微分方程数值解
第八周作业

于慧倩
14300180118

2017 年 5 月

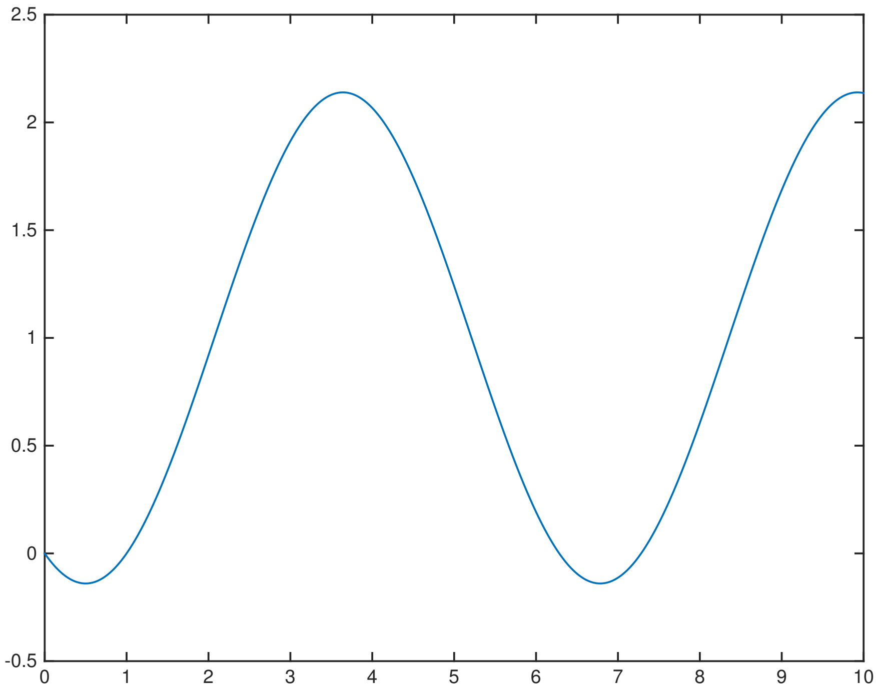
1. P136.1

   说明极值原理中的 $c(x)$ 为负时，极值原理可能不成立。考虑一维的 Helmholtzf 方程，找 u 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + k^2 u = 1, u(0) = u(1) = 0$$

   由课本 P130 知，当 $b^2 + 4ac \le 0$, 特别是 $b = 0, ac \le 0$ 时，解是震荡的，解得 Helmholtz 方程的解如下：

$$u(x) = \frac{1}{k^2}(\frac{\cos k - 1}{\sin k}\sin kx - \cos kx + 1)$$



2. 对初边值条件 $u(0) = 0, u'(1) = 0$ 求相应的格林函数。

   解：求解下列方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2} = 0, x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1) & (1) \\ G(0) = G'(1) = 0 & (2) \\ G'_-(x_0) - G'_+(x_0) = 1 & (3) \end{cases}$$

由 (1) 和边界条件可得:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} ax & x < x_0 \\ b & x \geq x_0 \end{cases}$$

由连续性得:

$$ax_0 = b$$

由 (3) 得:

$$a = 1$$

因此有:

$$G(x, x_0) = \begin{cases} x & x < x_0 \\ x_0 & x \geq x_0 \end{cases}$$

3. P143 对方程 (3.1.3)，如果边界条件改为 $u(0) = 0, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) + u(1) = 0$, 求其精确解；并用三点差分格式离散求解，同时分析差分格式的精度:

   (a) 求解精确解:

      i. $b = c = 0$ 时
      $-au_{xx} = 1$，容易得到方程解 $u(x) = -\frac{1}{a}(x - x_0)x$，由边界条件得到
      $$u(x) = -\frac{1}{a}(x - \frac{3}{2})x$$

      ii. $c = 0, b \neq 0$ 时
      $-au_{xx} + bu_x = 1$，此时 $u(x) = \frac{x}{b}$ 是方程的一个特解，易得特征方程
      $$-a\lambda^2 + b\lambda = 0$$
      得到 $\lambda_1 = \frac{b}{a}, \lambda_2 = 0$, 则有 $u(x) = \alpha_1 e^{\frac{bx}{a}} + \alpha_2 + \frac{x}{b}$
      由边界条件最终得到
      $$u(x) = -\frac{2}{b}\frac{1}{\lambda e^\lambda + e^\lambda - 1}e^{\lambda x} + \frac{2}{b}\frac{1}{\lambda e^\lambda + e^\lambda - 1} + \frac{x}{b}, \lambda = \frac{b}{a}$$

iii. $c \neq 0, b^2+4ac>0$ 时

此时有 $\frac{1}{c}$ 为一个通解，同时特征方程

$$-a\lambda^2+b\lambda+c=0$$

有两个根 $\lambda_1 = \frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ 和 $\lambda_2 = \frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$，则 $u(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x}+\alpha_2 e^{\lambda_2 x}+\frac{1}{c}$, 同样利用边界条件得到

