

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Djillali LIABES
Faculté des Sciences Exactes
- SIDI BEL-ABBES -

B. P. 89 SBA 22000 - ALGERIA -

Tel/Fax 048 54 06 11

MEMOIRE

Présenté par

Chamsa-din Halidou Amadou

Pour obtenir le diplôme de

MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Équations aux Dérivées Partielles et Applications

Analyse comparative de l'étude de l'équation de convection-diffusion de la chaleur par deux méthodes : les différences finies et les caractéristiques

Mémoire soutenu le 28 juin 2020,

devant le Jury composé de

Président : Prof Abbès Benaïssa,
Promotrice : Dr.Amel RAHMOUN,
Examinatrices : -Prof Baghli-Bendimerad Selma,
-Dr. Naïma Louhibi Benyamina,

Prof. à l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel-Ab
M.C.(B) à l'Université Abou Bekr Belkaid de Tle
prof. à l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel-Ab
M.C.A à l'Université Djillali Liabes de Sidi Bel-A

Dédicaces

Louanges à ALLAH qui est le premier et le dernier, le Tout Puissant qui sous sa permission j'ai pu réaliser ce modeste travail.

Prière et Salut sur Notre Cher & Prophète " Mouhammad " sur sa famille et ses fidèles compagnons.

Je dédie ce travail :

- A toute ma famille.
- A tous mes amis qui n'ont pas eu la chance de continuer leurs études.

Remerciements

Mes remerciements vont à l'endroit de ma promotrice Mme Dr *Amel RAHMOUN* pour sa patience Dieu sait qu'elle en a eu besoin, son suivi et ses conseils durant l'évolution de ce travail.

Je remercie de tout cœur le *Prof. Abbès Benaïssa* , pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté d'être le président du jury de ce mémoire.

Que la *Prof. Selma Baghli-Bendimerad* trouve ici l'expression de mes remerciements pour l'intérêt qu'elle a porté à ce travail. Je la remercie de tout cœur pour avoir accepté d'être examinatrice de mon mémoire.

Je remercie aussi le Dr *Naïma Louhibi Benyamina* pour l'honneur qu'elle m'a fait d'avoir accepté d'être examinatrice de mon mémoire et de participer au jury.

Mes remerciements vont aussi à tous mes enseignants de tout les niveaux et particulièrement à ceux de l'université *DJILLALI LIABES*.

Abstract

The aim of this master's project is to make a comparative study of the convection-diffusion problem first, then that of pure convection between numerical methods, namely finite differences (FD) and the characteristic method (CM) and the solution exact.

To do this we have discretized our problem by the two numerical methods to then set up three Matlab programs mentioned in chapitre 4.

The Matlab 1 program the results prove the limits of the FD method on the simplified problem of convection-diffusion.

The Matlab 2 program the solution by the DF converges more quickly to the exact solution by the characteristics method when the condition $0 < Nc < 1$ is not respected. The third program when at present the method of characteristics under a beautiful day when the condition $i < Nc$ is respected compared to the DF method.

Résumé

Le but du présent mémoire de master est de faire une étude comparative du problème de convection-diffusion dans un premier temps, puis celui de la convection pure entre les méthodes numériques à savoir les différences finies (*DF*) et la méthode des caractéristiques et la solution exacte.

Pour ce faire nous avons discrétisé notre problème par les deux méthodes numériques pour en suite mettre en place trois programmes Matlab cités au chapitre 4.

Pour le programme Matlab 1 les résultats prouvent les limites de la méthode *DF* sur le problème simplifié de convection-diffusion.

Pour le programme Matlab 2 la solution par les *DF* converge plus rapidement vers la solution exacte que la solution par la méthode des caractéristiques lorsque la condition $0 < Nc < 1$ n'est pas respectée. Le programme Matlab 3 quant à lui présente la méthode des caractéristiques sous un beau jour lorsque la condition $i < Nc$ est respectée par rapport à la méthode *DF*.

Table des matières

1	Présentation du problème	5
1.1	Définitions	5
1.1.1	La convection	5
1.1.2	La diffusion	6
1.1.3	L'équation de convection-diffusion	6
1.2	Signification physique	6
1.3	Influence des paramètres sur le comportement de la solution	7
1.3.1	Influence de a	7
1.3.2	Influence de U et K	8
1.3.3	Nombre de Peclet	8
2	Méthode des différences finies	11
2.1	Présentation de la méthode des différences finies	11
2.1.1	Solution analytique du problème	11
2.2	Discrétisation par les différences finies	13
2.2.1	Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée par les différences finies (problème des couches limites)	16
2.3	Conclusion	17
3	Méthode des caractéristiques	19
3.1	Présentation de la méthode des caractéristiques	19
3.1.1	Discrétisation de l'équation de convection pure	20
3.1.2	Problème de convection-diffusion	22
3.2	Résolution numérique de l'équation de convection-diffusion par la méthode des caractéristiques	23
3.2.1	Le cas de la convection pure (cas conservatif)	23
3.2.2	Extension aux problèmes de convection-diffusion	29
3.3	Conclusion	29
4	Simulations numériques	31
4.1	Programme Matlab 1	31
4.2	Application numérique sur l'équation de convection pure	32
4.2.1	Discrétisation par les différences finies	32
4.2.2	Solution exacte	37
4.2.3	Discrétisation par les caractéristiques	44

Introduction

L'histoire de l'homme est parsemée de défis de tout genre qui devaient être relevés. Cela a conduit tout au long des siècles à l'élaboration de solutions toutes plus originales les unes que les autres.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) ainsi que les équations différentielles ordinaires (EDO), bien qu'élaborées au cours de l'histoire un peu plus récente de l'humanité et dont nous sommes loin de tout connaître à leurs sujets, font partis de ces innovations. Elles sont de nos jours au cœur de nombreux problèmes ouverts (l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes par exemple et bien d'autres encore).

Une équation aux dérivées partielles d'ordre $k \in \mathbb{N}$ est une équation mathématique qui définit une relation entre une fonction $U(x)$ où $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^n$, la variable x , et les dérivées partielles de U par rapport à x . Cette équation est ainsi de la forme :

$$F(x, U(x), \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k U}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n}) = 0. \quad (1)$$

Où $F(x, \partial^\alpha U)_{|\alpha| \leq n} = 0$ et $n \in \mathbb{N}$

L'ordre de l'équation aux dérivées partielles est l'ordre le plus élevé des dérivées dans l'équation.

Une solution de l'EDP(1) est une fonction $k(x)$ dont ces dérivées partielles apparaissant dans l'équation existe sur son domaine, qui vérifie l'équation (1).

On a entre autre (voir [5]) :

Les EDP d'ordre 1 qui sont formées par la variable x , la fonction inconnue U et de ces dérivées premières sont données par :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}) = 0. \quad (2)$$

On dit que (2) est **quasi-linéaire** , si elle est sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, U) \frac{\partial U}{\partial x_i} = b(x, U),$$

où a_i : sont des coefficients,
et b : est une fonction donnée.

On dit que (2) est **semi linéaire** si elle est sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} = b(x, U).$$

Si de plus le $b(x, U)$ est linéaire, alors (2) est aussi linéaire.

Considérons une EDP d'ordre 2 qui s'écrit sous la forme :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}) \quad (3)$$

On peut classifier cette EDP d'ordre 2 comme suit :

On pose $\Delta = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$

Si $\Delta > 0$ l'équation est de type hyperbolique, elle admet deux courbes caractéristiques réelles.

Exemple : l'équation des ondes $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$.

Si $\Delta < 0$ l'équation est de type elliptique, elle admet deux courbes caractéristiques complexes.

Exemple : l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$.

Si $\Delta = 0$ l'équation est alors de type parabolique, elle admet une courbe caractéristique.

Exemple : l'équation de la chaleur $\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$.

Les équations aux dérivées partielles ont des applications dans notre quotidien, un grand nombre des phénomènes naturels peuvent être modélisés en équation mathématique, la résolution de ces équations devient indispensable afin de comprendre et d'expliquer ces phénomènes. Il est cependant important de noter que très souvent il est difficile de résoudre analytiquement les EDP, les solutions numériques sont dans ce cas une nécessité. Cette nécessité a conduit à la conception de plusieurs méthodes parmi lesquelles : les différences finies, les volumes finis, les caractéristiques pour ne citer que ceux-là.

Parmi ces EDP, on retrouve l'équation de la convection-diffusion qui fera l'objet de notre travail dans ce mémoire.

Notre manuscrit se porte sur la résolution analytique de l'équation de convection-diffusion dans un premier temps, puis numériquement par les deux méthodes suivantes : Méthode des différences finies (DF). Méthode des caractéristiques.

Le premier chapitre comporte :

La présentation du problème de convection-diffusion dans sa globalité.

Quelques définitions essentielles (qu'est-ce que la convection ? qu'est-ce que la diffusion ?).

Les différences entre le processus de convection et celui de la diffusion puis les équations associées à chacun d'eux (convection pure, diffusion).

Le deuxième chapitre comporte :
La présentation de la méthode des différences finis (DF).

L'application de la méthode des Df sur un problème simplifié de la convection-diffusion.

Les limitations de cette approche.

Le troisième chapitre présente :
La méthode des caractéristique de façon générale.
Son application au problème de convection pure (transport).
Son application au problème de convection-diffusion.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les programmes Matlab utilisés pour tracer les figures tout au long du présent mémoire et qui sont :
Programmes Matlab 1 qui calcule et compare la solution exacte et la solution numérique du problème simplifié de convection-diffusion.

Programme Matlab 2 traite le problème de convection pure sans second membre et compare sa solution exacte et ses solutions numériques par les DF et la méthodes des caractéristiques.

Programme Matlab 3 quant à lui, calcule le problème de convection pure avec second membre et compare sa solution exacte et ces solutions numériques par la méthode DF et la méthode des caractéristiques.

Chapitre 1

Présentation du problème

Différents phénomènes sont responsables du transport de la matière. La matière peut être transportée par le mouvement du fluide (transport convectif), par diffusion de zones concentrées vers des zones de concentrations plus faibles (transport diffusif) ou par d'autres phénomènes.

Nos activités domestiques, industrielles et agronomiques génèrent beaucoup de déchets (pesticides ,métaux lourds, hydrocarbures). L'équation de convection-diffusion modélise des phénomènes de transport des particules par un agent de transmission, elle admet plusieurs champs d'application dont entre autre :

en hydrodynamique, où par exemple une partie de l'eau de pluie qui s'infiltre dans le sol est chargée des polluants, il est dès lors indispensable d'étudier leur évolutions en vue de préserver les nappes phréatiques de toute contamination. En mécanique des fluides, pour les écoulements incompressibles (équation de Navier-Stokes) dynamique des fluides. En météorologie, en ingénierie nucléaire, l'océanographie, la physique des plasmas, l'aérodynamique, la mécanique quantique, la chimie, la biologie, ...

Chaque matin nous dissolvons du sucre dans du café ou autre : ce processus met en ?uvre bons nombre de mécanismes de transfert de matière qui font que la dissolution du morceau de sucre est plus ou moins rapide. On peut laisser le café se sucrer par diffusion, dans ce cas les particules du sucre vont dans toutes les directions avec la même intensité, ou décider d'utiliser une cuillère pour que le café soit sucré plus rapidement et le transport des particules va suivre la direction de l'écoulement.

1.1 Définitions

1.1.1 La convection

La convection est un mode de transport de particules de la matière (humidité, polluant, température ...), par un fluide, tel que le gaz ou l'eau, elle induit un déplacement macroscopique de la matière, avec une orientation du déplacement. Un exemple est le transport des fumées dégagées d'une usine à l'aide du vent. La convection est due au mouvement de l'air, qui disperse le polluant.(et pour une large littérature on peut consulter [10] et [7])

Elle est donnée par l'équation :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + aC + U \overrightarrow{grad} C = f.$$

où f est un terme source.

1.1.2 La diffusion

La diffusion est le transport microscopique de la matière (transport moins conséquent) avec une dispersion plus ou moins aléatoire (dans toutes les directions d'un point de forte densité vers des points de densité moindre). Un exemple est la diffusion d'un parfum dans une chambre vide. Si une bouteille de parfum est ouverte et laissée évaporer dans l'air, rapidement on va sentir le parfum dans toute la chambre, avec plus d'odeur dans les zones proches de la bouteille que dans les zones plus éloignées (voir[7]).

Elle est régie par l'équation qui suit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + aC - \text{div}(K \overrightarrow{grad} C) = f.$$

1.1.3 L'équation de convection-diffusion

L'accumulation de deux modes de transport cité ci-dessus nous donne le problème de convection-diffusion qui est régi par l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + aC + \overrightarrow{U} \overrightarrow{grad} C - \text{div}(K \overrightarrow{grad} C) = f \quad (1.1)$$

avec des conditions initiales ou aux limites.

Avec :

t, x les variables respectivement temporelle et spatiale et T, K des constantes.

a, C, f, U des fonctions,
et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n

$$a(x, t); C(x, t); f(x, t); U(x, t) : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R},$$

et $K \geq 0$.

1.2 Signification physique

En mécanique des fluides les composantes de l'équation (1.1) sont :

a : le coefficient de diffusion.

U : la vitesse d'écoulement.

K : la diffusivité thermique (positive).

f : la source.

L'équation (1.1) peut se mettre sous deux formes selon la valeur de $a(x, t)$:

— Pour $a \equiv 0$, on a le cas non conservatif avec pour équation

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} C - \text{div}(K \overrightarrow{\text{grad}} C) = f. \quad (1.2)$$

(fluide incompressible).

— Pour $a \equiv \text{div} \vec{U}$ non nul, on a un cas conservatif avec pour équation

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\text{div} \vec{U})C + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} C - \text{div}(K \overrightarrow{\text{grad}} C) = f, \quad (1.3)$$

alors

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\vec{U} C) - \text{div}(K \overrightarrow{\text{grad}} C) = f. \quad (1.4)$$

1.3 Influence des paramètres sur le comportement de la solution

Pour comprendre l'influence des différents paramètres sur la solution du problème (1.1), supposons : $a \in \mathbb{R}$, \vec{U} et $f \in \mathbb{R}$

1.3.1 Influence de a

Pour $a \neq 0$, on se ramène au cas non conservatif par un simple changement de variable :

posons $\tilde{C}(x, t) = e^{at} C(x, t)$.

D'où on a :

la dérivée par rapport à x

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_i} &= e^{-at} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x_i} \\ \text{alors } \frac{\partial C}{\partial x_i} &= e^{-at} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

la dérivée par rapport à t

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= e^{-at} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} - a e^{-at} \tilde{C} \\ \text{alors } \frac{\partial C}{\partial t} + a C &= e^{-at} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} \end{aligned}$$

Remplaçons les deux dérivées dans (1.1) on aura :

$$e^{-at} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + e^{-at} \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{C} - \text{div}(K e^{-at} \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{C}) = f,$$

d'où

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{C} - \text{div}(K \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{C}) = e^{at} f,$$

qui est non conservatif.

1.3.2 Influence de U et K

Plaçons nous alors dans le cas non conservatif, l'équation (1.1) peut être décomposée en :

Pour $U = 0$;

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \text{div}(K \overrightarrow{\text{grad}} C) = f, \quad (1.5)$$

qui est du second ordre, parabolique.

L'équation (1.5) est l'équation dite de diffusion pure, qui signifie le transport d'une propriété par un seul et unique processus qui est la diffusion sans l'aide d'autre processus.

Pour $K = 0$;

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} C = f, \quad (1.6)$$

qui est du premier ordre, hyperbolique.

L'équation (1.6) est dite de convection pure, qui signifie le transport d'une propriété par un seul et unique processus en l'occurrence la convection.

L'EDP (1.1) est par nature la combinaison entre l'équation (1.5) (diffusion) et l'équation (1.6) (convection pure), il est par conséquent possible de voir le problème de convection-diffusion dégénérer sur l'un ou l'autre de ces problèmes en fonction des poids respectifs des termes de convection et de diffusion.

