8 – 10 MAYIS 2017

ÇOKLU TERAZİ KURAMI
-
GENEL TARTMA FONKSİYONU

VE SONUÇLARI

HALİL SALİH ORHAN
ÖZEL PROFESYONEL EĞİTİM FEN LİSESİ

PROJE RAPORU

PROJE ADI
ÇOKLU TERAZİ KURAMI – GENEL TARTMA FONKSİYONU VE SONUÇLARI

PROJE DALI
MATEMATİK

HAZIRLAYAN
HALİL SALİH ORHAN

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Çoklu Terazi Kuramı:

Tanım: m adet kefesi bulunan bir terazimiz olsun.

İşleyiş: Terazi tartma işlemi sonucunda, kefelerini; kendisinden daha hafif kefeler, kendisinden daha yukarıda olacak şekilde hizalar.

Açıklamalar: Çoklu terazi kuramı, tamamen benim tasarladığım bir teoridir. Yaptığım literatür taramaları sonucunda bu teoriye benzer herhangi bir entry'e rastlamadım.

Genel Tartma Fonksiyonu:

Tanım: m kollu terazi yardımı ile; k tanesi kendi aralarında aynı, diğer özdeş $n-k$ tanesinden farklı, n nesne arasından k tane farklı nesneyi bulabilmemizi sağlayan minimum tartım sayısını:

$$\boldsymbol{f(m,k,n)}\ ;\ \boldsymbol{m,n,k} \in \mathbb{N}$$

göstersin.

Özellik:

(1) $\forall\, x \leq y \;\Leftrightarrow f(m,k,x) \leq f(m,k,y)$

P1) Aksini varsayalım.

$$\exists\, x,y \in \mathbb{N}\ ;\ x > y\ ve\ f(m,k,x) < f(m,k,y)$$

İçinde k tane hafif nesne bulunan y nesne arasına; bu nesnelerden bağımsız $x-y$ tane ağır nesne ilave edilir ise: İçinde k tane hafif nesne bulunan x nesneli bir öbek elde edilir. Bu durumun cevabı $f(m,k,x)$ olduğu için; $\exists\, x,y \in \mathbb{N}\ ;\ x > y\ ve\ f(m,k,x) < f(m,k,y)$ olması imkansızdır.

Projede Kullanılan Tanımlar ve Kısaltmalar:

1. **İndirgemeli Diziler:**

   Bir (u_n) dizisinde herhangi bir n doğal sayısından itibaren bütün terimler için;

   $$A_0u_{n+k} + A_1u_{n+k-1} + A_2u_{n+k-2} + \cdots + A_ku_n = 0$$

   şeklinde doğrusal bir bağıntı sağlanıyorsa (u_n) dizisine k-inci mertebeden bir doğrusal *indirgemeli dizi* denir.
   İndirgeme denklemini kullanarak dizinin tüm terimlerini elde edebiliriz.

2. **Öz Yinelemeli Fonksiyonlar:**

   Kendi kod bloğu içerisinde kendisini çağıran fonksiyonlardır. Bilgisayar biliminde bu fonksiyonlar, bazı algoritmaların daha anlaşılır ve kompleks olmayan kod yazılmasını sağlar. Yapısal olarak *indirgemeli dizi* ‘ye benzer.

3. **Flooring ve Ceiling Fonksiyonları:**

   $\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$ fonksiyonu(Flooring veya Tam Değer Fonksiyonu)**,** x’i aşmayan en büyük tamsayıyı gösterir.

   $\lceil x \rceil$ fonksiyonu(Ceiling veya Tavan Değer Fonksiyonu), x’den küçük olmayan en küçük tamsayıyı gösterir.

4. **Modülo(Modüler Aritmetik) Kavramı:**

   $$x \equiv y (mod\ m)$$

   ifadesi x ile y’nin m-ye bölümünden kalanların birbirine eşit olduğu anlamına gelir. Başka bir şekilde “x ile y sayısı modülo m-de birbirine denktir” diye ifade edilir.

5. **Logaritma Fonksiyonu:**

   Logaritma fonksiyonu $f(x) = n^x$ fonksiyonunun tersidir.
   $(n \in \mathbb{Z}^+ \ ve\ n > 1)$
   Ve $\log_n x$ olarak gösterilir. $\log_n x = f(x)^{-1}$dir.

