微分方程数值解
第七周作业

于慧倩
14300180118

2017 年 4 月

1. 用 Newton 表示重新写出 Adams 格式。

$$u_{n+1}-u_n=\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt=\begin{cases} \int_0^1 f(t_n+s\Delta t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t & (\text{显式}) \\ \int_0^1 f(t_{n+1}-\alpha\Delta t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t & (\text{隐式}) \end{cases}$$

首先对于显式：

$$f(t_n+s\Delta t)=\bigtriangledown f_n+\frac{\bigtriangledown f_n}{\Delta t}s\Delta t+\frac{\bigtriangledown^2 f_n}{2!(\Delta t)^2}(s\Delta t)((s+1)\Delta t)+\dots$$

由于

$$\frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-j+1)}{j!}=\binom{s}{j}$$

所以有

$$f(t_n+s\Delta t)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{-s}{j}\bigtriangledown^j f_n$$

故有

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\int_0^1\binom{-s}{j}\bigtriangledown^j f_n\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

对于隐式：

$$f(t_{n+1}-\alpha\Delta t)=\bigtriangledown f_{n+1}+\frac{\bigtriangledown^1 f_{n+1}}{\Delta}(-\alpha)\Delta t+\frac{\bigtriangledown^2 f_{n+1}}{\Delta t^2 2!}(-\alpha)(1-\alpha)\Delta t+\dots$$

由于

$$\frac{(\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+j-1)}{j!}=\binom{\alpha}{j}$$

故有

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\int_0^1\binom{\alpha}{j}\bigtriangledown^j f_{n+1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

2. P118 1

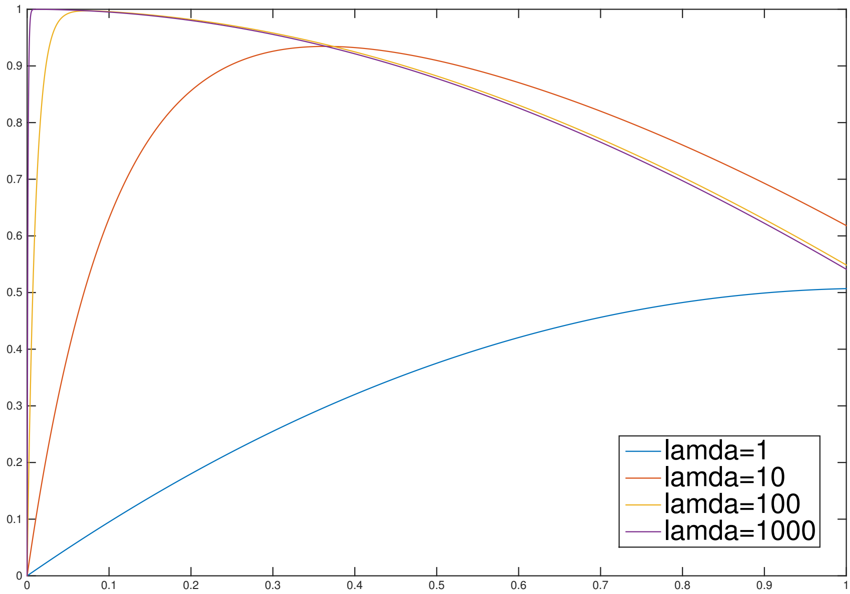
   (a) 写出精确的 $u(t)$ 的表达式

$$u(t)=e^{\lambda t}(u_0+\frac{\lambda}{\lambda^2+1}(e^{\lambda t}\sin t+\lambda e^{\lambda t}\cos t-\lambda))$$

