Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт

Численные методы

Отчёт по лабораторной работе:
Приближение табличных функций сплайнами №2.2

Работу выполнил:
Д.В. Литовченко
Группа:
5030102/30001
Преподаватель:
А.В. Музалевский

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Формулировка и формализация задачи

Задана функция на интервале непрерывности $[a, b]$. Необходимо создать равномерную сетку на этом интервале и вычислить значения кубического сплайна Эрмита, который будет интерполировать заданную функцию и сохранять ее форму. При этом производные функции для сплайна вычисляются с помощью разделенных разностей.

Формализация задачи

Даны функции $f(x)$, определенные на интервале $[a, b]$:

$$f(x) = x \ln(x + 1)$$

$$f(x) = |x|.$$

На основе этих функций необходимо создать равномерную сетку и интерполировать ее с использованием кубического сплайна Эрмита.

1. Генерация равномерной сетки:

Для выбранного интервала $[a, b]$ и количества точек n необходимо создать равномерную сетку x_h. Точки сетки равномерно распределяются по интервалу, где:

$$x_i = a + i \cdot \frac{b - a}{n - 1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1$$

2. Вычисление значений функции y_h:

Для каждой точки сетки x_i вычисляются соответствующие значения функции y_h:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Таким образом, получаем пары (x_i, y_i), где x_i — точки сетки, а y_i — значения функции в этих точках.

3. Вычисление коэффициентов кубического сплайна Эрмита:

Для вычисления коэффициентов кубического сплайна Эрмита необходимо использовать разделенные разности для оценки производных функции $f(x)$ в точках сетки x_i. Это позволит получить полином, который будет интерполировать заданную функцию с учетом ее производных.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1. Алгоритм

Задана табличная функция $(x_i, y_i), i = 0, \ldots, n$.

Алгоритм вычисления кубического сплайна Эрмита, сохраняющего форму, состоит из следующих шагов:

1. Вычисление производных функции $f(x)$ через разделённые разности:

Пусть δ_i - разделенная разность первого порядка $[y_i, y_{i+1}]$, а d_i - приближённое значение производной y'_i. Значения d_i определяются следующим образом:

- если δ_{i-1} и δ_i имеют противоположные знаки или одно из значений равно 0, то $d_i = 0$

- если δ_{i-1} и δ_i имеют одинаковые знаки и длины элементарных промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$ равны, то

$$\frac{1}{d_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta_{i-1}} + \frac{1}{\delta_i}\right)$$

2. Построение полинома Эрмита:

Интерполяционный полином Эрмита для данного набора точек и производных строится с использованием следующей формулы:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(y_j \phi_j(x) + y'_j \psi_j(x)\right)$$

где:

$$\psi_j(x) = (x - x_j) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)^2$$

$$\phi_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}\right) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)^2$$

Этот полином $H_{2n+1}(x)$ и будет искомым интерполяционным полиномом Эрмита.

3. Вычисление значений сплайна в точках:

После нахождения полинома Эрмита можно вычислять значения сплайна $H_{2n+1}(x)$ в любых точках x на интервале $[a, b]$.

2.2. Условия применимости метода

1. Все точки сетки x_h должны быть различны. Это условие необходимо для того, чтобы избежать деления на ноль при вычислении производных и при построении полинома Эрмита.

2. Функция, для которой строится интерполяционный сплайн, должна быть достаточно гладкой, чтобы производные существовали в каждой точке сетки и могли быть вычислены с помощью разделённых разностей.

3. Предварительный анализ задачи

Как было уже сказано выше, интерполяционный полином существует и корректно строится, если сетка не содержит одинаковых элементов, т.е. если все значения x_i различны.

3.1. Краткое описание построения полинома

Основная идея построения полинома заключается в том, что для каждого отрезка между точками сетки строится интерполяционный полином Эрмита, который проходит через заданные узлы. Помимо этого в формуле полинома Эрмита также учитывается направление графика с помощью первой производной.

Чтобы выбрать отрезок, взглянем на график $f(x)$.

