Morphologie mathématique

- **Origine :**
  - Morphologie = étude des formes
  - Mathématique = théorie des ensembles
    (Union, Intersection, Complément, Différence....)
- **Types de données :**
  - Images binaires
  - Images à niveaux de gris
  - Données plus complexes

- **Élément structurant**
  Choix de sa forme et de sa taille

Opérateurs Morphologique
  - Opérations booléennes
  - Érosion, Dilatation, Ouverture, Fermeture
  - Lissage (Filtrage) morphologique
  - Rehaussement morphologique

La Morphologie Mathématique

- Techniques de filtrage et d'analyse basée sur des théories ensemblistes et algébriques
- Un certain nombre de filtres qui permettent de modifier la forme et la topologie des structures dans l'image
- L'idée générale est la comparaison locale des structures (objets) dans l'image avec un élément de référence : *l'élément structurant*

- Principe:

L'analyse par morphologie mathématique vise à modifier la structure et la forme des objets de l'image, par exemple: pour les séparer, les discriminer en fonction de leur taille, remplir les trous….

- **Opérateurs Morphologique** fondamentaux

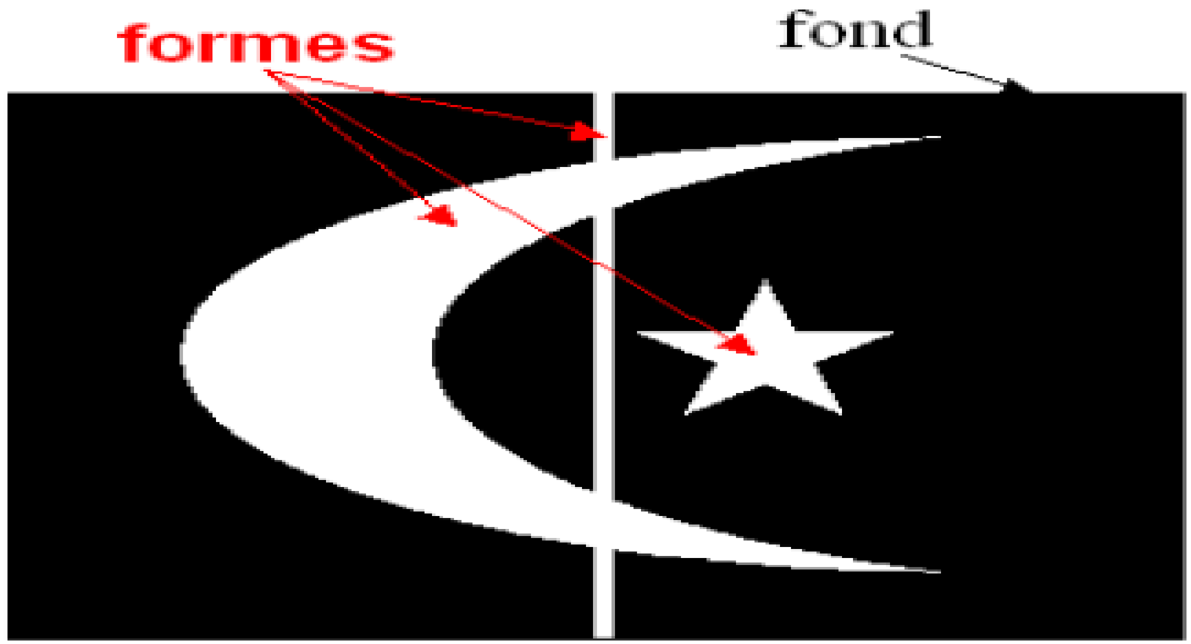
dilatation, érosion, ouverture et fermeture

- Origines :
  - Jean Serra, CMM, École des Mines, Paris

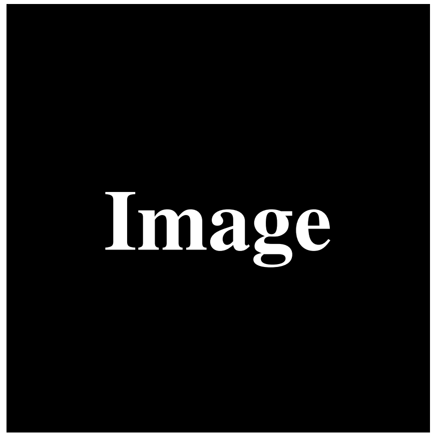
    « Image Analysis and Mathematical Morphology », London, Academic Press, 1982.

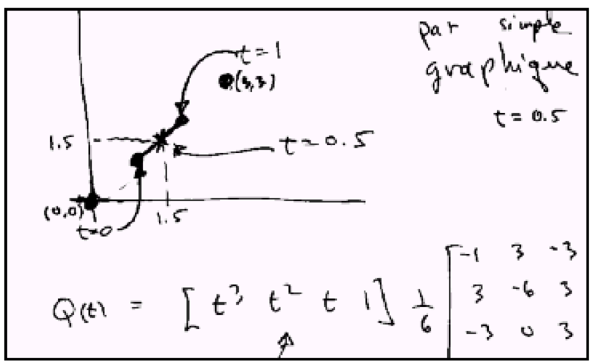
  - R. Haralick, et al « *Image Analysis using Mathematical Morphology* », IEEE PAMI 9(4), 1987.

