# 微分方程数值解
# 第十三周作业

于慧倩
14300180118

2017 年 6 月

1. P195 (4.2.16)

   证明 Richardson 格式:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\tau}=a\Delta_h u_i^n+f_i^n$$

   的截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$

   **证明**. 在 $(t_n,x_i)$ 的截断误差为:

$$R_i^n=\frac{u(t_{n+1},x_i)-u(t_{n-1},x_i}{2\tau}-a\Delta_h u(t_n,x_i)-a\Delta_h u(t_n,x_i)-f(t_n,x_i)$$

   代入 $f(t_n,x_i)$ 的表达式，有

$$\begin{aligned}R_t &= \frac{u(t_{n+1},x_i)-u(t_{n-1},x_i}{2\tau}-\frac{\partial u(t_n,x_i)}{\partial t}\\ &= \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u(t_n,x_i)}{\partial t^3}+O(\tau^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_x &= -a\Delta_h u(t_n,x_i)+a\Delta u(t_n,x_i)\\ &= -\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u(t_n,x_i)}{\partial x^4}+O(h^4)\end{aligned}$$

   所以有

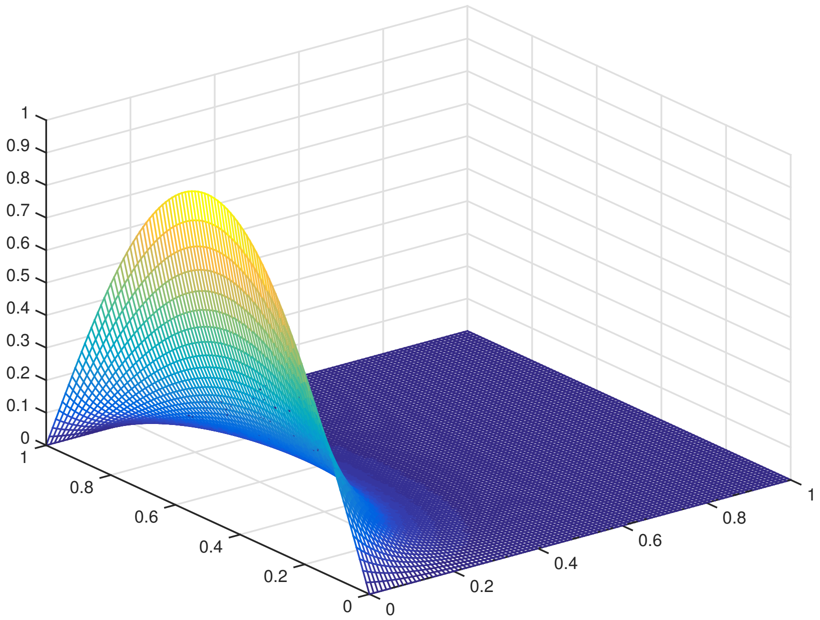
$$R_i^n=\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u(t_n,x_i)}{\partial t^3}-\frac{ah^2}{12}\frac{\partial^4 u(t_n,x_i)}{\partial x^4}+O(h^4)+O(\tau^4)$$

