Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт

Численные методы

Отчёт по лабораторной работе Приближение табличных функций №2.1

Работу выполнил:
Д.В. Литовченко
Группа:
5030102/30001
Преподаватель:
А.В. Музалевский

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Формулировка и формализация задачи

Выбирается интервал непрерывности. На этом интервале, по заданному количеству точек и заданной функции, программно получается Чебышёвская и Равномерная сетки и соответствующие им сеточные функции..
Необходимо запрограммировать вычисление значений интерполяционного полинома в форме Лагранжа для приближения функций в заданных точках и провести исследования ошибки интерполяции.

Формализация задачи

Дана функция:

$$f(x) = xln(x+1)$$

Дата функции:

$$f(x) = |x|$$

Получаются пары

$$[x_h, y_h] = nodes(a, b, n, f)$$

где x_h — сетка, y_h — сеточная функция, a, b — границы интервала интегрирования, n — количество точек.

$[x_h, y_h]$ есть набор точек $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Задача – найти такой полином $P(x)$, который проходит через заданную систему точек $P(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1. Алгоритм

Задана табличная функция: $(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n$ Построим интерполяционный полином $P_n(x) : P_n(x_i) = y_i$. Будем искать $P_n(x)$ в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Phi_i(x)$$

$$\Phi_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Далее строится следующий полином:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Который и будет искомым интерполяционным полиномом.

2.2. Условия применимости

Все точки сетки x_h должны быть различны. Если это условие выполнено, то возможно построить полином степени $m = n - 1$.

3. Предварительный анализ задачи

Как было уже сказано выше, интерполяционный полином будет точно существовать, если сетка не будет содержать одинаковых элементов.
Кратко опишем идею, на которой основано построение рассматриваемого полинома.

Для начала берутся значения $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ из сетки, для одного случая равномерной, для другого — Чебышевской. Далее находим

$$\Phi_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad \text{—}i\text{-й базисный полином Лагранжа.}$$

Производим суммирование по всем $i = 0, \dots, n$, используя полученное значение y_i из сетки.

Чтобы выбрать отрезок, взглянем на график $f(x)$.

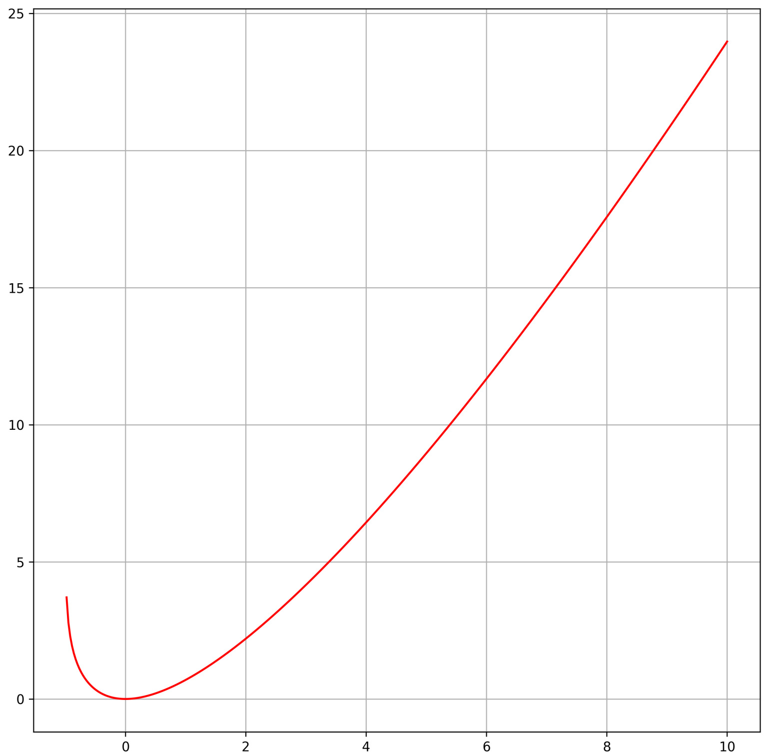

Рисунок 3.1. График функции $f(x)$

Рассматриваемая функция определена для $x > -1$. Поэтому при исследовании функции выберем в качестве интервала $(-0.5, 0.5)$.