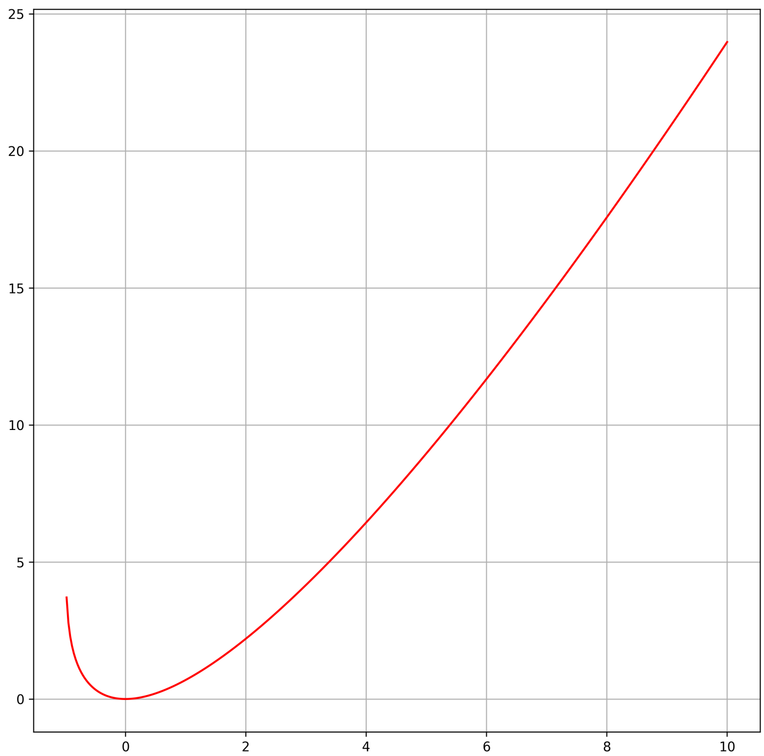

Рисунок 3.1. График функции $f(x)$

Рассматриваемая функция определена для $x > -1$. Поэтому при исследовании функции выберем в качестве интервала $(-0.5, 0.5)$.

Равномерная сетка генерируется путем равномерного распределения точек на интервале $[a, b]$, где n — количество точек. Точки вычисляются по формуле:

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{n} i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

4. Тестовый пример

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = x \ln(x+1)$$

на отрезке $[a, b] = [-0.5, 0.5]$. Выберем 6 узлов и построим равномерную сетку.

4.1. Построение сетки

Равномерная сетка вычисляется по формуле:

$$x_i = a + \frac{(b-a)}{n-1} i, \quad i = 0, \ldots, n-1$$

Для $n = 6$, получаем узлы:

$$x_0 = -0.5, \quad x_1 = -0.3, \quad x_2 = -0.1, \quad x_3 = 0.1, \quad x_4 = 0.3, \quad x_5 = 0.5.$$

Значения функции $f(x)$ в узлах:

$$y_0 = f(-0.5) \approx -0.2027, \quad y_1 = f(-0.3) \approx -0.0890, \quad y_2 = f(-0.1) \approx -0.0095,$$

$$y_3 = f(0.1) \approx 0.0095, \quad y_4 = f(0.3) \approx 0.0890, \quad y_5 = f(0.5) \approx 0.2027.$$

4.2. Вычисление производных по методу гармонического среднего

Производные вычисляются по формуле гармонического среднего:

$$f'(x_j) = \frac{2f(x_{j+1})f(x_{j-1})}{f(x_{j+1}) + f(x_{j-1})}, \quad j = 1, \ldots, n-2.$$

Для граничных точек используем конечные разности:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f'(x_5) = \frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4}.$$

Полученные значения:

$$y'_0 \approx 0.571, \quad y'_1 \approx 0.531, \quad y'_2 \approx 0.470,$$

$$y'_3 \approx 0.470, \quad y'_4 \approx 0.531, \quad y'_5 \approx 0.571.$$

4.3. Вычисление кубического сплайна Эрмита

Интерполяционный полином Эрмита строится по формуле:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(y_j \phi_j(x) + y'_j \psi_j(x) \right),$$

где базисные функции определяются как:

$$\psi_j(x) = (x - x_j) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2,$$

$$\phi_j(x) = \left(1 - 2(x - x_j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} \right) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)^2.$$

Подставляя вычисленные значения y_j и y'_j, получаем итоговый полином $H_{2n+1}(x)$, который аппроксимирует функцию $f(x)$ на заданном интервале.