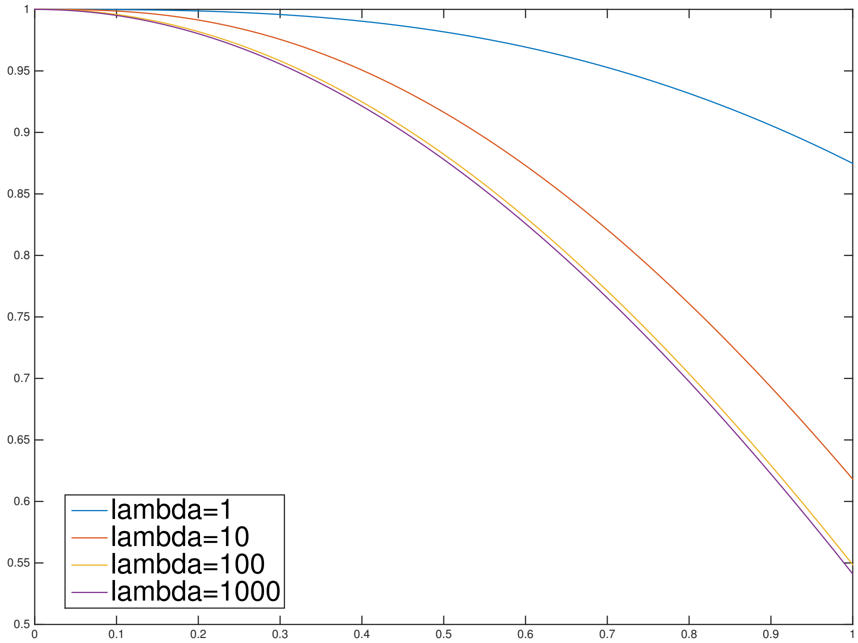
(b) 对 $\lambda = 1, 10, 100, 1000$, 分别用显式 Euler 格式和隐式 Euler 格式求解:

当 $\Delta t = 10^{-4}$ 时，显式 Euler 方法与隐式 Euler 方法都能较准确的计算出函数值。

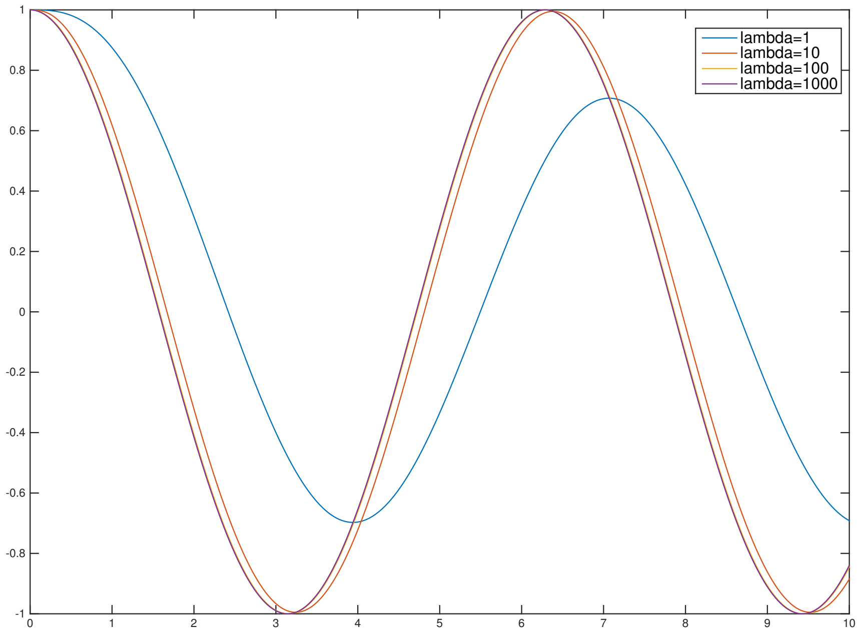
i. $u_0 = 0$ 时，显式 Euler 格式画图如下:



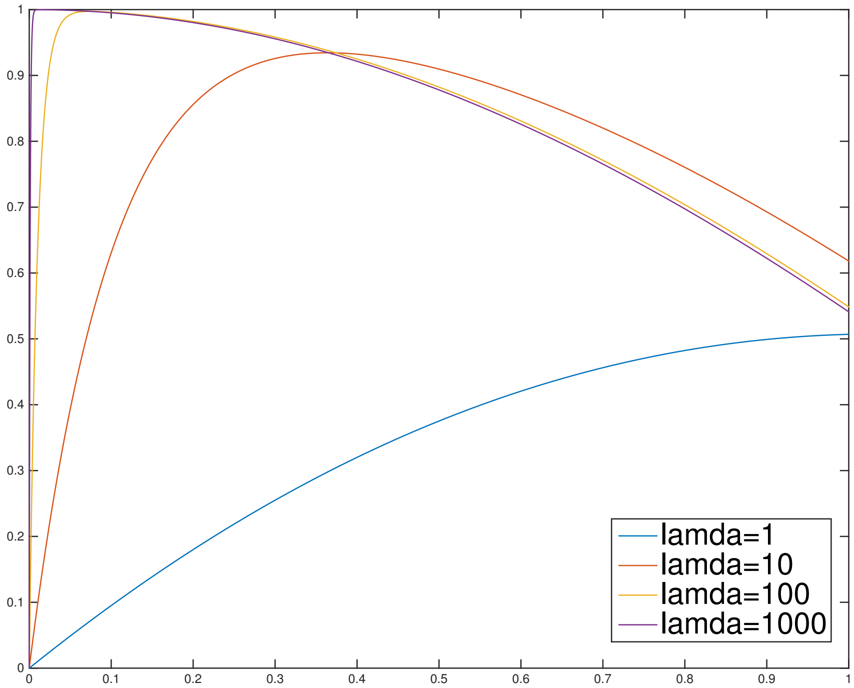
ii. $u_0 = 1$ 时，显式 Euler 格式画图如下:



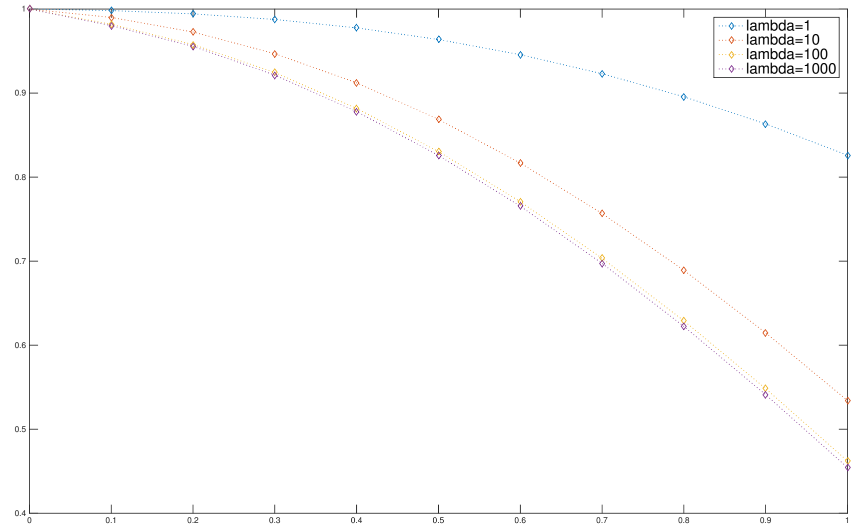
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
lambda=1
lambda=10
lambda=100
lambda=1000