$$u(x)=\frac{1}{c}\frac{-1+\lambda_2 e^{\lambda_2}+e^{\lambda_2}}{\lambda_1 e^{\lambda_1}+e^{\lambda_1}-\lambda_2 e^{\lambda_2}-e^{\lambda_2}}e^{\lambda_1 x}+\frac{1}{c}\frac{-1+\lambda_1 e^{\lambda_1}+e^{\lambda_1}}{\lambda_1 e^{\lambda_1}+e^{\lambda_1}-\lambda_2 e^{\lambda_2}-e^{\lambda_2}}e^{\lambda_2 x}+\frac{1}{c}$$

iv. $c \neq 0, b^2+4ac=0$ 时

有通解 $u(x)=(\alpha_1 x+\alpha_2)e^{\frac{b}{2a}x}+\frac{1}{c}$，再由边界条件得到:

$$u(x)=(\frac{e^{\lambda}(1+\lambda)-1}{ce^{\lambda}(2+\lambda)}x-\frac{1}{c})e^{\frac{b}{2a}x}+\frac{1}{c}$$

v. $c \neq 0, b^2+4ac<0$ 时

对于特征方程有共轭解 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$，所以 $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$ 为通解，同时 $\frac{1}{c}$ 为方程的。

由边界条件解得

$$u(x)=\frac{1}{c}(\frac{-e^{-\alpha}+(\alpha+1)\cos\beta-\beta\sin\beta}{\beta\cos\beta+(\alpha+1)\sin\beta}\sin\beta x e^{\alpha x}-\cos\beta x e^{\alpha x}+1)$$

(b) 用三点差分格式离散求解

方程 3.1.3 写作 $-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{c}{a}u=\frac{1}{a}$, 初值条件为 $u(0)=0, \dot{u}(1)+u(1)=0$ 用三点差分格式求解，将区间 $[0,1]$ 进行 N 等分，步长 $h=\frac{1}{N}$。

i. 镜像法得到第三类边界条件的逼近条件, 其中，$\alpha=1, g=0$:

$$u_N(2+2h+\frac{c-b}{a}h^2)+u_{N-1}(-2)=\frac{h^2}{a}$$

在基本三点差分矩阵的基础上,改变最后一行做矩阵 $\boldsymbol{A}_{N\times N},\boldsymbol{B}_{N\times N},\boldsymbol{C}_{N\times N},\boldsymbol{f}_{N\times 1}$ 如下

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\frac{b}{a}\times\frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & -2 & 2+2h+\frac{c-b}{a}h^2 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} \frac{c}{a} & & & & \\ & \frac{c}{a} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{c}{a} & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$f=\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ h^3 \end{pmatrix}$$

ii. 由向后差分方法得到逼近条件:

$$\frac{1}{h}(u_N-u_{N-1})+\alpha u_N=g$$

只需要改变 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{f}$ 即可:

$$B=\frac{b}{a}\times\frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h}+1 \end{pmatrix}$$

$$f = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iii. 由向后差分方法得到逼近条件:

$$\frac{1}{2h}(3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}) + \alpha u_N = g$$

只需要改变 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{f}$ 即可:

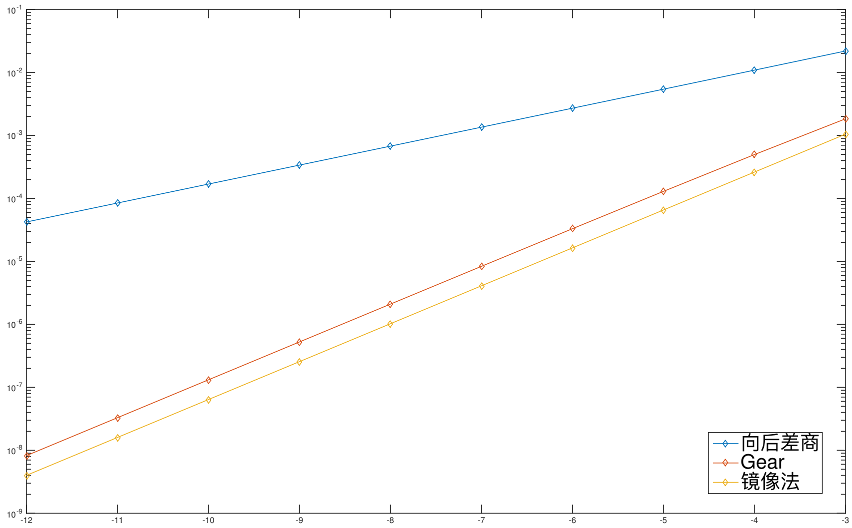
$$B = \frac{b}{a} \times \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2h} & -\frac{2}{h} & \frac{3}{2h}+1 \end{pmatrix}$$

$$f = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

通过求解线性代数方程来得到解 u 在离散点 x_i 上的解

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})^{-1} f$$

令 $a = 1, b = 1, c = 2$, 变步长获得三种处理方法的收敛如下图:



10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
10^-7
10^-8
10^-9
-12
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
向后差商
Gear
镜像法