1.3.3 Nombre de Peclet

Pour analyser physiquement le rôle des coefficients de diffusion et de convection, il est intéressant d'introduire le nombre de Peclet.

Le nombre de Peclet compare les propriétés convectives et diffusives d'un écoulement. Il est défini comme le rapport entre le temps caractéristique de diffusion sur le temps caractéristique de convection. (voir [4])

Le temps caractéristique de convection est le temps qu'il faut à une perturbation pour être transporté de l'entrée à la sortie du domaine. Le nombre de Peclet (physique) (Pe) est un nombre utilisé en transfert thermique et en transfert massique, il est noté par :

$$Pe = \frac{UL}{K_0}$$

,
avec L :longueur caractéristique du domaine, U :vitesse de l'écoulement, K_0 :coefficient de diffusion.

Lorsque le nombre de Peclet Pe est élevé, les termes de la convection dominant. On parle alors de système de convection pure. Dans ces conditions, les phénomènes de la diffusion sont ignorés.

De même, lorsque le nombre de Peclet Pe est assez faible, les phénomènes de la diffusion prennent le dessus et ceux de la convection sont alors négligés.

Par contre lorsque le nombre de Peclet n'est ni assez petit pour permettre de négliger les phénomènes de convection, ni assez grand pour que les phénomènes de convection prennent le dessus, le système est dans ces conditions de type convection-diffusion.

Chapitre 2

Méthode des différences finies

2.1 Présentation de la méthode des différences finies

Plusieurs méthodes numériques sont utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), dont la méthode des différences finies qui est l'une des plus utilisées.

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles. Elle consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. Elle est relativement simple à mettre en œuvre car elle consiste à discrétiser par différences finies les opérateurs de dérivation (cela est basé sur l'utilisation des séries de Taylor) d'une part et d'un autre côté faire converger le schéma numérique obtenu quand la distance entre les points diminue. (on peut consulter [3])

Nous allons illustrer la procédure des différences finies sur un exemple. Considérons le problème suivant qui est un cas particulier du problème de convection-diffusion stationnaire, unidimensionnel, à coefficients constants et sans terme source. Nous allons montrer que malgré sa simplification il conserve des difficultés numériques.

$$\left\{ \begin{array}{l} U \frac{\partial C}{\partial x} - K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur }]0, L_0[\\ C(0) = C_0 \quad \text{et} \quad C(L_0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

2.1.1 Solution analytique du problème

Pour déterminer la solution analytique du problème (2.1), nous procédons comme suit :

Changement de variable

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{L_0} \text{ et } \tilde{C}(\tilde{x}) = \frac{C(\tilde{x}L_0)}{C_0}, \\ x = 0 &\Rightarrow \tilde{x} = 0 \text{ et } \tilde{C}(0) = \frac{C(0)}{C_0} = 1, \\ x = L_0 &\Rightarrow \tilde{x} = 1 \text{ et } \tilde{C}(1) = \frac{C(L_0)}{C_0} = 0. \end{aligned}$$

la dérivée d'ordre 1

$$\frac{\partial \tilde{C}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{C_0} \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = \frac{L_0}{C_0} \frac{\partial C}{\partial x}.$$

la dérivée d'ordre 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{C}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \right) \\ &= \frac{L_0}{C_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \\ &= \frac{L_0}{C_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \\ &= \frac{L_0^2}{C_0} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

D'où l'équation devient :

$$\begin{aligned} U \left(\frac{C_0}{L_0} \right) \frac{\partial \tilde{C}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} - K \left(\frac{C_0}{L_0^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{C}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} &= 0; \\ \text{alors } U \frac{\partial \tilde{C}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} - \left(\frac{k}{L_0 U} \right) \frac{\partial^2 \tilde{C}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} &= 0. \end{aligned}$$

Le système(2.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x)}{\partial x} - \frac{K}{L_0 U} \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} = 0 & \text{sur }]0, 1[\\ C(0) = 1 & \text{et } C(1) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Soit à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0, \quad (2.3)$$

qui est une équation du second ordre à coefficients constants.

Soit Ec l'équation caractéristique de (2.3) :

$$Ec : -\left(\frac{1}{Pe}\right)r^2 + r = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = Pe.$$

La solution est de la forme $C(x) = A + B \exp(Pex)$ où A et B sont des constantes à déterminer en utilisant les conditions aux limites .

$$\begin{cases} C(0) = A + B = 1 \\ C(1) = A + B \exp(Pe) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

La différence entre les deux équations du système donne :

$$B = \frac{1}{1 - \exp(Pe)}$$

et

$$A = \frac{-\exp(Pe)}{1 - \exp(Pe)}.$$

D'où la solution exacte (analytique) de notre problème s'écrit comme suit :

$$C(x) = \frac{-\exp(Pe) + \exp(Pex)}{1 - \exp(Pe)}. \quad (2.5)$$

2.2 Discrétisation par les différences finies

Appliquons maintenant la méthode des différences finies pour résoudre numériquement le problème (2.2), solution que nous allons pouvoir comparer avec la solution exacte.

Maillage

Subdivisons notre intervalle de travail en $(N + 1)$ segments de longueur $h = \frac{1}{N + 1}$ avec $N \in \mathbb{N}$.
Soit

$$\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N + 1\}$$

Schéma aux différences finies (DF)

Soit $C \in \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ et $C_i = C(x_i) \forall i = \overline{0, N + 1}$.

L'idée est d'utiliser le développement de Taylor pour approcher les dérivées du problème posé par des approximations aux nœuds du maillage correspondant.

Dérivée du premier ordre :

Supposons que C est de classe \mathcal{C}^2 . Le développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction C par rapport à la variable x est donné par :

$$C(x_i + h) = C(x_i) + hC' \frac{\partial C}{\partial x}(x_i) + \theta(h^2) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \theta(h^2) = 0,$$

$$\text{et } C(x_i - h) = C(x_i) - hC' \frac{\partial C}{\partial x}(x_i) + \tilde{\theta}(h^2) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\theta}(h^2) = 0.$$

La différence entre les deux équations précédentes nous donne :

$$C(x_i + h) - C(x_i - h) = 2h \frac{\partial C}{\partial x}(x_i) + \tilde{\theta}(h^2) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\theta}(h^2) = 0.$$

On a alors

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x_i) = \frac{C(x_i + h) - C(x_i - h)}{2h} - \tilde{\theta}(h^2) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\theta}(h^2) = 0$$

appelé différences finies centrées.

Par analogie, la formule des différences finies du premier ordre est donnée par :

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x_i) = \frac{C(x_i + h) - C(x_i)}{h} - \theta(h^2),$$

qui est l'approximation d'Euler à droite de la première dérivée.

Dérivée du second ordre :

On prendra le développement de Taylor d'ordre 3 de la fonction C par rapport à la variable x :

$$C(x_i + h) = C(x_i) + h \frac{\partial C}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x_i) + \theta(h^3) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \theta(h^3) = 0,$$

on remplace h par $-h$ dans l'équation qui précède, on obtient :

$$C(x_i - h) = C(x_i) - h \frac{\partial C}{\partial x}(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x_i) + \tilde{\theta}(h^3) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\theta}(h^3) = 0.$$

La somme des deux équations ci-dessus nous donne :

$$C(x_i + h) + C(x_i - h) = 2C(x_i) + h^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x_i) + \tilde{\theta}(h^3) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\theta}(h^3) = 0.$$

On a alors :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C(x_i + h) - 2C(x_i) + C(x_i - h)}{h^2} - \tilde{\theta}(h^3).$$

Les conditions aux limites discrétisées nous donnent :

$$C(x_0) = C_0 = 1; C(x_{N+1}) = C_{N+1} = 0.$$

En utilisant le schéma aux différences finies élaboré, l'équation discrétisée(2.3) devient :

$$\frac{C_{i+1} - C_i}{h} - \frac{1}{Pe} \frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{h^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{Peh(C_{i+1} - C_i) - C_{i+1} + 2C_i - C_{i-1}}{Peh^2} = 0.$$

D'où on a :

$$(Peh - 1)C_{i+1} + (2 - Peh)C_i - C_{i-1} = 0.$$

Et enfin le système discrétisé(2.2) est donné par :

$$\begin{cases} (Peh - 1)C_{i+1} + (2 - Peh)C_i - C_{i-1} = 0 \\ C_0 = 1 \\ C_{N+1} = 0 \end{cases} \quad \forall i = \overline{0, N} \quad (2.6)$$

— Pour $i=1$:

$$(Peh - 1)C_2 + (2 - Peh)C_1 - C_0 = 0 \Rightarrow (Peh - 1)C_2 + (2 - Peh)C_1 = 1.$$

— Pour $i=2$:

$$(Peh - 1)C_3 + (2 - Peh)C_2 - C_1 = 0.$$

.

.

.

— Pour i :

$$(Peh - 1)C_{i+1} + (2 - Peh)C_i - C_{i-1} = 0.$$

.

.

— Pour $i=N-1$:

$$(Peh - 1)C_N + (2 - Peh)C_{N-1} - C_{N-2} = 0.$$

— Pour $i=N$:

$$(Peh - 1)C_{N+1} + (2 - Peh)C_N - C_{N-1} = 0 \Rightarrow (2 - Peh)C_N - C_{N-1} = 0.$$

Qui équivaut aussi a :

$$\begin{pmatrix} 2 - Pe h & Pe h - 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -1 & 2 - Pe h & Pe h - 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & -1 & 2 - Pe h & Pe h - 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 - Pe h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ C_i \\ \cdot \\ C_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a un système matriciel linéaire de la forme $A_h C = F$, avec $A_h \in \mathcal{M}_{(n,n)}$ tridiagonale tel que :

$$\begin{cases} a_{i,i} = 2 - Pe h & \forall i = 1, \dots, N \\ a_{i,i+1} = Pe h - 1 & \forall i = 1, \dots, N - 1 \\ a_{i+1,i} = -1 \\ a_{i,j} = 0 \text{ si non} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ C_i \\ \cdot \\ C_N \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée par les différences finies (problème des couches limites)

Dans ce qui suit, nous allons présenter une comparaison entre la solution exacte du problème (2.2) et sa solution approchée par la méthode des différences finies, et cela dans deux cas :

D'abord quand le nombre de Peclet est petit égale à 0.4 ensuite quand il est considéré comme grand et est égale à 25. Notons que le programme associé à ces simulations est entièrement présenté à la première page du chapitre 4.

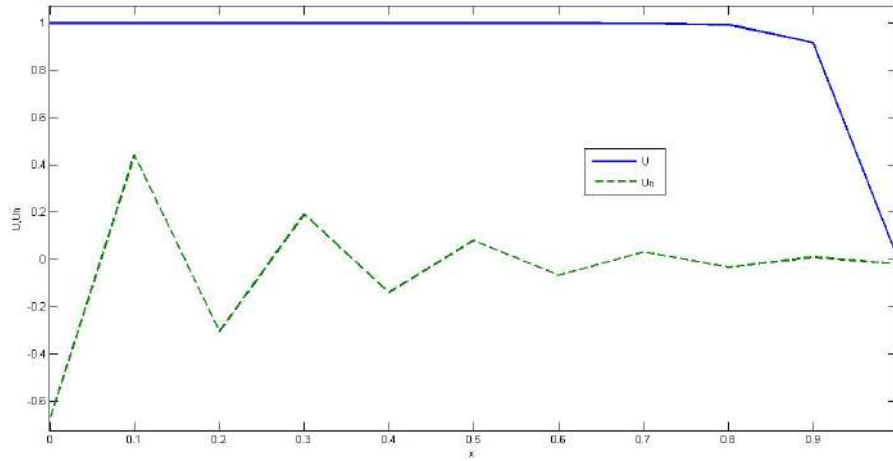


FIGURE 2.1 – Comparaison entre la solution exacte et la solution numérique par les différences finies, Pour $Pe = 25$

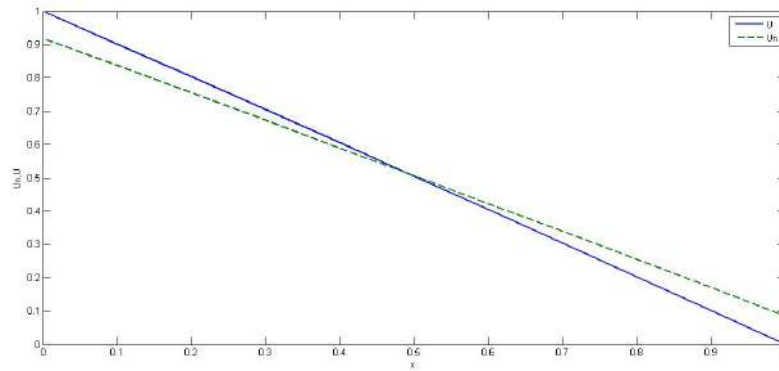


FIGURE 2.2 – Comparaison entre la solution exacte et la solution numérique par les différences finies Pour $Pe = 0.4$

2.3 Conclusion

L'équation de convection diffusion résulte de la superposition de deux équations, la première est parabolique du second ordre, connue comme l'équation canonique du type parabolique, l'équation de la chaleur, la deuxième est hyperbolique du premier ordre connue sous le nom d'équation de convection pure ou équation de transport.

Une difficulté majeure de la résolution numérique de l'équation de convection-diffusion résulte de cette sorte d'affrontement entre les deux natures très différentes des deux opérateurs (hyperbolique et parabolique).

Nous avons montré dans ce chapitre sur un exemple simplifié que, lorsque l'opérateur de diffusion domine, la discrétisation par la méthode des différences finies est très avantageuse, mais si tel n'est pas le cas, un changement radical de réflexion et/ou de méthode s'impose. Cette domination est directement liée au nombre de Peclet, proportionnel au poids de l'opérateur de convection.

Sur les simulations nous avons pu observer que la solution approchée par la méthode des

différences finies oscille. De plus, ces oscillations croissent en amplitude jusqu'à dénaturer complètement la solution exacte dans un voisinage de la couche limite.

En général, on considère que la valeur du seuil critique est placée aux alentours de $Pe.h=2$, au-delà duquel, la résolution numérique par DF devient délicate.

Sur cet exemple, nous avons mis en évidence une difficulté particulière des problèmes de convection-diffusion que l'on retrouve sur les problèmes multidimensionnels, non stationnaires à coefficients variables, en l'occurrence l'apparition d'oscillations parasites dénaturant la solution exacte.

Après ce constat et pour essayer de concevoir des schémas plus fins, changeons de méthode et introduisons dans le chapitre suivant la notion de courbes caractéristiques.

Chapitre 3

Méthode des caractéristiques

3.1 Présentation de la méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est une technique qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles particulièrement adaptée aux problèmes de transport. Dans certains cas particuliers, la méthode des caractéristiques peut permettre la résolution purement analytique de l'équation aux dérivées partielles.

Pour une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, la méthode des caractéristiques cherche des courbes appelées lignes caractéristiques le long desquelles l'EDP se réduit à une simple équation différentielle ordinaire (EDO).