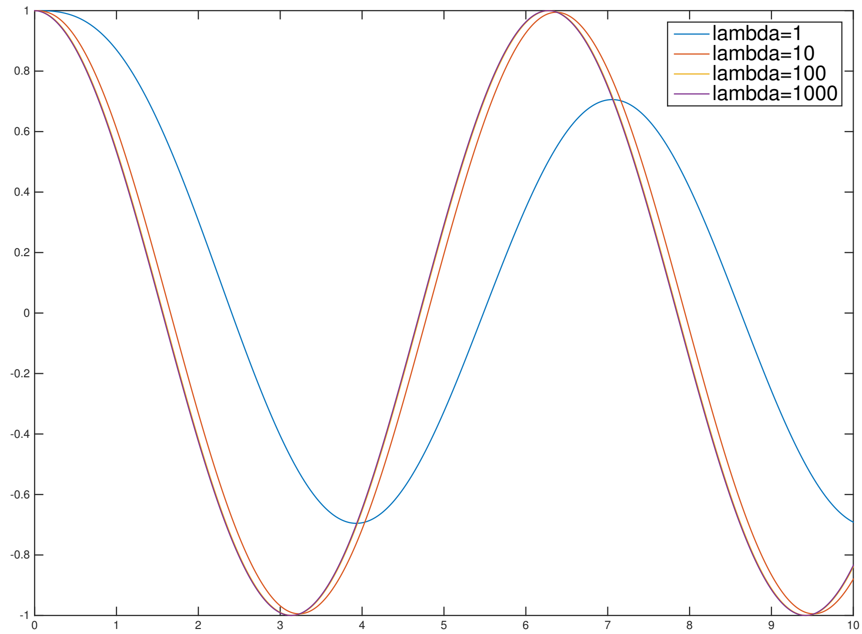


iii. $u_0 = 0$ 时，显式 Euler 格式画图如下：



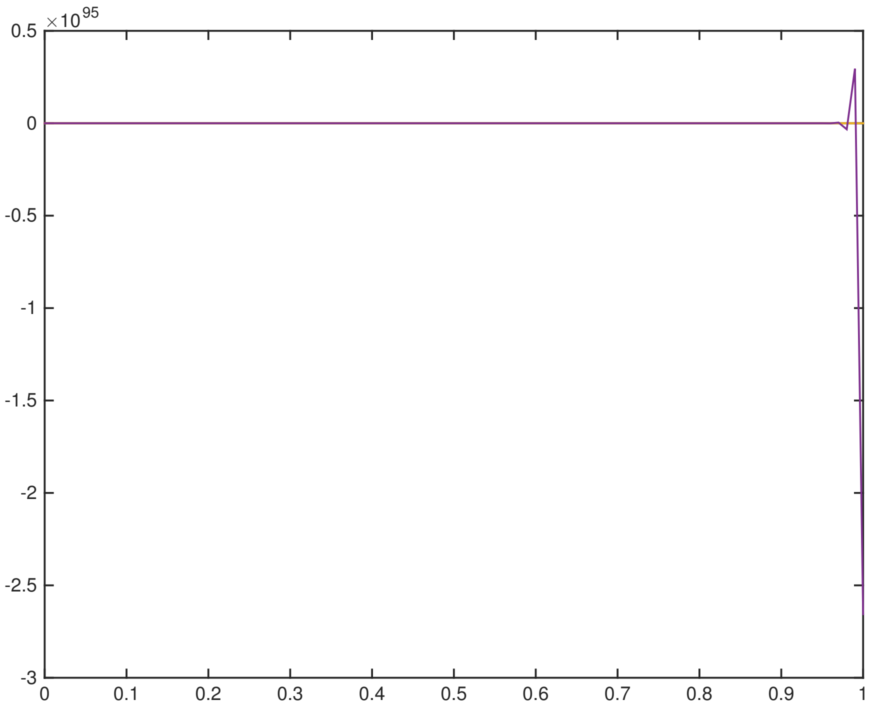
iv. $u_0 = 1$ 时，隐式 Euler 格式画图如下



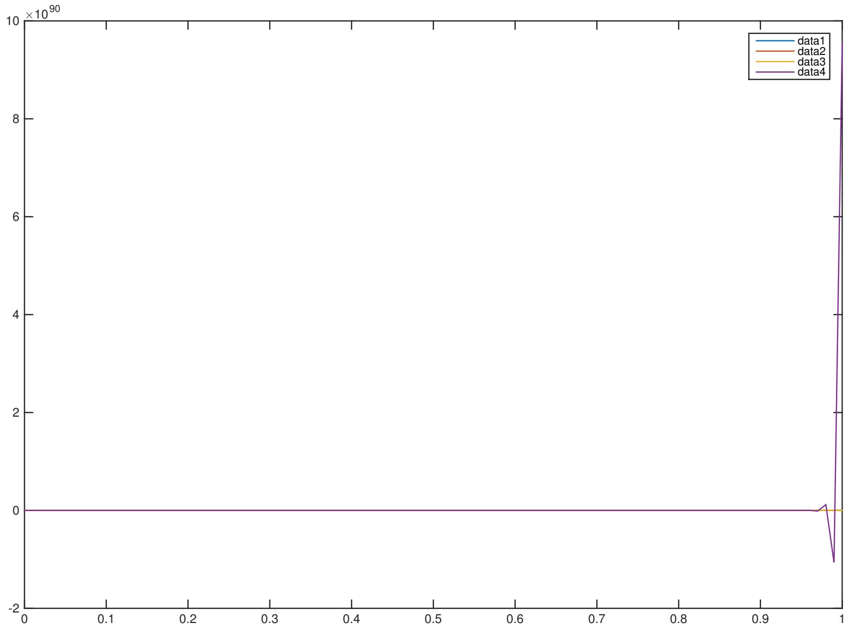


当 $\Delta t = 10^{-2}$ 时，显式 Euler 方法无法计算 λ 较大时的结果。