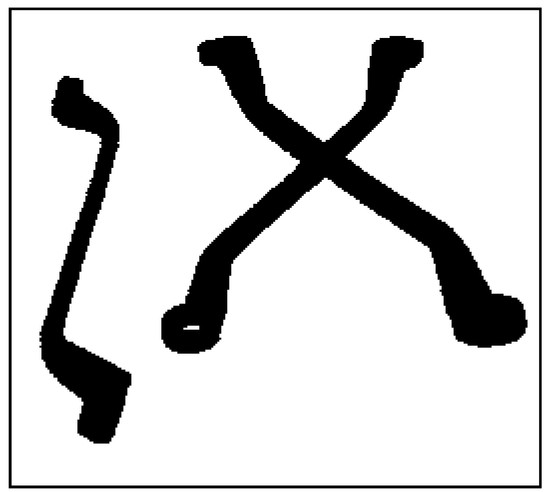
La Morphologie Mathématique



Morphologie Mathématique
des images binaires

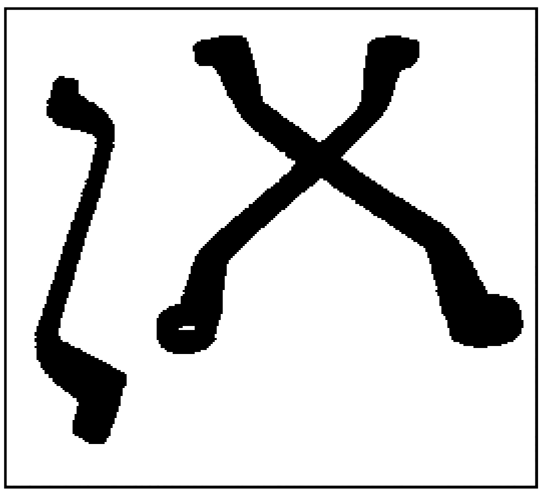


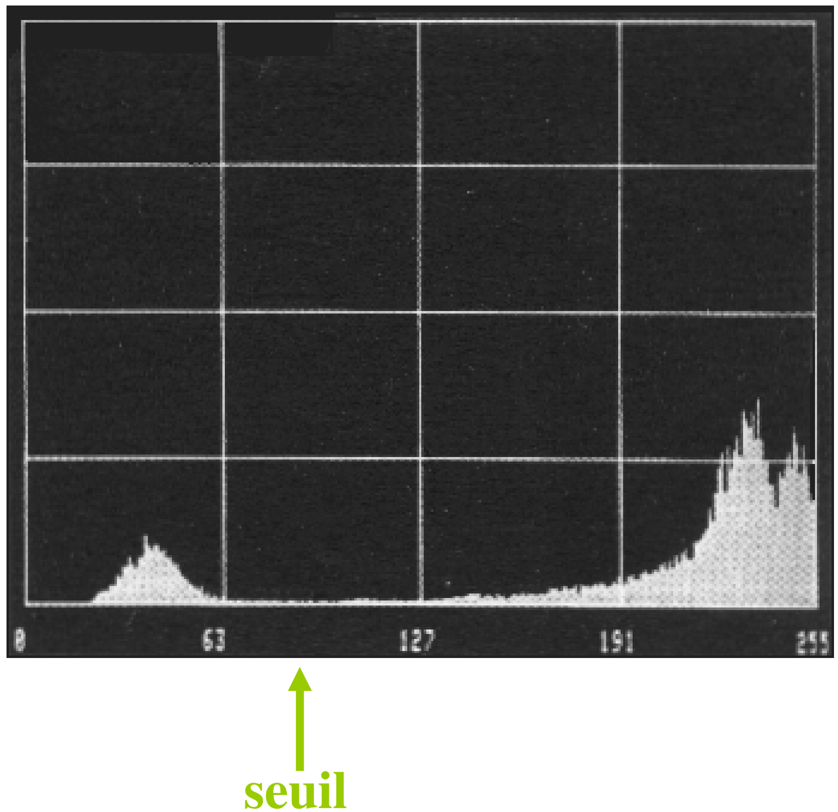




Quelques images binaires

Choix d'un seuil



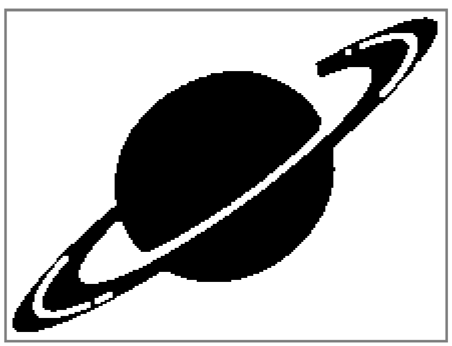


Opérations booléennes

A

B

A	B	AND	OR	XOR
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0



NOT A

A AND B

A OR B

A XOR B

Morphologie Mathématique
Théorie des Ensembles

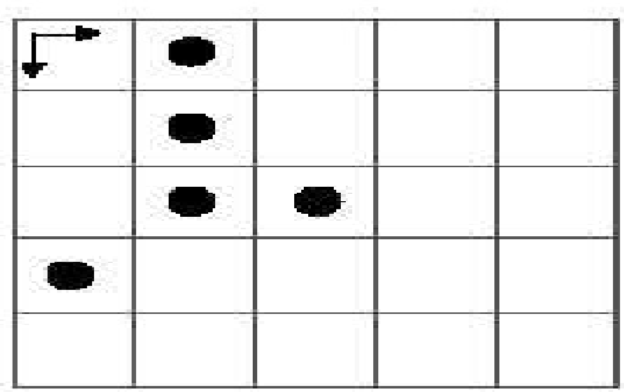
$$A, B = \text{Ens. des pixels} = \text{Ens. des coordonnées}$$

$A \cup B$	$= \{\, x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \,\}$	Union
$A \cap B$	$= \{\, x \mid x \in A \text{ et } x \in B \,\}$	Intersection
A^C	$= \{\, x \mid x \notin A \,\}$	Complément
$A - B$	$= \{\, x \mid x \in A, x \notin B \,\}$	Différence
$(A)_C$	$= \{\, x \mid x = a + c,\ a \in A\}$	Translation
$\hat{A}$	$= \{\, x \mid -x \in A\}$	Inversion

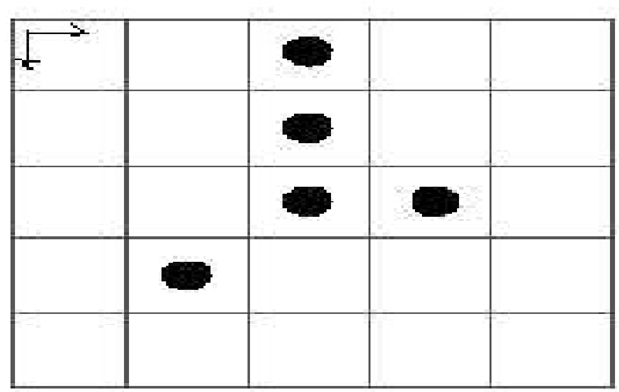
Translation

Translation

$$A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (0,3)\}$$
$$x = (1,0)$$
$$(A)_x = \{(2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (1,3)\}$$



