确定山体海拔高度

摘要

在提供的登山记录中，未记录山名和地点，只记录山上若干处距离山脚的相对高度及其对应的气压，需要确定大气压强 p 关于相对高度的函数表达式，并且确定山脚的海拔高度。

本文旨在根据海拔高度对温度及气体分子数密度的改变，推导 p 关于 h 的函数表达式，并且根据记录中气压 p 及相对高度 h 数据确定函数表达式中相关参数，确定山脚的海拔高度。

针对问题一，首先我们假设气体是理想气体，海拔高度的变化对大气压的影响主要体现在温度及气体分子数密度改变之上，根据 ICAO 国际标准大气的定义[1]，合理假设温度与海拔高度呈线性关系，由理想气体状态方程，并且利用微元法，推导得到大气压 p 与相对高度 h 的微分方程关系式。

求解微分方程，再对解出的方程做一定变换使得可以被线性拟合，进而对需确定的三个参数进行优化，首先我们可以假设登山记录中的气压 p 及相对高度 h 数据误差只受仪器精度影响，确定其不确定度并利用蒙特·卡罗方法对测量数据进行调整。然后在变步长模拟中，优化其中一个参数，选取合适参数使得呈线性关系的新变量的线性相关度最大，确定此参数。然后通过最小二乘法线性拟合出线性方程的斜率和截距，得出 p 关于 h 的具体函数表达式。

针对问题四对山脚海拔高度的确定，已知标准大气条件下海平面的气压[2]，将其数值带入函数关系式，在上述变步长过程中计算，最后取平均值确定山脚海拔高度 H。

针对于问题二，我们可以清楚得知对于含有三个未知参数的函数关系式，最少需要三组数据便可以确定参数得出函数表达式。

最后针对问题三中表达式的误差，我们考虑表达式中三个参数的标准差即参数的误差。而对于问题四中山脚海拔高度的误差，同样以其标准差作为估计误差。

一、　问题重述及分析

1.1 问题重述

在一个登山记录中，登山队攀登一座高山，但没有记录山名和地点，只知山上有若干处标记了该处距离山脚的高度 h。登山队每到一个高度标记处测量一下气压 p，p 和 h 的对应数据如下（高度单位：米（m），气压单位：百帕（hPa））：

h	0	263	641	909	1208	1502	1812	2143	2397	2766	2951
p	781.3	754.0	716.0	689.9	661.6	634.6	607.0	578.5	557.3	527.5	513.0

表格 1.1-1

问题：

（1）根据以上数据建立 p 关于 h 的函数表达式。

（2）最少需要几组数据确定你得到的函数表达式？

（3）估计你得到的表达式的误差。

（4）如何才能确定该山山脚处的海拔高度并估计误差？

1.2 问题分析

在考虑重力场时，海拔高度对气体分子数密度造成影响，同时我们可以合理假设近地面温度随高度变化是线性的，此时利用微元法，根据气体小体积元的受力平衡方程和理想气体状态方程，我们可以得出大气压强 p 与相对高度 h 的微分方程函数关系式，对此微分方程求解即可得到大气压强 p 关于相对高度 h 的函数表达式。

同时利用所得函数表达式，只需将海平面处大气压强代入表达式，便可以解出此山山脚海拔高度，问题便迎刃而解。

二、　问题假设

1. 气体是理想气体，即严格遵从气态方程 (PV=(m/M)RT=NRT)，(N 为体积 V 中的气体分子总数)。
2. 温度与海拔高度呈线性关系。
3. 登山队记录数据误差为仪器不确定度产生的平均误差。
4. 标准大气压——在标准大气条件下海平面的气压，其值为 101.325kPa。
5. 近地面重力加速度不受高度影响，同一地点取为固定值。

三、　符号说明

符号	意义	单位
n	气体分子数密度	m^{-3}
h	相对山脚高度	m
p	大气压	hPa
m	气体分子质量 kg	
g	重力加速度	m/s^2

k	玻尔兹曼常数	J/K
T	大气温度	K
a	气温与高度关系式斜率	K/m
b	气温与高度关系式截距	K
uh	相对山脚高度测量不确定度	m
up	大气压测量不确定度	hPa
$p_{海平面}$	海平面的大气压	hPa
H	山脚的海拔高度	m