2. Yöntem

Genel Tartma Fonksiyonu ve Çoklu Terazi Kuramının Bulunması Süreci:

Yaptığım matematik olimpiyatı çalışmaları sırasında rastladığım bir soru türü sayesinde, proje sürecine başladım. Bu soru en temel hali ile:

Eşit kollu bir terazi yardımı ile 1 tanesi diğerlerinden daha hafif olan 8 nesneden, farklı olan nesne minimum kaç tartma işlemi sonucu bulunması garanti edilebilir? 'dir. Ben bu soruyu; toplam n adet nesne için minimum tartma sayısını verecek bir formül çıkarmaya çalıştım. Ve bir formüle ulaştım. Daha sonraları; bu formülü eşit kollu terazi yerine kendi düşündüğüm çoklu teraziye göre, formülleştirmeye çalıştım. Ve sonuca ulaştım. Kendi düşündüğüm "Genel Tartma Fonksiyonu" 'nun bazı özel durumlar derledim. Çıkardığım sonuçların grafiklerini ve hesaplanmasını www.wolframalpha.com ve kendi yazdığım programlar sayesinde hesapladım.

Genel Tartma Fonksiyonu:

A- Çift Kollu Terazi 1 Farklı Nesne İçin
B- m Kollu Terazi 1 Farklı Nesne İçin
C- 3 Kollu Terazi 2 Farklı Nesne İçin

Arka Sayfaya Geçiniz→

A Çift Kollu Terazi 1 Farklı Nesne İçin $f(2,1,n)$

Soru: *" Çift kollu bir terazi yardımı ile 1 tanesi diğerlerinden daha hafif olan n adet nesneden, farklı olan nesne minimum kaç tartma işlemi sonucu bulunması garanti edilebilir?"*

$$(n \in \mathbb{Z}^{+}\ ve\ n \geq 1)$$

Cevap:

$$\boxed{\lceil \log_3 n \rceil}$$

İspat:

İddia1.1: $f(2,1,n) = 1 + f\left(2,1,\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil\right)$

İddia1.1 –in İspatı:

$f(2,1,n) = 1 + f(2,1,a)$ olsun. (a minimum değer)

$n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim;

a- $n = 3k$ için;

$a < k$ olamayacağını gösterelim. Eğer $a < k$ ise;

$kefelerde\ olmayan\ ve\ her\ iki\ kefedeki\ nesnelerin\ sayısı < k$ olmalıdır. Buradan; $toplam\ nesne\ sayısı < 3k$ olmalıdır.

Fakat $3k$ adet nesne olduğu için $a < k$ olamaz. Buradan $a \geq k$ olmak zorundadır.

$a = k$ için her zaman sağlayan durum gösterirsek daha az olamayacağı için $f(2,1,3k) = 1 + f(2,1,k)$ olmak zorundadır. $a = k$ için :

Her kefeye k adet nesne koyarsak istediğimiz durum sağlanır.

b- $n = 3k + 1$ ve $n = 3k + 2$ için;

$a \leq k$ olamayacağını gösterelim. Eğer $a \leq k$ ise;

$kefelerde\ olmayan\ ve\ her\ iki\ kefedeki\ nesnelerin\ sayısı \leq k$ olmalıdır. Buradan; $toplam\ nesne\ sayısı \leq 3k$ olmalıdır.

Fakat $3k + s$ adet nesne olduğu için $a \leq k$ olamaz. Buradan $a > k$ olmak zorundadır.

$a = k + 1$ için her zaman sağlayan durum gösterirsek daha az olamayacağı için $f(2,1,3k + s) = 1 + f(2,1,k + 1)$ olmak zorundadır.

$a = k + 1$ için :

Her kefeye $k + 1$ adet nesne koyarsak istediğimiz durum sağlanır.

Bu üç durumda iddia1.1 tarafından sağlandığı için iddia1.1 doğrudur.

İddia1.2: $f(2,1,n)$; $n \in [3^t + 1,\ 3^{t+1}]$ değerlerinde $t + 1$ değerine denktir.

($t > 0$ ve $t \in \mathbb{N}$)

İddia1.2 –in İspatı:

$f(2,1,n)$;

$n \in [4,9]$ aralığındayken 2 –dir.