4.4. Расчет для первого отрезка

Для первого интервала $[-0.5, -0.3]$:

$$\phi_0(x) = \left(1 - 2(x+0.5)\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{-0.5 - x_k}\right)\prod_{i=1}^{5}\left(\frac{x - x_i}{-0.5 - x_i}\right)^2$$

Подставляя значения узлов:

$$x_0 = -0.5, \quad x_1 = -0.3, \quad x_2 = -0.1, \quad x_3 = 0.1, \quad x_4 = 0.3, \quad x_5 = 0.5$$

Находим сумму:

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{-0.5 - x_k} = \frac{1}{-0.2} + \frac{1}{-0.4} + \frac{1}{-0.6} + \frac{1}{-0.8} + \frac{1}{-1.0}$$

$$= -5.0 - 2.5 - 1.6667 - 1.25 - 1.0 = -11.4167$$

Теперь подставляем в $\phi_0(x)$:

$$\phi_0(x) = (1 + 2(x+0.5)\cdot 11.4167)\prod_{i=1}^{5}\left(\frac{x - x_i}{-0.5 - x_i}\right)^2$$

$$\phi_0(x) = (1 + 22.8333(x+0.5))\prod_{i=1}^{5}\left(\frac{x - x_i}{-0.5 - x_i}\right)^2$$

Вычисление $\psi_0(x)$

$$\psi_0(x) = (x+0.5)\prod_{i=1}^{5}\left(\frac{x - x_i}{-0.5 - x_i}\right)^2$$

Вычисление $\phi_1(x)$

$$\phi_1(x) = \left(1 - 2(x+0.3)\sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{5}\frac{1}{-0.3 - x_k}\right)\cdot\prod_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{5}\left(\frac{x - x_i}{-0.3 - x_i}\right)^2$$

Рассчитаем сумму:

$$\sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{5}\frac{1}{-0.3 - x_k} = \frac{1}{-0.3+0.5} + \frac{1}{-0.3+0.1} + \frac{1}{-0.3-0.1} + \frac{1}{-0.3-0.3} + \frac{1}{-0.3-0.5}$$

$$= \frac{1}{0.2} + \frac{1}{-0.2} + \frac{1}{-0.4} + \frac{1}{-0.6} + \frac{1}{-0.8}$$

$$= 5.0 - 5.0 - 2.5 - 1.6667 - 1.25 = -5.4167$$

Подставляем в $\phi_1(x)$:

$$\phi_1(x) = (1 + 2(x+0.3)\cdot 5.4167)\cdot\prod_{\substack{i=0\\i\neq 1}}^{5}\left(\frac{x - x_i}{-0.3 - x_i}\right)^2$$

$$= (1 + 10.8333(x + 0.3)) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^{5} \left(\frac{x - x_i}{-0.3 - x_i} \right)^2$$

$$\psi_1(x) = (x + 0.3) \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^{5} \left(\frac{x - x_i}{-0.3 - x_i} \right)^2$$

4.5. Полином Эрмита для каждого интервала

Для первого интервала $[-0.5, -0.3]$:

$$H_3(x) = 0.3466(1 + 22.8333(x + 0.5)) \prod_{i=1}^{5} \left(\frac{x - x_i}{-0.5 - x_i} \right)^2 - 1.1979(x + 0.5) \prod_{i=1}^{5} \left(\frac{x - x_i}{-0.5 - x_i} \right)^2 + 0.1070\phi_1(x) - 0.6877\psi_1(x)$$

Для интервала $[-0.3, -0.1]$:

$$H_3(x) = 0.1070\phi_1(x) - 0.6877\psi_1(x) + 0.0105\phi_2(x) - 0.0099\psi_2(x)$$

Для интервала $[-0.1, 0.1]$:

$$H_3(x) = 0.0105\phi_2(x) - 0.0099\psi_2(x) + 0.0095\phi_3(x) - 0.0102\psi_3(x)$$

Для интервала $[0.1, 0.3]$:

$$H_3(x) = 0.0095\phi_3(x) - 0.0102\psi_3(x) + 0.0787\phi_4(x) + 0.4441\psi_4(x)$$

Для интервала $[0.3, 0.5]$:

$$H_3(x) = 0.0787\phi_4(x) + 0.4441\psi_4(x) + 0.2027\phi_5(x) + 0.6201\psi_5(x)$$

5. Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода

Будем проводить следующее исследование:

5.1. Визуальное сравнение полученного полинома и исходной функции.