La résolution de l'EDO le long d'une caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

Pour illustrer cette procédure, nous considérons le problème suivant :

$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ni (x, t) \mapsto U(x, t)$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ C(x, 0) = C_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

On cherche une ligne caractéristique $(x(s), t(s))$ le long de la quelle notre équation aux dérivées partielles du premier ordre se réduirait à une équation différentielle ordinaire.

s : s'identifie au temps

$$\frac{dC(x(s), t(s))}{ds} = \frac{dx(s)}{ds} \frac{\partial C(x(s), t(s))}{\partial x} + \frac{dt(s)}{ds} \frac{\partial C(x(s), t(s))}{\partial t}.$$

Posons :

$$\frac{dt}{ds} = 1 \text{ et } \frac{dx}{ds} = U,$$

on a alors :

$$\frac{dU}{ds} = 0, \text{ ce qui veut dire que } U \text{ reste constante.}$$

Cela nous amène à résoudre les trois équations qui suivent :

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= 1 : \text{ en posant } t(0) = 0, \text{ on obtient :} \\ &\quad \forall s \in \mathbb{R}^+, t(s) = s \\ \frac{dx}{ds} &= U : \text{ en notant } x(0) = x_0, \text{ on obtient :} \\ &\quad \forall s \in \mathbb{R}^+, x(s) = x_0 + Us = x_0 + Ut \\ \frac{dC}{ds} &= 0 : \forall s \in \mathbb{R}^+, C(s) = C(0) = C(x_0, 0) = C_0(x_0).\end{aligned}$$

Les lignes caractéristiques sont alors des droites de pente U , le long desquelles la solution reste constante. La valeur de la solution en un point $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ peut alors être retrouvée en cherchant la valeur de la condition initiale C_0 à l'origine $x_0 = x - Ut$ de la ligne caractéristique :

$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, C(x, t) = C_0(x - ct)$ (pour plus de détail voir [9])

3.1.1 Discrétisation de l'équation de convection pure

Cas évolutif :

Soit le problème de transport (convection pure) pris sous sa forme non conservative ($a = 0$) ; il s'agit de trouver $C(x, t)$ définie sur $\Omega \times [0, T]$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} C = f(x, t) & \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ C(x, 0) = C_0(x) \\ C(0, t) = g(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

tel que Γ est le bord de Ω ,

où $\Gamma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ avec $\Sigma_+ = \{(x, t) \in \Gamma \times [0, T] / \langle \vec{U}, \vec{n} \rangle < 0\}$ est le flux entrant du domaine

et $\Sigma_- = \{(x, t) \in \Gamma \times [0, T] / \langle \vec{U}, \vec{n} \rangle \geq 0\}$ le flux sortant du domaine

Considérons une courbe paramétrée $(X(s), s)$ appelée courbe caractéristique qui parcourt le domaine $\Omega \times [0, T]$, le paramètre s s'identifiant au temps, on a alors :

$$\frac{dC}{ds} = \frac{\partial C(\vec{X}(s), s)}{\partial s} = \overrightarrow{\text{grad}} C \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} + \frac{\partial C}{\partial s} \frac{\partial t}{\partial s}.$$

Par identification à l'équation du problème (3.2), on trouve :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}}{ds} &= \vec{U}(X(t), t), \\ \frac{dC}{ds} &= f(x(t), t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Remarque : Résoudre l'EDP (3.2) revient à résoudre les deux EDO de (3.3).

Cherchons $C(M_1)$ image du point $M_1(x_1, t_1) \in \Omega \times [0, T]$ par la fonction C .

L'obtention de cette valeur se fait en deux temps :

Dans un premier temps, on calcule la trajectoire qui passe par le point en question en résolvant

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}}{ds} = \vec{U}(\vec{X}(s), s) & \text{pour } (\vec{X}(s), s) \in \Omega \times [0, T], \\ \vec{X}(t_1) = x_1 & . \end{cases} \quad (3.4)$$

Le système (3.4) admet une solution unique ssi $U \in L^\infty(\Omega \times [0, T])$.

Puis, dans un second temps, on résout l'équation de transport le long de la trajectoire précédemment calculée.

Soit l'équation :

$$\frac{dC}{ds} = f(X(s), s). \quad (3.5)$$

Soit à résoudre ;

l'équation sans second membre (ESSM) :

$$\frac{dC}{ds} = 0,$$

en passant à l'intégrale on a :

$$\int \frac{dC}{C} = \int_0^t 0C ds,$$

qui donne $\ln(C(x(s), s)) = J(x) + k$ avec J : une fonction quelconque et $k \in \mathbb{R}$, une constante d'intégration réelle.

d'où

$$C(x, t) = \beta e^{J(x)}$$

avec $\beta = e^k$.

l'équation avec second membre (EASM) :

en utilisant la variation de la constante :

$$C(x, t) = \beta(t)e^{J(x)},$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \beta'(t)e^{J(x)} = f(x, t), \\ \text{alors } \beta'(t) &= f(x, t)e^{-J(x)}, \end{aligned}$$

d'où $\beta(t) = \int_0^t f(x, t)e^{-J(x)} dt + \xi$ avec ξ une constante d'intégration.

D'où la solution générale de (3.5) est :

$$C(x, t) = \left(\int (f(x, t) e^{-J(x)}) dt + \xi \right) e^{J(x)}.$$

Pour déterminer la constante d'intégration, on peut soit :

- Remonter le temps jusqu'à l'instant initial t_0 et utiliser la condition initiale donnée au début du problème

$$C(x, 0) = \xi e^{J(x)} = C_0(x) \Rightarrow \xi = C_0(x) e^{-J(x)}.$$

- Suivre la particule jusqu'à la sortie du domaine et utiliser la condition aux limites.

1. Remarque :

Les courbes caractéristiques permettent la construction de la solution analytique en n'importe quel point du domaine sans avoir à résoudre sur l'ensemble dans son intégralité.

2. Remarque

Pour le cas conservatif $a = \text{div} U \neq 0$, on a (d'après [1])

$$C(x, t) = e^{-\int a(X(s), s) ds} \left(\lambda + \int_0^t f(X(s), s) e^{\int a(X(s), s) ds} ds \right).$$

- Cas stationnaire :

La résolution de ce cas s'identifie au cas précédant (évolutif), hors mis la suppression de la condition initiale, vue que le temps physique n'existe plus, mais le paramètre s qui s'identifie au temps reste actif comme le temps nécessaire à toute particule pour aller d'une position donnée vers un point intérieur où sur la frontière du domaine.

3. Remarque :

Pour $a = \text{div} U \neq 0$, on a : (voir [1])

$$C(x) = g(x) e^{-\int \text{div} \vec{U}(X(s), s) ds} + \int_0^t f(X(s), s) e^{\int_0^t \text{div} \vec{U}(X(s), s) ds} ds.$$

3.1.2 Problème de convection-diffusion

Le problème de convection-diffusion est une généralisation du problème de convection pure au quel on ajoute une perturbation.

Proposition

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ Lipschitzienne.
Le problème est de trouver $C(x, t)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial C}{\partial t} + U \overrightarrow{\text{grad}} C - \text{div}(K \overrightarrow{C}) = f & \text{sur} & \Omega \times [0, T] \\ C(x, 0) = C_0(x) & \text{sur} & \Omega \\ C(x, t) = g(t) & \text{sur} & \Gamma \times [0, T] \end{array} \right. \quad (3.6)$$

est bien posé (i.e admet une solution unique) dans $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ (voir [1])
si :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = (U_1, \dots, U_n), \quad U_i \in L^\infty(\Omega), \quad i = \overline{1, n} \\ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega); \quad i, j = \overline{1, n} \\ f \in L^2(\Omega \times [0, T]) \\ g \in L^2(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad C_0 \in L^2(\Omega). \quad (3.7)$$

On cautionne cette proposition sans preuve vue qu'elle sort du cadre de notre mémoire mais on retiendra que :

- La frontière du domaine doit être couplée d'une condition aux limites.
- L'ajout d'un terme du second ordre accroît la régularité de $C(H^1$ au lieu de L^2).

3.2 Résolution numérique de l'équation de convection-diffusion par la méthode des caractéristiques

Dans cette partie, nous allons faire appel à la méthode numérique qui utilise la notion de "courbes caractéristiques". Dans d'un premier temps on applique cela à la convection pure, avant de l'étendre au cas complet (convection-diffusion) dans un second temps.

3.2.1 Le cas de la convection pure (cas conservatif)

On considère le problème. Trouver $C(x, t)$ sur $\Omega \times [0, T]$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\overrightarrow{U} C) = f \\ C(x, 0) = C_0 \\ C_\Gamma(t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

où \overrightarrow{U}, f sont régulières et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Γ = frontière de Ω Pour simplifier, considérons la discrétisation de ce problème en deux temps :

1. Discrétisation en temps :

Subdivisons l'axe du temps en utilisant un pas constant k , considérons $C_j(x)$ solution du problème continue en espace au temps $t_j = jk$ et cherchons $C_{j+1}(x)$. soient C_A, C_x, C_B les caractéristiques issues des points A, x, B respectivement.

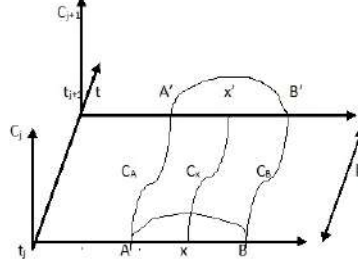


FIGURE 3.1 – Schématisation de la discrétisation temporelle dans la méthode des caractéristiques

Résoudre

$$\begin{cases} \frac{dX_\alpha}{dt} = \vec{U}(X_\alpha(t)) & X_\alpha(0) = \alpha & \text{avec} & \alpha = A \text{ ou } B \\ \tau = t - t^n & & & t^n \leq t \leq t^{n+1} \end{cases} \quad (3.9)$$

C'est trouver les caractéristiques passant par A et B qui conduisent à la délimitation du domaine d'étude $[A', B']$.

Cette résolution se fait en :

a) Calculant la trajectoire :

Comme indiqué précédemment l'obtention de la trajectoire par laquelle passe un point précis du domaine, peut se faire en résolvant numériquement par l'algorithme d'Euler ou Runge-Kutta selon l'ordre de l'équation.

$$\frac{dX}{dt} = \vec{U}(X, t).$$

Une attention particulière sera portée sur le choix de la condition initiale et au terminologie associée.

Un peu de terminologie !

Nous dirons que l'on descend la caractéristique si l'on part d'un point $x \in [A, B]$ communément appelé pied de la caractéristique pour atteindre le point $x' \in [A', B']$ appelé sommet en suivant le sens du temps, on descend la rivière en se laissant porter par le courant (et le temps).

Bien évidemment on reparlera de remontée des caractéristiques si l'on part de x' pour atteindre x en remontant de fil du temps.

L'intégration numérique de l'EDO en question, se fait plus généralement en utilisant la méthode :

— Euler ou Runge-kutta d'ordre 1(voir [6]) :

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i + k\vec{U}(t, X_i) \\ X(0) = x \end{cases} \quad (3.10)$$

— Runge-kutta d'ordre 2 (voir [6])

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i + kU(t + \frac{k}{2}, X_i + \frac{k}{2}U(t, X_i)) \\ X(0) = x \end{cases} \quad (3.11)$$

b) Intégrant les seconds membres :

Une fois la caractéristique qui relie les instants t_j et t_{j+1} déterminée, il reste dans un second temps à mettre en évidence l'apport du second membre pour clore le calcul de C_{j+1} cela en utilisant la relation :

$$C_{j+1}(x') = C_j(x) + \int_0^k F(f, \text{div} \vec{u}, X(\tau)) d\tau.$$

2. Discrétisation en espace :

L'étude de la discrétisation spatiale du problème peut se faire selon le point de vue :

a) Lagrangien :

Qui consiste à suivre l'évolution en espace d'un point donné à partir de sa position initiale (qui correspond à l'instant $t = 0$), cela en utilisant l'algorithme précédent dans sa version descendante.

Le point en question est appelé marqueur et sa position évolue en fonction du temps, on a dans ces conditions un maillage dit glissant.

Comme toute approche celle-ci comprend des avantages comme des difficultés dont entre autre :

— Souvent difficile à mettre en ?uvre en mécanique des fluides mais très pratique pour suivre des particules.

(Le référentiel se déplace avec le fluide. il est donc difficile de connaître l'état du fluide en un point donné de l'espace et du temps)

— Le problème des points qui quittent le domaine, qui est compensé par l'injection de nouvelles particules par la région entrante du courant.

— Les difficultés en multidimensionnel pour ce qui concerne la gestion et l'exploitation des informations véhiculées par les marqueurs, surtout si on envisage un couplage avec d'autre méthodes requièrent un maillage figé.

b) Eulérien :

Elle consiste non plus à suivre une particule au cours de son mouvement mais plutôt prendre position à partir d'un point donné et observer l'évolution des particules.

Nous allons illustrer ce qui précède sur un problème unidimensionnel pour lequel l'intégration des caractéristiques est immédiate :

Soit le problème, trouver $C(x, t)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 & \text{sur }]0, 1] \times]0, T] \\ U > 0 \\ C(x, 0) = C_0(x) & ; \quad C(0, t) = g(t). \end{cases}$$

Subdivisons l'axe du temps en N subdivisions avec un pas constant k et l'intervalle $[0, 1]$ avec un pas h , posons $C_{i,j} = C(ih, jk)$, $0 \leq i, j \leq N$, l'uniformité du champs de vitesse induit une intégration immédiate des caractéristiques .
On a :

$$\frac{dX}{dt} = U \Rightarrow dX = U dt$$

alors $X = Ut + A$ avec A constante.

Les caractéristiques se présentent donc dans le plan (x, t) sous forme de droites de pente $\frac{1}{U}$.

1) Méthode de descente :

La valeur de la pente $\frac{1}{U}$ est variable, par conséquent il est difficile qu'une caractéristique qui passe par $C_{i,j}$ du maillage (pour $t = t^j$) puisse coupé l'axe (pour $t = t^{j+1}$) en un point du maillage(uniforme, prédéfini)

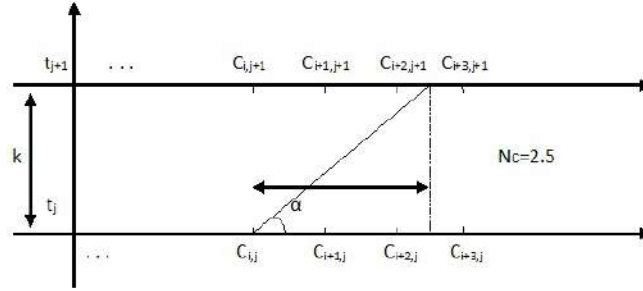


FIGURE 3.2 – Descente

$$\frac{1}{U} = \tan \alpha = \frac{k}{L},$$

d'où $L = Uk$.

On a :

$N_c = \frac{L}{h}$; N_c : nombre de courant qui mesure le nombre de mailles traversées par la courbe caractéristique (la droite dans notre exemple), comme $L = Uk$ alors $N_c = \frac{Uk}{h}$.

Si N_c est entier, la droite coupe t^{j+1} en un point du maillage.

Dans le cas où N_c n'est entier , une projection s'impose pour transférer l'information apportée par les caractéristiques sur les nœuds de maillage.

2) Méthode de remontée :

Pour des raisons pratiques, la méthode de remontée est préférée à la méthode de descente, elle part au delà de la projection en s'appuyant sur des courbes qui passent par les points $C_{i,j+1}$ ($t = t^{j+1}$), la nouvelle difficulté qui s'impose à nous est l'interpolation qui consiste à estimer $C_{i,j}$ en fonction des nœuds voisins ou des conditions aux limites et son ordre.

"L'interpolation permet de remplacer une courbe par une autre plus simple qui coïncide avec la première en un nombre de points donnés"

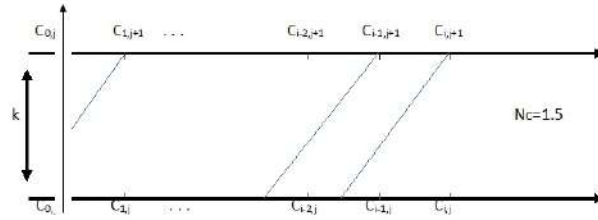


FIGURE 3.3 – Remontée

Comme expliqué à la méthode de descente lorsque le nombre de courant est un entier, on a :

$$C_{i,j+1} = C_{i-N_c,j} \quad (f \equiv 0).$$

La méthode d'interpolation de Lagrange dans cette version se présente comme une méthode explicite vue que $C_{i,j+1}$ s'expriment de façon linéaire sans résolution du système matriciel, elle est aussi très utile pour un problème de convection-diffusion car la résolution d'un problème d'interpolation est plus simple que celui d'un problème de projection.

Si par contre le nombre de courant n'est pas entier, on a :

pour

$$f \equiv 0, U > 0 \text{ et } 0 < N_c < 1.$$

Les deux dernières conditions constraints notre caractéristique à passer entre les positions $i - 1$ et i .

