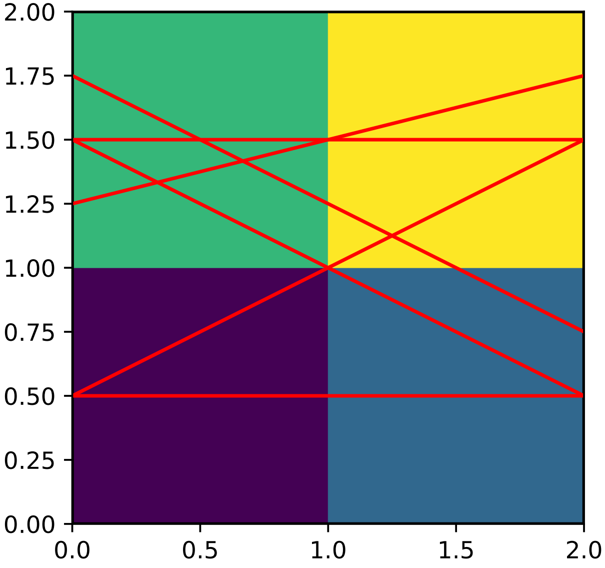
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 6

- (A) Gleichbestimmt
- (B) Überbestimmt
- (C) Unterbestimmt
- (D) Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



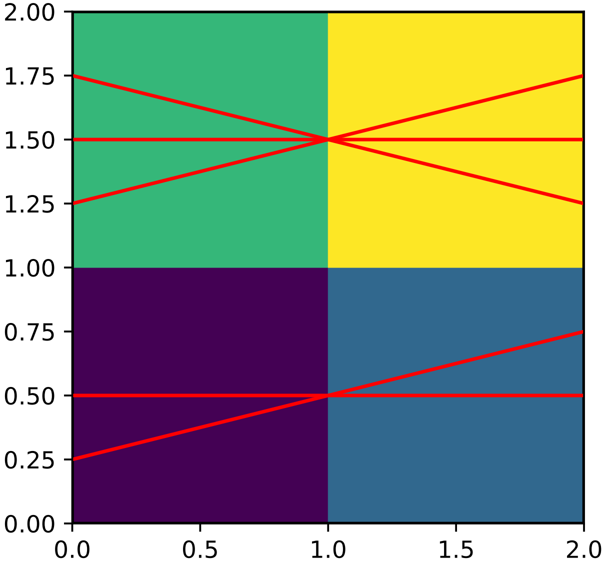
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 7

- A Gleichbestimmt
- B Überbestimmt
- C Unterbestimmt
- D Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



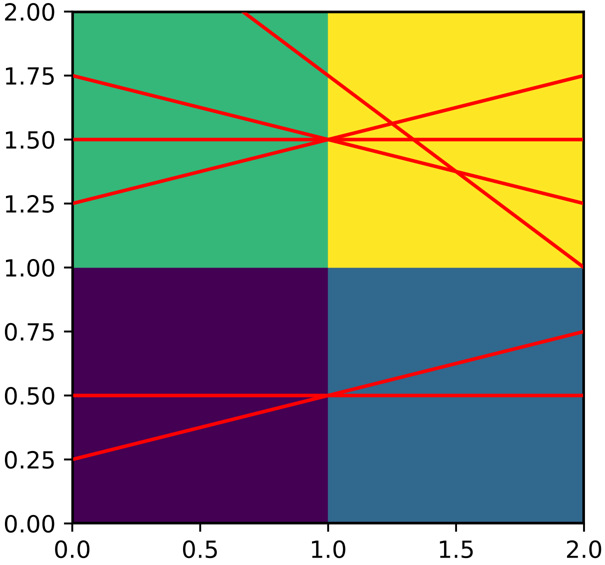
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 8

- A Gleichbestimmt
- B Überbestimmt
- C Unterbestimmt
- D Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



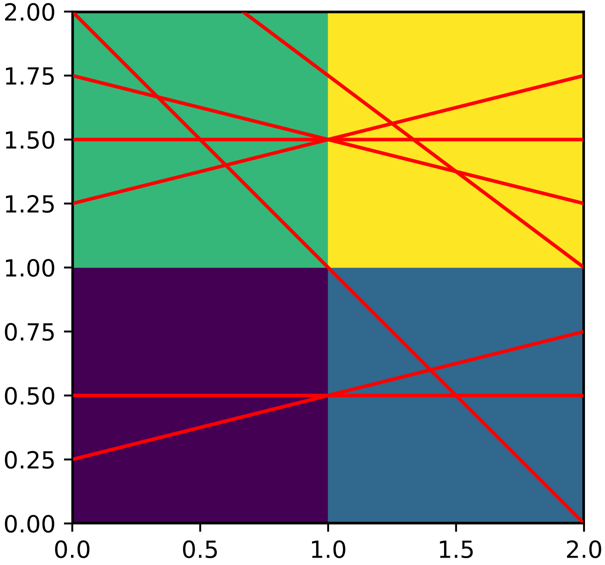
Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 9

- (A) Gleichbestimmt
- (B) Überbestimmt
- (C) Unterbestimmt
- (D) Gemischt bestimmt

Test Problemtypen mit Strahlentomographie



Boxen = Zellen (Modell)
Rote Linien = Strahlen (Daten)
Matrix enthält Laufwege der Zellen für einzelne Strahlen

$$d_i = \int_l s_j dl = \sum_j W_{ij} s_j$$

Aufgabe 10

- A Gleichbestimmt
- B Überbestimmt
- C Unterbestimmt
- D Gemischt bestimmt

Auflösungsmatritzen

Modell-Auflösung

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}^{\text{true}} + \mathbf{n}$$