   □

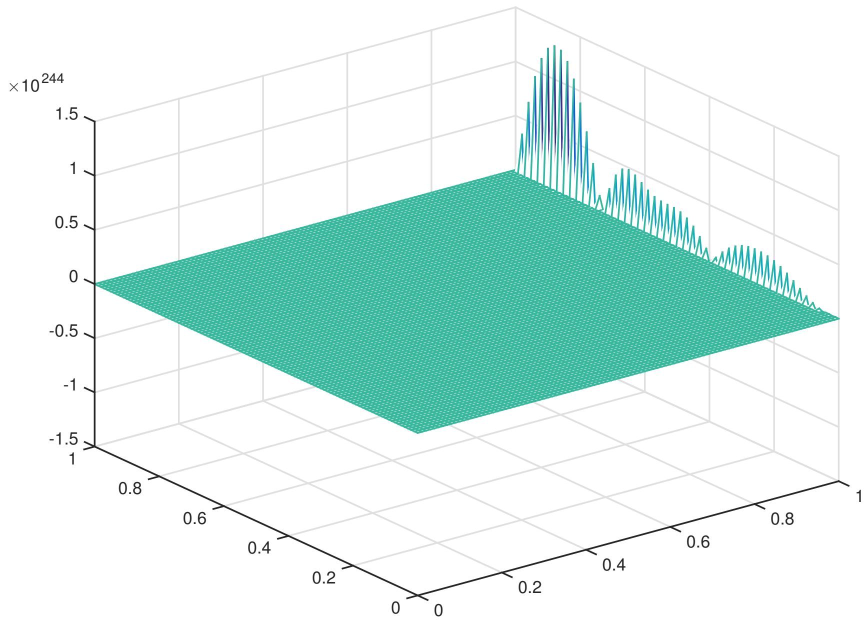
2. P195 1

   用 $\theta$ 格式和 Richardson 格式求解抛物型方程，其中我们设真实解为 $u(t,x)=\sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$，观察差分格式收敛的情况。并当 $t\to\infty$ 时，计算得到的解与两点边值问题的解是否一致?

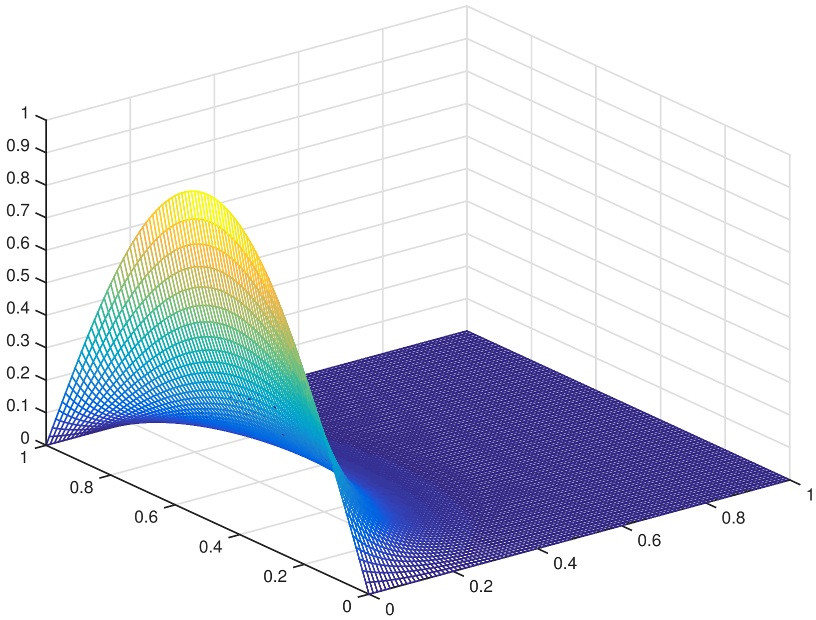
   取 $X\in[0,1],T\in[0,1]$ 分别作出真解、$\theta=0,1,\frac{1}{2}$、以及 Richardson 格式的解如下图所示:

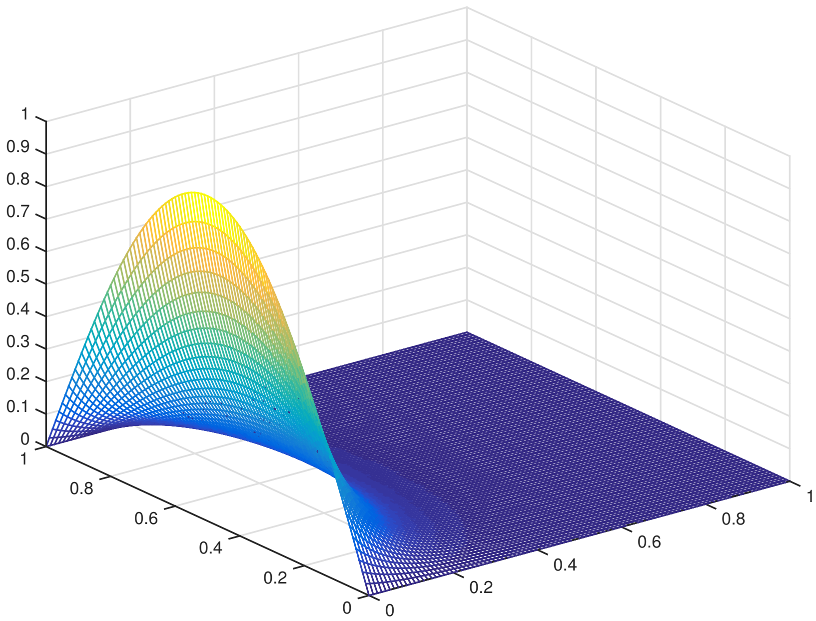


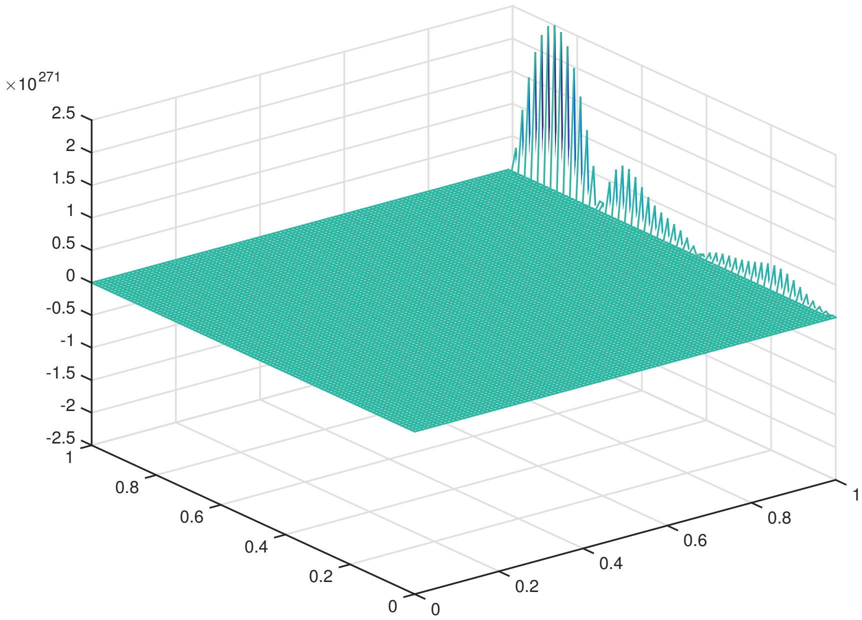
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

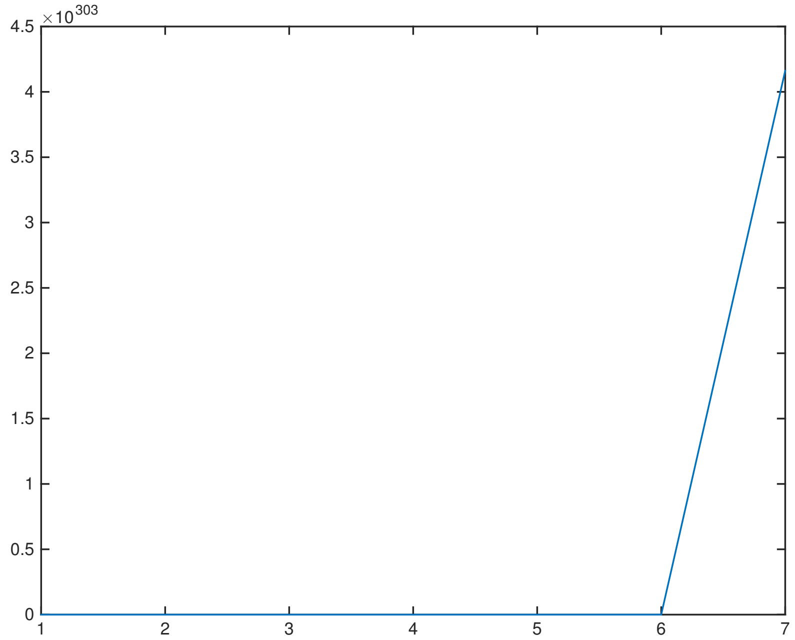
$\times 10^{244}$
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