四、 模型的建立与求解

5.1 模型的建立

我们考虑气体是理想气体，当不考虑重力场作用时，可以认为气体的密度在空间是均匀分布的。当考虑重力场的影响时，气体分子数密度 n 应该是空间高度的函数[3]。

如图 4.1-1 所示，考虑在大气压在高度为 h 处有一底面积为单位面积，高位 dh 的小体积元，设气体分子的质量为 m，该处气体分子数密度为n，则该气体中分子的总重量为$mgn\,dh$。在力学平衡时，作用在该体积元上、下两边的压力差与气体所承受压力必须相等，即

$$p_h = p_{h+dh} + mgn\,dh \tag{1}$$

得

$$-d_p = p_h - p_{h+dh} = mgn\,dh \tag{2}$$

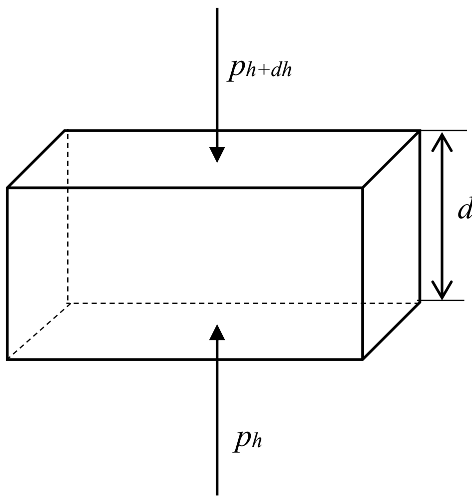

图 4.1-1

由于假设大气是理想气体，由理想气体状态方程知

$$p = nkT \tag{3}$$

得

$$-dp = {}^{mg}/_{kT}\, p\,dh \tag{4}$$

由 ICAO 规定的国际标准大气[1]知，近地面处温度与海拔高度的关系为：高度每上升 1000 米温度下降约 6.5℃，所以我们可以合理假设大气温度 T 与相对高度 h 呈线性关系：

$$T = ah + b \tag{5}$$

所以我们得到

$$-\frac{dp}{p} = \frac{mg}{k(ah+b)}dh \tag{6}$$

对公式（6）两侧积分：

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{mg}{ka}\ln\frac{ah+b}{ah_0+b} \tag{7}$$

$$\ln p = -\frac{mg}{ka}\ln\left(-h-\frac{b}{a}\right) + \ln p_0 - \frac{mg}{ka}\ln\frac{-a}{ah_0+b} \tag{8}$$

我们令$A = -\frac{mg}{ka}$，$B = \ln p_0 - \frac{mg}{ka}\ln\frac{-a}{ah_0+b}$，$C = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$，最终得到$\ln p$与$\ln(C-h)$的线性关系式：

$$\ln p = A\ln(C-h) + B \tag{9}$$

5.2 模型的求解

通过上述模型的建立与简化，最终得到$\ln p$与$\ln(C-h)$的线性关系式，式子中的 A、B、C 即我们需要确定的参数，下面我们对 C 进行优化，选取最合适的 C 使$\ln p$与$\ln(C-h)$的线性相关程度最大，即相关系数的绝对值最接近 1。在选取适当的 C 后，用最小二乘法对$\ln p$与$\ln(C-h)$进行线性拟合，求出 A，B。我们将采用变步长算法与蒙特·卡洛算法进行计算与相关误差的估计。

首先我们对登山队记录数据进行调整。由于题目中所给数据为登山过程中测量，所以数据存在一定的误差。我们只考虑仪器不确定度带来的误差，仪器不确定度概率分布可采用为均匀分布处理[4]，同时假设数据误差为平均误差，即认为记录数据点两侧数值概率与和数据点之间的距离无关。从表格 1.1-1 中可以看出，相对高度精度为 1，而大气压强精度为 0.1，于是可以记录的相对高度以及记录的气压不确定度为：

$$uh=\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{10}$$

$$up=\frac{0.1}{\sqrt{3}} \tag{11}$$

于是我们可以利用蒙特·卡罗方法，对记录数据气压 P 与记录相对山脚高度h_0进行随机处理，

$$h_0 = [0\ \ 263\ \ 641\ \ 909\ \ 1208\ \ 1502\ \ 1812\ \ 2143\ \ 2397\ \ 2766\ \ 2951]$$
$$p_0 = [781.3\ \ 754.0\ \ 716.0\ \ 689.9\ \ 661.6\ \ 634.6\ \ 607.0\ \ 578.5\ \ 557.3\ \ 527.5\ \ 513.0]$$
$$h = h_0 + uh*(2*rand(1,11)-1) \tag{12}$$

