Chapitre 4

Intégration numérique

M.~Lahlou[1]

[1]Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
Marrakech

17/05/2021

Plan

Généralités

- On peut calculer **exactement** des intégrales comme $\displaystyle\int_0^2 x^3 dx, \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx, \cdots$.
- Mais impossible de calculer exactement beaucoup d'autres comme par exemple : $\displaystyle\int_0^1 e^{\cos(x^2)} dx$.
- Méthodes d'**approximation** numérique des intégrales.

Généralités

Formules basées sur l'interpolation :

- f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$, connue aux points $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$.
- Pour approcher $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, on détermine le polynôme d'interpolation p_n par rapport aux x_i,

  et on remplace $I(f)$ par $\displaystyle\int_a^b p_n(x)dx$

Généralités

$$I(f) \approx I(p_n) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx$$

$$\boxed{I(f) \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)} \qquad (1)$$

où

$$\lambda_i = \int_a^b L_i(x) dx = \int_a^b \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

Généralités

Définitions 1

- (1) est appelée formule de quadrature ou d'intégration approchée.
- $x_0, x_1, \cdots, x_n$ sont les noeuds d'intégration.
- $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les coefficients ou les poids de la quadrature.

Généralités

L'erreur d'intégration est définie par

$$R(f) = I(f) - I(p_n) = I(f - p_n)$$

Rappelons que l'erreur d'interpolation (voir chapitre 3) est :

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

D'où le théorème d'erreur suivant :

Théorème 1

Si $f \in C^{n+1}[a,b]$, *alors*

$$R(f) = \int_a^b \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x).\omega_{n+1}(x)dx \tag{2}$$

où $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. *En conséquence :*

$$|R(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\omega_{n+1}(x)|dx$$

avec $M_{n+1} = \max_{t \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$

Généralités

Nous avons :

Corollaire 1

Si f est un polynôme de degré $\leq n$, alors $f^{(n+1)} = 0$, donc $R(f) = 0$. Ainsi (1) est exacte sur tout polynôme $p \in \mathbb{P}_n$ espace des polynômes de degré $\leq n$.

Définition 1

Le degré de précision d'une formule de quadrature est la valeur maximale de n pour laquelle la formule est exacte sur $\mathbb{P}_n$:

- elle est exacte pour tout $f \in \mathbb{P}_n$,
- et il existe $f \in \mathbb{P}_{n+1}$ tel que la formule ne l'est pas.

Proposition 1

Puisque $\left(X^0, X^1, \cdots, X^n\right)$ *est une base de* $\mathbb{P}_n$*, une formule de quadrature est de degré de précision* n *ssi :*

- *elle est exacte pour tout monôme* X^k, $0 \leq k \leq n$
- *et elle ne l'est pas pour* X^{n+1}.

Remarque 1

On peut construire des formules de quadrature sans passer par les polynômes de Lagrange.

Exemple.

Construire la formule de la forme :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq J(f) = \alpha f\left(\frac{-1}{2}\right) + \beta f\left(\frac{1}{2}\right)$$

de sorte qu'elle soit de degré de précision le plus élevé possible.

2 inconnues $\alpha, \beta \Rightarrow$ 2 relations pour que $J(f)$ soit exacte sur $1, x$:

$$\begin{aligned} f = 1 \rightarrow \int_{-1}^{1} dx &= \alpha + \beta \\ f = x \rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = 0 &= \alpha \times \left(\frac{-1}{2}\right) + \beta \times \left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 2 \\ \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 1$$

$$J(f) = f\left(\frac{-1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc J des de degré de précision ≥ 1.
Maintenant $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$ et $J(x^2) = \dfrac{1}{2} \neq I(x^2)$.
Conclusion $J(f)$ est de degré de précision 1.

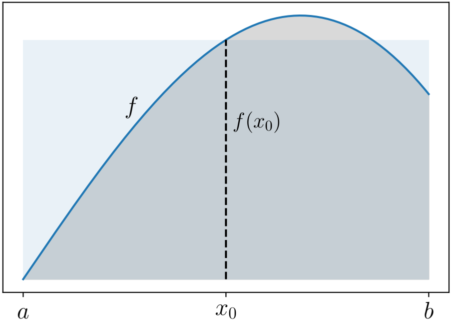
- La formule de ractangle est l'exemple le plus basique des quadratures basées sur l'interpolation.
- Ici on interpole f par une constante ($n = 0$) : un seul noeud $x_0 \in [a, b]$,

$p_0(x) = f(x_0)$.

- Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(x_0)dx = \underbrace{(b-a)}_{\lambda_0} f(x_0) = \lambda_0 f(x_0)$.