A



$(A)_x$

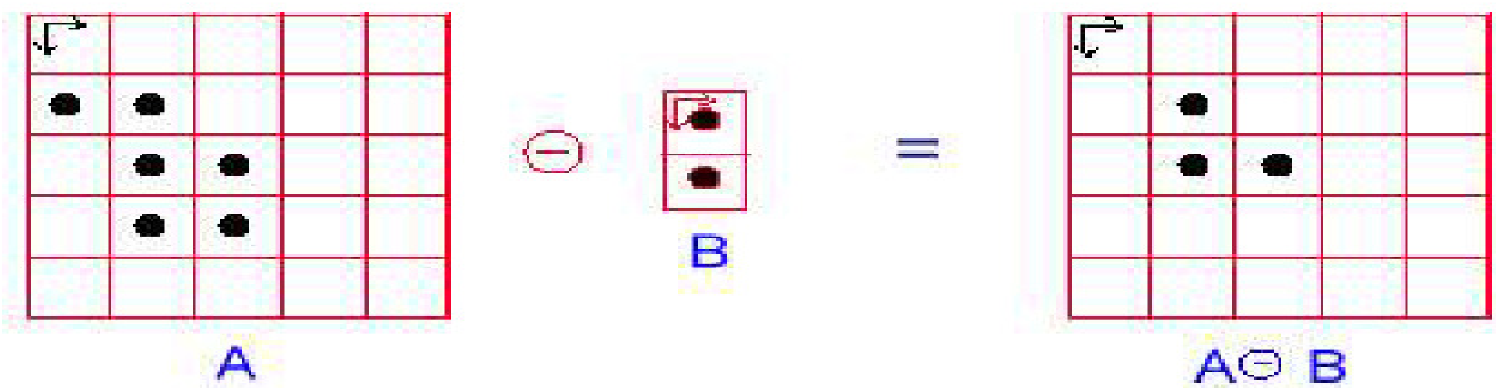
Erosion

Érosion

$$A \ominus B = \{ x \mid x+b \in A, \ \forall b \in B \}$$

$$A \ominus B = \{ x \mid (B)_x \subseteq A \}$$

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$



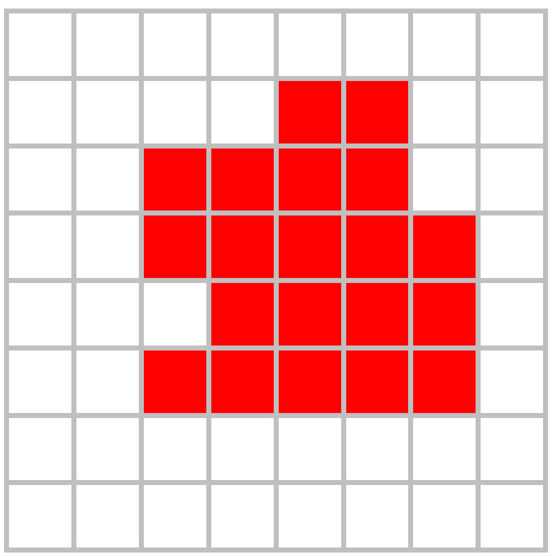
Erosion

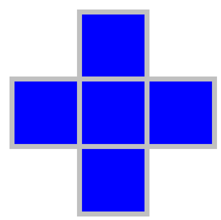
- Soit B un élément structurant

  Bx ➔ élément centré en un pixel x

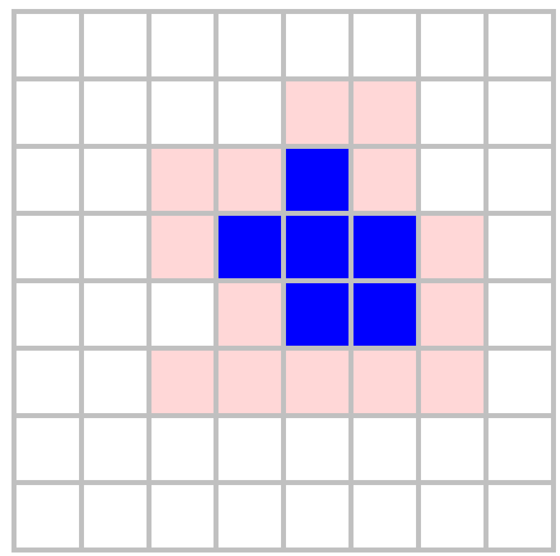
- Erodé = On positionne l'origine de B en chaque pixel x de l'objet A : Si tous les pixels de B font partie de l'objet A, alors l'origine de B appartient à l'érodé

Image A





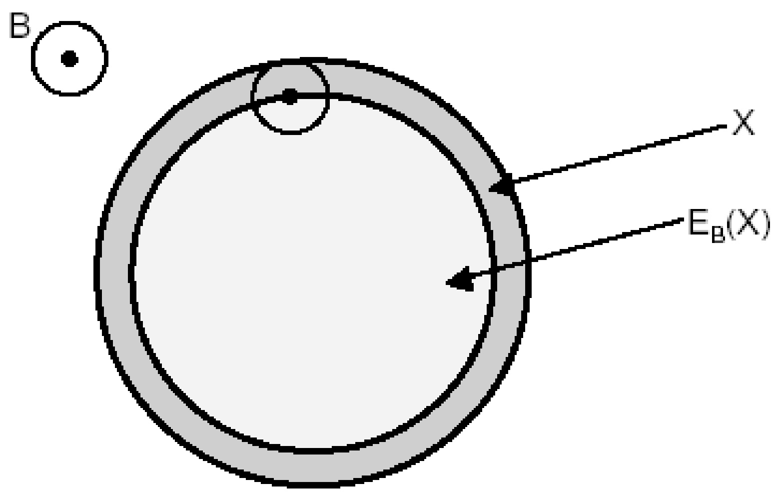
Erodé : $A \ominus B$



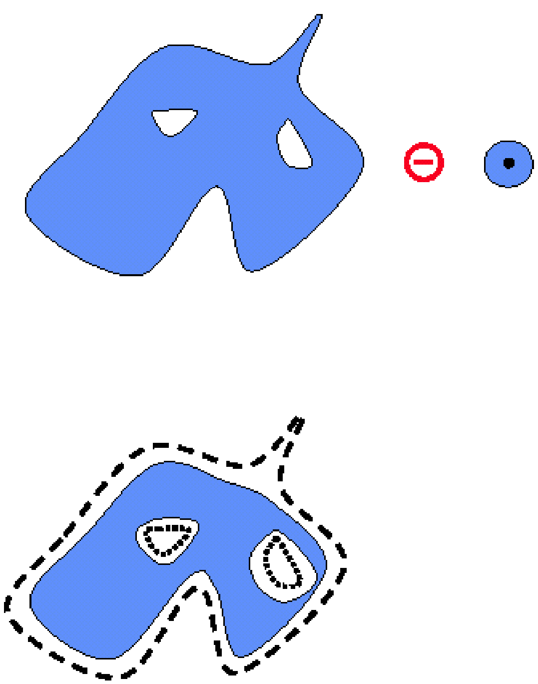
Erosion

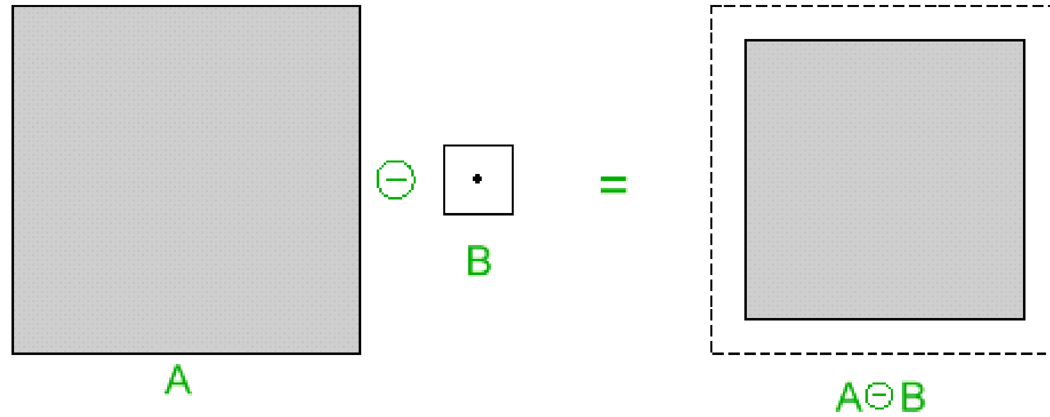
Si à tout **x** on associe une position B(**x**) de l'élément structurant B, alors l'érodé de l'ensemble X par B est :