Для этого возьмём отрезок $[-0.5, 0.5]$. Число узлов же будет равно 6-ти.

5.2. Построение графика максимальной ошибки

Здесь будет строиться график зависимости максимальной по модулю ошибки от числа узлов. Будем считать, что наибольшие ошибки достигаются в серединах точками между узлами. Поэтому, для каждого значения n будем брать максимумы по этим точкам. Будем пробегать по значениям $n = 1, 58$

6. Модульная структура программы

```
void un_grid(otr X, int n, double *valx, double *valy, double (*f)(double))
```

Функция, создающая равномерную сетку и сеточную функцию. На вход подаётся: - X — границы промежутка, - n — количество узлов, - valx — указатель на массив для значений сетки, - valy — указатель на массив для значений сеточной функции. - f — указатель на функцию, для которой будет сформирован массив для значений сеточной функции.

```
void derivatives(double *nodes, double *values, double *derivatives, int n)
```

Функция, создающая список производных для функции. На вход подаётся: - nodes — список аргументов в данном промежутке, - values — список значений функций от аргументов, - derivatives — список для записи делителей функций. - n — количество узлов.

```
double hermite(int n, double *xvals, double *yvals, double *dyvals, double x)
```

Функция, вычисляющая значение интерполяционного полинома в точке. На вход подаётся: - n — количество узлов, - xvals — указатель на массив значений сетки, - yvals — указатель на массив значений сеточной функции, - dyvals — список делителей. - x — точка, в которой ищется значение.

7. Численный анализ решения задачи

На одном рисунке построим графики полученного кубического сплайна Эрмита и функции $f(x)$ (Рис.3).

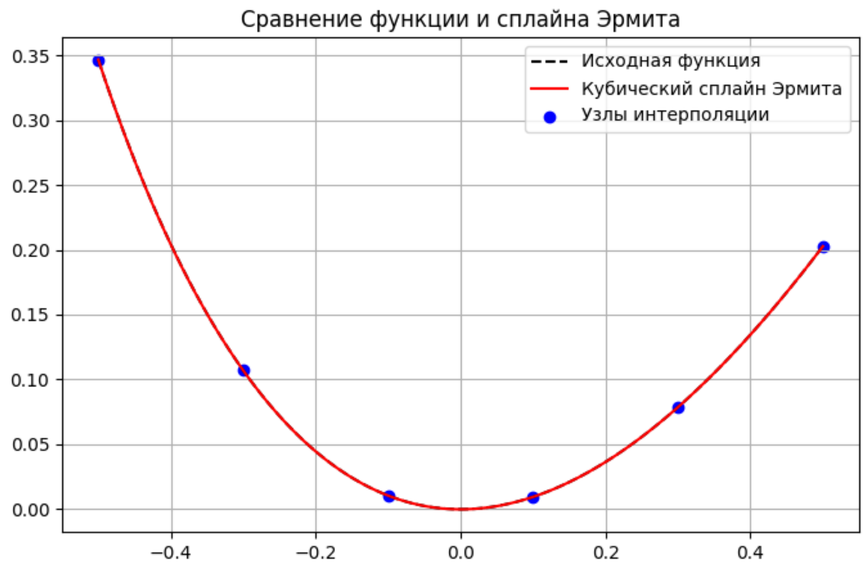

Рисунок 7.1. Визуальное сравнение графиков исходной функции и кубического сплайна.

При взятом масштабе обе функции накладываются друг на друга на выбранном отрезке, что говорит о том, что величина ошибки интерполяции по крайней мере меньше порядка 10^{-3}.

