微分方程数值解
第五周作业

于慧倩
14300180118

2017 年 3 月

1. 给出修正和改进 Euler 格式的稳定性分析和绝对稳定区间。

   对于改进的 Euler 格式，由 $u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}(f_n + f_{n+1})$ 可以得到

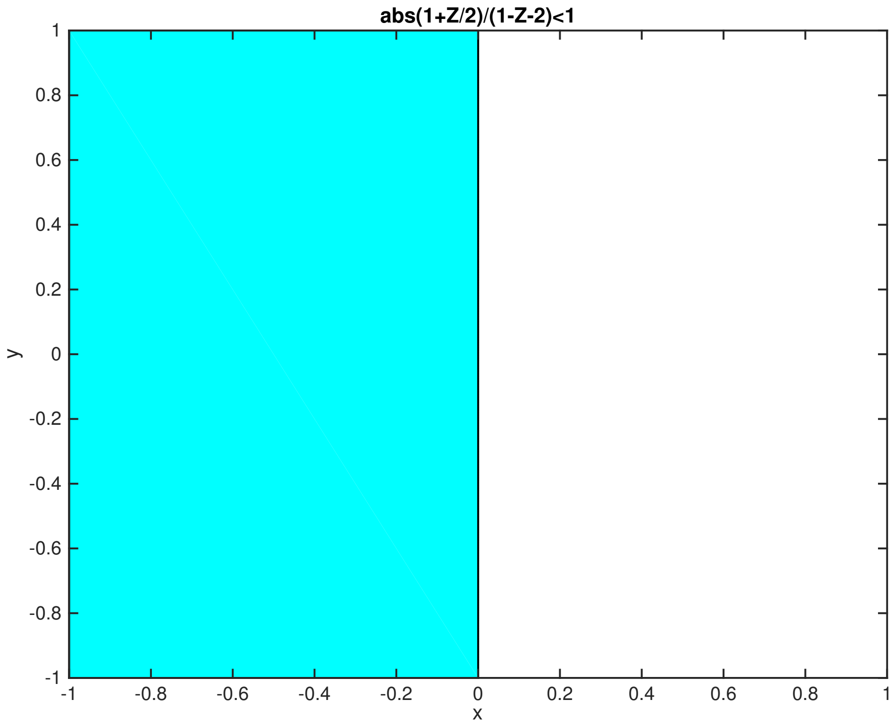
   $$u_n = (\frac{2+\Delta ta}{2-\Delta ta})^n u_0$$

   所以对于舍入误差有

   $$|u_n^{\epsilon} - u_n| = (\frac{2+\Delta ta}{2-\Delta ta})^n \epsilon$$

   稳定性即希望初始的的舍入误差对固定的 δt，当 $n \to \infty$ 时，仍然可以控制，即必须有 $|\frac{2+\Delta ta}{2-\Delta ta}| \leq 1$

   令变量 $z = a\Delta t$, 则对于改进的 Euler 格式，z 必须落在 $|\frac{2+z}{2-z}| \leq 1$，并且 z 可以是复的。由 $z = x + yi$ 解出 $x \leq 0$。即 z 必须落在左半平面内，如下图所示:



   同理对于修正的 Euler 格式，$u_{n+1} = u_n + \Delta ta(u_n + \frac{\Delta t}{2}au_n)$，可以得

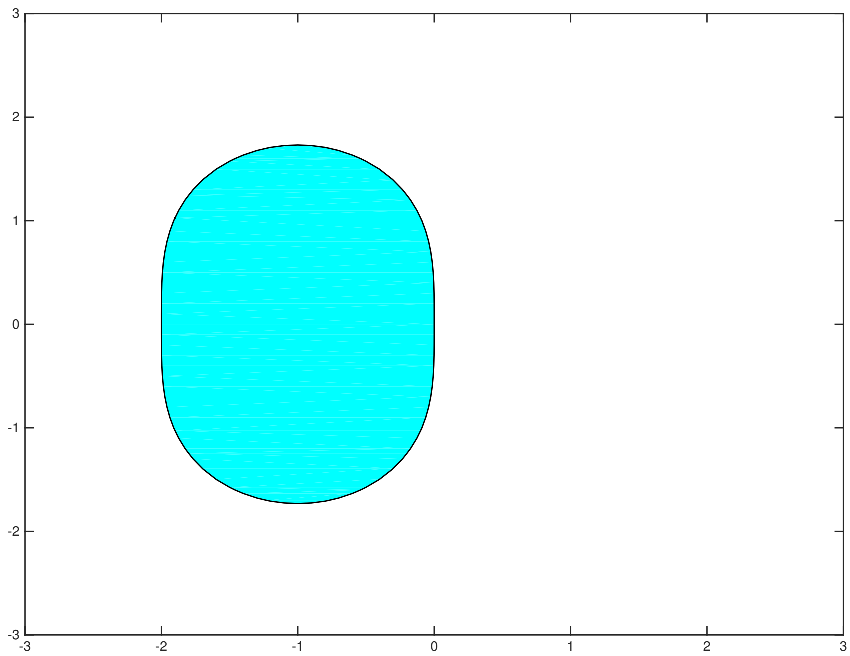
到 $u_n = (1 + a\Delta t + \frac{1}{2}a^2\Delta t^2)u_n$。继而有

$$u_n = (1 + a\Delta t + \frac{1}{2}a^2\Delta t^2)^n u_0$$

因此对于舍入误差有

$$|u_n^\epsilon - u_n| = (1 + a\Delta t + \frac{1}{2}a^2\Delta t^2)^n \epsilon$$

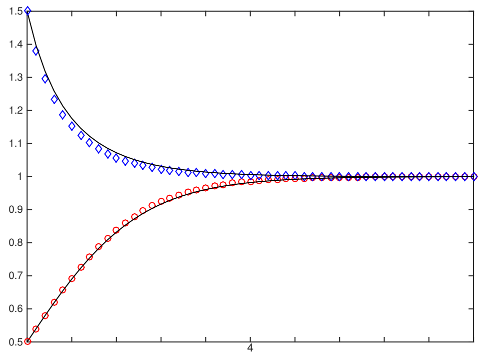
我们要求 $|1+a\Delta t+\frac{1}{2}a^2\Delta t^2| \le 1$，令变量 $z = a\Delta t$，对于修正的 Euler 格式，$|1 + z + \frac{1}{2}z^2| \le 1$, 如下图所示：

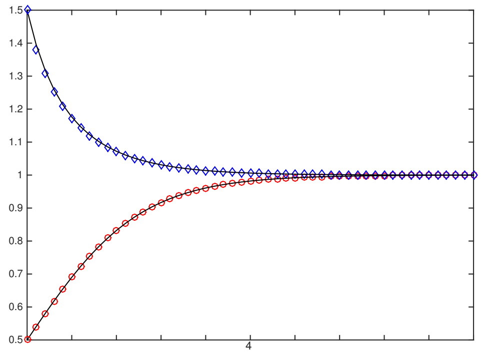


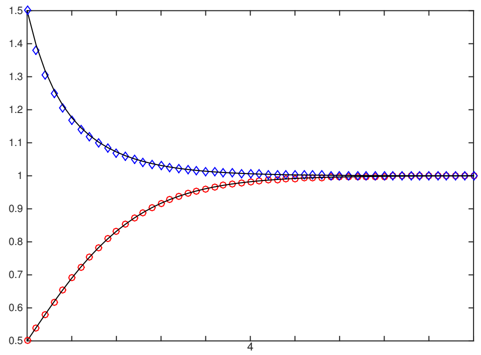
2. 用 Taylor 级数法 (q=2,3) 与 Euler 显式格式比较计算:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u - u^2$$