$$p = p_0 + up * (2 * rand(1,11) - 1) \tag{13}$$

这样，经过蒙特·卡洛算法，产生大量随机数，我们就可以模拟出相对高度与压强的实际误差情况，便可用变步长算法对其进行循环优化处理。

接下来我们根据每次随机调整的数据，利用变步长算法，基于 MATLAB 函数 corrcoef 将相关系数作为目标函数，优化出 C。并用最小二乘法的线性拟合公式计算 A，B，同时对山脚海拔高度 H 进行计算:

$$A = \frac{\sum[\ln p \times \ln(C-h)] - \frac{1}{11}\sum \ln p \ \sum \ln(C-h)}{\sum(\ln(C-h))^2 - \frac{1}{11}(\sum \ln(C-h))}$$

(14)

$$B = \frac{1}{11}\sum \ln p - \frac{A}{11}\sum \ln(C-h)$$

(15)

由标准大气压的定义知，在标准大气条件下海平面的气压$p_{海平面}$=1013.25hPa，代入(9)则有：

$$H = e^{1/A(\ln p_{海平面} - B)} - C \tag{14}$$

循环 100000 次后得到 A、B、C、H 数值分布如下图 4.2-1：

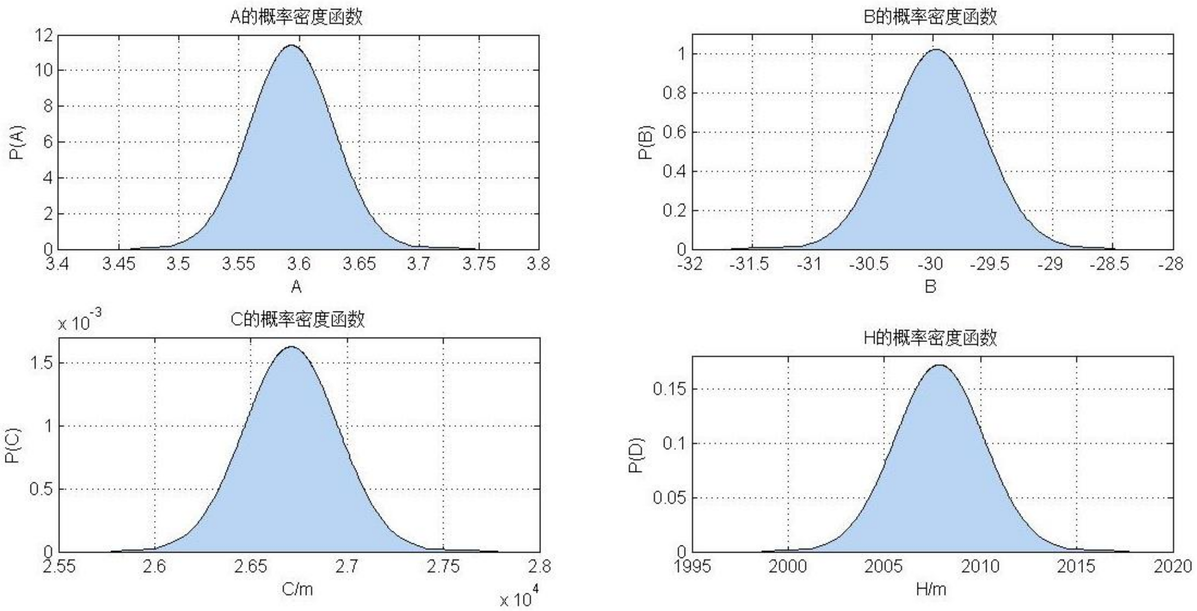

图 4.2-1

我们取最终参数 A、B、C 及山脚高度 H 为大量循环后产生的 100000 个数据的平均值，分别为：

$$mean(A) = 3.5937$$
$$mean(B) = -29.9693$$
$$mean(C) = 26709$$
$$mean(H) = 2007.9$$