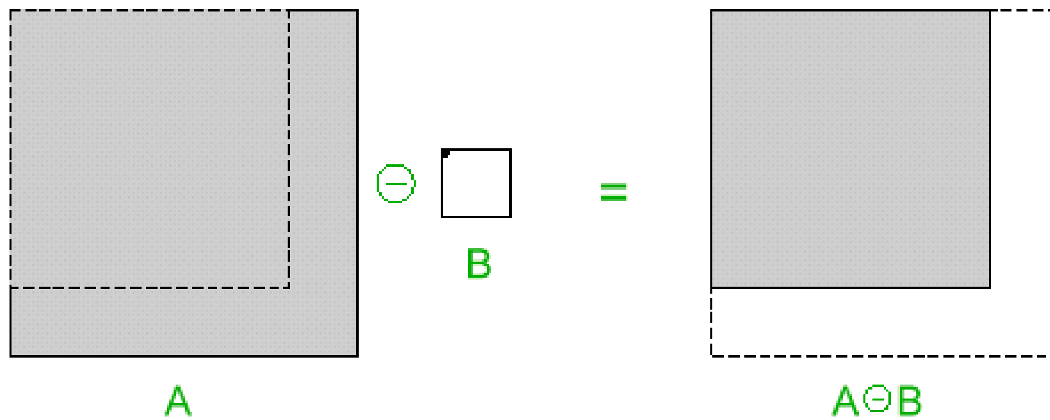
$$E_B(X)=\{\mathbf{x}:B(x)\subseteq X\}$$

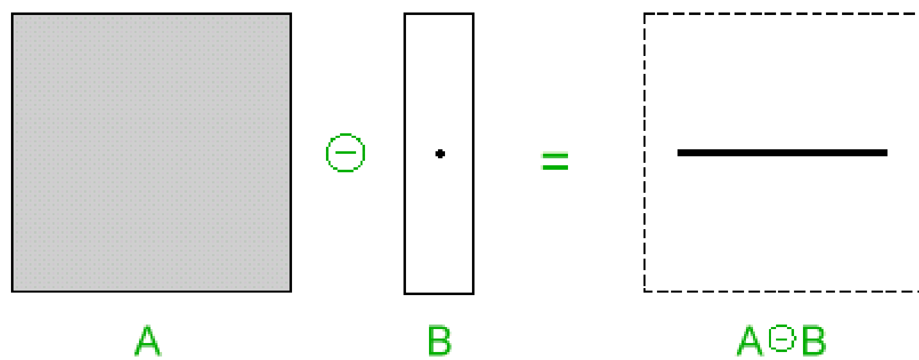


Erosion









Erosion

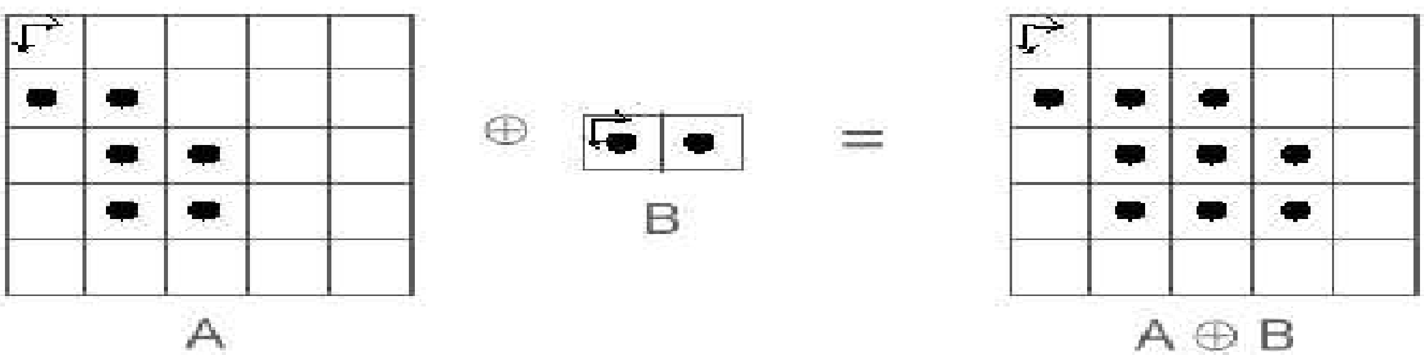
- \- les objets de taille inférieure à celle de l'élément structurant vont disparaître,
  \- s'il existe des trous dans les objets, c'est à dire des "morceaux" de fond à l'intérieur des objets, ils seront accentués
  \- les objets reliés entre eux vont être séparés.
- Remarquons également qu'une érosion de taille n peut se réaliser en répétant une érosion n fois avec un élément structurant de taille 1 ou en appliquant une seule érosion avec un élément structurant de taille n.

