(Т6) Правдоподобна ли гипотеза о том, что в течение эпидемии число заболеваний отдельного человека есть случайная величина, подчиняющ. Bi - распределению с количеством испытаний ~~два~~ $n=2$?

$N = 200$ (человек)

$H_0: \xi \sim Bi(n, p)$; $H_1 = \overline{H_0}$

$Bi: f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^{k} q^{n-k} \theta(x-k)$; $q = 1-p$

$n = 2$

p - вероятность заболеть; k - количество заболевших

A_0 - заболели ни разу
A_1 - заболели единожды
A_2 - заболели дважды

$\Big\}$ - полная группа событий

	A_0	A_1	A_2
m_i	10	181	9

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= C_2^0 p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2 \\ p_1 &= C_2^1 p^1 (1-p) = 2p(1-p) \\ p_2 &\ C_2^2 p^2 \cdot (1-p)^0 = p^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=0}^{2} p_i = 1$$

$$L = p_0^{10} p_1^{181} p_2^{9}$$

$$L = ((1-p)^2)^{10} \cdot (2p(1-p))^{181} \cdot (p^2)^9 \to max$$

$$\ln L = 20 \ln(1-p) + 181 \ln(2p - 2p^2) + 18 \ln p$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{-20}{1-p} + \frac{(2-4p) \cdot 181}{2p - 2p^2} + \frac{18}{p} = 0 \Rightarrow p = \frac{199}{400} - \text{т. max}$$

$$\hat{p} = \frac{199}{400} \quad (\text{ОМПГ})$$

$$\hat{\Delta} = \sum \frac{(m_i - np_i(\hat{p}))^2}{np_i(\hat{p})} \rightarrow \chi^2(3-1-1) = \chi^2(1)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{\left\{10 - 200\left(1-\frac{199}{400}\right)^2\right\}^2}{200\cdot\left(1-\frac{199}{400}\right)} + \frac{\left\{181 - 200\cdot 2\cdot\frac{199}{400}\cdot\left(1-\frac{199}{400}\right)\right\}^2}{200\cdot 2\cdot\frac{199}{400}\left(1-\frac{199}{400}\right)} +$$

$$+\frac{\left\{9 - 200\cdot\left(\frac{199}{400}\right)^2\right\}^2}{200\cdot\left(\frac{199}{400}\right)^2} \approx 131,2$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{131,2}^{+\infty} q_{\chi^2(1)}(t)\,dt \approx 2\cdot 10^{-30} < \alpha$$

$\alpha = 0,05$

$p\text{-value} < \alpha$ H_0 – уверенно отвергаем!

T7 Проверить гипотезу H_0 о независимости номера партии деталей и размера деталей.

$n = 200$

Номер партии \ Размер	Заниженный	Точный	Завышенный	
1	25	50	25	$\frac{100}{200}$
2	52	41	7	$\frac{100}{200}$
	$\frac{77}{200}$	$\frac{91}{200}$	$\frac{32}{200}$	

$$\Delta = \sum \frac{(n_{ij} - n p_j \cdot q_i)^2}{n p_j \cdot q_i} \rightsquigarrow \chi^2((3-1)(2-1)) = \chi^2(2)$$

$$\Delta = \frac{\left(25 - 200\cdot\frac{100}{200}\cdot\frac{77}{200}\right)^2}{200\cdot\frac{100}{200}\cdot\frac{77}{200}} + \ldots = 20,479$$

$$p\text{-value} = \int_{20,479}^{+\infty} q_{\chi^2(2)}(t)\,dt \approx 0 < \alpha$$

$\alpha = 0,05$ $\Big\}$ $p\text{-value} < \alpha$

H_0 – уверенно отвергаем!

Т-8 Можно ли считать оба потока однородными?

H_0 — все потоки однородны. $n = 600$

Потоки \ Оценки	„2"	„3"	„4"	„5"	
1	33	43	80	144	300
2	39	35	72	154	300
	$\frac{72}{600}$	$\frac{78}{600}$	$\frac{152}{600}$	$\frac{298}{600}$	

$\Rightarrow n = 600$

$$\tilde{\Delta}_1 = \frac{\left(33 - 300 \cdot \frac{72}{600}\right)^2}{300 \cdot \frac{72}{600}} + \ldots = 1{,}04$$

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{\left(39 - 300 \cdot \frac{72}{600}\right)^2}{300 \cdot \frac{72}{600}} + \ldots \approx 1{,}04$$

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{2} \tilde{\Delta}_i = 1{,}04 + 1{,}04 = 2{,}08$$

$$\tilde{\Delta} \rightsquigarrow \chi^2((k-1)(m-1)) = \chi^2((4-1)(2-1)) = \chi^2(3)$$

$$p\text{-value} = \int_{2{,}08}^{+\infty} q_{\chi^2(3)}(t)\, dt = 0{,}56$$

Нет оснований отвергнуть H_0.

Т-9 а) Проверить гипотезу H_0 о согласии данных с законом равномерного распределения с помощью критерия χ^2 (Пирсона) и с помощью критерия Колмогорова.