$n \in [3^k + 1, 3^{k+1}]$ aralığındayken $k + 1$ değerini alsın.

$n \in [3^{k+1} + 1, 3^{k+2}]$ aralığındayken $k + 2$ olduğunu gösterelim:

iddia1.1-de n yerine $[3^{k+1} + 1, 3^{k+2}]$ aralığında bir sayı koyarsak gelecek ifade;

$$f(2,1,n) = 1 + f(2,1,a)\ ve\ a \in [3^k + 1, 3^{k+1}]$$

olur.

Ve $f(2,1,a)$, $a \in [3^k + 1, 3^{k+1}]$ aralığındayken $k + 1$ alacağı için, $f(2,1,n)$; $n \in [3^{k+1} + 1, 3^{k+2}]$ aralığındayken $k + 2$ değerini alır.

Buradan İddia1.2 doğrudur.

İddia1.3: $f(2,1,n) = \lceil \log_3 n \rceil$

İddia1.3 –ün İspatı:

$\lceil \log_3 n \rceil$; $n \in [3^t + 1,\ 3^{t+1}]$ değerlerinde $t + 1$ değerine denktir. İddia1.2-nin doğruluğundan İddia1.3 doğrudur.

İddia1.3 –ten sorunun cevabı:

$$\boxed{\lceil \log_3 n \rceil}$$

gelir.

B m Kollu Terazi 1 Farklı Nesne İçin $f(m,1,n)$

Soru: *" m kollu bir terazi yardımı ile 1 tanesi diğerlerinden daha hafif olan n adet nesneden, farklı olan nesne minimum kaç tartma işlemi sonucu bulunması garanti edilebilir?"*

$$(m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq 2 \ ve \ n \geq 1)$$

Cevap:

$$\boxed{\lceil \log_{m+1} n \rceil}$$

İspat:

İddia2.1: $f(m,1,n) = 1 + f\left(m, 1, \left\lfloor \frac{n+m}{m+1} \right\rfloor\right)$

İddia2.1 –in İspatı:

$f(m,1,n) = 1 + f(m,1,a)$ olsun. (a minimum değer)

$n = (m+1)k$, $n = (m+1)k + s$; $s \in [1, m]$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim;

a- $n = (m+1)k$ için;

$a < k$ olamayacağını gösterelim. Eğer $a < k$ ise;

$kefelerde\ olmayan\ ve\ her\ kefedeki\ nesnelerin\ sayısı < k$ olmalıdır. Buradan; $toplam\ nesne\ sayısı < (m+1)k$ olmalıdır. Fakat $(m+1)k$ adet nesne olduğu için $a < k$ olamaz. Buradan $a \geq k$ olmak zorundadır.

$a = k$ için her zaman sağlayan durum gösterirsek daha az olamayacağı için $f(m,1,(m+1)k) = 1 + f(m,1,k)$ olmak zorundadır. $a = k$ için :

Her kefeye k adet nesne koyarsak istediğimiz durum sağlanır.

c- $n = (m+1)k + s$ için;

$a \leq k$ olamayacağını gösterelim. Eğer $a \leq k$ ise;

$kefelerde\ olmayan\ ve\ her\ \ kefedeki\ nesnelerin\ sayısı \leq k$ olmalıdır. Buradan; $toplam\ nesne\ sayısı \leq (m+1)k$ olmalıdır. Fakat $(m+1)k + s$ adet nesne olduğu için $a \leq k$ olamaz. Buradan $a > k$ olmak zorundadır.

$a = k + 1$ için her zaman sağlayan durum gösterirsek daha az olamayacağı için $f(m,1,(m+1)k + s) = 1 + f(m,1,k+1)$ olmak zorundadır. $a = k + 1$ için :

Her kefeye $k + 1$ adet nesne koyarsak istediğimiz durum sağlanır.

Bu üç durumda iddia2.1 tarafından sağlandığı için iddia2.1 doğrudur.

İddia2.2: $f(m, 1, n)$; $n \in [(m+1)^t + 1, (m+1)^{t+1}]$ değerlerinde $t+1$ değerine denktir.

$(t > 0$ ve $t \in \mathbb{N})$

İddia2.2 –in İspatı:

$f(m, 1, n)$;

$n \in [m+2, (m+1)^2]$ aralığındayken 2 –dir.