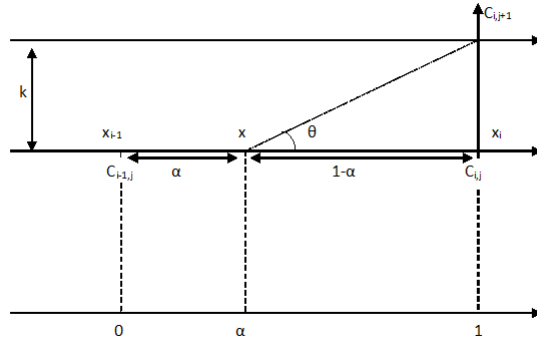


FIGURE 3.4 – Repère local barycentrique

$$\frac{1}{U} = \tan \theta = \frac{k}{x_i - x} \Rightarrow x_i - x = Uk$$

La coordonnée barycentrique α est :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ &= \frac{x - x_i + x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ &= \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ &= 1 - \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} = 1 - \frac{Uk}{h} \end{aligned}$$

D'où $\alpha = 1 - N_c$.

Il reste à déterminer $C_{i,j}(\alpha)$ en utilisant une interpolation appropriée. En se limitant aux points voisins x_{i-1} et x_i , l'interpolation linéaire s'avère être la plus adéquate. On en déduit la méthode des caractéristiques d'ordre 1 donnée par :

$$C_{i,j+1} = (1 - N_c)C_{i,j} + N_c C_{i-1,j}.$$

D'autres interpolations d'ordre plus élevé sont possibles sur un nombre de points de voisinage plus grand dont entre autre l'interpolation cubique qui est une interpolation qui fait intervenir des polynômes de degré 3 sur chaque intervalle entre les nœuds.

3.2.2 Extension aux problèmes de convection-diffusion

Comme expliqué dans la partie consacrée à la convection pure nous allons étendre le même schéma au cas de la convection-diffusion, pour le cas conservatif ($\text{div} \vec{U} \neq 0$).

Soit le problème ; trouver $C(x, t)$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + U \overrightarrow{\text{grad}} C + \text{div} U \cdot C - \text{div}(k \overrightarrow{\text{grad}} C) = f & \text{sur } \Omega \times]0, T] \\ C(x, 0) = C_0(x), \\ + \text{des conditions aux limites} \end{cases} \quad (3.12)$$

Principe de l'approximation en temps de la dérivée totale :

- Discrétisation en temps :

Soit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} C|_{x,t} = \frac{dC}{dt}$$

le long de la caractéristique passant par (x, t) qui équivaut à :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC(X(\tau), \tau)}{d\tau} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{C(x, t) - C(x, t - k)}{k},$$

d'où pour $jk \leq t \leq (j+1)k$ on a :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} C|_x \simeq \frac{C_{j+1}(x) - C_j(x)}{k},$$

alors le problème semi-discrétisé en temps se présente comme suit :

$$\begin{cases} C_{i,j} \text{ connu sur } \Omega \\ \text{Trouver } C_{j+1}(x) \text{ approximation de } C \text{ pour } t = (j+1)k \text{ telle que} \\ \frac{C_{j+1}(x) - C_j(x)}{k} + \text{div} U \cdot C_{i,j+1} - \text{div}(k \overrightarrow{\text{grad}} C_{i,j+1}) = f_{i,j+1} \end{cases} \quad (3.13)$$

Le problème (3.12) devient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } C_{i,j+1} \text{ telle que} \\ \frac{1}{k} C_{i,j+1} - \text{div}(k \overrightarrow{\text{grad}} C_{i,j+1}) + \text{div} C_{i,j+1} \cdot U = f_{i,j+1} + \frac{1}{k} \cdot C_{i,j} \end{cases} \quad (3.14)$$

- Discrétisation en espace :

On a " $\frac{1}{k} \text{id} - \text{div} K \overrightarrow{\text{grad}} + U \text{div}$ " comme opérateur associé à notre problème. Pour un problème bien posé, il existe bon nombre de méthodes de discrétisation spatiale dont entre autre les différences finies et les éléments finis.

3.3 Conclusion

Le principe de la méthode des caractéristiques, c'est de substituer à la résolution d'une EDP, la résolution d'un système de deux EDOs. La première nous

donne la trajectoire par laquelle passe un point précis du domaine. Nous pouvons la résoudre numériquement par un algorithme d'Euler précis au premier ordre ou bien de Runge-Kutta précis au second ordre. La deuxième, nous donne la valeur de l'inconnue le long de cette trajectoire.

Numériquement, une première idée pour la discrétisation spatiale de cette deuxième équation consiste à se donner une répartition de points à l'instant initial et de suivre leur évolution (leur position spatiale) à chaque pas de temps. Ce maillage est donc glissant et est appelé maillage Lagrangien. Ce type d'approche a certains avantages mais ses inconvénients prennent le dessus, puisqu'il risque d'y avoir des points qui quittent le domaine dont la perte doit être impérativement remplacée par de nouveaux points et la difficulté à gérer ces particules en multidimensionnel ainsi que les informations qu'ils génèrent.

A ce type d'approche est souvent préférée une autre approche dite Eulérienne. Cette fois, on s'impose un maillage figé sur le domaine spatial et même s'il est peu probable qu'une caractéristique issue d'un point du maillage à un instant donné coupe le maillage en un de ses points à l'instant d'après, nous pouvons toujours effectuer une projection pour transférer les informations apportées par les caractéristiques sur les nœuds voisins.

Où alors, nous pouvons considérer l'instant d'avant et faire une interpolation, linéaire ou cubique si nous voulons être plus précis, entre les nœuds voisins. C'est cette approche qui a les faveurs des numériciens en général, car ils préfèrent faire une interpolation numérique plutôt qu'une projection numérique.

Pour déterminer les constantes de l'intégration, nous avons le choix entre deux méthodes. Nous pouvons remonter le temps jusqu'à l'instant initial et là, on utilise les conditions initiales du problème ou bien nous pouvons descendre le temps, c'est-à-dire suivre le point considéré jusqu'à ce qu'il sorte du domaine d'étude et là, on utilise les conditions aux limites. Bien sûr, dans les deux cas, nous devons avoir un problème bien posé c'est-à-dire qu'on requière la donnée obligatoire d'une condition initiale au premier cas et on exige que toutes les lignes du courant ou les trajectoires intersectent la partie du domaine où le flux est sortant, sur laquelle la valeur de l'inconnue doit être imposée comme conditions aux limites.

Une conclusion importante à faire est que l'utilisation des courbes caractéristiques permet de construire la solution en n'importe quel point sans avoir à résoudre sur l'ensemble du domaine, c'est donc une méthode à caractère extrêmement local.

Chapitre 4

Simulations numériques

La simulation numérique permet de valider des résultats théoriques, par la même occasion étudier les différences entre ces derniers et les résultats numériques.

4.1 Programme Matlab 1

Notre programme Matlab 1 calcule la solution exacte et numérique par les différences finies du problème (2.2) de convection-diffusion simplifié, tout en faisant la comparaison entre les graphes des deux solutions en fonction de la valeur du nombre de Peclet Pe .

```
clc
clear all
N=input('Entrer le nombre de subdivisions par rapport à l'espace N=')
disp('le pas du maillage de l'espace est h=')
h=(1/(N+1))
disp('les noeuds x_i sont')
x=0:h:1
L=input('Entrer la longueur L=')
U0=input('Entrer la vitesse U0=')
K=input('entrer la viscosité K=')
disp('le nombre de Peclet est Pe=')
Pe=(U0*L)/K
disp('calcul de la solution exacte est U=')
for i=1:N+1
U(i)=(exp(Pe)-exp(Pe*x(i)))/(exp(Pe)-1);
end
disp('la solution est U=')
U'
disp('la matrice A=')
A=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
A(i,i)=(2-Pe*h)/Pe*h^2;
```

```

end
for i=1:N
A(i,i+1)=(Pe*h-1)/Pe*h^2;
end
for i=1:N
A(i+1,i)=-1/Pe*h^2;
end
A
disp('le second membre est f=')
f=zeros(N+1,1);
f(1)=1/Pe*h^2
disp('la solution numérique est Un=')
Un=inv(A)*f
disp('l'erreur de discrétisation est E=')
E=abs(U-Un)

```

4.2 Application numérique sur l'équation de convection pure

Nous souhaitons mettre en place deux algorithmes matlab capables de résoudre numériquement le problème de transport, algorithmes qui mettront en évidence l'utilisation des caractéristiques sur un problème simple tout en prenant soin de faire la comparaison entre les résultats avec la solution exacte et celle obtenue par la méthode des différences finies.

Soit le problème unidimensionnel de convection pure suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \text{sur }]0, 1] \times]0, T] \\ C(x, 0) = C_0 \\ C(0, t) = g(t) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

avec $U \in \mathbb{R}_+^*$

4.2.1 Discrétisation par les différences finies

Divisons nos deux intervalles de travail en $(N + 1)$ subdivisions de longueur h et k respectivement pour l'axe des x (espace) et l'axe des t (temps).

Avec $h = \frac{1}{N + 1}$ et $k = \frac{T}{N + 1}$

$\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N + 1\}$ et $\Omega_k = \{t_j = jk, 0 \leq j \leq N + 1\}$,

les nœuds d'étude sont (x_i, t_j) .

Supposons les discrétisations suivantes :

$$x \rightsquigarrow x_i, t \rightsquigarrow t_j \text{ et } C(x, t) \rightsquigarrow C(x_i, t_j) = C_{i,j}.$$

Dans la même lancée, discrétisons les conditions initiale, on a alors :

$$C(x_i, 0) = C_0(x_i) = C_{i,0}$$

$$C(0, t_j) = g(t_j) = g_j$$

Puis utilisons le schéma DF utilisé au chapitre 2, avec non plus une seule variable (espace au chapitre 2) mais deux variables (espace et temps) ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial C_{i,j}}{\partial t} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{k} \text{ appelée DF avant par rapport à la variable } t.$$

$$\frac{\partial C_{i,j}}{\partial x} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2h} \text{ qui est appelée DF centrée par rapport à la variable } x.$$

Remplaçons par suite ces expressions de dérivées dans l'équation du système (4.1) on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{k} + U \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2h} &= 0, \\ \frac{1}{k} C_{i,j+1} &= \frac{1}{k} C_{i,j} - \frac{U}{2h} (C_{i+1,j} - C_{i-1,j}). \end{aligned}$$

En multipliant les deux côté par k on a :

$$C_{i,j+1} = C_{i,j} - \frac{kU}{2h} (C_{i+1,j} - C_{i-1,j}).$$

Qui est un schéma explicite, c'est-à-dire qu'il est possible d'ordonner les inconnues de telle sorte que chacune d'elles puissent être déterminées récursivement à partir des précédentes qui sont supposées être déjà calculées (matrice triangulaire).

Étudions la stabilité de notre schéma par la méthode de Von Neumann qui est basée sur la décomposition de l'erreur en séries de Fourier (pour plus de détails voir [8] et [2]) :

Un schéma est dit stable si les erreurs commises en un pas de temps ne font pas augmenter les erreurs au fil des itérations.

Posons $C_0(x) = \beta e^{ipx}$ avec i comme nombre complexe, $p \in \mathbb{R}$ et $\beta \in]0, 1]$ qui s'exprime sur les nœuds du maillage comme suit : $C_{i,0} = \beta \exp(ipi'h)$ (pour éviter toute confusion le i de la discrétisation est remplacé par i').
Procédons par récurrence pour montrer l'existence d'une constante a telle que $C_{i,j} = a^j C_{i,0}$.

Pour $j = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
C_{i,1} &= C_{i',0} - \frac{KU}{2h}(C_{i'+1,0} - C_{i'-1,0}) \\
&= \beta e^{ip'i'h} - \frac{kU}{2h}(\beta e^{ip(i'+1)h} - \beta e^{ip(i'-1)h}) \\
&= \beta e^{ip'i'h} [1 - i \frac{kU}{h} (\frac{e^{iph} - e^{-iph}}{2i})] \\
&= C_{i',0} [1 - i \frac{kU}{h} \sin(ph)],
\end{aligned}$$

avec $a = 1 - i \frac{kU}{h} \sin(ph)$, or pour que notre schéma soit stable il faut et il suffit que $|a| < 1$.

Avant de poursuivre le processus de récurrence procédons à la vérification de cette condition (En utilisant les propriétés du module d'un nombre complexe suivantes).

$$\begin{aligned}
|1 - i \frac{kU}{h} \sin(ph)| < 1 &\Leftrightarrow 1 + \frac{k^2 U^2}{h^2} \sin^2(ph) < 1, \\
&\Leftrightarrow \frac{k^2 U^2}{h^2} \sin^2(ph) < 0,
\end{aligned}$$

ce qui est absurde, par conséquent notre schéma explicite reste toujours instable.

Cette instabilité peut être due au choix de la méthode DF centrée par rapport à la variable x (espace), en effet comme notre problème est de convection pure on sait par avance qu'il y'a une orientation du déplacement, il est dès lors naturel que chaque point du domaine est influencé par le point qui le précède, cela rend alors les DF en arrière plus appropriées pour le cas de convection pure.

Choisissons pour cette fois une approche DF en arrière par rapport à la variable spatiale x qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial C_{i',j}}{\partial x} = \frac{C_{i',j+1} - C_{i'-1,j+1}}{h},$$

et on garde l'approche DF avant par rapport à la variable temporelle t .

Remplacer dans l'équation du système (4.1), on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{C_{i',j+1} - C_{i',j}}{k} + U \frac{C_{i',j+1} - C_{i'-1,j+1}}{h} = 0 \\
&\text{puis } (\frac{1}{k} + \frac{U}{h}) C_{i',j+1} - \frac{1}{k} C_{i',j} - \frac{U}{h} C_{i'-1,j+1} = 0, \\
&\text{d'où } \frac{1}{k} C_{i',j} = -\frac{U}{h} C_{i'-1,j+1} + (\frac{h + kU}{kh}) C_{i',j+1},
\end{aligned}$$

en multipliant par des deux côtés, on obtient le schéma implicite qui suit :

$$C_{i',j} = (1 + \frac{kU}{h}) C_{i',j+1} - \frac{Uk}{h} C_{i'-1,j+1} \quad (4.2)$$

Comme pour le cas précédent, étudions la stabilité de notre schéma par la méthode de Von Neumann.

Procédons par récurrence pour montrer l'existence d'une constante a telle que $C_{i',j} = a^j C_{i',0}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

L'égalité est vérifiée pour $j = 0$, $C_{i',0} = a^0 C_{i',0}$.