Чебышёвская сетка и её функция будут задаваться соотношениями:

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n}\right), \quad i = 0, \dots, n-1$$

— для отрезка $[-1, 1]$ (в качестве точек сетки взяты корни полинома Чебышёва).

$$x_i = \frac{b-a}{2} t_i + \frac{a+b}{2}$$

— для отрезка $[a, b]$.

Равномерная сетка и её функция будут задаваться соотношением:

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{n} i$$

4. Тестовый пример

Получим вручную кубический интерполяционный полином. Возьмём тот же промежуток и функцию.

Выбранные узлы интерполяции

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = \ln 2, \quad y_2 = 2\ln 3, \quad y_3 = 3\ln 4.$$

Базисные многочлены

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6}, \\
L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}, \\
L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{-2}, \\
L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}.
\end{aligned}$$

Интерполяционный полином

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) \\
&= \ln 2 \cdot \frac{x(x-2)(x-3)}{2} + 2\ln 3 \cdot \frac{x(x-1)(x-3)}{-2} + 3\ln 4 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{6}.
\end{aligned}$$

Полином в канонической форме

$$P_3(x) = \left(\frac{\ln 2}{2} - \ln 3 + \frac{\ln 4}{2}\right) x^3 + \left(-\frac{5\ln 2}{2} + 4\ln 3 - \frac{3\ln 4}{2}\right) x^2 + (3\ln 2 - 3\ln 3 + \ln 4)\, x.$$

5. Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода

Будем проводить следующее исследование:

5.1. Визуальное сравнение полученного полинома и исходной функции.

Для этого возьмём отрезок $[-0.5, 0.5]$. Число узлов же будет равно 6-ти.

5.2. Построение графика максимальной ошибки

Здесь будет строиться график зависимости максимальной по модулю ошибки от числа узлов. Будем считать, что наибольшие ошибки достигаются в серединах точками между узлами. Поэтому, для каждого значения n будем брать максимумы по этим точкам. Будем пробегать по значениям $n = 1, 58$

6. Модульная структура программы

```
void un_grid(otr X, int n, double *valx, double *valy, double (*f)(double))
```

Функция, создающая равномерную сетку и сеточную функцию. На вход подаётся: - X — границы промежутка, - n — количество узлов, - valx — указатель на массив для значений сетки, - valy — указатель на массив для значений сеточной функции. - f — указатель на функцию, для которой будет сформирован массив для значений сеточной функции.

```
void ch_grid(otr X, int n, double *CHvalx, double *CHvaly, double (*f)(double))
```

Функция, создающая Чебышевскую сетку и сеточную функцию. На вход подаётся: - X — границы промежутка, - n — количество узлов, - CHvalx — указатель на массив для значений сетки, - CHvaly — указатель на массив для значений сеточной функции. - f — указатель на функцию, для которой будет сформирован массив для значений сеточной функции.

```
double Lagrange( int n, double *valx, double *valy, double x)
```

Функция, вычисляющая значение интерполяционного полинома в точке. На вход подаётся: - n — количество узлов, - valx — указатель на массив значений сетки, - valy — указатель на массив значений сеточной функции, - x — точка, в которой ищется значение.

7. Численный анализ решения задачи

На одном рисунке построим графики полученного полинома и функции $f(x)$ (Рис.3).

При взятом масштабе обе функции накладываются друг на друга на выбранном отрезке, что говорит о том, что величина ошибки интерполяции по крайней мере меньше порядка 10^{-3}. Построим график зависимости условно наибольшей ошибки от количества узлов:

- По оси абсцисс отложим значения, характеризующие количество узлов.
- По оси ординат — величину максимальной ошибки по модулю.

Ось ординат отложим в логарифмическом масштабе. Также построим значения для функции $f_2(x) = |x|$.

При увеличении числа узлов точность интерполяции для Чебышевской сетки возрастает. Для равномерной сетки точность возрастает до определённого момента $(n = 26)$, а затем ошибка увеличивается. Это объясняется тем, что степень полинома становится слишком высокой, и решения становятся неустойчивыми и чувствительными к погрешностям округления.