$n \in [(m+1)^k + 1, (m+1)^{k+1}]$ aralığındayken $k+1$ değerini alsın.

$n \in [(m+1)^{k+1} + 1, (m+1)^{k+2}]$ aralığındayken $k+2$ olduğunu gösterelim:

iddia2.1-de n yerine $[(m+1)^{k+1} + 1, (m+1)^{k+2}]$ aralığında bir sayı koyarsak gelecek ifade;

$f(m, 1, n) = 1 + f(m, 1, a)$; $a \in [(m+1)^k + 1, (m+1)^{k+1}]$ olur.

Ve $f(m, 1, a)$, $a \in [(m+1)^k + 1, (m+1)^{k+1}]$ aralığındayken $k+1$ alacağı için, $f(m, 1, n)$; $n \in [(m+1)^{k+1} + 1, (m+1)^{k+2}]$ aralığındayken $k+2$ değerini alır.

Buradan İddia2.2 doğrudur.

İddia2.3: $f(m, 1, n) = \lceil \log_{m+1} n \rceil$

İddia2.3 –ün İspatı:

$\lceil \log_{m+1} n \rceil$; $n \in [(m+1)^t + 1, (m+1)^{t+1}]$ değerlerinde $t+1$ değerine denktir. İddia2.2-nin doğruluğundan İddia2.3 doğrudur.

İddia2.3 –ten sorunun cevabı:

$$\boxed{\lceil \log_{m+1} n \rceil}$$

gelir.

C 3 Kollu Terazi 2 Farklı Nesne İçin $f(3,2,n)$

Soru: *" 3 kollu bir terazi yardımı ile 2 tanesi diğerlerinden daha hafif olan n adet nesneden, farklı olan nesneler minimum kaç tartma işlemi sonucu bulunması garanti edilebilir?"*

$(n \in \mathbb{Z}^{+}\ ve\ n \geq 2)$

Cevap:

$$\boxed{\lceil \log_2 n \rceil - 1}$$

İspat:

İddia3.1: $\boldsymbol{f(3,2,2x) \leq 2f(3,1,x);\ x \in \mathbb{Z}^{+}}$

İddia3.1-in İspatı:

$x = 1$ için ---> $0 \leq 0$ olduğundan doğru.

$x = 2$ için ---> $1 \leq 2$ olduğundan doğru.

$x < 2k$ için doğru olsun.

$x = 2k$ için doğru olduğunu gösterelim.

$\boldsymbol{x = 2k}$ **için --->** $\boldsymbol{f(3,2,4k) \leq ?\, 2f(3,1,2k)}$

$4k$ tane nesne olduğu için her kefeye k adet nesne koymamız gerekir. Bu tartma işlemi sonucu 3 farklı denge durumu meydana gelebilir. Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

Bunlar:

A- *Terazinin üç kefesinin aynı hizada olması;*

Bu durumda farklı olan nesneler kefelerin dışındadır. Buradan farklı nesneler k nesne içerisindedir. Buradan;

$$\boxed{f(3,2,4k) = 1 + f(3,2,k)}$$

gelir.

B- *Terazinin iki kefesinin diğer kefeden aşağıda olması;*

Bu durumun olabilmesi iki farklı şekilde olabilir;

1- *Yukarıdaki kefede 1 tane, kefelerde olmayan 1 tane farklı nesne olması*
2- *Yukarıdaki kefede 2 tane farklı nesne olması*

Buradan iki farklı şey yapılabilir:

i- Hiç tartma işlemi yapmadan bu iki durumun hangisinin olduğunu anlayamayız. Bu durumların hangisi olduğunu bilmeden yapabileceğimiz tek yorum; farklı nesneleri yukarıdaki kefe ve kefelerin dışındaki nesnelerin birleşiminin içindedir. Buradan;

$$f(3,2,4k) = 1 + f(3,2,2k)$$

ii- Bir tartma işlemi daha yaparsak hangi durumun olduğu anlaşılır. Eğer 1. Durum ise, ya kefe ile kefeler dışındaki nesneleri ayrı ayrı $f(3,1,k)$ tartma işlemi yaparız;

$$f(3,2,4k) = 2 + 2f(3,1,k)$$

Ya da kefe ile kefeler dışındaki nesneleri birleştirip $f(3,2,2k)$ tartma işlemi yaparız.

