

微分方程数值解

第四周作业

于慧倩

14300180118

2017 年 3 月

1. 证明隐式 Euler 格式是一阶收敛的。

证明. 对于测试方程 $\frac{du}{dt} = au$, 说明隐式 Euler 格式是收敛的。

要说明 Euler 格式是收敛, 需要说明在 Δt 趋于零时, 在固定的 $T = N\Delta t$ 时刻, $e_N = u(T) - u_N$ 也趋于零。对于 $e_n = u(t_n) - u_n$, 可以得到

$$e_n = u_0 e^{at_n} - u_0 \frac{1}{(1 - a\Delta t)^n} = u_0 e^{at_n} (1 - e^{-n \ln(1 - a\Delta t) - at_n})$$

Taylor 展开后, 另有 $t_n = n\Delta t$

$$\begin{aligned} e^{-n \ln(1 - a\Delta t) - at_n} &= 1 - n \ln(1 - a\Delta t) - at_n + \frac{1}{2} [n \ln(1 - a\Delta t) + at_n]^2 + \dots \\ &= 1 - n(-a\Delta t - \frac{1}{2}a^2\Delta t^2) - at_n + \frac{1}{2}n^2a^2\Delta t^2 + \frac{1}{2}a^2t_n^2 - a^2t_n n\Delta t + O(\Delta t^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}a^2t_n\Delta t + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

最终有

$$e_n = u_0 e^{at_n} \left(-\frac{a^2 t_n}{2} \Delta t + O(\Delta t^2) \right)$$

从这个表达式可以看出, 对于固定的 $T = N\Delta t$, 在 T 时刻的误差 $|u(T) - u_N| \leq C\Delta t$, 相对误差 $\frac{|u(T) - u_N|}{|u(t_n)|} \leq \frac{a^2 t_n}{2} \Delta t + O(\Delta t^2)$. 为一阶收敛。

□