i. $u_0 = 0$

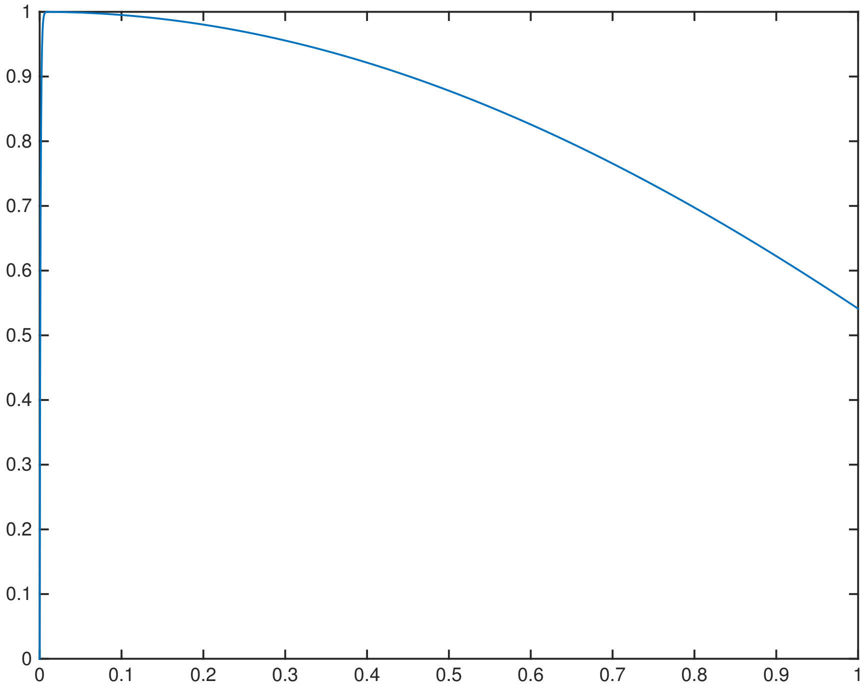


ii. $u_0 = 1$

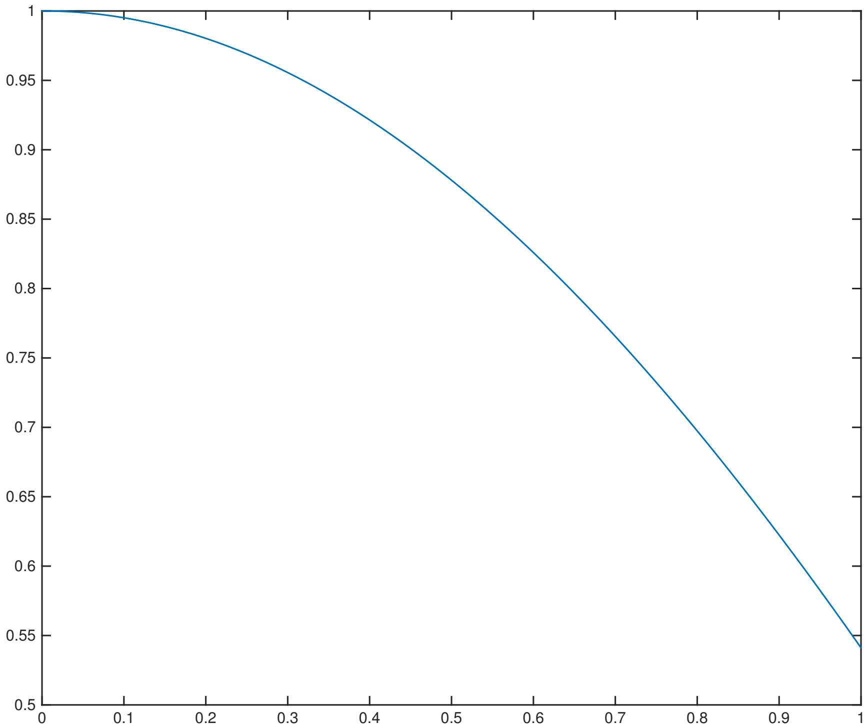


(c) 比较用 Adams 方法和 Gear 方法，计算 λ 1000 时的数值行为。当 $\Delta t = 10^{-4}$ 时，Adamas 方法（初值用精确值代表）与 Gear 方法都能较准确的计算出函数值。