$$f(3,2,4k) = 2 + f(3,2,2k)$$

İddia3.1-de $x < 2k$ durumlarını doğru kabul ettiğimiz için bu durumun cevabı;

$$f(3,2,4k) = 2 + f(3,2,2k)$$

Eğer 2. Durum ise, $f(3,2,k)$ tartma işlemi yaparız;

$$f(3,2,4k) = 2 + f(3,2,k)$$

Bu iki durumdan en fazla olanı almak zorundayız.

ii. Durumunun cevabı;

$$f(3,2,4k) = 2 + f(3,2,2k)$$

gelir.

i durumunu yapmak daha az tartma işlemi gerektirdiği için minimum tartma sayısı için i durumu yapılmalıdır. Buradan B durumunun cevabı:

$$\boxed{f(3,2,4k) = 1 + f(3,2,2k)}$$

gelir.

C- Terazinin iki kefesinin diğer kefeden yukarıda olması;

Bu durumda yukarıdaki kefelerin her birinde birer tane farklı bilye vardır. Buradan ya her kefeyi ayrı ayrı $f(3,1,k)$ tartımda buluruz;

$$1 + 2f(3,1,k)$$

Ya da iki kefedeki nesneleri birleştirip $f(3,2,2k)$ tartımda buluruz;

$$1 + f(3,2,2k)$$

İddia3.1-de $x < 2k$ durumlarını doğru kabul ettiğimiz için C durumunun cevabı;

$$\boxed{f(3,2,4k) = 1 + f(3,2,2k)}$$

gelir.

A, B ve C durumlarından cevabı en çok olanı almak zorundayız. Buradan;

$$\boxed{f(3,2,4k) = 1 + f(3,2,2k)}$$

gelir.

$f(3,2,4k) = 1 + f(3,2,2k)$ ifadesinde k yerine sırası ile $2^{t-2}, 2^{t-3}, \dots, 2^0$ koyarsak ve taraf tarafa gelen ifadeleri toplayıp sadeleştirirsek gelecek ifade:

$$f(3,2,2^t) = t - 1 + f(3,2,2)$$

dir. $f(3,2,2) = 0$ olduğundan;

$$\boxed{f(3,2,2^t) = t - 1}$$

gelir.

$\forall\, x \leq y \iff f(m,k.x) \leq f(m,k,y)$ olduğu için;

$$\boxed{t - 1 \leq f(3,2,2^t + 2s) \leq t; s \in [0, 2^t - 2^{t-1}] ve\ s \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{t \leq 2f(3,1,2^{t-1} + s); \in [0, 2^t - 2^{t-1}] ve\ s \in \mathbb{Z}}$$

ifadeleri doğrudur. Bu iki ifadeden;

$$\boxed{f(3,2,2^t + 2s) \leq 2f(3,1,2^{t-1} + s)}$$

Bu ifadeden;

$$\boxed{f(3,2,4k) \leq 2f(3,1,2k)}$$

$$\boxed{f(3,2,4k + 2) \leq 2f(3,1,2k + 1)}$$

elde edilir. Buradan İddia3.1 $x = 2k$ ve $x = 2k + 1$ için doğrudur.
Tümevarımdan $x \in \mathbb{Z}^+$için İddia3.1 doğrudur. Buradan İddia3.1 doğrudur.

İddia3.2: $\boldsymbol{f(3,2,4k+1) = 1 + f(3,2,2k+1); k \in \mathbb{Z}^+}$

İddia3.2-in İspatı:

$4k+1$ tane nesne olduğu için her kefeye k adet nesne koymamız gerekir. Bu tartma işlemi sonucu 3 farklı denge durumu meydana gelebilir. Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim. Bunlar:

A- Terazinin üç kefesinin aynı hizada olması;

Bu durumda farklı olan nesneler kefelerin dışındadır. Buradan farklı nesneler $k+1$ tane nesne içerisindedir. Buradan;

$$\boxed{f(3,2,4k+1) = 1 + f(3,2,k+1)}$$

gelir.

