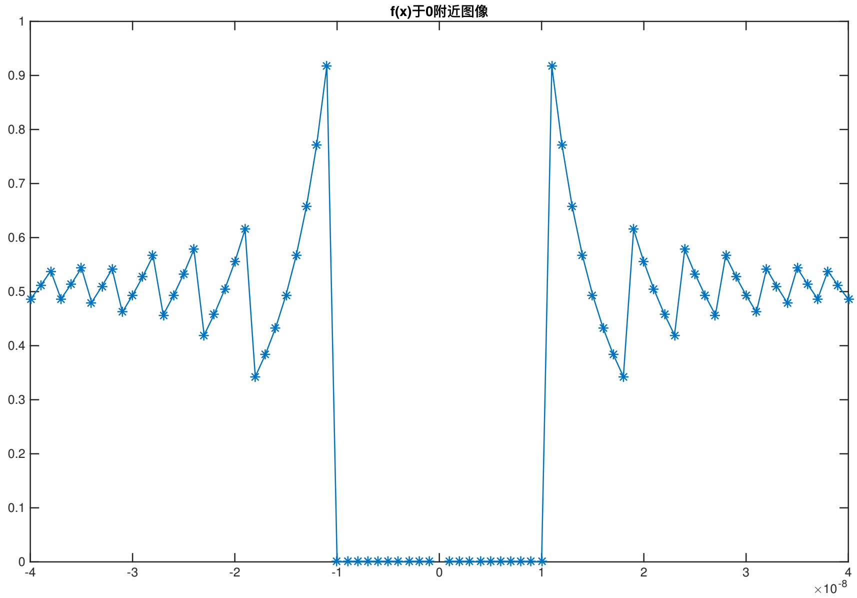
微分方程数值解
作业（一）

于慧倩
14300180118

2017 年 3 月

1. 计算 $f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ 当 x 趋于 0 的时候的结果。
   对 $x=(-4:0,1:4)\times 10^{-8}$，画出 $f(x)$ 的图像：



$f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ 在当 x 趋于 0 的时候函数值在 0.5 附近震荡，且愈靠近 0 处震荡愈显著，在 $x=0$ 邻域内分子为 0，$f(x)=0$，且 $x=0$ 点无意义。由于 x 趋于 0 的时候，1 与 $\cos(x)$ 符号相同、数值相近，二者相减使分子的有效数字减少信息缺失，导致整体相对误差的放大。

2. 考虑倒向迭代过程，则舍入误差可以被很好的控制：

   证明. 由递推公式得到 u_n 可以表示为

$$u_n=c_1 2^n+c_2 1^n.$$

c_1,c_2 由初始值 u_N,u_{N-1} 给定：

- 如果 $u_N=u_{N-1}$，则 $u_1=u_N$.
- 如果 $u_N\neq u_{N-1}$，则

$$u_n=(u_N-u_{N-1})2^{n+1-N}+(2u_{N-1}-u_N).$$

由上一节实验知

$$\begin{aligned} a_0 &\triangleq 3\times \mathrm{double}(0.1) - 2\times \mathrm{double}(0.1) - \mathrm{double}(0.1) \\ &= 2.7756e-17(=2^{-55}). \end{aligned}$$

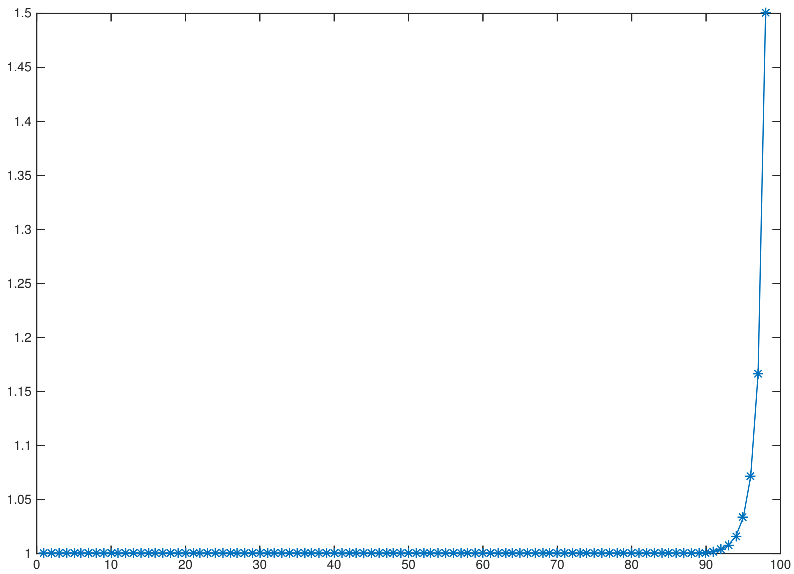
这样在 u_{N-2} 就会有舍入误差引入，不妨把迭代格式看成从 $n=N-3$ 开始，且初值为 u_{N-1}, u_{N-2}, 并假设后续的计算是在一个理想的没有舍入误差的计算机中运行，则第 $N-2-n$ 步的值 u_n 为