Géométriquement :

On remplace l'aire (au sens algébrique) entre la courbe de f et l'axe des x par l'aire du rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur $f(x_0)$.



- Par exemple la formule du point milieu ($x_0 = \frac{a+b}{2}$) est :

$$I(f) \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

- La formule du rectangle gauche ($x_0 = a$) est :

$$I(f) \approx (b-a) f(a)$$

- La formule du rectangle droite ($x_0 = b$) est :

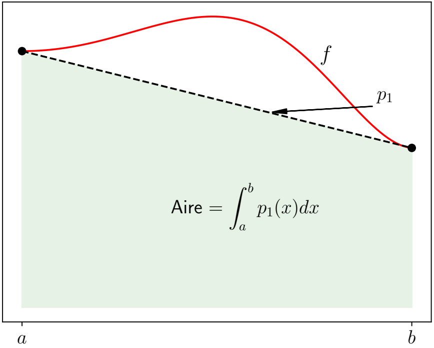
$$I(f) \approx (b-a) f(b)$$

Formule de trapèze

Ici on utilise l'interpolation en 2 noeuds : p_1 interpole f en $x_0 = a, x_1 = b$

$\Rightarrow I(f) \approx I(p_1)$

$I(p_1) = \displaystyle\int_a^b p_1(x)dx$ est l'aire du trapèze dans la figure suivante :



Formule de trapèze

de (1)

$$I(f) \approx \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(b)$$

avec

$$\lambda_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx = \frac{b-a}{2},\ \lambda_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a} dx = \frac{b-a}{2}$$

Donc la quadrature simple de trapèze est :

$$\boxed{I(f) \approx T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))} \tag{3}$$

Formule de trapèze

Théorème 2

Soit $f \in C^2([a,b])$, l'erreur de la formule simple de trapèze est donnée par :

$$R(f) = I(f) - T(f) = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3 \tag{4}$$

où $\eta \in [a,b]$.
De plus le degré de précision de $T(f)$ est 1.

Formule de trapèze

Démonstration.

- D'après (2) on a

$$R(f) = \int_a^b (f(x) - p_1(x))dx = \int_a^b \frac{f''(\zeta_x)}{2}(x-a)(x-b)dx$$

où ζ_x strictement compris entre a et b.
$(x-a)(x-b)$
est négatif sur $[a, b]$, alors par le 1er théorème de la moyenne, $\exists \eta \in [a, b]$ tel que

$$R(f) = \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3.$$

- Si $f \in \mathbb{P}_1$, $f'' = 0$ alors $R(f) = 0.$: $T(f)$ est exacte sur $\mathbb{P}_1$.
  $\Rightarrow$
  degré de précision ≥ 1

  Maintenant si $f(x) = x^2$, alors

$$\int_a^b f(x) = \frac{b^3 - a^3}{3} \neq T(f) = \frac{b-a}{2}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$\Downarrow$$

degré de précision est exactement 1

□

Formule de trapèze

Exemple.

On a $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$

La valeur approchée par trapèzes est

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\left(\sin 0 + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 0.78539$$

Formule de Simpson

Ici on utilise l'interpolation à 3 points $x_0 = a, x_1 = \dfrac{a+b}{2}, x_2 = b$: on interpole f par p_2 de degré au plus 2 en x_0, x_1, x_2.
Donc :

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{j \neq i}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Formule de Simpson

On approche $I(f) \approx I(p_2)$ et on a :

$$\begin{aligned} I(f) &\approx \lambda_0 f(a) + \lambda_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \lambda_2 f(b) \\ \lambda_0 &= \int_a^b L_0(x)dx = \frac{b-a}{6} \\ \lambda_1 &= \int_a^b L_1(x)dx = 4\frac{b-a}{6} \\ \lambda_2 &= \int_a^b L_2(x)dx = \frac{b-a}{6} \end{aligned}$$

La formule simple de Simpson est :

$$\boxed{I(f) \approx S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)} \tag{5}$$

Formule de Simpson

On a le résultat suivant :

Théorème 3

- *Si* $f \in C^4[a,b]$ *alors l'erreur de la formule de Simpson simple est donnée par :*

$$R(f) = I(f) - S(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \tag{6}$$

où $\eta \in [a,b]$.

- *Le degré de précision de Simpson simple est 3.*

Formule de Simpson

Exemple.

Appliquons Simpson sur $\int_0^{\pi/2} \sin x = 1$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \approx \frac{\pi}{12}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{12}(2\sqrt{2} + 1) \simeq 1.00228$$

Simpson est plus précise que Trapèze.