B- Terazinin iki kefesinin diğer kefeden aşağıda olması;

Bu durumun olabilmesi iki farklı şekilde olabilir;

1- Yukarıdaki kefede 1 tane, kefelerde olmayan 1 tane farklı nesne olması
2- Yukarıdaki kefede 2 tane farklı nesne olması

Buradan iki farklı şey yapılabilir:

i- Hiç tartma işlemi yapmadan bu iki durumun hangisinin olduğunu anlayamayız. Bu durumların hangisi olduğunu bilmeden yapabileceğimiz tek yorum; farklı nesneleri yukarıdaki kefe ve kefelerin dışındaki nesnelerin birleşiminin içindedir. Buradan;

$$f(3,2,4k+1) = 1 + f(3,2,2k+1)$$

ii- Bir tartma işlemi daha yaparsak hangi durumun olduğu anlaşılır. Eğer 1. Durum ise, ya kefe ile kefeler dışındaki nesnelere toplamda $f(3,1,k) + f(3,1,k+1)$ tartma işlemi yaparız;

$$f(3,2,4k+1) = 2 + f(3,1,k) + f(3,1,k+1)$$

Ya da kefe ile kefeler dışındaki nesneleri birleştirip $f(3,2,2k+1)$ tartma işlemi yaparız.

$$f(3,2,4k) = 2 + f(3,2,2k+1)$$

İddia3.1'in doğruluğundan; 1. Durumun cevabı;

$$f(3,2,4k+1) = 2 + f(3,2,2k+1)$$

gelir.

Eğer 2. Durum ise, $f(3,2,k)$ tartma işlemi yaparız;

$$f(3,2,4k) = 2 + f(3,2,k)$$

Bu iki durumdan en çok olanı almak zorundayız. i durumunu yapmak daha az tartma işlemi gerektirdiği için minimum tartma sayısı için i durumu yapılmalıdır.

B durumunun cevabı:

$$\boxed{f(3,2,4k+1) = 1 + f(3,2,2k+1)}$$

gelir.

C- Terazinin iki kefesinin diğer kefeden yukarıda olması;

Bu durumda yukarıdaki kefelerin her birinde birer tane farklı bilye vardır. Buradan ya her kefeyi ayrı ayrı $f(3,1,k)$ tartımda buluruz.

$$1 + 2f(3,1,k)$$

Ya da iki kefedeki nesneleri birleştirip $f(3,2,2k)$ tartımda buluruz.

$$1 + f(3,2,2k)$$

İddia3.1 göz önüne alındığında C durumunun cevabı ;

$$f(3,2,4k+1) = 1 + f(3,2,2k)$$

gelir.

A, B ve C durumlarından cevabı en çok olanı almak zorundayız. Buradan;

$$\boxed{f(3,2,4k+1) = 1 + f(3,2,2k+1)}$$

gelir.

Buradan İddia3.2 doğrudur.

$f(3,2,4k+1) = 1 + f(3,2,2k+1)$ ifadesinde k yerine sırası ile $2^{t-2}, 2^{t-3}, \dots, 2^0$ koyarsak ve taraf tarafa gelen ifadeleri toplayıp sadeleştirirsek gelecek ifade:

$$f(3,2,2^t+1) = t - 1 + f(3,2,3)$$

dir. $f(3,2,3) = 1$ olduğundan

$$\boxed{f(3,2,2^t+1) = t}$$

gelir.

İddia3.3: $\boldsymbol{f(3,2,2^x+s)=x; s\in[1,2^{x+1}-2^x]; x,s\in\mathbb{Z}^+}$

İddia3.3-in İspatı:

$f(3,2,2^t+1)=t$, $f(3,2,2^{t+1})=t$ ve $\forall\, x\leq y \Leftrightarrow f(m,k,x)\leq f(m,k,y)$ olduğundan;

$$\boxed{f(3,2,2^t+s)=t; s\in[1,2^{t+1}-2^t]; t,s\in\mathbb{Z}^+}$$

gelir.

İddia3.4: $\boldsymbol{f(3,2,n)=\lceil log_2 n\rceil-1; n\in\mathbb{Z}^+}$

İddia3.4-in İspatı:

$\lceil\log_2 n\rceil-1$; $n\in[2^t+1,2^{t+1}]$ aralığında t değerini alır. Bu durum; $f(3,2,n)$ için de geçerli olduğu için;

$$\boxed{f(3,2,n)=\lceil\log_2 n\rceil-1}$$

gelir.