Supposons que l'égalité est vraie pour j c'est-à-dire $C_{i',j} = a^j C_{i',0}$ et montrons qu'elle reste vraie pour $C_{i',j+1} = a^{j+1} C_{i',0}$; en remplaçant dans notre schéma (4.2), on obtient

$$(1 + \frac{Uk}{h})C_{i',j+1} - \frac{Uk}{h}C_{i'-1,j+1} = C_{i',j}$$

$$(1 + \frac{Uk}{h})a^{j+1}C_{i',0} - \frac{Uk}{h}a^{j+1}C_{i'-1,0} = a^j C_{i',0}$$

$$(1 + \frac{Uk}{h})a^{j+1}\beta e^{ip i' h} - \frac{Uk}{h}a^{j+1}\beta e^{ip(i'-1)h} = a^j \beta e^{ip i' h}$$

$$a^j \beta e^{ip i' h} [(1 + \frac{Uk}{h})a - \frac{Uk}{h}a e^{-iph} - 1] = 0$$

$$\text{alors } a(1 + \frac{Uk}{h} - \frac{Uk}{h}e^{-iph}) = 1$$

$$\text{d'où } a = \frac{1}{1 + \frac{Uk}{h} - \frac{Uk}{h}e^{-iph}}$$

$$\text{d'où } C_{i',j} = a^j C_{i',0} \text{ avec } a = \frac{1}{1 + \frac{Uk}{h} - \frac{Uk}{h}e^{-iph}}.$$

Pour que notre schéma soit stable il faut que $|a| \leq 1$

$$|a| \leq 1 \Leftrightarrow |1 + \frac{Uk}{h} - \frac{Uk}{h}e^{-iph}| \geq 1$$

$$\Leftrightarrow |1 + \frac{Uk}{h} - \frac{Uk}{h}\cos(ph) + i\frac{Uk}{h}\sin(ph)| \geq 1$$

En utilisant le module du nombre complexe, on a :

$$\begin{aligned}
& [1 + \frac{Uk}{h} - \frac{Uk}{h} \cos(ph)]^2 + \frac{U^2 k^2}{h^2} \sin^2(ph) \geq 1 \\
\Leftrightarrow & (1 + \frac{Uk}{h})^2 - 2(1 + \frac{Uk}{h}) \frac{Uk}{h} \cos(ph) + \frac{U^2 k^2}{h^2} \cos^2(ph) + \frac{U^2 k^2}{h^2} \sin^2(ph) \geq 1 \\
\Leftrightarrow & 1 + 2\frac{Uk}{h} + \frac{U^2 k^2}{h^2} - 2\frac{U^2 k^2}{h^2} \cos(ph) - 2\frac{Uk}{h} \cos(ph) + \frac{U^2 k^2}{h^2} \geq 1 \\
\Leftrightarrow & 2\frac{U^2 k^2}{h^2} (1 - \cos(ph)) + 2\frac{Uk}{h} (1 - \cos(ph)) \geq 0.
\end{aligned}$$

On sait par ailleurs que $\sup |\cos(ph)| \leq 1$, cela implique que $1 - \cos(ph) \geq 0 \forall p \in \mathbb{R}$.

Notre inégalité finale est alors toujours positive, cela signifie que $|a| \leq 1$ d'où notre schéma est stable.

On va continuer notre étude avec le même schéma, nous avons alors le système discrétisé suivant :

$$\begin{cases} C_{i',j} = (1 + \frac{kU}{h})C_{i',j+1} - \frac{Uk}{h}C_{i'-1,j+1}, & \forall i = \overline{1, N+1}, \quad \forall j = \overline{0, N} \\ C_{i',0} = C(x_i, 0) \\ C_{0,j} = g_j. \end{cases} \quad (4.3)$$

Grâce à des outils de programmation, de calcul (matlab dans notre cas) nous allons pouvoir calculer la solution numérique C_{num} associée au système (4.3).

Pour $i = 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} \text{pour } j=1 \\ \text{pour } j=N \end{smallmatrix}$
 \cdot
 \cdot
 \cdot
Pour $i = N \longrightarrow \begin{smallmatrix} \text{pour } j=1 \\ \text{pour } j=N \end{smallmatrix}$

Pour voir plus clair et pouvoir en même temps faire une comparaison entre la méthode des différences finies, celle des caractéristiques et la solution exacte, considérons le problème qui suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 & \text{sur }]0, 1] \times]0, T], \quad U \in \mathbb{R}_+^* \\ C(x, 0) = f(x) = -x \\ C(0, t) = g(t) = Ut \end{cases} \quad (4.4)$$

4.2.2 Solution exacte

On a :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{U}.$$

Pour la première partie, on aura :

$$\begin{aligned}\frac{dt}{1} = \frac{dx}{U} &\Rightarrow U dt = dx, \\ &\Rightarrow Ut = x + c_1.\end{aligned}$$

Puis

$$dC = 0.$$

D'où

$$C(x, t) = c_2 \text{ avec } c_2 = H(c_1) = H(Ut - x).$$

Utilisons les deux conditions

$$\begin{cases} C(x, 0) = H(-x) = -x, & \forall x \in [0, 1] \\ C(0, t) = H(Ut) = Ut, & \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (4.5)$$

d'où $H = id$ (identité).

Par conséquent $C(x, t) = H(Ut - x) = Ut - x$.

Le problème après discrétisation devient :

$$\begin{cases} (1 + \frac{Uk}{h})C_{i,j+1} = -\frac{Uk}{h}C_{i-1,j+1} - C_{i,j}; & \forall i = \overline{1, N+1}; \quad \forall j = \overline{0, N} \\ C_{i,0} = x_i \\ C_{0,j} = Ut_j \end{cases} \quad (4.6)$$

Le programme Matlab 2 calcule la solution exacte et les solutions numériques par les caractéristiques et les différences finies du problème de convection pure sans second membre discrétisé plus haut, puis par la suite procède à une comparaison entre les graphes des trois solutions en fonction des différents paramètres.

Programme matlab 2

```
clear all
clc
T=input('Entrer le temps que prendra l'expérience T=')
N=input('Entrer le nombre de subdivisions de nos deux intervalles N=')
U=input('Entrer la valeur du champ de vitesse U=')
disp('Le pas du maillage par rapport à
l'espace est h=')
h=1/(N+1);
disp('Le pas du maillage par rapport au temps
est k= ');
k=T/(N+1);
```

```

disp('Les n?uds de l'espace x_i sont:');
x=0:h:1;
disp('Les n?uds du temps t_j sont:');
t=0:k:T;
Nc=U*k/h
%pour un Nc<1 on a:
disp('La solution exacte du problème est C_E')
C_E=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        C_E(i,j)=U*t(j)-x(i);
    end
end
C_E
disp('La solution numérique du problème par DF est C_num');
C_num=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
    C_num(i,1)=-x(i);
end
for j=1:N+1
    C_num(1,j)=U*t(j);
end
for i=2:N+1
    for j=1:N
        C_num(i,j+1)=(Nc*C_num(i-1,j+1)+C_num(i,j))/(1+Nc);
    end
end
C_num
disp('La solution numérique du problème par les caractéristique \\\
est C_c')
C_c=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
    C_c(i,1)=-x(i);
end
for j=1:N+1
    C_c(1,j)=U*t(j);
end
for i=2:N+1
    for j=1:N
        C_c(i,j+1)=Nc*C_c(i-1,j)+(1-Nc)*C_c(i,j);
    end
end
C_c
disp('Les moyennes des solutions sont:')
moyC_E=0;
for i=1:N+1
    for j=1:N+1

```

```

        moyC_E=moyC_E+C_E(i,j)/(N*N);
    end
end
moyC_num=0;
for i=1:N+1
    for j=0:N
        moyC_num=moyC_num+C_num(i,j+1)/(N*N);
    end
end
moyC_c=0;
for i=1:N+1
    for j=0:N
        moyC_c=moyC_c+C_c(i,j+1)/(N*N);
    end
end
moyC_E',moyC_num',moyC_c'
disp('L''erreur de discrétisation E1=')
E1=C_E-C_num
disp('L''erreur de discrétisation E2=')
E2=C_E-C_c
moyE1=0;
for i=1:N
    for j=1:N
        moyE1= moyE1+E1(i,j)/(N*N);
    end
end
moyE1
moyE2=0;
for i=1:N
    for j=1:N
        moyE2= moyE2+E2(i,j)/(N*N);
    end
end
moyE2
disp(' Le graphe de la solution exacte')
surf(C_E)
title('La solution exacte')
xlabel('L''axe des x'); ylabel('L''axe des t'); zlabel('L''axe des C_E');
disp(' Le graphe de la solution numérique par les différences finies')
surf(C_num)
title('La solution numérique par les différences finies')
xlabel('L''axe des x'); ylabel('L''axe des t'); zlabel('L''axe des C_num');
disp(' Le graphe de la solution numérique par la méthode des caractéristiques')
surf(C_c)
title('La solution numérique par les caractéristiques')
xlabel('L''axe des x'); ylabel('L''axe des t'); zlabel('L''axe des C_c');

```

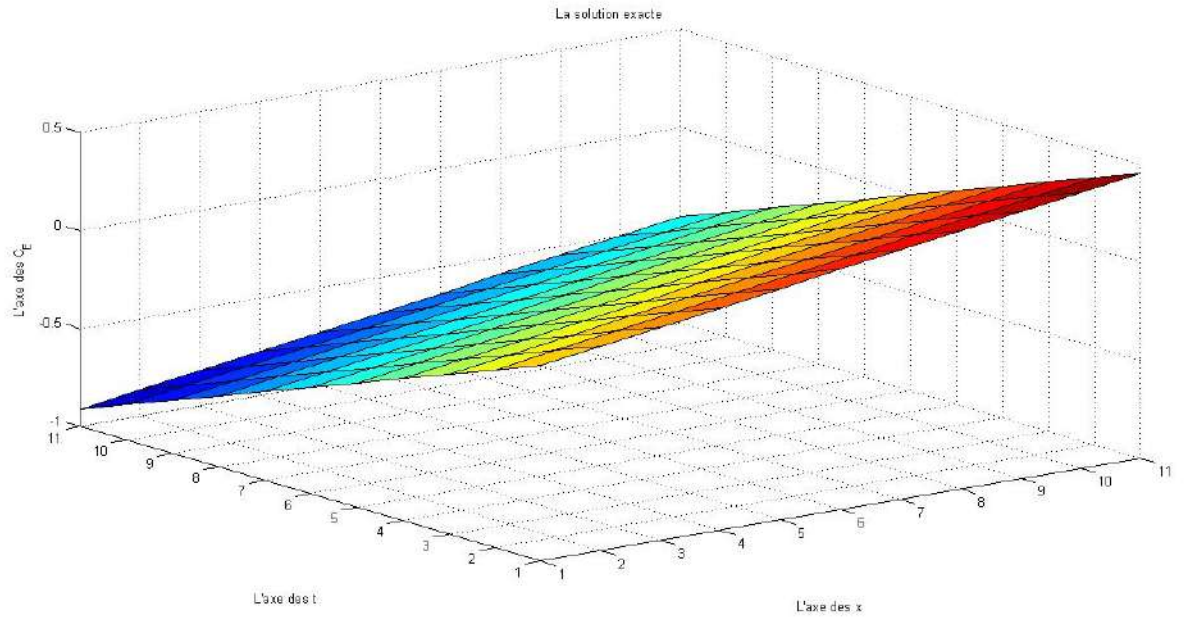


FIGURE 4.1 – Comparaison entre les solutions pour $T = 1$, $N = 10$, $U = 0.5$, $N_c = 0.5$.

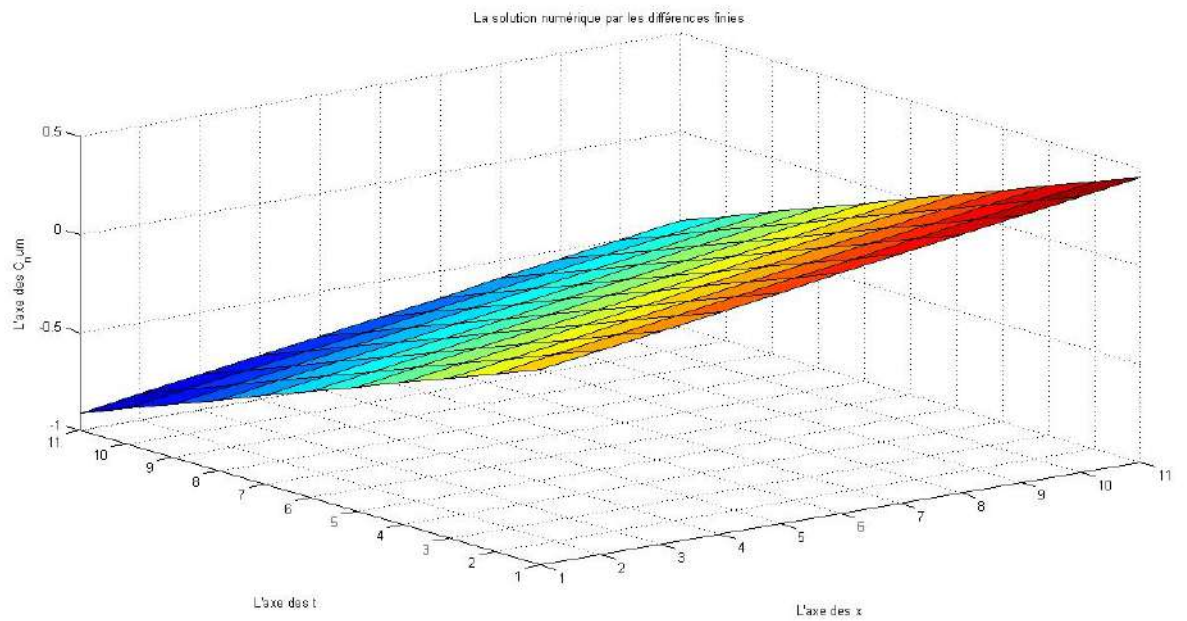


FIGURE 4.2 – Comparaison entre les solutions pour $T = 1$, $N = 10$, $U = 0.5$, $N_c = 0.5$.

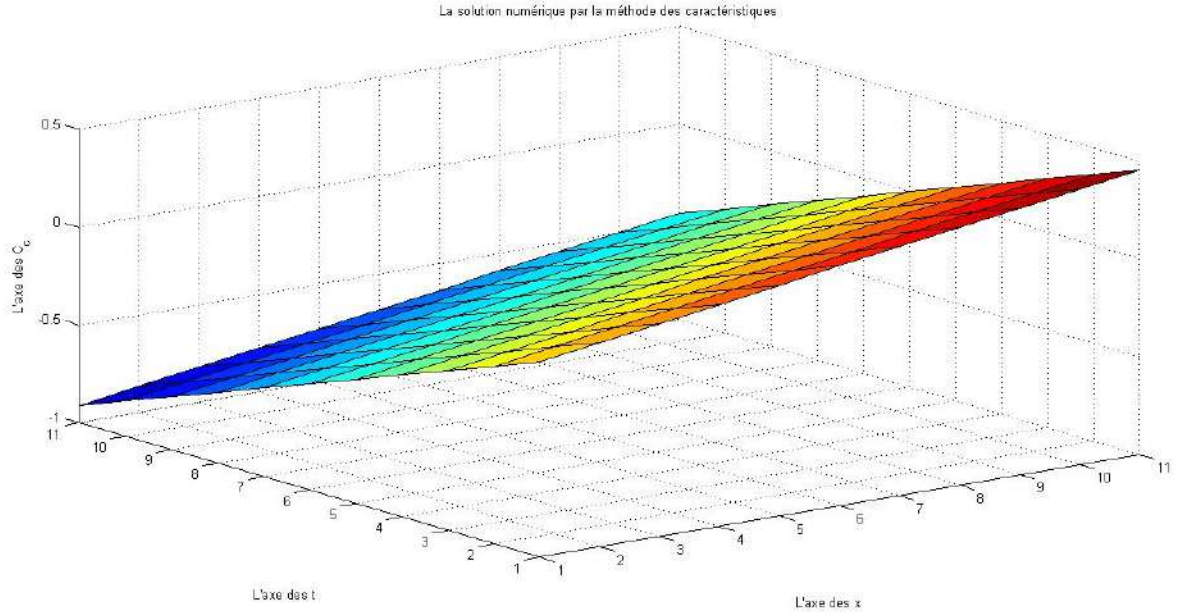


FIGURE 4.3 – Comparaison entre les solutions pour $T = 1$, $N = 10$, $U = 0.5$, $Nc = 0.5$.