即得到大气压强 P 与相对高度 h 的最终函数表达式：

$$\ln p = 3.5937 * \ln(26709 - h) - 29.9693 \tag{15}$$

$$p = \frac{(26709-h)^{3.5937}}{e^{29.9693}} \tag{16}$$

同时得到山脚的海拔高度 H 为 2007.9m。

作出$f(x) = \frac{(26709-x)^{3.5937}}{e^{29.9693}}$ 的图像如下图 4.2-2：

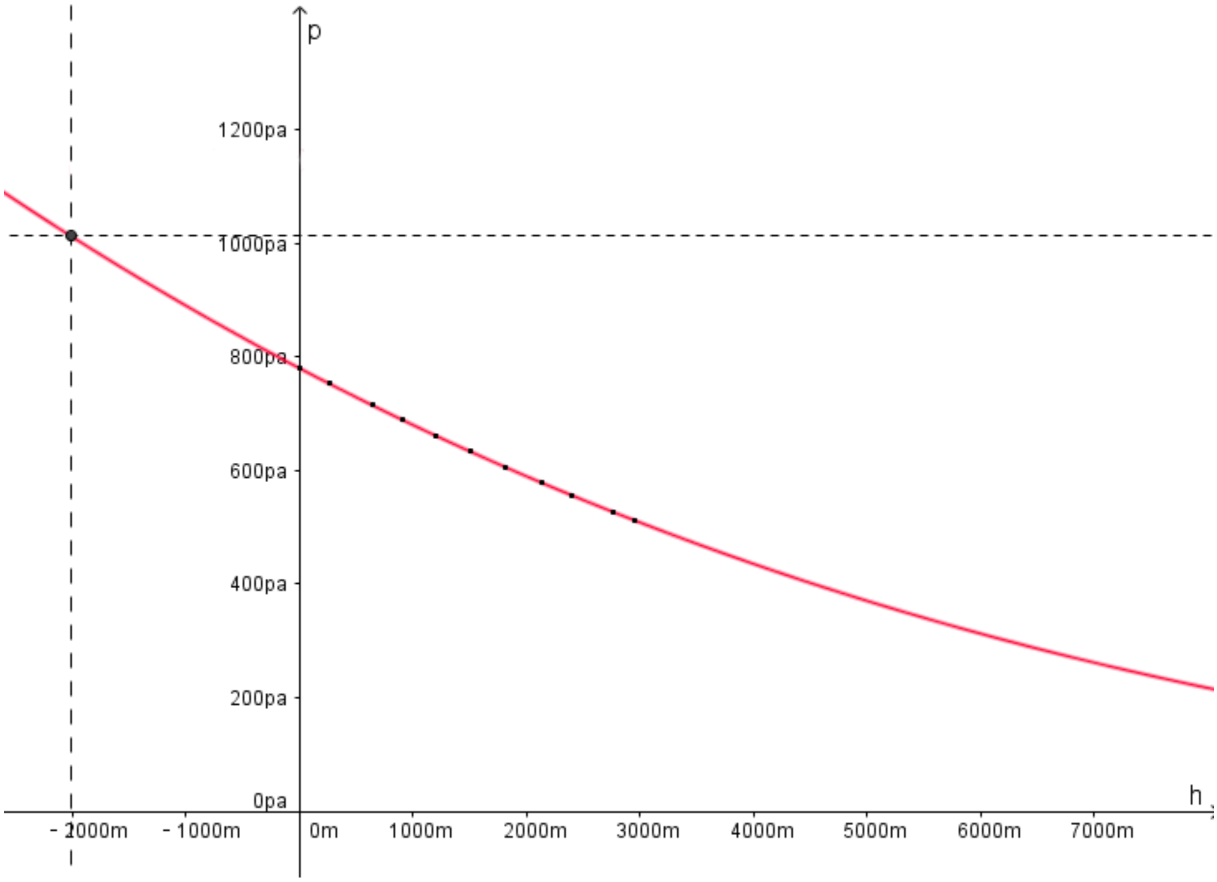

图 4.2-2

从图像可以看出，我们的模型建立是十分合理的。

五、 误差分析、模型评价及改进

5．1 表达式误差

在变步长模拟中，令 m 为一次计算中$\ln p$与$\ln(C-h)$的最大的线性相关程度，而经过大量循环循环之后，得到

$$m = 0.999999891646078$$

而对于表达式中的三个参数 A、B、C，其标准差即为标准不确定度，分别为：

std(A)	0.034955790769231
std(B)	0.389292961708890
std(C)	2.454390102441110e+02

表格 5.1-1

相对 C 参数自身数量级，且参照求解的函数表达式（9）中参数 C 的位置，$\ln(C-h)$ 对函数表达式影响很小，所以我们可以认为 A、B、C 三个参数的误差是十分合理的。