Dilatation

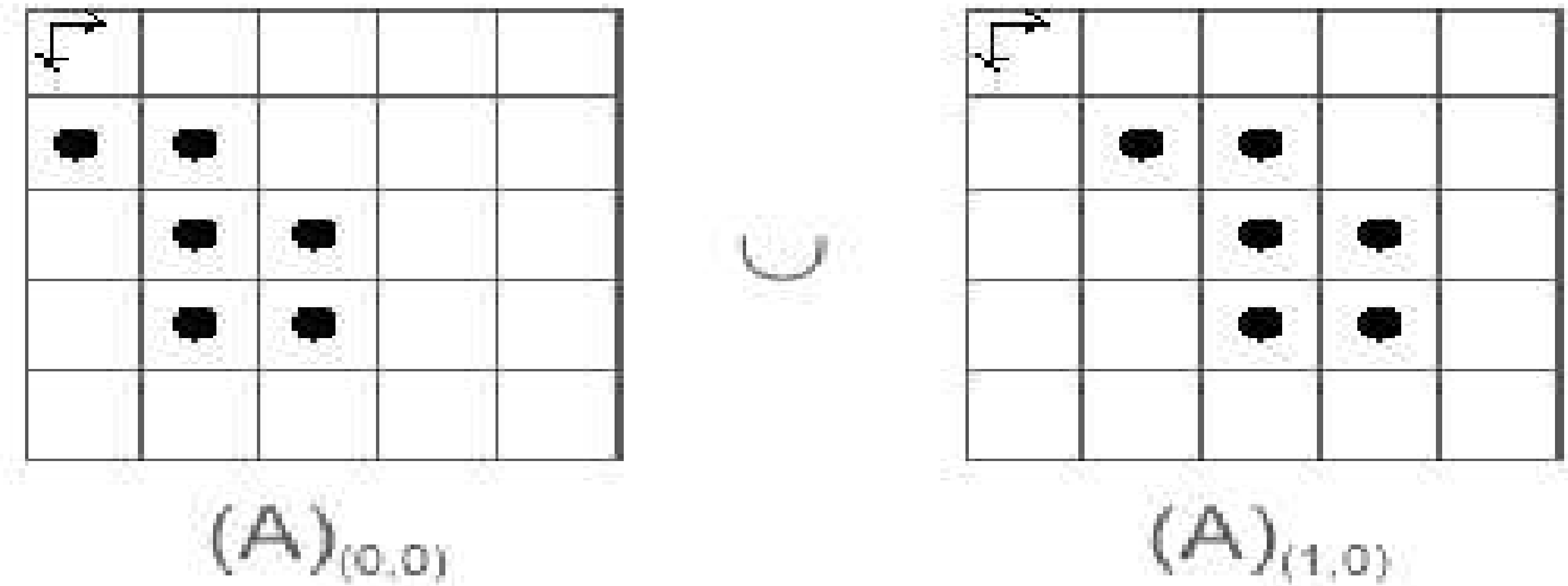
Dilatation

$$A \oplus B = \{ x \mid x=a+b,\ a \in A,\ b \in B \}$$

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$



Dilatation



B : Élément structurant

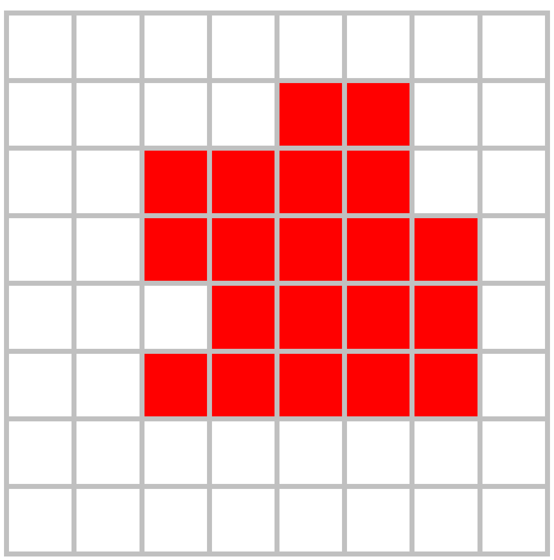
Dilatation

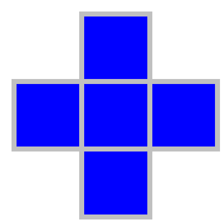
- Soit B un élément structurant

  Bx ➔ élément centré en un pixel x

- Dilaté : Pour chaque position de B, est-ce que l'intersection entre B et l'objet A est non vide ? Si oui, x l'origine de B appartient à l'image dilatée