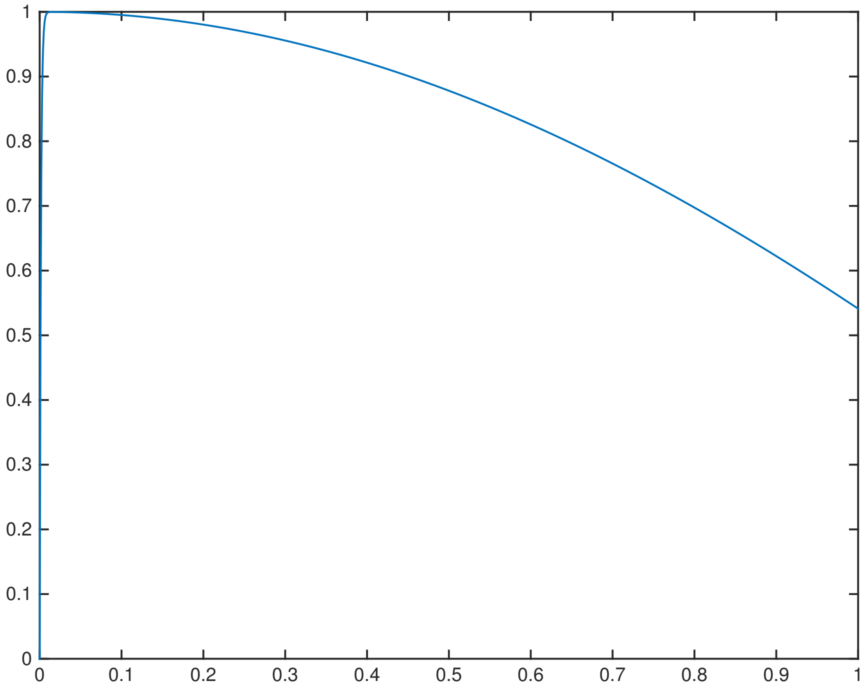
i. $u_0 = 0$ 时，Adams 方法如图



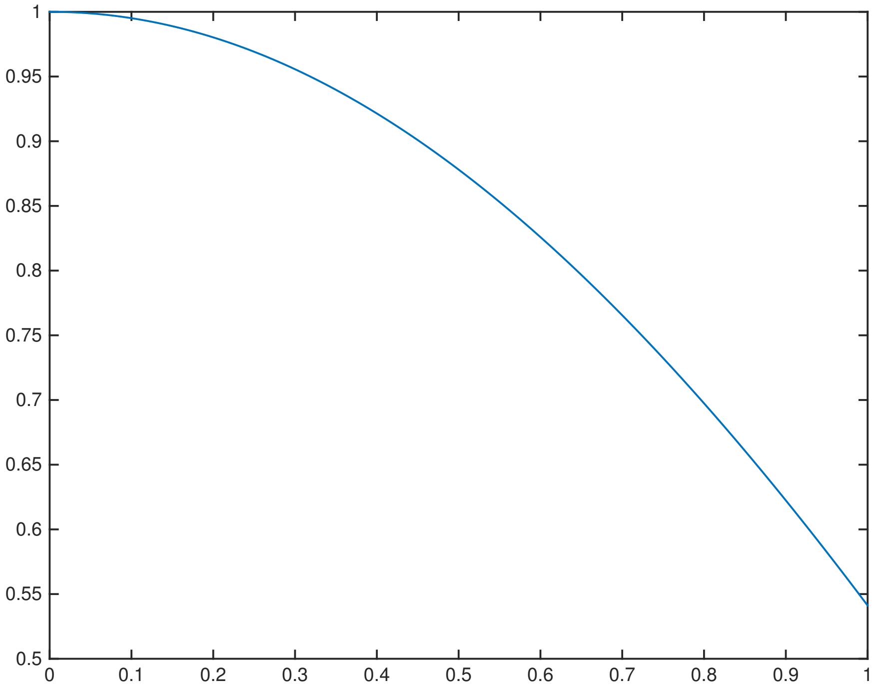
ii. $u_0 = 1$ 时，Adams 方法如图



iii. $u_0 = 0$ 时，Gear 方法如图

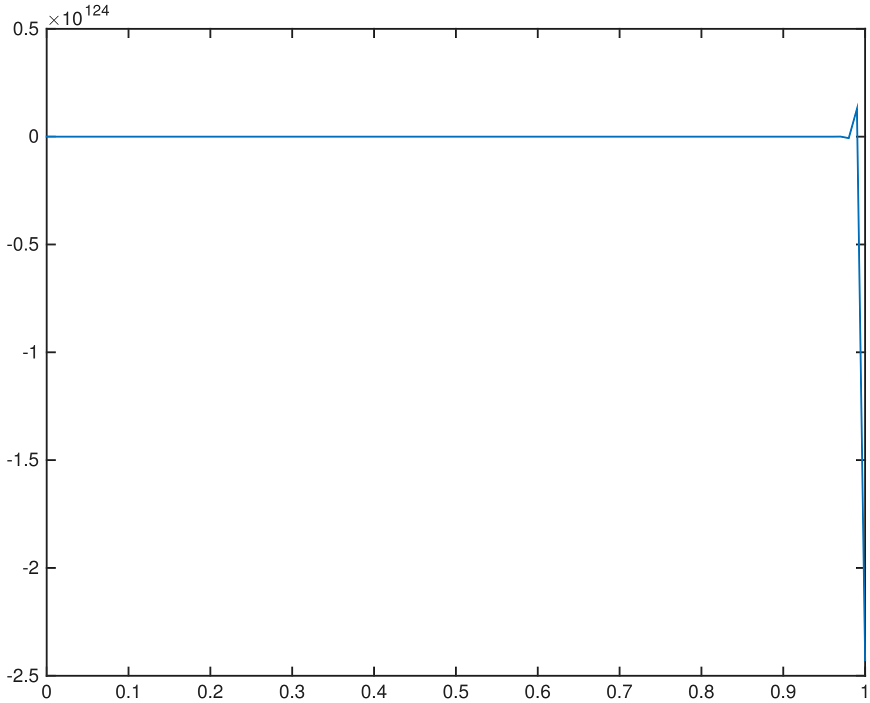


iv. $u_0 = 1$ 时，Gear 方法如图

