微分方程数值解
第四周作业

于慧倩
14300180118

2017 年 3 月

1. 证明隐式 Euler 格式是一阶收敛的。

证明. 对于测试方程 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = au$，说明隐式 Euler 格式是收敛的。

要说明 Euler 格式是收敛，需要说明在 $Deltat$ 趋于零时，在固定的 $T = N\Delta t$ 时刻，$e_N = u(T) - u_N$ 也趋于零。对于 $e_n = u(t_n) - u - n$，可以得到

$$e_n = u_0 e^{at_n} - u_0 \frac{1}{(1 - a\Delta t)^n} = u_0 e^{at_n}(1 - e^{-n\ln(1-a\Delta t) - at_n})$$

Taylor 展开后，另有 $t_n = n\Delta t$

$$\begin{aligned} e^{-n\ln(1-a\Delta t)-at_n} &= 1 - n\ln(1-a\Delta t) - at_n + \frac{1}{2}[n\ln(1-a\Delta t) + at_n]^2 + \dots \\ &= 1 - n(-a\Delta t - \frac{1}{2}a^2\Delta t^2) - at_n + \frac{1}{2}n^2a^2\Delta t^2 + \frac{1}{2}a^2t_n^2 - a^2t_n n\Delta t + O(\Delta t^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}a^2t_n\Delta t + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

最终有

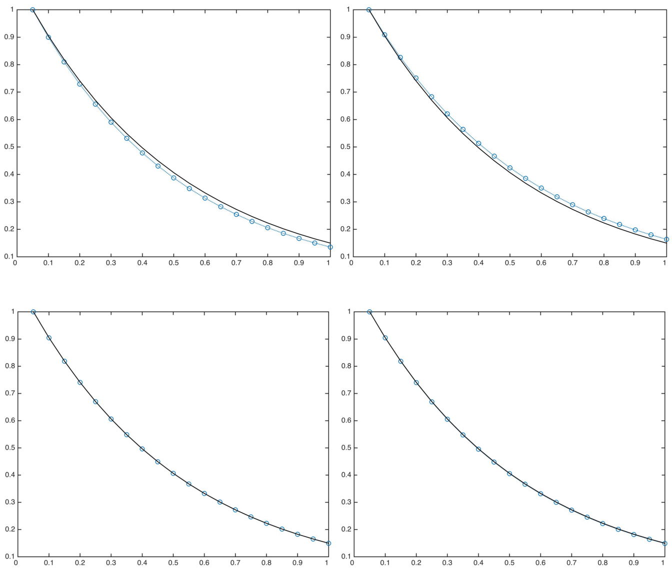
$$e_n = u_0 e^{at_n}(-\frac{a^2t_n}{2}\Delta t + O(\Delta t^2))$$

从这个表达式可以看出，对于固定的 $T = N\Delta t$，在 T 时刻的误差 $|u(T) - u_N| \le C\Delta t$，相对误差 $\frac{|u(T)-u_N|}{|u(t_n)|} \le \frac{a^2t_n}{2}\Delta t + O(\Delta t^2)$. 为一阶收敛。 □

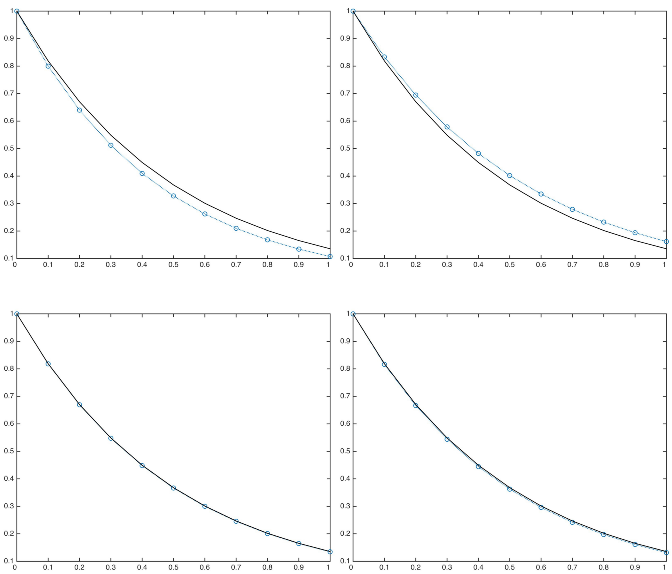
2. 用显式、隐式、改进的、修正的 Euler 格式计算 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = au, u_0 = 1, a = 2, T = 1$，并用图说明收敛性。

分别取步长 $t = 0.02, t = 0.1$ 依次做出显式、隐式、改进的、修正的 Euler 格式如下：

$t = 0.02$



$t = 0.1$



从图中可以清楚地看出当步长较小或步长较大时，改进的和修正的

Euler 格式收敛速度都很快，且都明显快于显式、隐式的 Euler 格式收敛状况，显式 Euler 格式比真值偏小，隐式 Euler 格式比真值偏大。