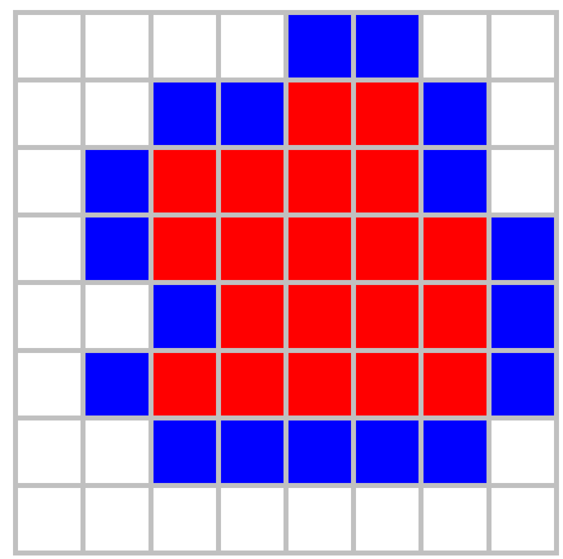
Image A





élément structurant B

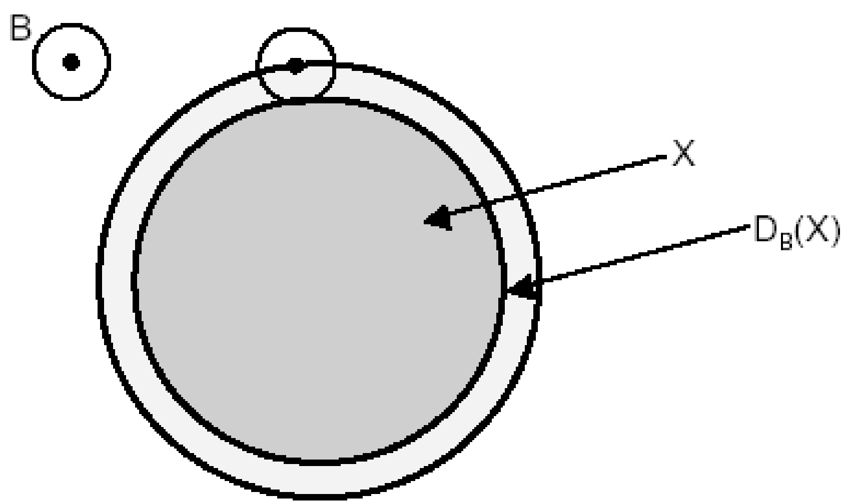
Dilaté : $A \oplus B$



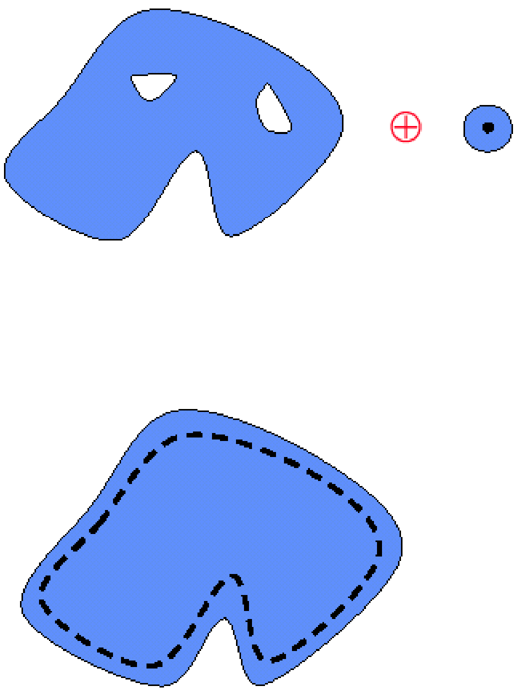
Dilatation

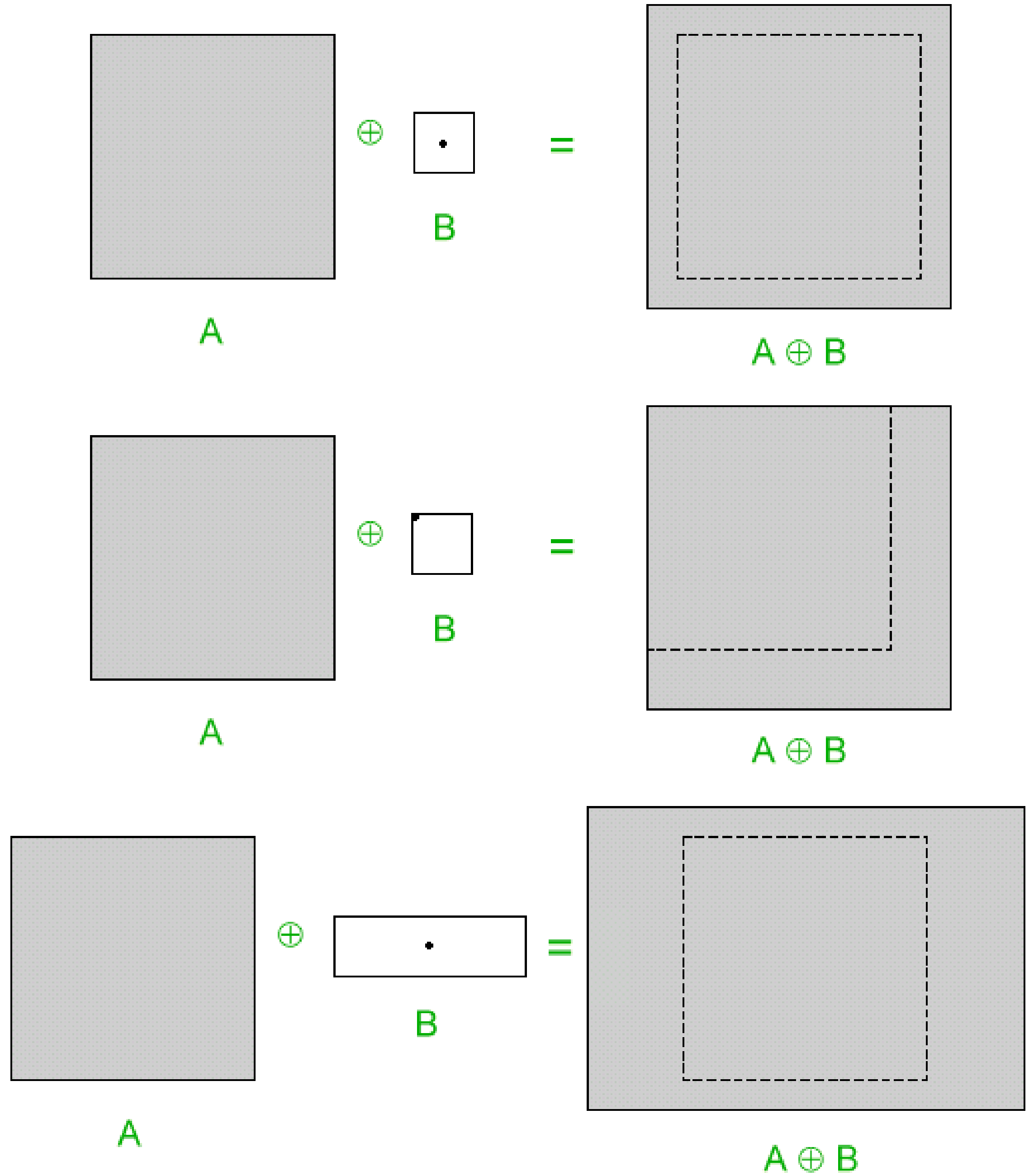
- Si à tout **x** on associe une position B(**x**) de l'élément structurant B, alors le dilaté de l'ensemble X par B est :

$$D_B(X)=\{\mathbf{x}:B(x)\cap X\neq\varnothing\}$$



Dilatation





Dilatation

Propriétés de la dilatation

$A \oplus B = B \oplus A$	Commutative
$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$	Associative
$A \subseteq B \Rightarrow C \oplus A \subseteq C \oplus B$	Monotone
$(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$	Distributive
$(A \cap B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$	

Dilatation

- Propriétés :
  - symétrie : $A \oplus B = B \oplus A$
  - Associativité : *chain rule*

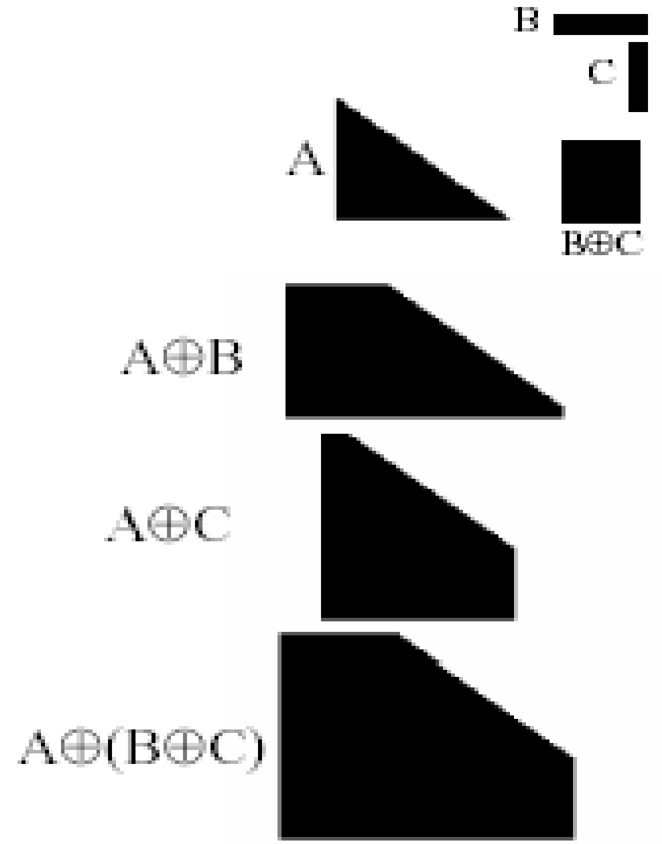
    $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

    Importance pour la mise en œuvre : décomposition

    ex : si D = carré de N x N

    $= (B \oplus C)$ ⇒ *2N comparaisons*
  - Invariance en <u>translation</u> :