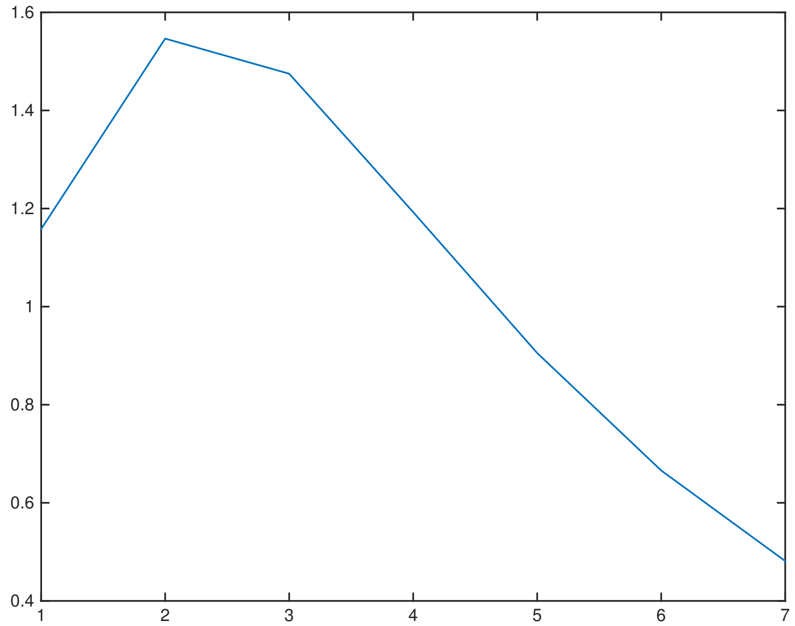

1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

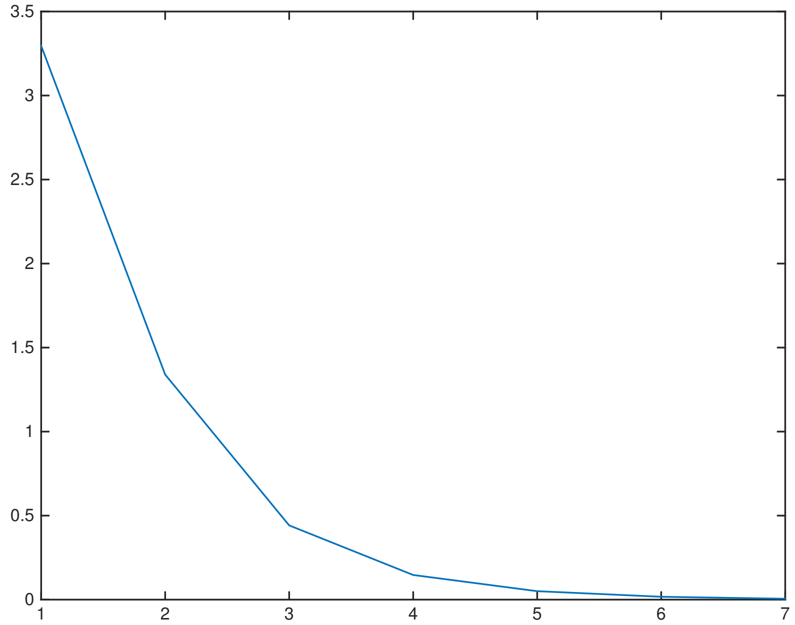

1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

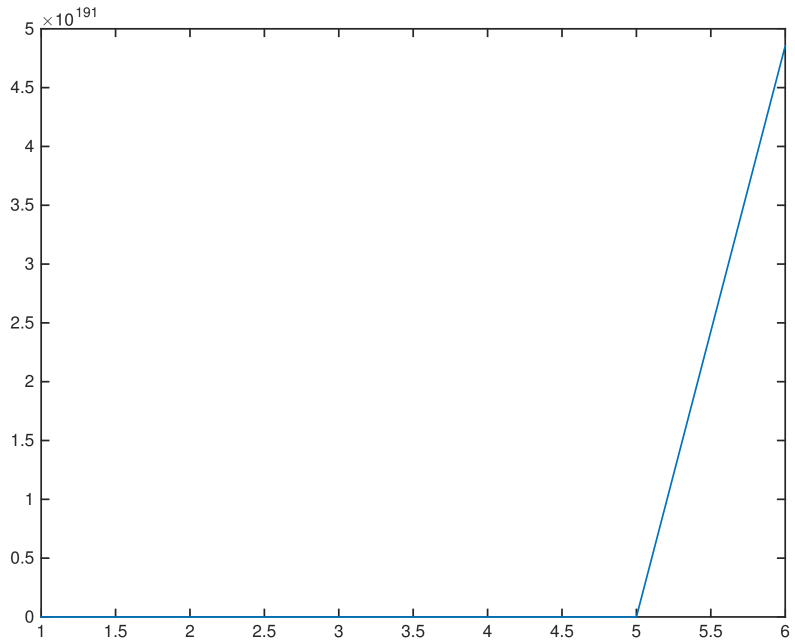



并作出 $\theta = 0, 1, \frac{1}{2}$ 以及 Richardson 格式误差图如下所示：


×10^303
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7


1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
1
2
3
4
5
6
7


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7


×10^191
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6

如图可以看到，$\theta = 0$ 以及 Richardson 格式是不稳定的，当 $t \to \infty$ 时，计算得到的解与两点边值问题的解不一致，而其他情况是收敛且与两点边值问题一致的。