Pour cette seconde exécution nous avons varié le temps qui est passé de 1 à 5 et la vitesse de 0.5 à 5, tout en conservant le même nombre N de subdivision, dans le but d'aller au-delà de la condition $0 < Nc < 1$ et voir le comportement des trois solutions. On constate à ce niveau une légère déviation de la solution obtenue par la méthode des caractéristiques et que celle par les différences finies converge comme le prouve les figures qui suivent :

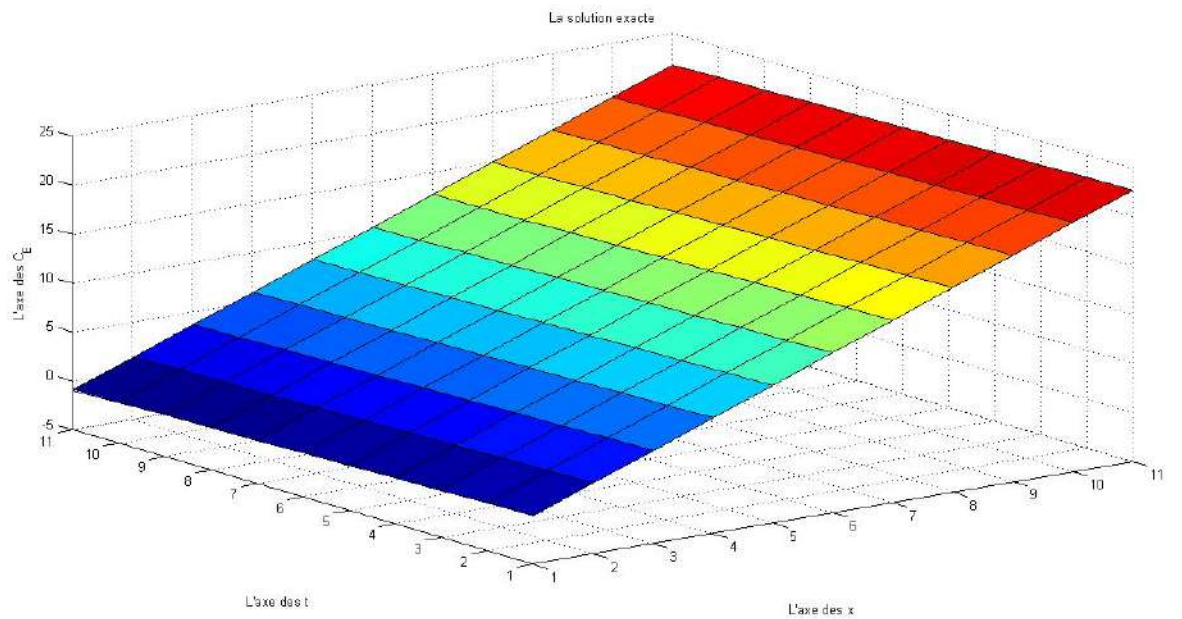


FIGURE 4.4 – Comparaison entre les solutions pour $T = 5$, $N = 10$, $U = 5$, $Nc = 25$.

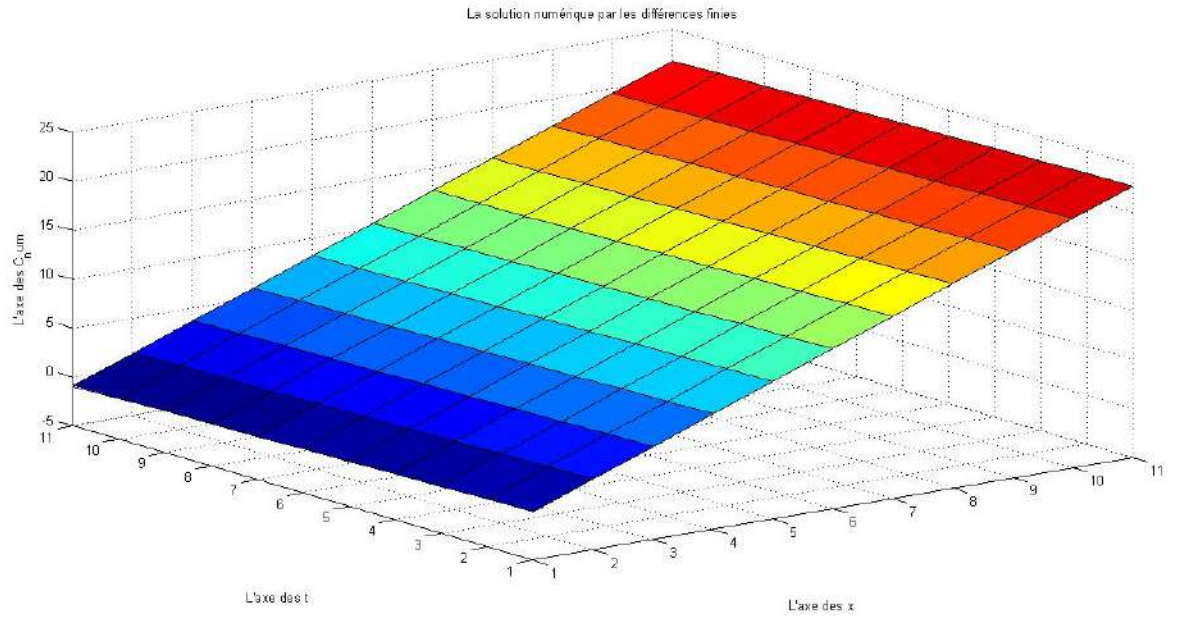


FIGURE 4.5 – Comparaison entre les solutions pour $T = 5$, $N = 10$, $U = 5$, $Nc = 25$.

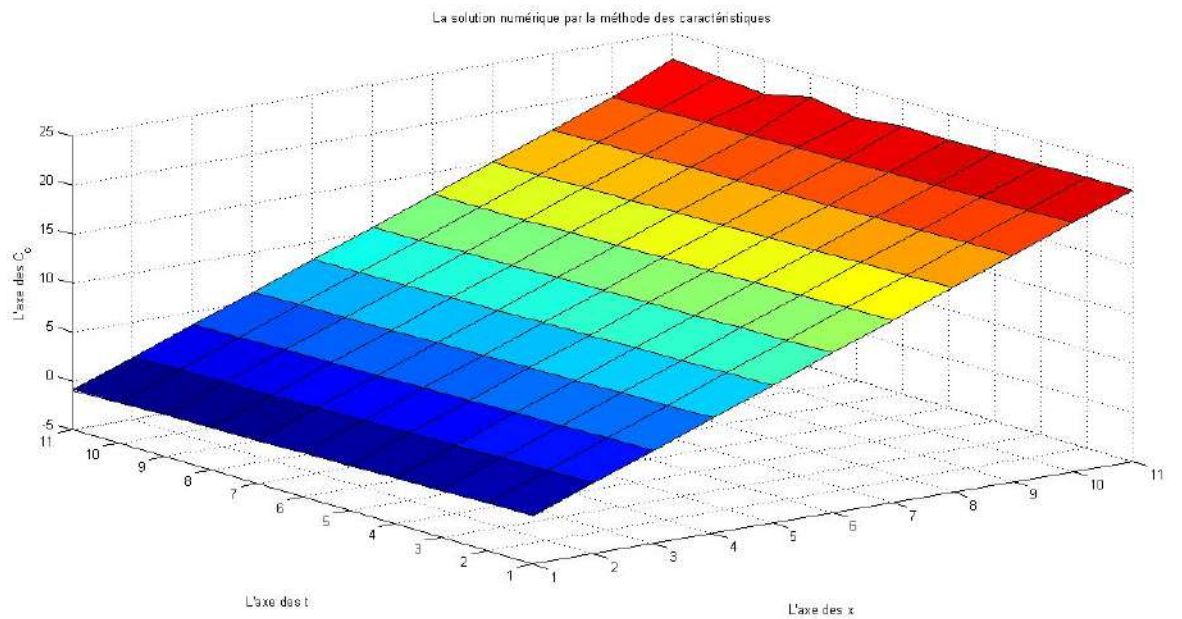


FIGURE 4.6 – Comparaison entre les solutions pour $T = 5$, $N = 10$, $U = 5$, $Nc = 25$.

Pour $Nc = 30$ avec un nombre de subdivisions $N = 10$, on constate une nette déviation de la solution obtenue par la méthode des caractéristiques de la solution exacte alors celle obtenue par les différences finies reste convergente comme le prouve les figures ci-dessous.

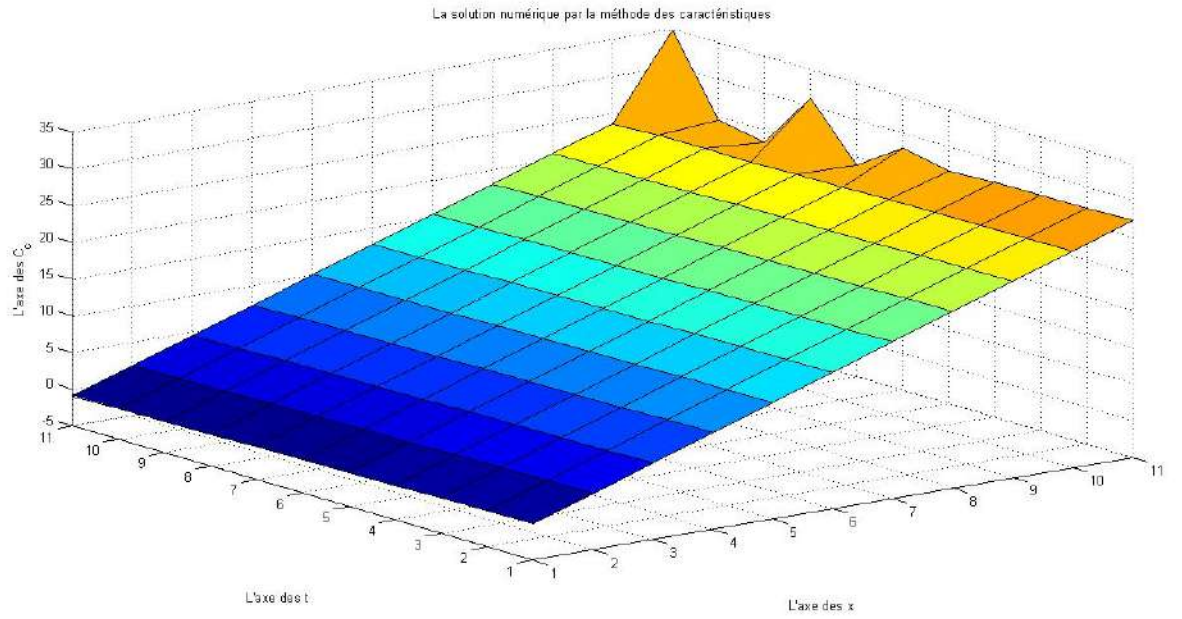


FIGURE 4.7 – Comparaison entre les solutions pour $T = 15$, $N = 10$, $U = 2$, $Nc = 30$.

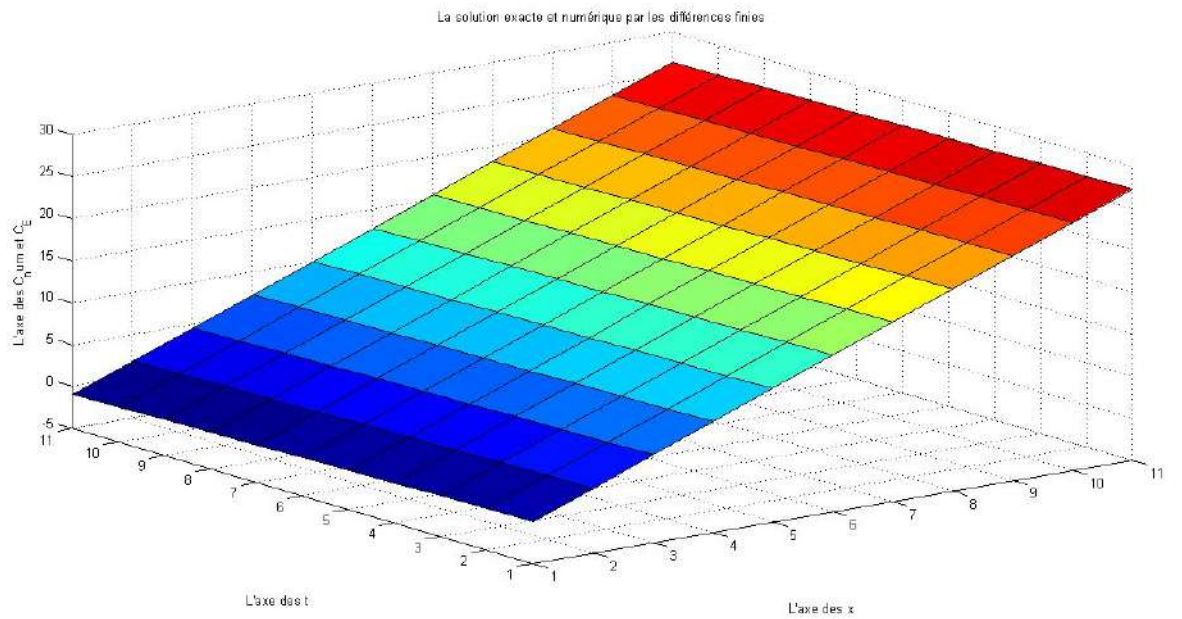


FIGURE 4.8 – Comparaison entre les solutions pour $T = 15$, $N = 10$, $U = 2$, $Nc = 30$.

Pour le même $Nc = 30$ mais en réduisant le nombre de subdivisions à $N = 5$, nous retrouvons une convergence de notre solution obtenue par la méthode des caractéristiques.

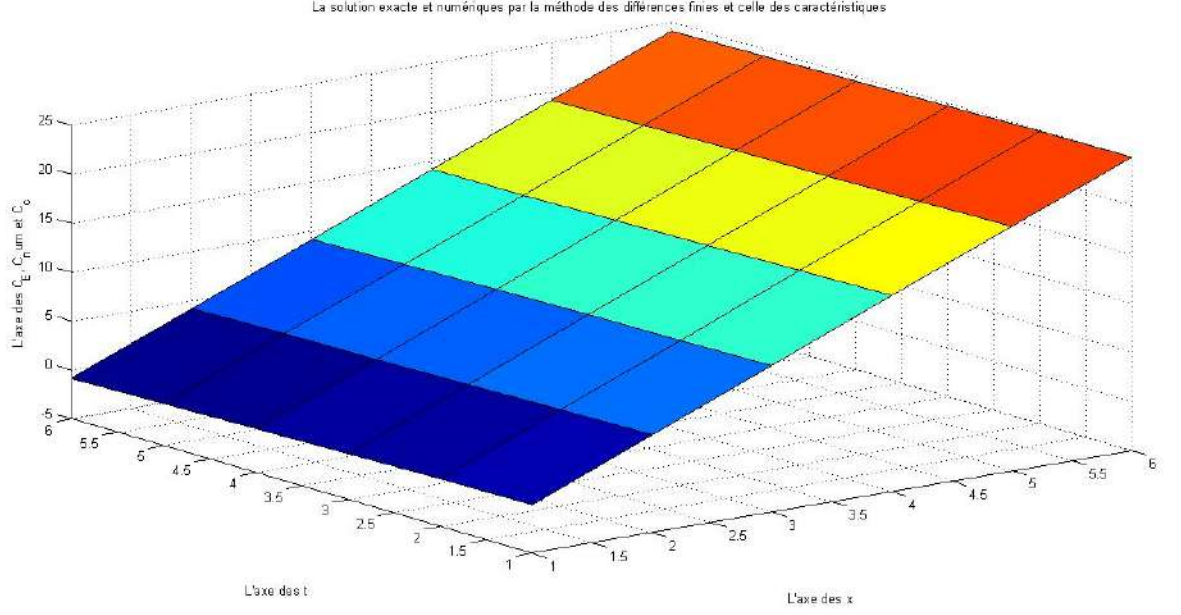


FIGURE 4.9 – Comparaison entre les solutions pour $T = 15$, $N = 5$, $U = 2$, $Nc = 30$.

Lorsque $0 < Nc < 1$, comme imposé dans la partie théorique les solutions numériques par la méthode des caractéristiques et celle par les différences finies convergent vers la solution exacte. Nous sommes allé au delà de cette condition pour voir le comportement de la solution par les caractéristiques, il est à noter que cette dernière reste convergente jusqu'à un certain seuil, à partir du quel elle dévie progressivement de la solution exacte pour un nombre de subdivisions assez grand, alors que pour un nombre de subdivisions petit même au delà du seuil la solution converge.