Pourquoi composées ?[1]

- si $[a, b]$ est assez large et que f est oscillatoire, alors Trapèze simple par exemple ne donne pas de bons résultats.
- Augmenter le degré n de l'interpolation mais coûteux en calculs et engendre l'accumulation des erreurs d'arrondi.
- On préfère introduire une autre idée :
  - on subdivise $[a, b]$ en $N \geq 1$ morceaux égaux $[x_i, x_{i+1}]$: on pose $h = \dfrac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \cdots, N$.
  - $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$
  - Approximer chaque sous-intégrale $I_i(f) = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par une quadrature simple $J_i(f)$ et on obtient
$$I(f) \approx J_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} J_i(f)$$

1. 24/05/2021

Remarque 2

Notons que cette dernière formule dépend de N donc du pas h.

Définitions 2

a) On dit qu'une formule composée est convergente lorsque $\lim_{h\to 0} J_h(f) = I(f)$, c'est à dire $\lim_{h\to 0} R_h(f) = 0$. Où $R_h(f) = I(f) - J_h(f)$ est l'erreur commise.

b) On dit qu'une formule composée est convergente **d'ordre k** si l'erreur $R_h(f)$ est en $O(h^k)$, c.a.d.

$$|R_h(f)| \leq Ch^k$$

où C ***est une constante positive indépendante de*** h.

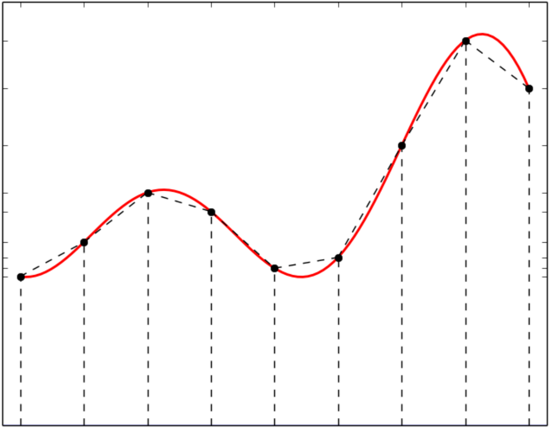
- Ici $J_i(f) = T_i(f)$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx T_i(f) = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

- Sachant que $x_0 = a, x_N = b$, $x_{i+1} - x_i = h$, $\forall i = 0, \cdots, N-1$, on obtient la formule composée de trapèzes suivante :

$$\boxed{I(f) \approx T_h(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right]} \qquad (7)$$

Interprétation géométrique : l'aire qui approche l'intégrale est la somme algébrique des aires des petits trapèzes :



Théorème 4

Si $f \in C^2[a,b]$, alors l'erreur de la formule de trapèzes composée est donnée par :

$$\exists \eta \in [a,b], \quad R_h(f) = I(f) - T_h(f) = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)h^2 \tag{8}$$

On a en conséquence :

$$|R_h(f)| \leq Ch^2$$

où C est une constante indépendante de h. Alors la méthode est convergente en $O(h^2)$ ou d'ordre 2.

Démonstration.

On a $R_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i(f)$ où

$$\begin{aligned} R_i(f) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f\left(x_{i+1}\right)\right) \\ &= -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i),\ \eta_i \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

(on utilise la formule d'erreur de quadrature simple (4))

Donc $R_h(f) = -\dfrac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{N-1} f''(\eta_i)$.

Par ailleurs $\exists i_0, i_1,\ f''(\eta_{i_0}) \leq f''(\eta_i) \leq f''(\eta_{i_1})$.

Donc $f''(\eta_{i_0}) \leq \dfrac{\sum_{i=0}^{N-1} f''(\eta_i)}{N} \leq f''(\eta_{i_1})$

et puisque f'' continue sur $[a, b]$, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\eta \in [a, b]$ tel que $f''(\eta) = \dfrac{\sum_{i=0}^{N-1} f''(\eta_i)}{N}$.

Mais $h = \dfrac{b-a}{N}$. D'où

$$R_h(f) = -\frac{h^2}{12}.\frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f''(\eta_i) = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\eta)$$

Maintenant $|R_h(f)| \leq \underbrace{\dfrac{(b-a)}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}_{C} h^2$, C dépend seulement de a, b et f $\square$

Exemple.

On reprend $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ et on applique trapèzes composites à 5 points $(N = 4)$: $h = \dfrac{b-a}{4} = \dfrac{\pi}{8},\ x_i = ih,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin x dx &\approx \frac{\pi}{16}(\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2}) \\ &+ \frac{\pi}{8}\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) \\ &\simeq 0.9871158\end{aligned}$$

L'erreur absolue est environ 0.1288×10^{-2} qui bien meilleure que l'erreur commise par trapèze simple.