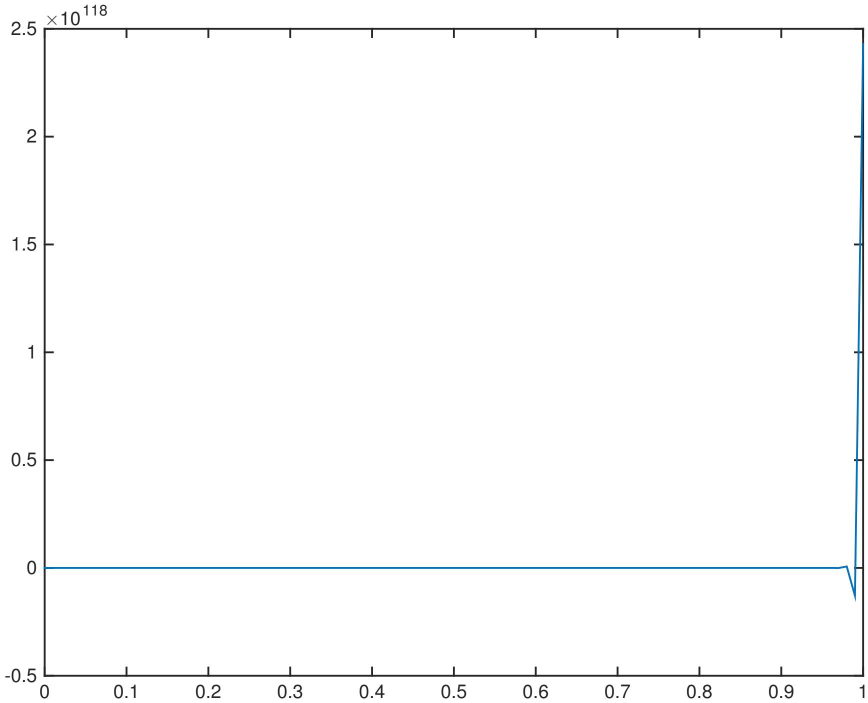


当 $\Delta t = 10^{-2}$ 时，此时 $\Delta t\lambda = 10$，此时 Adamas 格式不再稳定:

i. $u_0 = 0$



ii. $u_0 = 1$



$\times 10^{118}$
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1