4.2.3 Discrétisation par les caractéristiques

Nous rajoutons dans cette partie un second membre au problème (4.4) considéré plus haut qui devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = f & \text{sur }]0, 1] \times]0, T] \text{ avec } U \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } f \in \mathbb{R}_+^* \\ C(x, 0) = C_0(x) \\ C(0, t) = g(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Les caractéristiques sont donc des droites de pente $\frac{1}{U}$ telle que :

$$\tan \theta = \frac{1}{U} = \frac{k}{N_c h}$$

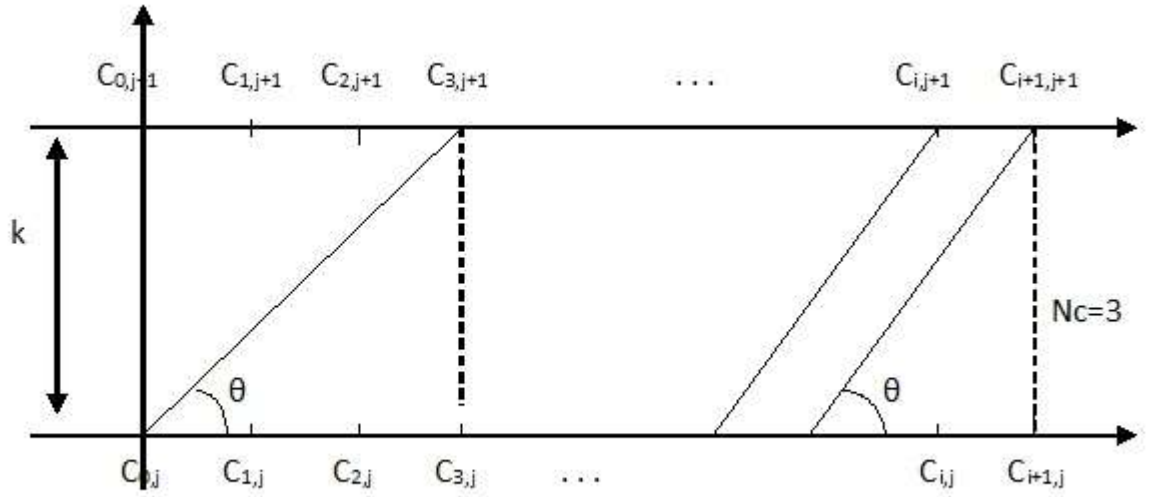


FIGURE 4.10 – Remontée pour un problème avec second membre et un nombre de courant entier.

Pour $N_c = \frac{Uk}{h} \in \mathbb{N}^*$.

On a d'après le point concernant l'apport du second membre traité au chapitre précédent

$$C(x, t) = C_0(x_0) + \int_0^t f(x(s), s) ds.$$

Une fois discrétisée, l'équation devient :

$$\begin{aligned} C_{i,j+1} &= C_{i-N_c,0} + \int_0^k f ds \text{ si } i \geq N_c, \\ \text{alors } C_{i,j+1} &= C_{i-N_c,j} + kf \text{ pour } i - N_c \geq 0. \end{aligned}$$

Si $i - N_c < 0$, on doit dans ce cas faire une interpolation linéaire sur l'axe temporel c'est-à-dire

$$C_{i,j+1} = \text{fonction}(g_j, g_{j+1})$$

Ainsi

$$\tan \theta = \frac{1}{U} = \frac{L_2}{h(N_c - 2)} = \frac{L_2}{h}$$

$$\Rightarrow L_2 = \frac{h}{U}$$

;

$$\alpha_2 = \frac{L_2}{k} = \frac{1}{N_c}$$

$$\Rightarrow C_{2,j+1} = \frac{1}{N_c} g_j + \left(1 - \frac{1}{N_c}\right) g_{j+1}$$

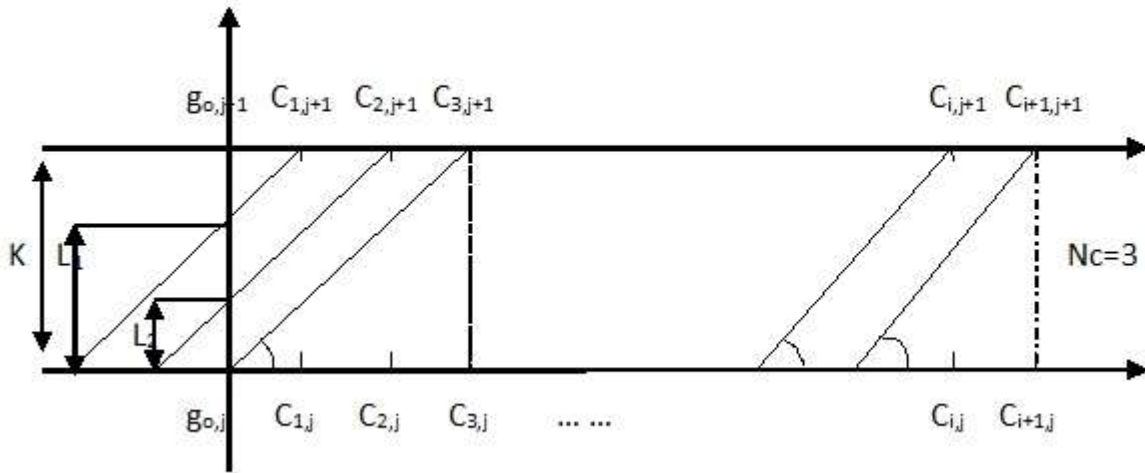


FIGURE 4.11 – Interpolation sur l'axe du temps.

Plus généralement, on a :

$$\tan \theta = \frac{1}{U} = \frac{L_i}{(N_c - i)h} \text{ pour } i < N_c$$

$$\Rightarrow L_i = \frac{(N_c - i)h}{U} = k - \frac{ih}{U}$$

Avec $\alpha_i = \frac{L_i}{k}$ d'où $\alpha_i = 1 - \frac{ih}{Uk} = 1 - \frac{i}{N_c}$. On sait que $C_{i,j+1} = C_{i,j}(\alpha_i) + kf$

D'où, on obtient la discrétisation qui suit :

$$C_{i,j+1} = (1 - \frac{i}{N_c})C_{0,j} + \frac{i}{N_c}C_{0,j+1} + kf \text{ pour } i < N_c.$$

Application

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = f & \text{sur }]0, 1] \times]0, T] \\ C(x, 0) = C_0(x) = (\frac{f}{2U} - 1)x \\ C(0, t) = g(t) = (U + \frac{f}{2})t \end{cases} \quad (4.8)$$

qui admet $(U + \frac{f}{2})t + (\frac{f}{2U} - 1)x$ comme solution exacte.

En procédant comme pour le premier cas et en tenant compte du terme source, on a le schéma DF suivant :

$$(1 + \frac{kU}{h})C_{i,j+1} - C_{i,j} - \frac{Uk}{h}C_{i-1,j+1} = kf$$

.

Le programme Matlab 3 quant à lui calcule la solution exacte et les solutions numériques par les caractéristiques et les différences finies du problème

de convection pure avec second membre discrétisé ci-dessus, puis par la suite procède à une comparaison entre les graphes des trois solutions en fonction des différents paramètres.

programme matlab 3

```
clear all
clc
T=input('Entrer le temps que prendra l''expérience T=')
N=input('Entrer le nombre de subdivisions de nos deux intervalles N=')
U=input('Entrer la valeur du champ de vitesse U=')
f=input('Entrer la valeur du terme source f=')
disp('Le pas du maillage par rapport à l'espace est h=');
h=1/(N+1);
disp('Le pas du maillage par rapport au temps est k= ');
k=T/(N+1);
disp('Les n?uds de l'espace x_i sont:'); x=0:h:1;
disp('Les n?uds du temps t_j sont:'); t=0:k:T; Nc=U*k/h
%pour un Nc<1 on a:
disp('La solution exacte du problème est C_E')
C_E=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        C_E(i,j)=(U+(f/2))*t(j)+((f/2*U)-1)*x(i);
    end
end
C_E
disp('La solution numérique du problème par DF est C_num');
C_num=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
    C_num(i,1)=((f/2*U)-1)*x(i);
end
for j=1:N+1
    C_num(1,j)=(U+(f/2))*t(j);
end
for i=2:N+1
    for j=1:N
        C_num(i,j+1)=(Nc*C_num(i-1,j+1)+C_num(i,j)+k*f)/(1+Nc);
    end
end
C_num
disp('La solution numérique du problème par les caractéristique est C_c')
C_c=zeros(N+1,N+1);
for i=1:N+1
    C_c(i,1)=((f/2*U)-1)*x(i);
end
for j=1:N+1
    C_c(1,j)=(U+(f/2))*t(j);
```

```

end
for i=2:N+1
    for j=1:N
        C_c(i,j+1)=(1-(i/Nc))*C_c(1,j)+(i/Nc)*C_c(1,j+1)+k*f;
    end
end
C_c
disp('Les moyennes des solutions sont:')
moyC_E=0;
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        moyC_E=moyC_E+C_E(i,j)/(N*N);
    end
end
moyC_num=0;
for i=1:N+1
    for j=0:N
        moyC_num=moyC_num+C_num(i,j+1)/(N*N);
    end
end
moyC_c=0;
for i=1:N+1
    for j=0:N
        moyC_c=moyC_c+C_c(i,j+1)/(N*N);
    end
end
moyC_E',moyC_num',moyC_c'
disp('L''erreur de discrétisation E1=')
E1=C_E-C_num
disp('L''erreur de discrétisation E2=')
E2=C_E-C_c
moyE1=0;
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        moyE1= moyE1+E1(i,j)/(N*N);
    end
end
moyE1
moyE2=0;
for i=1:N+1
    for j=1:N+1
        moyE2= moyE2+E2(i,j)/(N*N);
    end
end
moyE2
disp(' Le graphe de la solution exacte')
surf(C_E)

```

```

title('La solution exacte')
xlabel('L''axe des x'); ylabel('L''axe des t'); zlabel('L''axe des C_E');
disp(' Le graphe de la solution numérique par les différences finies')
surf(C_num)
title('La solution numérique par les différences finies')
xlabel('L''axe des x'); ylabel('L''axe des t'); zlabel('L''axe des C_num');
disp(' Le graphe de la solution numérique
      par la méthode des caractéristiques')
surf(C_c)
title('La solution numérique par les caractéristiques')
xlabel('L''axe des x'); ylabel('L''axe des t'); zlabel('L''axe des C_c');

```

Pour cette première exécution la condition posée lors de la discrétisation $i < Nc$ n'est pas toujours respectée ce qui fait que la solution obtenue par les caractéristiques diverge de la solution exacte, et celle par les différences finies converge, comme le prouve les figures qui suivent :

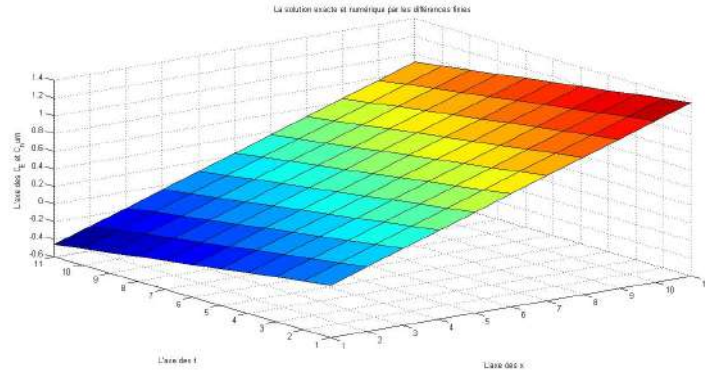


FIGURE 4.12 – Comparaison entre les solutions Pour $T = 1$, $N = 10$, $U = 1$, $Nc = 1$, $f = 1$.

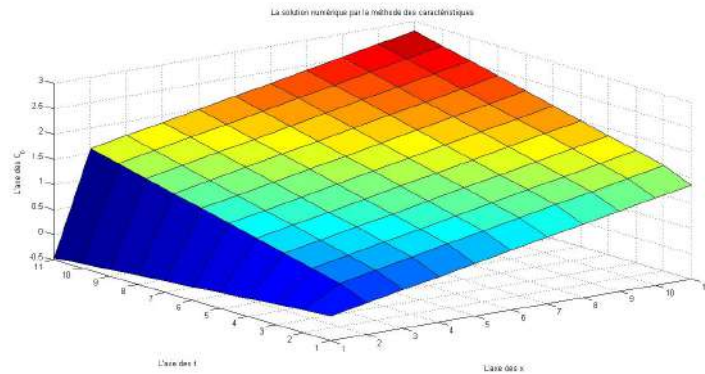


FIGURE 4.13 – Comparaison entre les solutions Pour $T = 1$, $N = 10$, $U = 1$, $Nc = 1$, $f = 1$.

Pour pouvoir respecter la condition nous varions le temps qui passe de $T = 1$ à $T = 5$, U de 1 à 5 et f de 1 à 5, la solution par les caractéristiques tend plus rapidement vers la solution exacte que dans le premier cas, alors que celle obtenue par les différences finies commence à diverger de la solution.

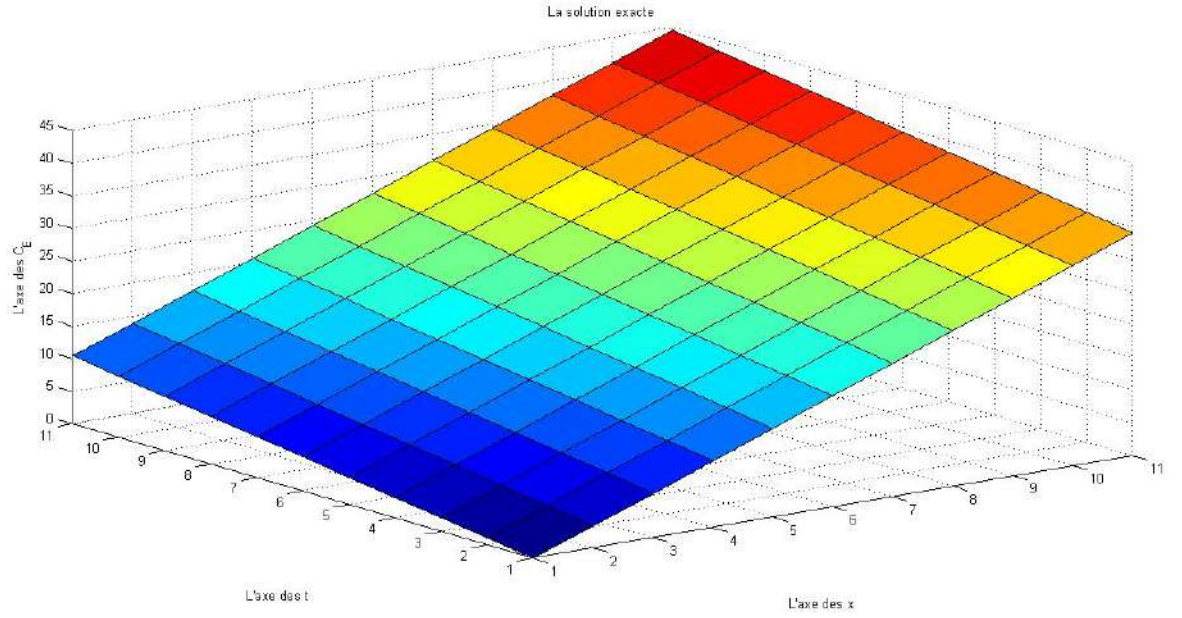


FIGURE 4.14 – Comparaison entre les solutions pour $T = 5$, $N = 10$, $U = 5$, $Nc = 25$, $f = 5$.