$$\tilde{u} = \mathrm{double}(0.1) + a_0 \times 2^{n+1-N} - a_0$$

对于迭代次数很大的对应的很小的 n 误差维持在 1 左右，n 较大时 (且 $n \leq N-2$ 时) 最大值小于 $\frac{3}{2}$:

$$1.5 \geq \frac{|u_n - 0.1|}{|u_{n+1} - 0.1|} \approx 1$$

可以从下图观察到。



□

证明. 上述分析不考虑在计算 $\frac{3}{2}u_{N-1} - \frac{1}{2}u_N$ 时引入的舍入误差，只考虑在初始时刻的扰动。实际上每一步计算时，递推公式都会有舍入误

差存在。不妨假设实际的计算格式可以写为原来计算格式的扰动：

$$\tilde{u}_n = \frac{3}{2}\tilde{u}_{n+1} - \frac{1}{2}\tilde{u}_{n+2} + \epsilon_n$$

且初始值为

$$\tilde{u}_N = u_N + \epsilon_N, \tilde{u}_{N-1} = u_{N-1} + \epsilon_{N-1}$$

定义向量

$$\boldsymbol{\omega}_n = \binom{u_{n+1}}{u_n}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n = \binom{\tilde{u}_{n+1}}{\tilde{u}_n}, \boldsymbol{\varepsilon}_n = \binom{\epsilon_{n+1}}{0}$$

则递推公式可以写为单步递推公式：

$$\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega}_{n+1}$$

和

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_n = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

这里矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

定义误差 $\boldsymbol{e}_n = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n - \boldsymbol{\omega}_n$, 则对 $n \geq N-2$ 有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_n &= \boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n+1} - \boldsymbol{\omega}_{n+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{aligned}$$

另外定义 $\boldsymbol{e}_{N-1} = \binom{\epsilon_N}{\epsilon_{N-1}}$。容易得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分解：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -0.8944 & -0.7071 \\ -0.4472 & -0.7071 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0.5 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

因此，误差的递推公式可以写成：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{e}_{n+1} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

进而得到：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_n + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \cdots + \boldsymbol{\Lambda}^{N-n-2}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{N-2} + \boldsymbol{\Lambda}^{N-n-1}\boldsymbol{P}^{-1}e_{N-1}.$$

假设在每一步递推中 ϵ_i 足够小，或假设：

$$\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_i\| \leq \delta, \|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{e}_{N-1}\| \leq \delta$$

则由上述递推公式容易得到：

$$\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{e}_n\| \leq (\underbrace{1^0 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{N-n-1}}_{(N-n)\text{个}})\delta = (N-n)\delta$$

对任意向量 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_d)^T, |v_i| \leq \|\boldsymbol{v}\|$，这样得到：

$$|u_n - \tilde{u}_n| \leq \|\boldsymbol{P}\|\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{e}_n\| < 1.3960 \times (N-n)\delta.$$

$$\frac{|u_n - \tilde{u}_n|}{|u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}|} = \frac{N-n}{N-n-1}$$

因此在迭代初期 (n 较大时)，每迭代一次，增加误差大于 1 倍但相对较小，在迭代后期 (n 较小时)，迭代过程中误差几乎不变，所以舍入误差在整个计算过程中可以被很好的控制。

□

3. 知

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \alpha\|x_{n+1} - x_n\| \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

进一步推导出

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|$$

证明.

$$\begin{aligned}
\|x^* - x_n\| &\leq \alpha^1\|x^* - x_{n-1}\| \\
&\leq \alpha^2\|x^* - x_{n-2}\| \\
&\cdots \\
&\leq \alpha^{n-1}\|x^* - x_1\| \\
&\leq \alpha^n\|x^* - x_0\| \qquad (1)
\end{aligned}$$

对于所有 N:

$$
\begin{aligned}
\|x_n - x_{n-1}\| &\leq \alpha^1 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\
&\leq \alpha^2 \|x_{n-2} - x_{n-3}\| \\
&\cdots \\
&\leq \alpha^{n-1} \|x_1 - x_0\| \qquad (2)
\end{aligned}
$$

对于所有 M:

$$
\begin{aligned}
\|x_M - x_0\| &\leq \|x_M - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\
&\leq \|x_M - x_2\| + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\
&\cdots \\
&\leq \|x_M - x_{M-1}\| + \|x_{M-1} - x_{M-2}\| + \cdots + \|x_1 - x_0\| \\
&\leq \|x_1 - x_0\|(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{M-1}) \\
&= \frac{1 - \alpha^{M-1}}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\| \qquad (3)
\end{aligned}
$$

令 $x \to \infty$ 得

$$
\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\| \qquad (4)
$$

由 (1) 与 (4) 知:

$$
\begin{aligned}
\|x^* - x_n\| &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\| \\
&\leq \frac{1}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|
\end{aligned}
$$

□