多元函数微分法作业 1

一、　单项选择题

1. 不能使 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ 的解为（　　　）.

(A) $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2$　　　　(B) $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - 5$

(C) $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + e^x + e^y - 5$　　　　(D) $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + e^{x+y} - 5$

答案：D

解析：D 选项，$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - \frac{1}{2}y^2 + e^{x+y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y + e^{x+y}$.

2. 二元函数 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数存在且 $\frac{\partial z}{\partial x} > 0$，$\frac{\partial z}{\partial y} > 0$，则（　　　）.

(A) 当 $\Delta x > 0$ 且 $\Delta y > 0$ 时，$\Delta z < 0$

(B) 当 $\Delta x > 0$ 且 $\Delta y > 0$ 时，$\Delta z > 0$

(C) 当 $\Delta x > 0$ 且 $\Delta y > 0$ 时，$\mathrm{d}z > 0$ 且 $\Delta z > 0$

(D) 当 $\Delta x > 0$ 且 $\Delta y > 0$ 时，$\mathrm{d}z > 0$ 但 Δz 不一定大于零

答案：D

解析：$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\rho)$，$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$. $o(\rho)$ 的符号不能确定，所以选 D.

3. 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的两个偏导数存在，则（　　　）.

(A) $z = f(x, y)$ 在点 P_0 处连续　　　　(B) $z = f(x, y)$ 在点 P_0 处存在全微分

(C) $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 P_0 处连续　　　　(D) 以上都不对

答案：C

解析：A 选项，二元函数连续与偏导数存在没有任何关系.

B 选项：二元函数偏导数连续时一定有全微分.

C 选项：偏导数的思想即为固定一个变量时，函数因变量对另外一个自变量的导数，此时函数是一元函数，对一元函数来说，可导一定连续.

4. 已知函数 $f(x + y, x - y) = x^2 - y^2$，则 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$（　　　）.

(A) $2x - 2y$　　(B) $2x + 2y$　　(C) $x - y$　　(D) $x + y$

答案：D

解析：首先计算出 $f(x,y)$ 的表达式，$f(x+y,x-y)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)\Rightarrow f(x,y)=xy$，所以 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x+y$.

5. 二元函数在 (x_0,y_0) 的极限存在是函数在该点连续的（　　）.

(A) 充分条件　(B) 必要条件　(C) 充要条件　(D) 都不是

答案：B

解析：根据连续的定义可知，当某点处极限与函数值相同时函数在该点连续。所以连续一定有极限，但有极限不一定连续.

6. 设 $u=f(x+y,xz)$ 有二阶偏导数，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$（　　）.

(A) $f_2'+xf_{11}''+zf_{12}''+xf_{12}''$　(B) $f_2'+xf_{21}''+xzf_{22}''$

(C) $xf_{21}''+xzf_{22}''$　(D) $xf_{12}''+f_2'+xzf_{22}''$

答案：D

解析：$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+zf_2'$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f_1'+zf_2')=xf_{12}''+f_2'+xzf_{22}''$.

7. 函数 $y=\ln(-x-y)$ 的定义域是（　　）.

(A) $\{(x,y)|x<0,y<0\}$　(B) $\{(x,y)|x+y\leqslant 0\}$

(C) $\{(x,y)|x+y<0\}$　(D) $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$

答案：C

解析：ln 要求其参数大于零.

8. 偏导数存在是全微分存在的（　　）条件.

(A) 充分　(B) 必要　(C) 充分必要　(D) 以上皆不对

答案：B

解析：见课本 73 页定理 1.

9. 二元函数的两个偏导数存在是该函数连续的（　　）条件.

(A) 充分　(B) 必要　(C) 充分必要　(D) 以上皆不是

答案：D

解析：二元函数的偏导数存在与连续没有关系，见课本 68-69 页.

二、　填空题

1. 函数 $z=\arcsin\frac{x}{2}+\arcsin\frac{y}{3}$ 的定义域为______.
   答案：$\underline{\{(x,y)|-2\leqslant x\leqslant 2,-3\leqslant y\leqslant 3\}}$
   解析：$\arcsin x$ 的定义是域是 $[-1,1]$.