3. Bulgular

1. **Soru:** *" Çift kollu bir terazi yardımı ile 1 tanesi diğerlerinden daha hafif olan n adet nesneden, farklı olan nesne minimum kaç tartma işlemi sonucu bulunması garanti edilebilir?"*

$$(n \in \mathbb{Z}^{+} \; ve \; n \geq 1)$$

Cevap:

$$\boxed{\lceil \log_3 n \rceil}$$

2. **Soru:** *" m kollu bir terazi yardımı ile 1 tanesi diğerlerinden daha hafif olan n adet nesneden, farklı olan nesne minimum kaç tartma işlemi sonucu bulunması garanti edilebilir?"*

$$(m, n \in \mathbb{Z}^{+}, m \geq 2 \; ve \; n \geq 1)$$

Cevap:

$$\boxed{\lceil \log_{m+1} n \rceil}$$

3. **Soru:** *" 3 kollu bir terazi yardımı ile 2 tanesi diğerlerinden daha hafif olan n adet nesneden, farklı olan nesneler minimum kaç tartma işlemi sonucu bulunması garanti edilebilir?"*

$$(n \in \mathbb{Z}^{+} \; ve \; n \geq 2)$$

Cevap:

$$\boxed{\lceil \log_2 n \rceil - 1}$$

4. Sonuç

1. Çoklu Terazi Kuramı oluşturuldu.
2. Belirli durumlar için Genel Tartma Fonksiyonu bulundu.
3. Genel tartma fonksiyonu ile logaritma fonksiyonun ilişkisi gözlendi.

5. Öneriler

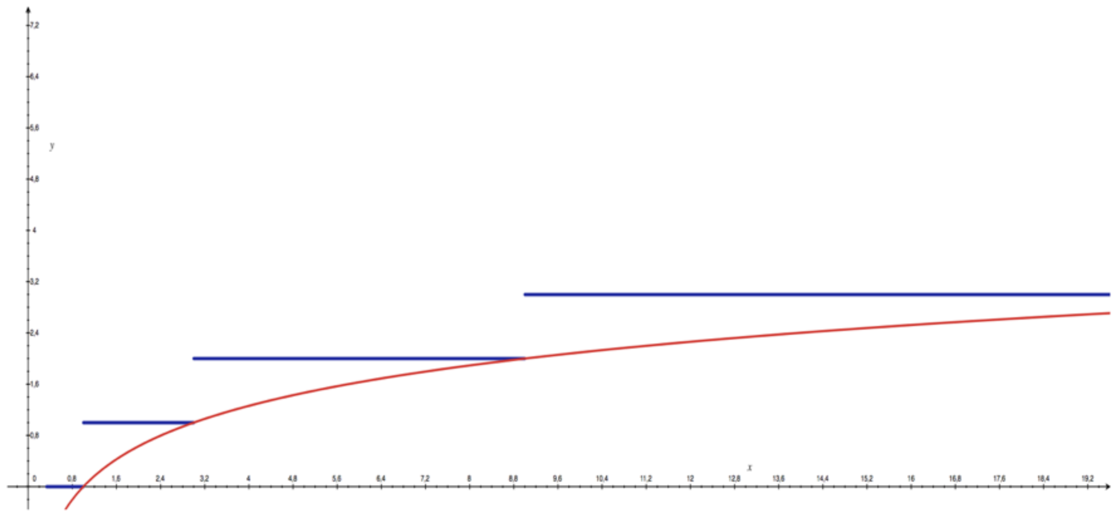
1. Fabrikalarda; ürün serisi içinde hatalı ürünler olduğu tespit edildikten sonra, Ürün serisinin içinde hatalı ürünü bulmak için ; ideal iş gücü ideal masrafla hatalı ürünlerin bulunmasının sağlanması.
2. Üniversiteye geçiş sınavları ve bilim olimpiyatlarında çıkabilecek bir soru tipi oluşturulması.