Построим график зависимости условно наибольшей ошибки от количества узлов:

- По оси абсцисс отложим значения, характеризующие количество узлов.
- По оси ординат — величину максимальной ошибки по модулю.

Ось ординат отложим в логарифмическом масштабе. Также построим значения для функции $f_2(x) = |x|$.

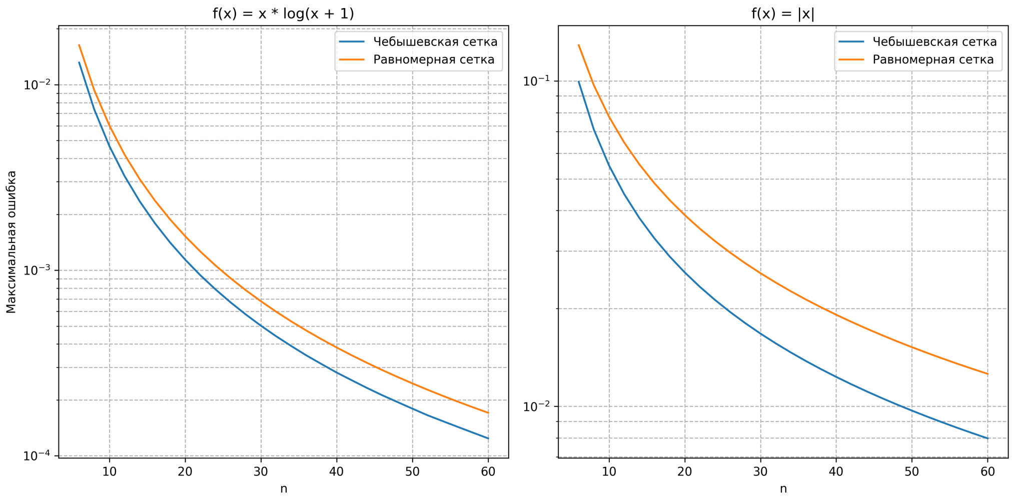

Рисунок 7.2. Рис. 3: Зависимость максимальной ошибки от количества узлов в сетках.

При увеличении числа узлов точность кубического сплайна Эрмита возрастает на равномерной сетке. На чебышевской сетке значение ошибки постоянно. Это связано с распределнием узлов. В середине исследуемого промежутка есть изгиб, который и создаёт максимальную ошибку. При $n = 10$ для чебышевской сеткой $y = xln(x + 1)$ имеет скачок вниз. Это происходит потому, что узел приходиться как раз на точку перегиба, из-за чего ошибка на 1 шаг становиться резко меньше.

Хоть функция $y(x) = |x|$ и является линейной, но её максимальная ошибка всегда остаётся больше, чем у функции $y(x) = xln(x + 1)$. Вероятно, это связано с тем, что функция кубического полинома предусматривает изгиб, который у модуля происходит лишь единожды.

$$S_3^2(x)\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} = H_3(x)$$

8. Выводы

1. Кубический сплайн Эрмита обеспечивает более гладкую интерполяцию по сравнению с полиномами Лагранжа, поскольку учитывает как значения функции, так и её производные в узловых точках.
2. Метод кубического сплайна Эрмита позволяет добиться высокой точности интерполяции, минимизируя рывки и неестественные изгибы, характерные для других методов интерполяции, таких как полином Лагранжа.
3. При увеличении числа узлов кубический сплайн Эрмита сохраняет свою эффективность и точность, однако вычислительная сложность также растет, что может быть проблемой для обработки больших объемов данных.
4. Равномерное распределение узлов в методе Эрмита обычно приводит к хорошим результатам, но в некоторых случаях может быть полезно использовать нерегулярные узлы, чтобы улучшить точность на сложных участках функции.

5. В крайних узлах сплайн Эрмита ведёт себя не так точно, как в промежуточной части. Для расчёта производных в данном методе не обязательно подробно узнавать значения производных в узлах, что раскрывает более широкую возможность применения данного способа интерполяции значений.

6. Чебышевская сетка хуже работает с данным способом интерполяции из-за неравмномерного распределния узлов и принципа поиска производных.