微分方程数值解
第九周作业

于慧倩
14300180118

2017 年 4 月

1. P151.2

(a) 证明（3.1.54）如果有 $e_N = e_0 = 0$, 则 $\|\boldsymbol{e}\|_{\ell_2} \leq \|\delta_x^+ \boldsymbol{e}\|_{\ell_2}$

证明.

$$\begin{aligned} e_i &= e_i - e_{i-1} + e_{i-1} - e_{i-1} + \cdots + e_1 - e_0 \\ &= \sum_{j=0}^{i-1}(e_{j+1} - e_j) \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} h\delta_x^+ e_j \end{aligned}$$

$$令 u'(x) = \begin{cases} \delta_x^+ e_{[\frac{x}{h}]} & \text{if } \frac{x}{h} \in N^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{e}\|_{\ell_2}^2 &= \sum_{i=1}^{N-1} e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (\sum_{j=0}^{i-1} h\delta_x^+ e_j)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (\int_0^{(i-1)h} u'(s)\mathrm{d}s)^2 \\ &= \frac{1}{h^2}\int_0^1 (\int_0^x u'(s)\mathrm{d}s)^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{h^2}\int_0^1 (x\int_0^x u'(s)^2\mathrm{d}s)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2h^2}\int_0^1 u'(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\delta_x^+ \boldsymbol{e}\|_{\ell_2}^2 &= \sum_{i=1}^{N-1} (\delta_x^+ e_i)^2 \\ &= \frac{1}{h^2}\int_0^1 u'(x)^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

故有 $\boldsymbol{e}\|_{\ell_2}^2 \leq \delta_x^+ \boldsymbol{e}\|_{\ell_2}^2$

□

(b) 证明收敛性和两阶收敛有截断误差

$$R_i = -\delta_x^2 u(x_i) - f(x_i)$$

定义函数 $e_i = u(x_i) - u_i$，则有

$$R_i = -\delta_x^2 e_i$$

两边同时乘 e_i，得到

$$-e_i \delta_x^2 e_i = R_i e_i$$

则有

$$\|\delta_x^+ e\|_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} R_i e_i \le \|R\|_{l^2} \|e\|_{l^2}$$

由于上已经证明 $\|e\|_{l^2} \le \|\delta_x^+ e\|_{l^2}$
所以得到

$$\|e\|_{l^2} \le \|R\|_{l^2}$$

同时有截断误差

$$R_i = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\theta_i)$$

所以有 $\|e\|_{l^2}$ 收敛，得证三点差分格式的收敛性。
得 e_i 二阶收敛。
导数值 $\delta_x^+ u_i = \delta_x^+[u(x_i) - e_i]$，其收敛性即 $\delta_x^+ e_i$ 的收敛性。
有

$$\|\delta_x^+ e\|_{l^2}^2 \le \|R\|_{l^2} \|e\|_{l^2} \le \|R\|_{l^2}$$

所以有导数也二阶收敛。

2. P151.3

(a) 证明三点差分格式的极值原理仍然成立
有相应的三点差分格式：

$$-\frac{a(x_n)u_{n+1} - (a(x_n) + a(x_{n-1}))u_n + a(x_{n-1})u_{n-1}}{h^2} = f_n$$

展开即

$$a(x_n)u_{n+1} = (a(x_n) + a(x_{n-1}))u_n - a(x_{n-1})u_{n-1} - h^2 f_n$$

不妨假设极值原理不成立，u_n 为三点差分格式求出的最小值

$$u_{n+1} \geq u_n, u_n \geq u_{n-1}$$

同时有

$$a(x_n)(u_{n+1} - u_n) = a(x_{n-1})(u_n - u_{n-1}) - h^2 f_n \tag{1}$$

由于

$$f_n \geq 0, a(x) \geq \alpha > 0$$

所以有，(1) 的左边 ≥ 0，右边 ≤ 0，所以若 u_n 达到最小值，应有 u 恒为常数。所以有极值原理成立。

(b) 给出三点差分格式的最大模误差估计

三点差分格式离散得到的截断误差为:

$$R_n = -\delta_x^-[a(x_n)\delta_x^+ u(x_n)] - f(x_n)$$

定义函数 $e_i = u(x_i) - u_i$,则有 $-\delta_x^-[a(x_n)\delta_x^+ e_n)] = R_n = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_n) + O(h^4)$

而 $a(x) \geq \alpha \geq 0$ 所以 $\|-\delta_x^2 e_n\|_{l^\infty} \leq \|R_n\|_{l^\infty}/\alpha$, 构造 $v_0 = v_N = 0$ 且 $-\delta_x^2 v_n = \|R\|_{l^\infty}/\alpha$, 则有 $v_n = \frac{n}{2N}(1 - \frac{n}{N})\|R\|_{l^\infty}/\alpha$. 最终得到 $u(x)$ 的四阶导数一致有界为 M_4, 则有 $\|e\|_{l^\infty} = \frac{M_4 h^2}{96\alpha}$