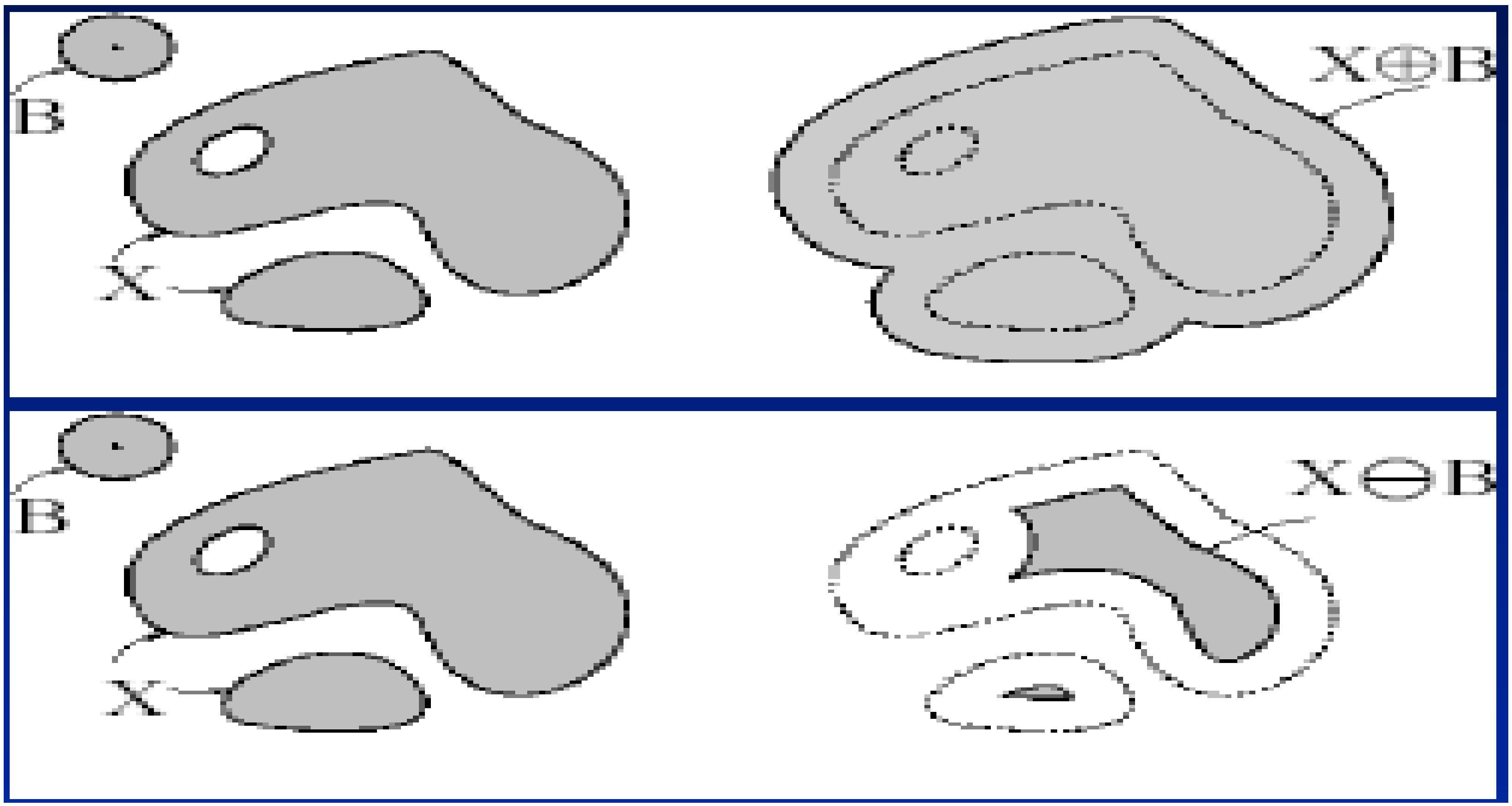
    $(A)_x \oplus B = (A \oplus B)_x$



Dilatation

- lors d'une dilatation :
  - tous les objets vont "grossir" d'une partie correspondant à la taille de l'élément structurant,
  - s'il existe des trous dans les objets, c'est à dire des "morceaux" de fond à l'intérieur des objets, ils seront comblés
  - si des objets sont situés à une distance moins grande que la taille de l'élément structurant, il vont fusionner.

Érosion et Dilatation



Dilatations et érosions : propriétés

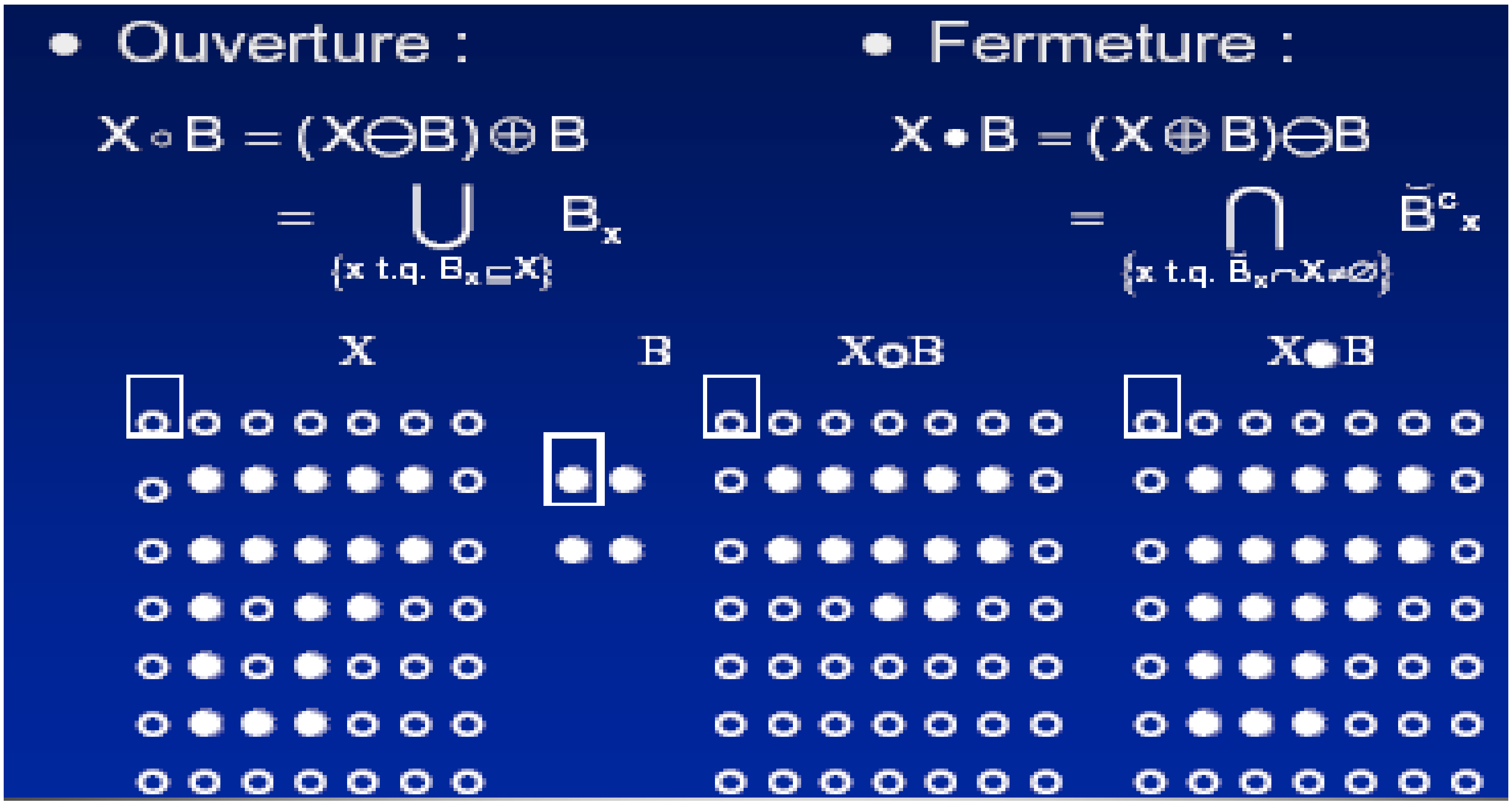
- Deux propriétés de base :

$$E_B(X) \subseteq X \subseteq D_B(X)$$

- Effets :