а) A_i — в качестве десятой доли получим цифру i

Пирсон

A_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	5	8	6	12	14	18	11	6	13	7

$\xi \sim R(0;9) \quad p_i = \frac{1}{9-0+1} = \frac{1}{10} \quad ; n = 100$

np_i: $\frac{100}{10}$ | $\frac{100}{10}$ | … | $\frac{100}{10}$

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{\left(5 - \frac{100}{10}\right)^2}{\frac{100}{10}} + \ldots = 15,4$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0)$$

$$\Delta \to \chi^2(10-1) = \chi^2(9)$$

$$p\text{-value} = \int_{15,87}^{+\infty} q_{\chi^2(9)}(t)\,dt \approx 0,07$$

Нет оснований отвергнуть H_0.

<u>Колмогоров</u>

$H_0: \xi \sim R(0;9)$

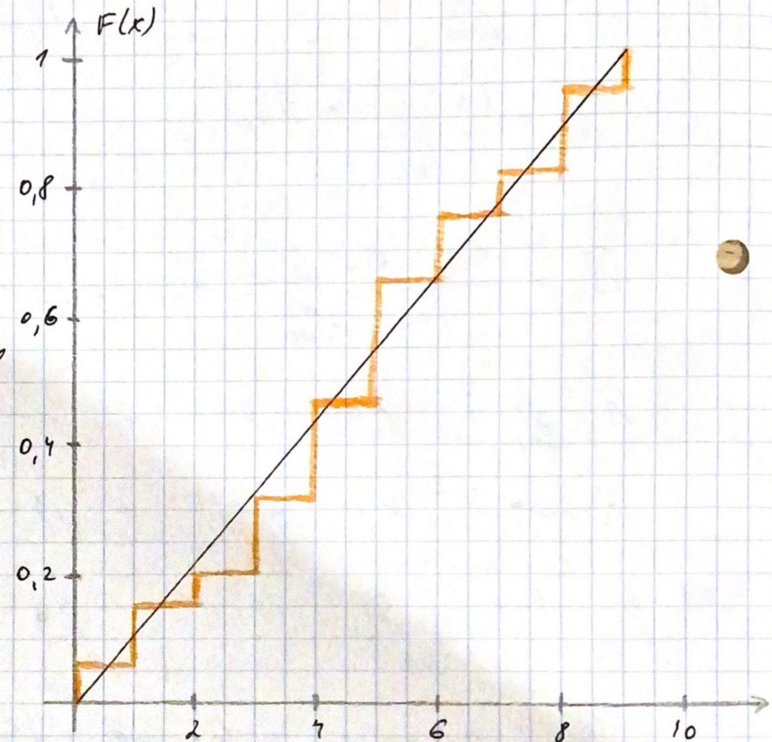
$H_1: \overline{H_0}$

$\vec{X}_n = (0; 1; 2; \ldots; 9)$

$\tilde{F}_n(x) = \frac{m(x)}{n}$

$m(x)$ – число элементов выборки $\vec{X}_n < x$

$\tilde{\Delta} = 1,43$ (из python)



~~$\Delta = \max(\max(|\tilde{F}_n(x) - F(x)|$~~

$$\Delta = \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\max\left(|\tilde{F}_n(x_i - 0) - F(x_i)|, |\tilde{F}_n(x_i + 0) - F(x_i)| \right) \right)$$

$$\Delta \sim K(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot (-1)^k \cdot e^{-2k^2x^2} \quad (0; +\infty)$$

$$p\text{-value} = \int_{1,43}^{\infty} k(x)\,dx = 0,03 < \alpha \quad (\alpha = 0,05)$$

H_0 отвергаем.

<u>Сравнение:</u> Критерий Колмогорова установил отклонение гипотезы в сравнение с критерием Пирсона, т.е. его для нашей задачи можно считать более строгим.

b) Проверить гипотезу H_0 о согласии данных с з-ном нормального расп-ия с помощью критерия χ^2 (оценки неизв. параметров определить численно максимиз. ОМПГ) и с помощью критерия Колмогорова (распред. критерия определить бутстрапом). Сравнить рез-ты.

$H_0: \xi \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$

$H_1: \overline{H_0}$

$\vec{x}_n$	A_i	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$
	m_i	5	8	6	12	14	18	11	6	13	7

$n = \sum m_i = 100$

$$p(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right)$$

$$p_1(x) = \int_0^1 \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right) dx =$$

$\vdots$

$p_{10}(x) = \ldots$

$$L(\vec{\theta}) = (p_1(\vec{\theta}))^5 \cdot (p_2(\vec{\theta}))^8 \cdot \ldots \cdot (p_{10}(\vec{\theta}))^7 \to \max$$

Из максимизации L получим:

$\theta_1 = 5{,}27 \qquad \theta_2 = 2{,}505$

$$\Delta = \sum_{i=0}^{9} \frac{(m_i - np_i(\vec{\theta}))^2}{np_i(\vec{\theta})} = 10{,}8 \qquad \Delta \sim \chi^2(k-1-s) = \chi^2(9)$$

$$p\text{-value} = \int_{10,8}^{+\infty} q_{\chi^2(9)}(t)\,dt = 0{,}29 > \alpha \qquad \alpha = 0{,}05$$

Нет оснований отвергнуть H_0.

<u>Колмогоров</u> (в python)

$\hat{\Delta} = 2{,}76$

$p\text{-value} = 0{,}12 < \alpha$ $\Big|$ $\Rightarrow$ Нет оснований отвергнуть H_0.

Оба критерия показали, что нет оснований отвергнуть H_0.