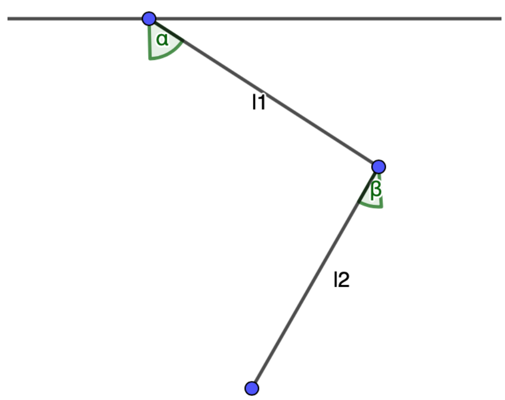
Double Pendule

halebanc

Nous allons montrer comment obtenir les équations différentielles du double pendule. Voici schéma d'un double pendule avec les angles α et β, les longueurs l_1 et l_2 et avec deux poids chacun de massem_1 et m_2.



Nous utiliserons le formalisme Lagrangien via les équations de Euleur-Lagrange pour obtenir les équations différentielle.

Commençons par exprimer x_1, y_1 et x_2, y_2 et leurs dérivés en fonction des coordonnés du problèmes.

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 sin(\alpha) & \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\alpha} cos(\alpha) \\ y_1 &= -l_1 cos(\alpha) & \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\alpha} sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = x_2 + l_2 sin(\beta) &= l_1 sin(\alpha) + l_2 sin(\beta) & \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\alpha} cos(\alpha) + l_2 \dot{\beta} cos(\beta) \\ y_2 = y1 - l_2 cos(\beta) &= -l_1 cos(\alpha) - l_2 cos(\beta) & \dot{y}_2 &= -l_1 \dot{\alpha} sin(\alpha) - l_2 \dot{\beta} sin(\beta) \end{aligned}$$

Le Lagrangien s'exprime dans notre cas comme:

$$L = T - V$$

Où L est l'énergie cinétique est V l'énergie potentielle.
Calculons dans un premier temps l'énergie cinétique T:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{m_1}{2}(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2)$$
$$= \frac{m_1}{2}(l_1^2\dot{\alpha}^2cos^2(\alpha) + l_1^2\dot{\alpha}^2sin^2(\alpha)) + \frac{m_2}{2}((l_1\dot{\alpha}sin(\alpha))^2 + (-l_1\dot{\alpha}sin(\alpha) - l_2\dot{\beta})^2)$$
$$= \frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\alpha}^2l_1^2sin^2(\alpha) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2sin(\alpha)sin(\beta) + \dot{\beta}^2l_2^2sin^2(\beta) +$$
$$\dot{\alpha}^2l_1^2cos^2(\alpha) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2cos(\alpha)cos(\beta) + \dot{\beta}^2l_2^2cos^2(\beta))$$
$$= \frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\alpha}^2 + l_2^2\dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2(sin(\alpha)sin(\beta) + cos(\alpha)cos(\beta))]$$
$$= \boxed{\frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\alpha}^2 + l_2^2\dot{\beta}^2] + m_2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2cos(\alpha - \beta)}$$

Calculons maintenant l'énergie potentiel qui est définie en fonction de la hauteur z.

$$U = mgz = m_1gy_1 + m_2gy_2 = \boxed{-m_1gl_1cos(\alpha) - m_2gl_1cos(\alpha) - m_2gl_2cos(\beta)}$$

Le Lagrangien est don égale à

$$\boxed{\begin{aligned} L = \frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\alpha}^2 + l_2^2\dot{\beta}^2] + m_2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2cos(\alpha - \beta) + m_1gl_1cos(\alpha) \\ + m_2gl_1cos(\alpha) + m_2gl_2cos(\beta) \end{aligned}}$$

Appliquons maintenant les équation de Euler-Lagrange qui sont les suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}) \tag{2}$$

Commençons par calculer l'équation (1):

$$-m_2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2sin(\alpha - \beta) - (m_1 + m_2)gl_1cos(\alpha) = \frac{d}{dt}((m_1 + m_2)l_1^2\dot{\alpha} +$$
$$m_2\dot{\beta}l_1l_2cos(\alpha - \beta))$$
$$-m_2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2sin(\alpha - \beta) - (m_1 + m_2)gl_1cos(\alpha) = (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\alpha} +$$
$$m_2\ddot{\beta}l_1l_2sin(\alpha - \beta) - m_2\dot{\beta}l_1l_2sin(\alpha - \beta))(\dot{\alpha} + \dot{beta})$$

$$\boxed{(m_1 + m_2)gl_1sin(\alpha) + (m_1 + m_2)l_1\ddot{\alpha} + m_2\ddot{\beta}l_2cos(\alpha - \beta) + m_2\dot{\beta}^2l_2sin(\alpha - \beta) = 0}$$

Calculons en suite la (2):

$$m_2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2sin(\alpha-\beta)-m_2gl_2sin(\beta)=\frac{d}{dt}(m_2l_2^2\dot{\beta}+m_2\dot{\alpha}l_1l_2cos(\alpha-\beta))$$
$$m_2\dot{\alpha}\dot{\beta}l_1l_2sin(\alpha-\beta)-m_2gl_2sin(\beta)=m_2l_2^2\ddot{\beta}+m_2\ddot{\alpha}l_1l_2cos(\alpha-\beta)-$$
$$m_2\dot{\alpha}l_1l_2sin(\alpha-\beta)[\dot{\alpha}-\dot{\beta}]$$
$$-m_2gl_2sin(\beta)=m_2l_2^2\ddot{\beta}+m_2\ddot{\alpha}l_1l_2cos(\alpha-\beta)-m_2\dot{\alpha}^2l_1l_2sin(\alpha-\beta)$$
$$\boxed{l_2\ddot{\beta}+\ddot{\alpha}l_1cos(\alpha-\beta)+gsin(\beta)=\dot{\alpha}^2l_1sin(\alpha-\beta)}$$

Voici donc les deux équations différentielles du double pendule.
Pour résoudre numériquement ce double pendule nous avons besoins de transformé ces équations en un système d'équations différentiels.