Pour des raisons pratiques on intègre les milieux $\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ dans la subdivision de la manière suivante :

- On subdivise $[a, b]$ en $N = 2p$, $(p \geq 1)$ sous-intervalles égaux par les points $x_i = a + ih$, $i = 0, \cdots, 2p$, avec $h = \dfrac{b-a}{2p}$ $(2p + 1$ points).
- On applique la formule (5) sur chaque sous-intervale $[x_{2j}, x_{2j+2}]$, on a :

$$\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x)dx \approx \frac{x_{2j+2} - x_{2j}}{6} \left[f(x_{2j}) + 4f\left(\tfrac{x_{2j}+x_{2j+2}}{2}\right) + f(x_{2j+2}) \right]$$

- Or $x_{2j+2} - x_{2j} = 2h$ et $\dfrac{x_{2j} + x_{2j+2}}{2} = x_{2j+1}$ Soit en regroupant :

$$\boxed{I(f) \approx S_h(f) = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{p-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=0}^{p-1} f(x_{2j+1})\right]} \tag{9}$$

On admet que l'erreur commise par Simpson composée est donnée dans le théorème :

Théorème 5

1. *Si $f \in C^4[a,b]$ alors l'erreur commise par la formule (9) est donnée par*

$$\exists \eta \in [a,b], \quad \begin{aligned} R_h(f) &= \int_a^b f(x)dx - S_h(f) \\ &= -\frac{f^{(4)}(\eta)}{180}(b-a)h^4 \end{aligned}$$

2. *On a en conséquence :*

$$|R_h(f)| \leq Ch^4$$

où C est une constante indépendante de h. Alors la méthode est convergente en $O(h^4)$ ou d'ordre 4.

Exemple.

On applique Simpson composée à 5 points sur $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$:

$N = 4, h = \dfrac{\pi}{8}$ Donc $x_0 = 0, x_1 = \dfrac{\pi}{8}, x_2 = \dfrac{\pi}{4}, x_3 = \dfrac{3\pi}{8}, x_4 = \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin x &\approx \frac{\pi}{24}\left[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right] \\ &= 1.0001346\end{aligned}$$

L'erreur absolue est environ 0.1346×10^{-3}. Or on avait commis une erreur d'environ 0.1288×10^{-2} par trapèzes composée pour le même nombre de sous-intervalles.
Simpson composée est plus précise.

Résumé pour l'approximation de $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$:

N	Trapèze	Simpson
1	0.785	1.00228
4	0.9871158	1.0001346
8	0.9967852	1.000008296

Conclusion : Pour le même nombre de noeuds, Simpson composée approche beaucoup mieux la valeur exacte de l'intégrale.

Les quadratures étudiées sont de la forme :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx J_m(f) = h\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f(x_i) \tag{10}$$

La machine commet une erreur sur $f(x_i)$, on note ϵ_i l'erreur d'arrondi commise :
$f(x_i) = \tilde{f}(x_i) + \epsilon_i,\ 1 = 0, \cdots, m$. Donc

$$I(f) \approx h\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \tilde{f}(x_i) + h\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \epsilon_i$$

Définition 2

On appelle erreur de stabilité numérique la quantité

$$r_m = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \epsilon_i$$

Si $|\epsilon_i| < \epsilon_M$, $i = 0, \cdots, m$ où ϵ_M dépend de la machine, alors

$$|r_m| \leq h\epsilon_M \left(\sum_{i=0}^{m} |\lambda_i| \right)$$

Attention !

Accumuluation d'erreurs : C'est dangeureux de prendre h trop petit (m grand) :
$\sum_{i=0}^{m} |\lambda_i|$ peut être très grand $\Rightarrow$ perte de précision :$|r_m|$ risque d'être grand et on aurait une fausse valeur de l'intégrale.

Si les $\lambda_i \geq 0$ (par ex. trapèzes ou Simpson compoées), alors on peut borner r_m indépendement de h.
En effet : (10) est exacte au moins sur $f = 1$ (cas de trapèzes et Simpson). Donc $b - a = h \sum_{i=0}^{m} \lambda_i$. D'où

$$|r_m| \leq \epsilon_M (b - a) \longleftarrow \text{indépendant de } h.$$

Donc (10) est stable lorsque $m \to +\infty$.

Définitions 3

- La formule (10) est dite convergente si $\lim_{m\to\infty} J_m(f) = I(f)$.
- La formule (10) est dite stable s'il existe une constante M indépendante de h telle que $h\sum_{i=0}^{m} |\lambda_i| \leq M$.

Conclusion : Les formules de trapèzes et Simpson composées sont convergentes et stables.