# 微分方程数值解
# 第十一周作业

于慧倩
14300180118

2017 年 5 月

1. P164.1

在区域 $\Omega = [0,1]^2$ 用五点差分格式求解如下问题：

$$-\Delta u + u = fs$$

且 $u|_{\partial\Omega} = 1$ ，设 $\boldsymbol{A}$ 为对应 $-\Delta$ 算子的离散矩阵，说明：

(a) 观察 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 的性质:

进行五点差分，把 $x, y$ 方向 $N$ 等分，步长为 $h = 1/N$, 在内部节点上

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + ui - 1, j + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j})$$

若边界条件为 $u|_{\partial\Omega} = 0$，则有

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & & \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \\ & -1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix}_{N-1,N-1}$$

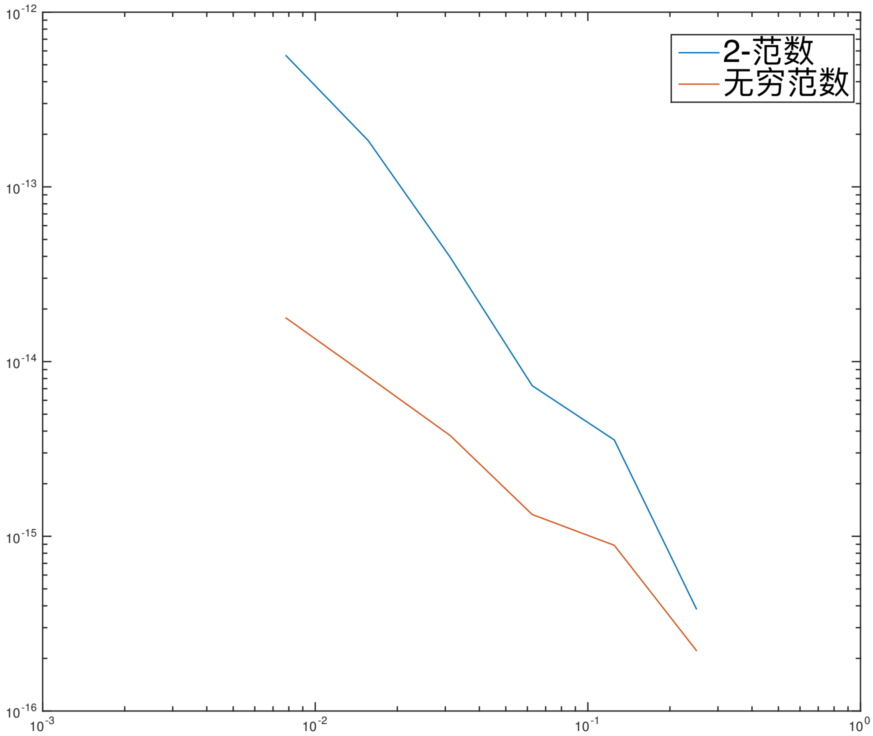
$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}_{N-1,N-1}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} S & T & S & & \\ T & S & T & & \\ & T & S & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & T \\ & & & T & S \end{pmatrix}$$

$A + I$ 的性质：对称，正定；只在五条对角线上的元素不为零，对应着每个节点只有五点进行计算；稀疏，块三对角阵；不可约；严格对角占优阵；

(b) 格式是否两阶收敛

构造 $u = x(1-x)y(1-y)+1$ 对应 $f = 2y(1-y)+2x(1-x)+x(1-x)y(1-y)+1$，利用五点差分格式进行估计，得到误差如图：




可以看出符合二阶收敛。

(c) 求矩阵 $A$ 的特征值、特征向量

特征值：$\lambda_{j,k} = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{j\pi}{2n}) + \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{k\pi}{2n})$。其中 $j,k = 1,\ldots,N-1$

对应的特征向量 $u_{m,l}^{(j,k)} = \frac{2}{n}\sin(\frac{mj\pi}{n})\sin(\frac{lk\pi}{n})$。其中 $1 \leq m,l \leq N-1$