2. $\lim\limits_{x\to 0,y\to 2}\frac{\sin xy}{x}=$______.
   答案：$\underline{2}$
   解析：$\lim\limits_{x\to 0,y\to 2}\frac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{x\to 0,y\to 2}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to 2}y=2.$

3. $\lim\limits_{x\to 0,y\to 1}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=$______.
   答案：$\underline{1}$
   解析：直接代入.

4. $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$______.
   答案：$\underline{-\frac{1}{4}}$
   解析：$\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{2-\sqrt{u+4}}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{(2-\sqrt{u+4})(2+\sqrt{u+4})}{u(2+\sqrt{u+4})}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{-u}{u(2+\sqrt{u+4})}=-\frac{1}{4}.$

5. 函数 $f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为__________________.
   答案：$\underline{\{(x,y)|0<x^2+y^2<1\text{且}y^2\leqslant 4x\}}$
   解析：有三个条件需要考虑，根号下表达式应大于等于零，自然对数函数的参数应大于零，分母不能为零。

6. 已知 $z=x^{y^2}$，则 $\mathrm{d}z=$__________________.
   答案：$\underline{x^{y^2-1}y^2\mathrm{d}x+2x^{y^2}y\ln x\mathrm{d}y}$
   解析：求出 z 对 x,y 的偏导数后按全微分公式写出答案.

三、　计算题

1. 求 $z=x^3y-xy^3$ 的一阶偏导数.
   解：$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$.

2. 求 $z=\sqrt{\ln(xy)}$ 的一阶偏导数.
   解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$.

3. 求 $u=x^{\frac{y}{z}}$ 的一阶偏导数.
   解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

4. 求 $u=\arctan(x-y)^z$ 的一阶偏导数.
   解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

5. 求 $z=xy+\frac{x}{y}$ 的全微分.
   解：$\mathrm{d}z=(y+\frac{1}{y})\mathrm{d}x+(x-\frac{x}{y^2})\mathrm{d}y$.

6. 求 $w=x^{yz}$ 的全微分.

解：$\mathrm{d}w=yzx^{yz-1}\mathrm{d}x+x^{yz}z\ln x\mathrm{d}y+x^{yz}y\ln x\mathrm{d}z$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解：因为 $0\leqslant\left|\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\right|\leqslant\left|\left(\frac{xy}{2xy}\right)^{x^2}\right|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$，且 $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，所以根据夹逼准则，有 $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$.

8. 设 $f(x,y)=e^{-y}\cdot\sin(2x+y)$，求 $f_x(\frac{\pi}{4},0)$ 和 $f_y(\frac{\pi}{4},0)$.

解：$f_x(x,y)=2e^{-y}\cdot\cos(2x+y)$，$f_y(x,y)=-e^{-y}\cdot\sin(2x+y)+e^{-y}\cdot\cos(2x+y)$，代入得 $f_x(\frac{\pi}{4},0)=0$，$f_y(\frac{\pi}{4},0)=-1$.

9. 求 $z=x^4+y^4-4x^2y^2$ 的二阶偏导数.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$，$\frac{2x}{2y^2}=12y^2-8x^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy$.

10. 求 $z=y^x$ 的二阶偏导数.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\cdot\ln y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot y^{x-1}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x(\ln y)^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(x\ln y+1)y^{x-1}$.

11. 求 $z=f(x,\frac{x}{y})$ 的二阶偏导数.

解：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2'\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2'\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f_2'}{\partial x}=f_{11}''+\frac{1}{y}f_{12}''+\frac{1}{y}\left(f_{21}''+\frac{1}{y}f_{22}''\right)=f_{11}''+\frac{2}{y}f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}''\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial y}+\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot f_2'+\frac{1}{y}\frac{\partial f_2'}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y'}f_{22}''\right)=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{y^2}f_2'\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}f_2'\right)=-x\left(-\frac{2}{y^3}f_2'+\frac{1}{y^2}\frac{\partial f_2'}{\partial y}\right)=\frac{2x}{y^3}f_2'-\frac{x}{y^2}\left(-\frac{x}{y^2}f_{22}''\right)=\frac{x^2}{y^4}f_{22}''+\frac{2x}{y^3}f_2'
\end{aligned}
$$

12. 设 $z=\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$.

解：

$$
\mathrm{d}z=\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y
$$

$$
\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y
$$