6. Kaynakça

1. http://n1b-algo.blogspot.com.tr
2. https://www.quora.com/There-are-N-balls-out-of-which-1-has-a-different-weight-and-the-rest-N-1-are-identical-in-weight-There-is-a-weighing-instrument-which-can-compare-weights-of-only-2-at-a-time-What-is-the-minimum-number-of-weighings-that-are-needed-to-be-done-in-order-to-find-the-odd-ball-out
3. TÜBİTAK Ulusal Ortaokul Ve Lise Olimpiyatı Soru Kitapçıkları
4. Akdeniz Üniversitesi Antalya Matematik Olimpiyatları Soru Kitapçıkları
5. Özdemir M., Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 2, Altın Nokta Yayınları, 2014.
6. Özdemir M., Dahimatik, Altın Nokta Yayınları, 2013.
7. Alizade R., Ufuktepe Ü., Sonlu Matematik, Altın Nokta Yayınları,2012.
8. Andrescu T., Enescu B., Mathematical Olympiad Treasures, Birkhäuser, 2006
9. http://geomania.org/forum/fantezi-cebir-arsivi/indirgemeli-dizi-problemleri-2567/?action=dlattach;attach=11307/
10. http://www.ozanaki.com/home/uploads/teaching/bst201-veri-yapilari/04-recursive-fonksiyonlar.pdf
11. İndirgemeli Diziler, Türk Matematik Derneği
12. http://www.wolframalpha.com
13. https://halils00.github.io/coklu-terazi-kurami/

7. Ekler

1.



$f(2,1,x);\ x \in [1,20]\ iken\ grafiği(mavi)$

$\log_3 x\ ;\ x \in [1,20]\ iken\ grafiği(kırmızı)$

2.

$f(m,1,x)'in;\ tablodaki\ x, m\ değerleri\ için\ sonuçları$					
x | m	3	4	6	9	13
10000	7	6	5	4	4
10000000	12	11	9	7	7
4242424242	16	14	12	10	9
32323236777	18	16	13	11	10
99999999999	19	16	14	11	10
56	3	3	3	2	2
379	5	4	4	3	3
6563	7	6	5	4	4
4545422	12	10	8	7	6
6666666	12	10	9	7	6
33378535	13	11	9	8	7

3.

$f(3{,}2,x)'in; tablodaki\ x,m\ değerleri\ için\ sonuçları$	
x	$\boldsymbol{f(3,2,x)}$
345	**8**
567	**9**
463	**8**
10000	**13**
565438	**19**
6664321	**22**
8664322	**23**

4.

https://halilsalihorhan.github.io/coklu-terazi-kurami/

```
<html>
            <body background="background.png">
                <center>
                  F[
                    <input id="a" type="text" />,
                    <input id="b" type="text" />,
                    <input id="c" type="text" />]
                    <br />
                    <br />
                    <button type="button" id="myBtn"
        onclick="calculate()">Calculate</button>
                    <br />
                    <br />"<span id="M"></span>" kollu terazide "<span
        id="N"></span>" tanesi diğerlerinden farklı "<span id="K"></span>"
        nesne arasından farklı olan nesneler;"<span id="t"></span>" tartımda
        bulunması garanti edilebilir.
                </center>

                <script>
                    var inputA = document.getElementById("a");
                    var inputB = document.getElementById("b");
                    var inputC = document.getElementById("c");
                    var spanResult = document.getElementById("t");
                    var spanM = document.getElementById("M");
                    var spanN = document.getElementById("N");
                    var spanK = document.getElementById("K");
                    inputC.addEventListener("keyup", function(event) {
```

```
                event.preventDefault();
                if (event.keyCode == 13) {
                    calculate();
                }
            });
            function f(x, y, z) {
              if (y == 1) {
                return Math.ceil(Math.log(z) / Math.log(x + 1));
              }
              if (y == 2) {
                if (x == 3) {
                  return Math.ceil(Math.log(z) / Math.log(2)) - 1;
                }
              }
            }

            function calculate() {
              var q = parseInt(inputA.value);
              var w = parseInt(inputB.value);
              var e = parseInt(inputC.value);
              var s = f(q, w, e);
              spanResult.innerHTML = s;
              spanM.innerHTML = inputA.value;
              spanN.innerHTML = inputB.value;
              spanK.innerHTML = inputC.value;
            }
        </script>
        <style>
            input {
              width: 40px;
              height: 30px;
              font-size: 25px;
            }
            input#m {
              margin-right: 10px;
            }
            button {
              margin: 0 auto;
            }
        </style>
    </body>
</html>
```