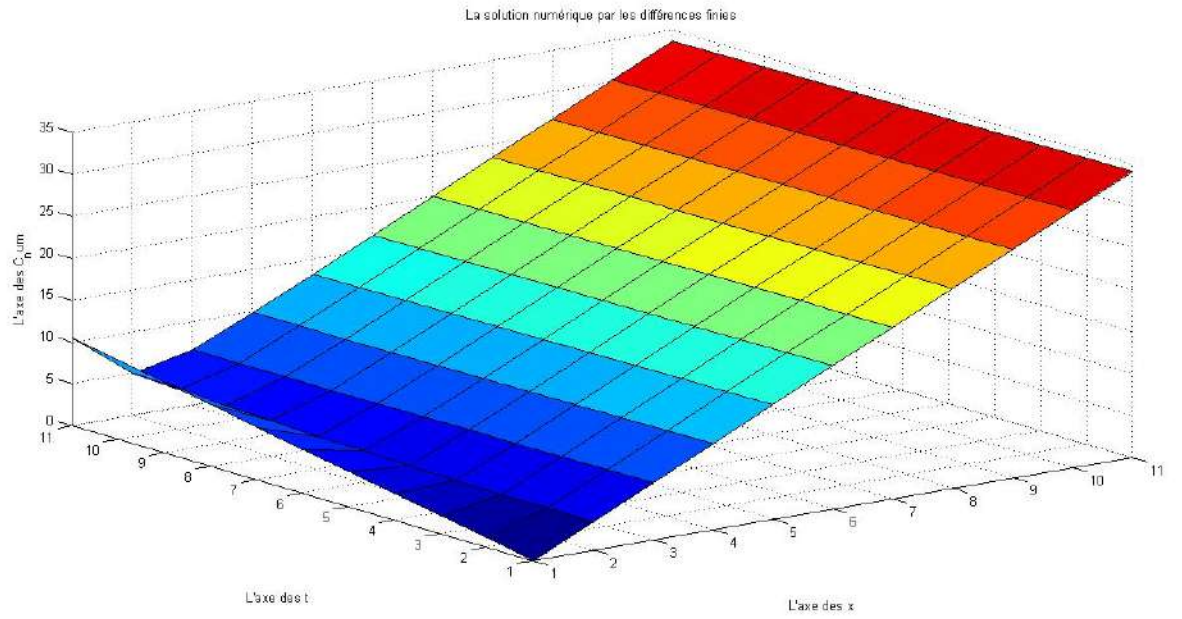


FIGURE 4.15 – Comparaison entre les solutions pour $T = 5$, $N = 10$, $U = 5$, $Nc = 25$, $f = 5$.

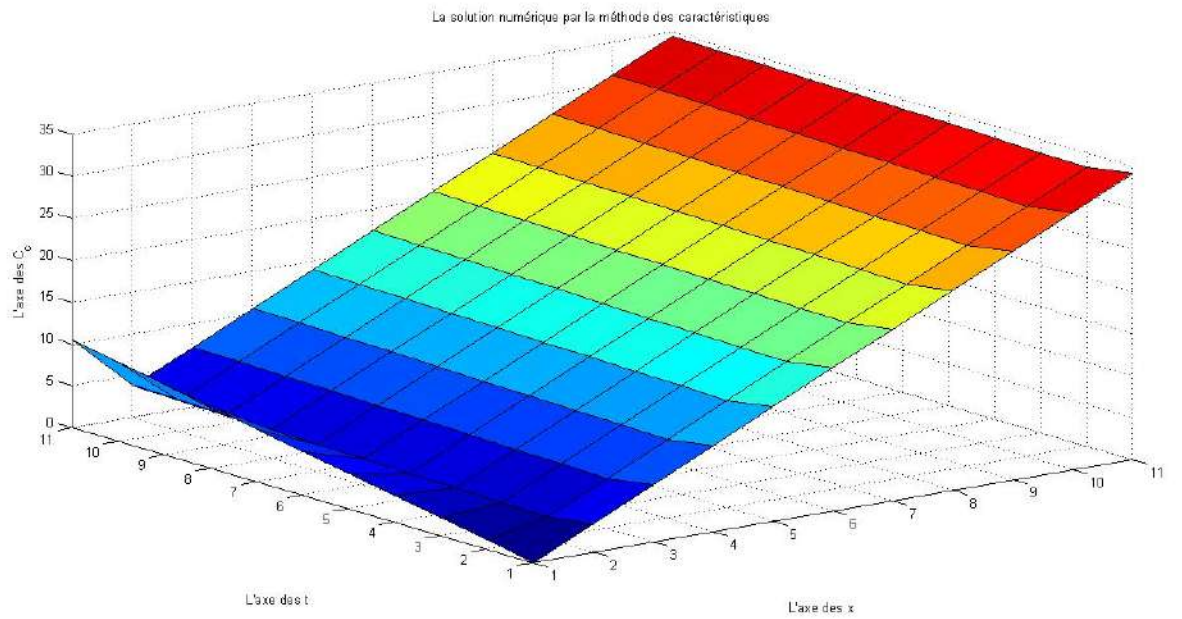


FIGURE 4.16 – Comparaison entre les solutions pour $T = 5$, $N = 10$, $U = 5$, $Nc = 25$, $f = 5$.

Nous pouvons à partir de ces résultats, conclure à la convergence plus rapide de la solution obtenue par la méthode des caractéristiques vers la solution exacte que celle obtenue par la méthode des différences finies, lorsque le Nc et la source f croissent.

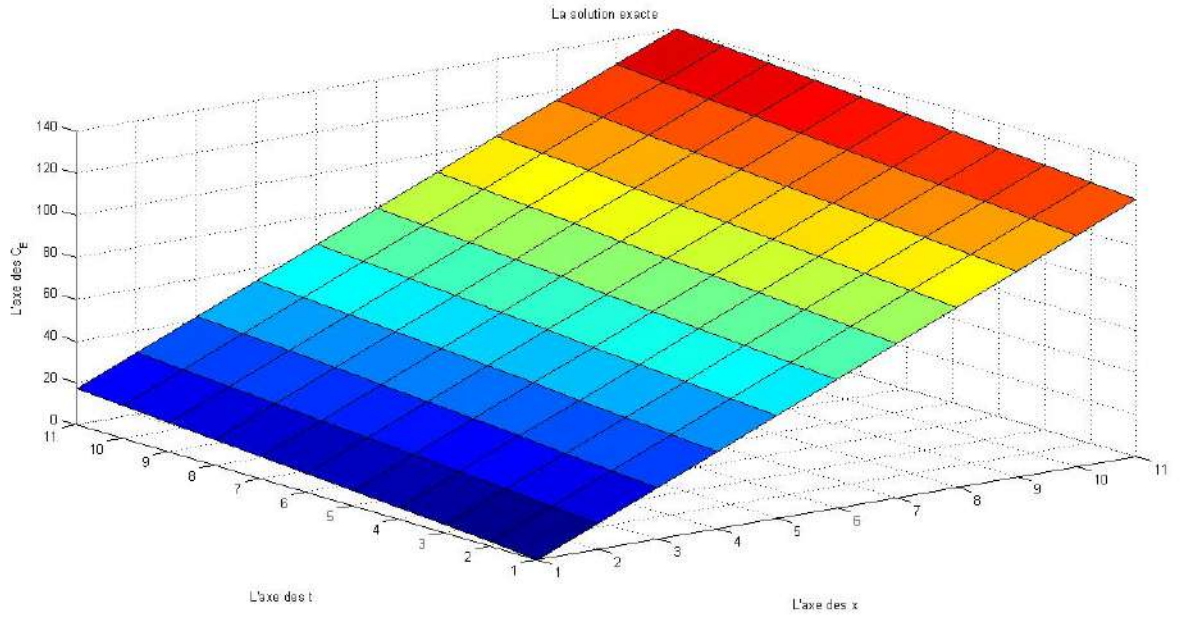


FIGURE 4.17 – Comparaison entre les solutions pour $T = 15$, $N = 10$, $U = 4$, $Nc = 60$, $f = 10$.

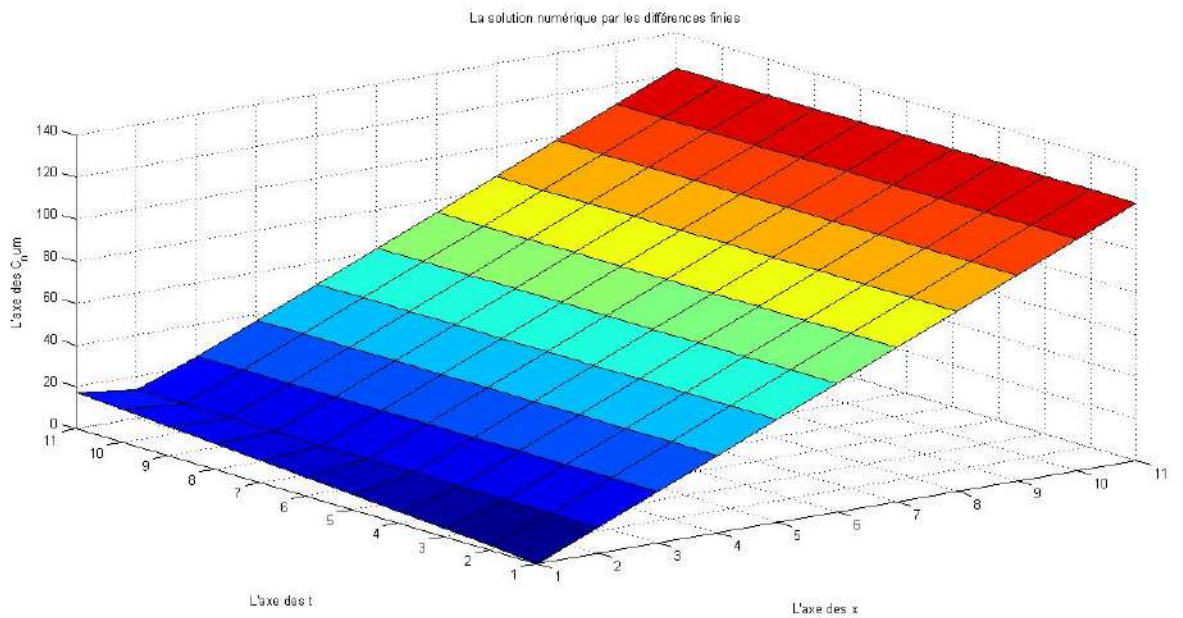


FIGURE 4.18 – Comparaison entre les solutions pour $T = 15$, $N = 10$, $U = 4$, $Nc = 60$, $f = 10$.

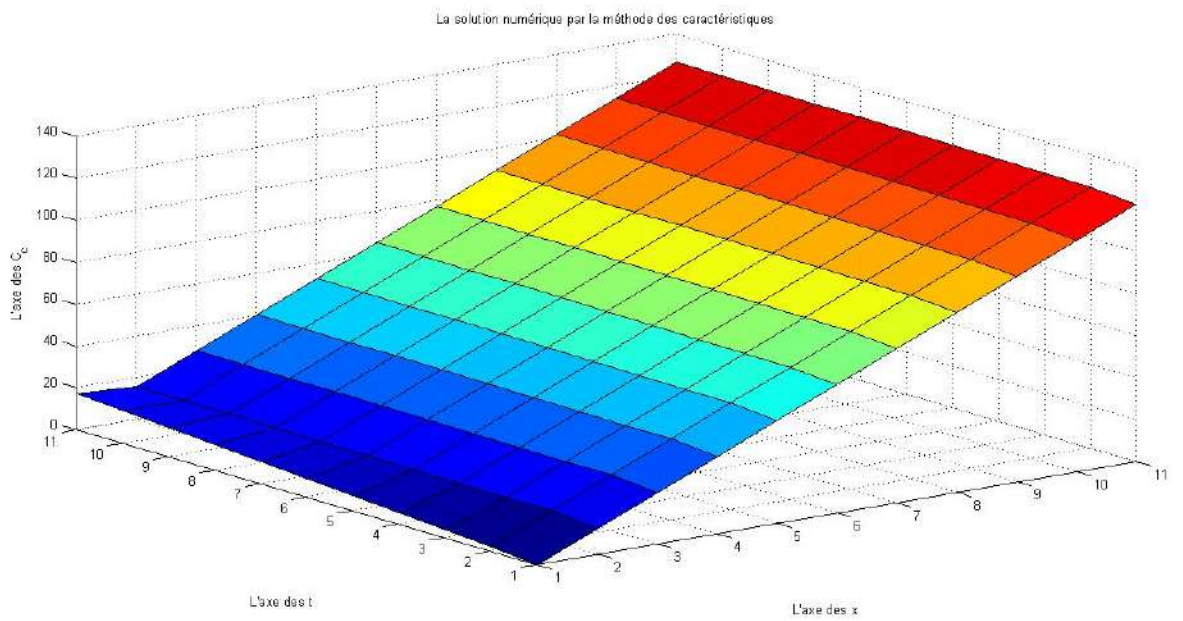


FIGURE 4.19 – Comparaison entre les solutions pour $T = 15$, $N = 10$, $U = 4$, $Nc = 60$, $f = 10$.

Conclusion

Ce mémoire se portait sur l'étude analytique et numériques (par la méthode des différences finies DF et la méthode des caractéristiques) de l'équation de convection-diffusion, le but et de pouvoir simuler et comparer entre la solution exacte et les deux solutions numériques.

On a varié les paramètres (temps, vitesse, nombre de courant et la source) pour observer le comportement de nos solutions en fonction de ces variations, sur un problème simplifié de convection naturelle.

Il faut noter que la méthode des différences finies est relativement simple à mettre en pratique tout en présentant un faible coût de calcul. Elle présente tout de même des inconvénients dont sa limitation à des géométries simples et des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

Bien que ne présentant pas de réelles difficultés théoriques, l'utilisation de la méthode des caractéristiques reste quand même très limitée, les principales causes de cette désaffection étant liées au besoin d'une structure de données enrichie, puis à certaines restrictions liées aux choix des formules de quadratures enfin à la nécessité de recourir à des interpolations d'ordres différents sur un même problème. Cependant, le caractère extrêmement local des caractéristiques reste un avantage majeur.

Il est dès lors logique de se demander quelles vont être les performances des ces algorithmes appliqués à un phénomène de diffusion pure, au cas général de convection-diffusion, ou sur un domaine plus complexe.

Perspectives

Nos perspectives portent en gros sur l'étude de l'équation de convection-diffusion dans sa forme générale, avec et sans terme source variable, sur un domaine d'étude plus complexe.

Bibliographie

- [1] A. Rahmoun, *Etude de l'équation de convection-diffusion par la méthode locale des caractéristiques*, mémoire de fin d'étude, Université Abou-Bekr Belkaid-Tlemcen, 1999.
- [2] E.Deriaz et D.Kolomenskiy *Stabilité sous condition CFL non linéaire*, ESAIM : proceedings, mars 2012, Vol.35, P.114-121.
- [3] S.Ouadouri et A.Izirouel, *Simulation d'un Système à Paramètres Distribués par la Méthode de Séparation d'Opérateurs*, Mémoire de fin d'Etudes, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, 2010.
- [4] D.Christophe et V.Armelle , *compte rendu de mad1*, Wikipédia, hmf.enseiht.fr/.../ANC/COMPTE_RENDUS/BESNC_F/Rapport.html.
- [5] R.Bédard, *Équations aux dérivées partielles*, Notes pour le cours équations aux dérivées partielles offert par le département de mathématiques de l'université du Québec à Montréal (UQAM). MAT 4112, Juillet 2007.
- [6] V.Manet, *Méthode des éléments finis*, vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode. 2013
- [7] W.Medaouar, *Simulation numérique du phénomène d'advection et de diffusion de la concentration d'un polluant dans un écoulement permanent bidimensionnel par la méthode des volumes finis*, Université Hassiba Benbouali de Chlef, 2012 .
- [8] *Stabilité de Von Neumann*, Wikipédia, [fr.wikipedia.org / wiki / Stabilité_de_Von_Neumann](http://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilité_de_Von_Neumann).
- [9] *méthode des caractéristiques*, Wikipédia, fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_des_caractéristiques.
- [10] Y.Alloui, *Convection naturelle induite par double diffusion et effet Soret dans un milieu fluide confiné*, Thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider-Biskra, 2018.