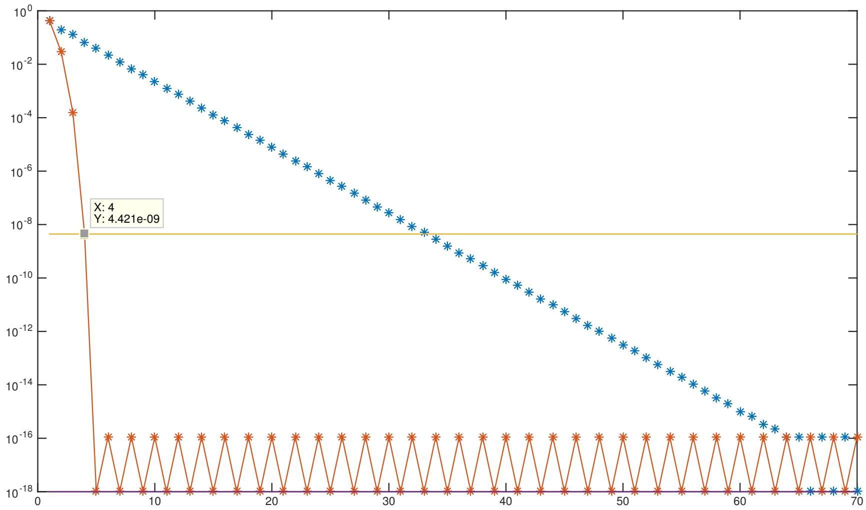
微分方程数值解
第二周作业

于慧倩
14300180118

2017 年 3 月

1. P24,1



取初始值为 1，不动点迭代要迭代 65 次左右才能达到 Newton-Raphson 迭代 4 次的迭代精度，迭代 33 次才能达到牛顿迭代 3 次的迭代精度。

由于牛顿迭代是二次收敛，不动点迭代是线性收敛，所以牛顿迭代法的迭代速度要快很多。

2. 证明范数的等价关系：对于 n 维向量 $\boldsymbol{x}$，当 $1 \leq p \leq q$ 时有

$$\|\boldsymbol{x}\|_{l_q} \leq \|\boldsymbol{x}\|_{l_p} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\boldsymbol{x}\|_{l_q}$$

证明. 用数学归纳法证明

先证明 $\|\boldsymbol{x}\|_{l_q} \leq \|\boldsymbol{x}\|_{l_p}$,$n = 1$ 时显然成立。再假设 $n \leq k-1$ 时，依然成立，那就有

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_{l_p} &= (\sum_{i=1}^{k} x_i^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{k-1} x_i^p + x_k^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq ((\sum_{i=1}^{k-1} x_i^q)^{\frac{p}{q}} + x_k^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq ((\sum_{i=1}^{k-1} x_i^q)^{\frac{q}{q}} + x_k^q)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_{l_q}
\end{aligned}
$$

由 Jensen 不等式知，当 $1 \leq p \leq q$ 时

$$
(\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{n})^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^q}{n})^{\frac{1}{q}}
$$

则

$$
\begin{aligned}
n^{-\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p) &\leq n^{-\frac{1}{q}}(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q) \\
n^{-\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{x}\|_{l_p} &\leq n^{-\frac{1}{q}}\|\boldsymbol{x}\|_{l_q} \\
\|\boldsymbol{x}\|_{l_p} &\leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\boldsymbol{x}\|_{l_q}
\end{aligned}
$$

$\square$