5．2 山脚海拔高度误差

由图 4.2-1 知变步长算法得到的山脚海拔高度呈正态分布，于是我们可以将其标准差即为误差，计算得 H 的标准差：

$$\mathrm{std}(H)= 2.320624986163442$$

5.3 模型评价及改进

此模型针对变温情况下，大气压与相对高度的函数表达式确定，在气体是理想气体假设下，同时考虑高度对气体分子数密度以及温度的影响，建立气压与相对高度的函数表达式。考虑到测量仪器误差，我们通过蒙特·卡洛方法对测量数据合理调整。变步长模拟对参数 C 进行优化，选取最佳C 使得 $\ln p$ 与 $\ln(C-h)$ 的线性相关程度最大，并由最小二乘法线性拟合计算 A、B，对山脚海拔高度 H 同时进行计算。我们最终得到的函数表达式，线性相关程度及误差都十分合理，确定的 H 值同样误差很小。

在模型建立过程中，我们认为重力加速度 g 在海拔上升时是固定不变的，而由万有引力定律可知重力加速度 g 是高度 h 的函数，近地面处重力加速度受高度影响相对很小，因此可以忽略。如果将 g 设为关于高度 h 的函数，模型将更加复杂，计算也会更加繁琐，但同时也会有一定的改进效果。

六、　附录

```
%测量数据不确定度
uh=1/sqrt(3);
up=0.1/sqrt(3);
h0=[0 263 641 909 1208 1502 1812 2143 2397 2766 2951];
p0=[781.3 754.0 716.0 689.9 661.6 634.6 607.0 578.5 557.3 527.5 513.0];
A=[];
B=[];
C=[];
H=[];
for k=1:100000
    %通过蒙特·卡洛对测量数据合理调整
    h=h0+uh*(2*rand(1,11)-1);
    p=p0+up*(2*rand(1,11)-1);
```

```
        lp=log(p);
        R=ones(1,10);
        %变步长进行优化
        start=0;
        step=10000;
        while step>0.5
            for n=1:10
                lh=log(start+step*n-h);
                R(n)=real(min(min(corrcoef(lh,lp))));
            end
            [m,where]=max(R);
            start=start+(where-1)*step;
            step=step/5;
        end
        %最小二乘法计算参数 A、B
        a=(sum(lh.*lp)-sum(lh)*sum(lp)/11)/(sum(lh.*lh)-sum(lh)*sum(lh)/11);
        A=[A a];
        lha=mean(lh);
        lpa=mean(lp);
        b=lpa-a*lha;
        B=[B b];
        C=[C round(start)];
        %计算山脚海拔高度 H
        H=[H exp((log(1013.25)-b)/a)-round(start)];
    end
    %做出 A、B、C、H 分布图
    subplot(2,2,1);
    p1=capaplot(A,[min(A) max(A)]); grid on; axis tight;
    subplot(2,2,2);
    p2=capaplot(B,[min(B) max(B)]); grid on; axis tight;
    subplot(2,2,3);
    p3=capaplot(C,[min(C) max(C)]); grid on; axis tight;
    subplot(2,2,4);
    p4=capaplot(H,[min(H),max(H)]); grid on; axis tight;
```

七、 参考文献

[1] Wikipedia International Standard Atmosphere
https://en.wikipedia.org/wiki/International_Standard_Atmosphere
访问时间：2016.5.21。
[2] 百度百科，标准大气压，http://baike.baidu.com/view/66423.htm，访问时间：

2016.5.21。
[3]梁励芬、蒋平，大学物理简明教程，177 页，上海市国权路 579 号，复旦大学出版社，2013 年。
[4]沈元华、陆申龙，基础物理实验，11-13 页，北京市西城区德外大街 4 号，高等教育出版社，2003 年。