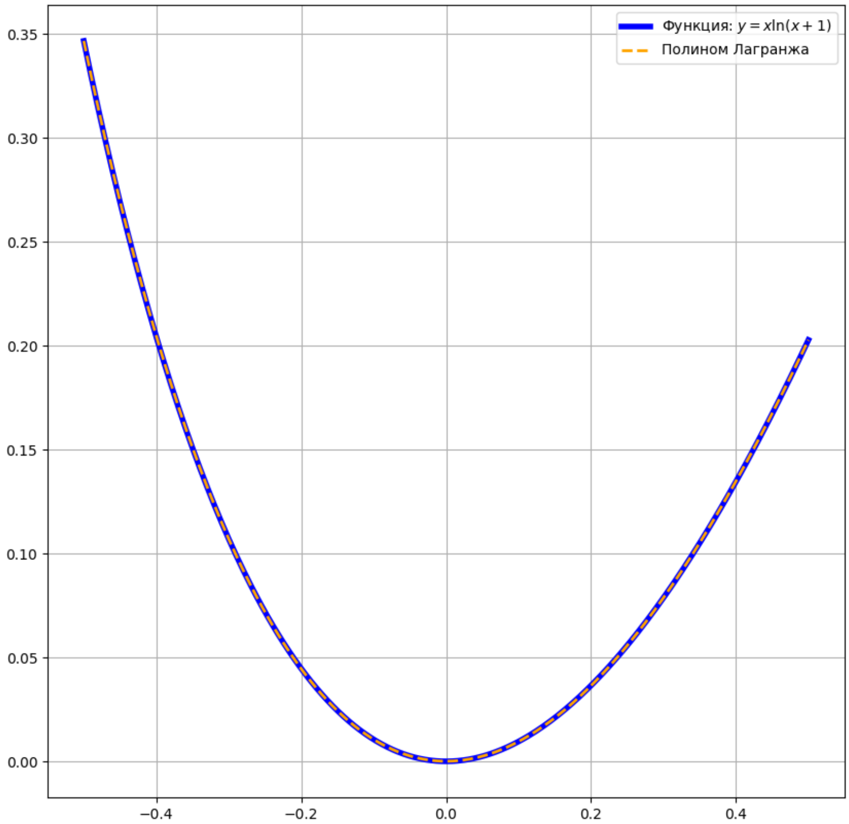

Рисунок 7.1. Визуальное сравнение графиков исходной функции и интерполяционного полинома.

8. Выводы

1. Полином Лагранжа гарантирует совпадение с заданными значениями функции в выбранных узлах интерполяции. Но вызывает сильно отклонение при незначительных изменениях в значениях функции.

2. При увеличении числа узлов вычислительная сложность возрастает, что делает метод менее практичным для обработки больших объемов данных.

3. Равномерное распределение узлов может привести к нестабильности интерполяции, вызывая значительные отклонения на краях интервала.

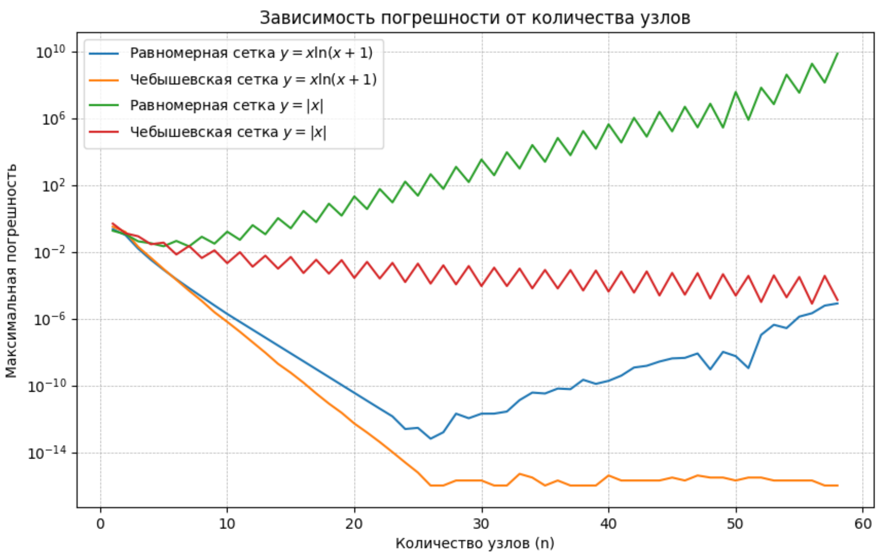

Рисунок 7.2. Рис. 3: Зависимость максимальной ошибки от количества узлов в сетках.