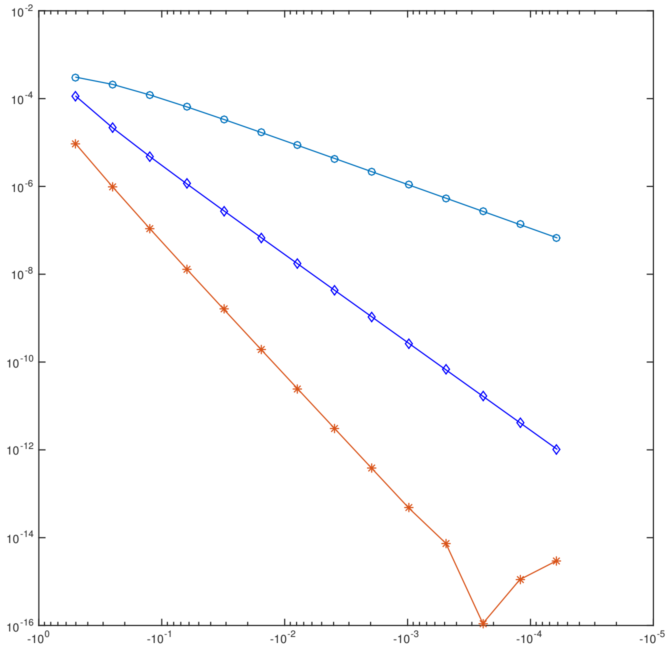
Euler 显式格式、Taylor 级数 (q=2,3) 依次为下图：







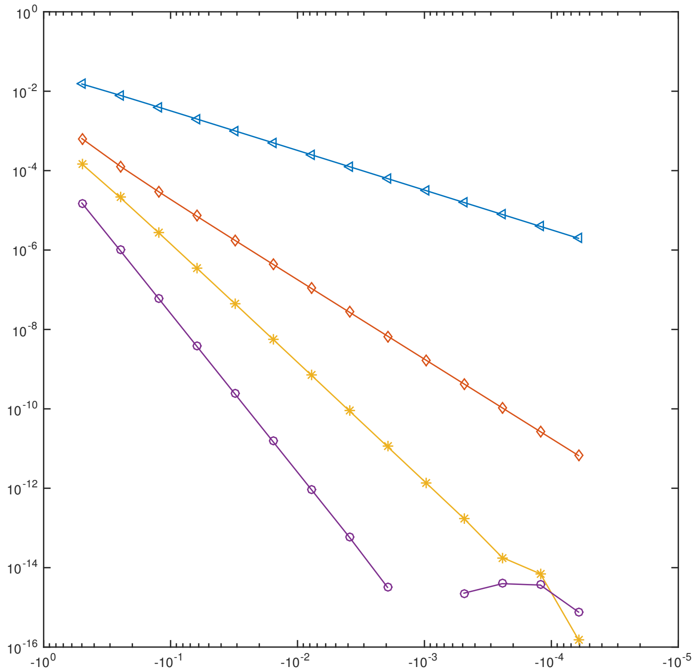
进一步可以画出 $O(\Delta t^{\rho}) \sim \|u_T - u_N\|$ 图像，如下：



可见 q=3 的 Taylor 级数法收敛最快。而对于 q=3 的 Taylor 级数法 $\Delta t < 2^{-13}$ 时，减少步长不能再改进精度，因为此时误差已经接近机器精度。

3. 用二到四阶格式计算例 2.2.2，观察收敛阶。

   用步长 $\Delta t = 2^{-i}$ 作为步长, 并与 Euler 显式 (一阶) 格式比较计算得到下图：



由于 $\ln|e_N| = \ln C - pI\ln 2$，所画 (loglog) 图像的斜率的绝对值代表了收敛阶，从图上可以估计出误差曲线所代表的收敛格式。同时对于高阶收敛，当 $\Delta t < 2^{-13}$ 时，减少步长不能再改进精度，因为此时误差已经接近机器精度。