Matrix-Inversion mit inversem Operator $\mathbf{G}\dagger$:

$$\mathbf{m}^{\text{est}} = \mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{d} = \mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{G}\mathbf{m}^{\text{true}} + \mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{n} = \mathbf{R}^{M}\mathbf{m}^{\text{true}} + \mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{n}$$

mit der Modell-Auflösungsmatrix $\mathbf{R}^{M} = \mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{G}$
$\Rightarrow$ Wie spiegelt sich die Wahrheit ($\mathbf{m}^{\text{true}}$) im Ergebnis ($\mathbf{m}^{\text{est}}$) wider?
Diagonale von $\mathbf{R}^{M}$: Auflösung der Modellparameter, Nebendiagonale: Verzerrung

Überbestimmte Probleme

$\mathbf{G}\dagger = (\mathbf{G}^{T}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^{T} \Rightarrow \mathbf{R}^{M} = (\mathbf{G}^{T}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^{T}\mathbf{G} = \mathbf{I} \Rightarrow$ perfekte Modellauflösung

Auflösungsmatritzen

Daten-Informationsdichtematrix

$$\mathbf{m}^{\text{est}} = \mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{d}^{\text{obs}}$$

Wie werden die Daten durch das Modell erklärt?

$$\mathbf{d}^{\text{est}} = \mathbf{G}\mathbf{m}^{\text{est}} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{d}^{\text{obs}} = \mathbf{R}^{D}\mathbf{d}^{\text{obs}}$$

mit der Daten-Auflösungsmatrix (Informationsdichtematrix):

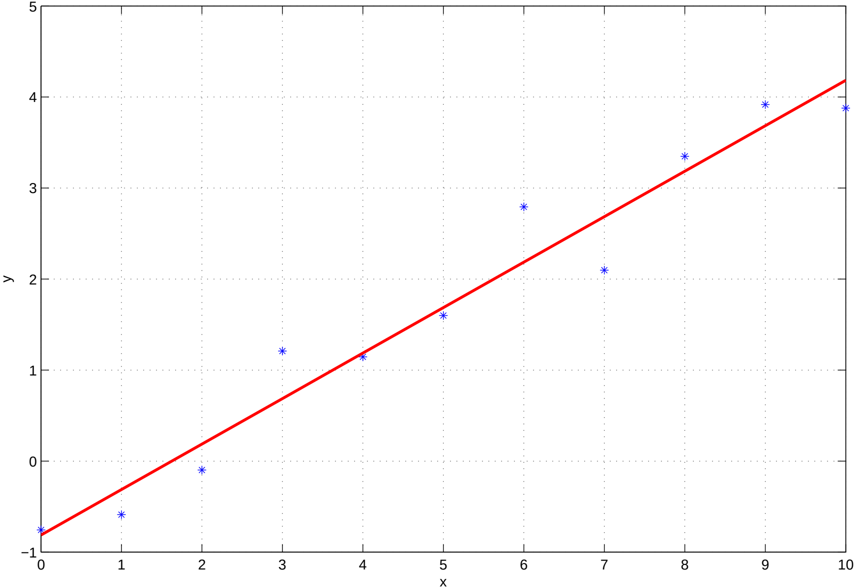
$$\mathbf{R}^{D} = \mathbf{G}\mathbf{G}^{\dagger}$$

Diagonale von R^D: Informationsgehalt der Daten, Nebendiagonale: Korrelation

Überbestimmte Probleme

$$\mathbf{G}\dagger = (\mathbf{G}^{T}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^{D} = \mathbf{G}(\mathbf{G}^{T}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^{T}$$

Lineare Regression(1)



Lineare Regression(2)

Die Daten: y_i Das Modell: a,b Der Vorwärtsoperator: Abbildung von (a,b) auf $a + bx$ durch Matrix-Vektor-Produkt.

1. Wie muss diese aussehen? (Überlegung 1, danach 2 Werte)
2. Stellen Sie **G** auf und lösen Sie die Normalengleichungen

$$\mathbf{G}^T(\mathbf{d} - \mathbf{Gm}) = 0 \text{ bzw. } \mathbf{G}^T\mathbf{Gm} = \mathbf{G}^T\mathbf{d}$$

3. Testen Sie mit idealen Daten (graphischer Vergleich)!
4. Verrauschen Sie die Daten und variieren Sie die Fehler.
5. Berechnen Sie die Fehlerquadratsumme!
6. Wiederholen Sie (neue Verrauschung) & plotten Sie die alle Ergebnisse zusammen! Wie verteilen sie sich?
7. Erhöhen Sie den Polynomgrad schrittweise!

Unterbestimmte Probleme

2 Messungen (z.B. Strahlen), 3 Parameter (Zellen)

$$\mathbf{Gm} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \mathbf{d}$$

Alle Lösungen mit $m_1 = d_1 - m_2$ sind gleichrichtig

Für eindeutige (reguläre) Lösungen müssen zusätzliche Bedingungen gestellt werden $\Rightarrow$ Regularisierung

Analog zur Inversen $(\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T$ für überbestimmte Probleme gibt es eine Inverse für unterbestimmte Probleme

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1}\mathbf{d}$$

Sie wird auch als Minimum-Norm-Lösung bezeichnet. $\Rightarrow$ Jupyter Notebook