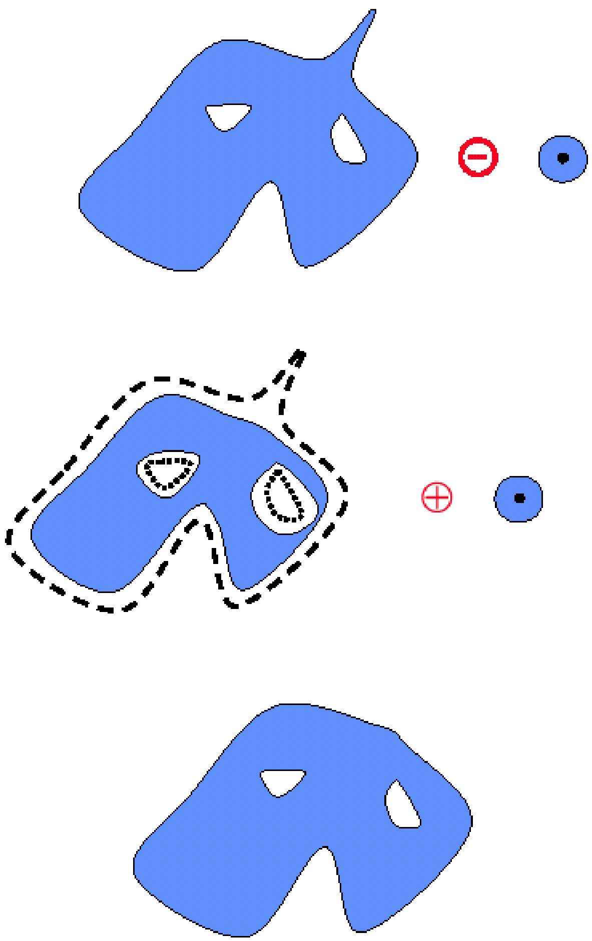
Erosion	Dilatation
Elimine les composantes connexes plus petites que B,	Bouche les trous plus petits que B,
élimine les caps étroits,	élargit les caps,
élargit chenaux et trous,	comble chenaux étroits,
transforme une presque-île en île.	soude deux formes proches.

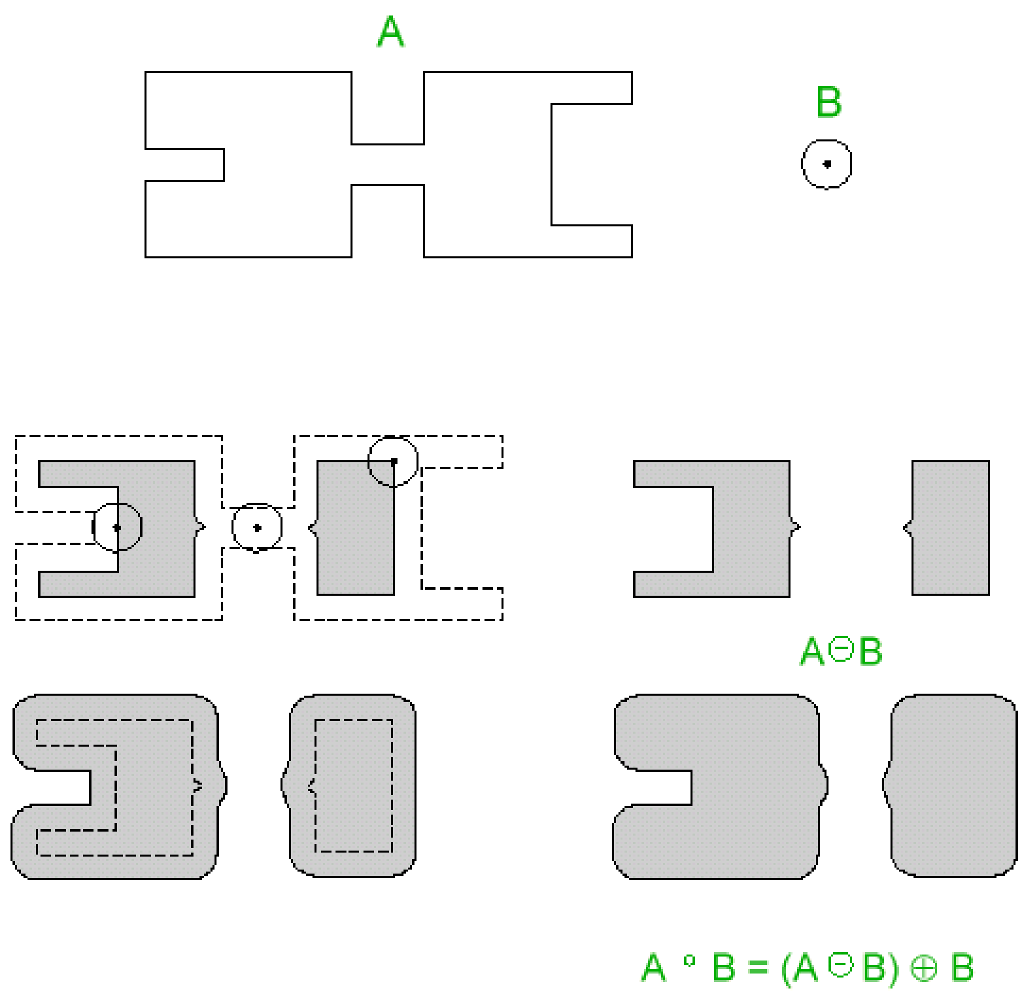
Ouverture et Fermeture



Ouverture

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$



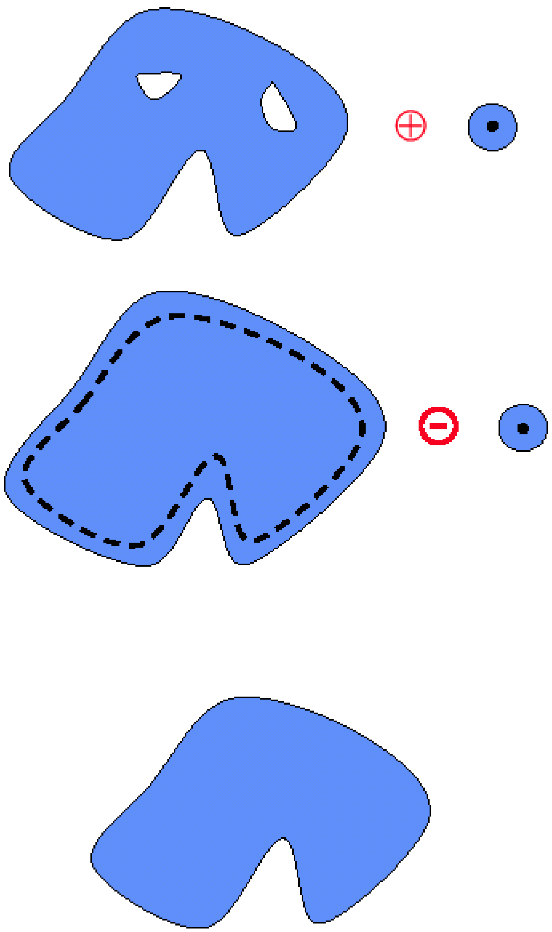


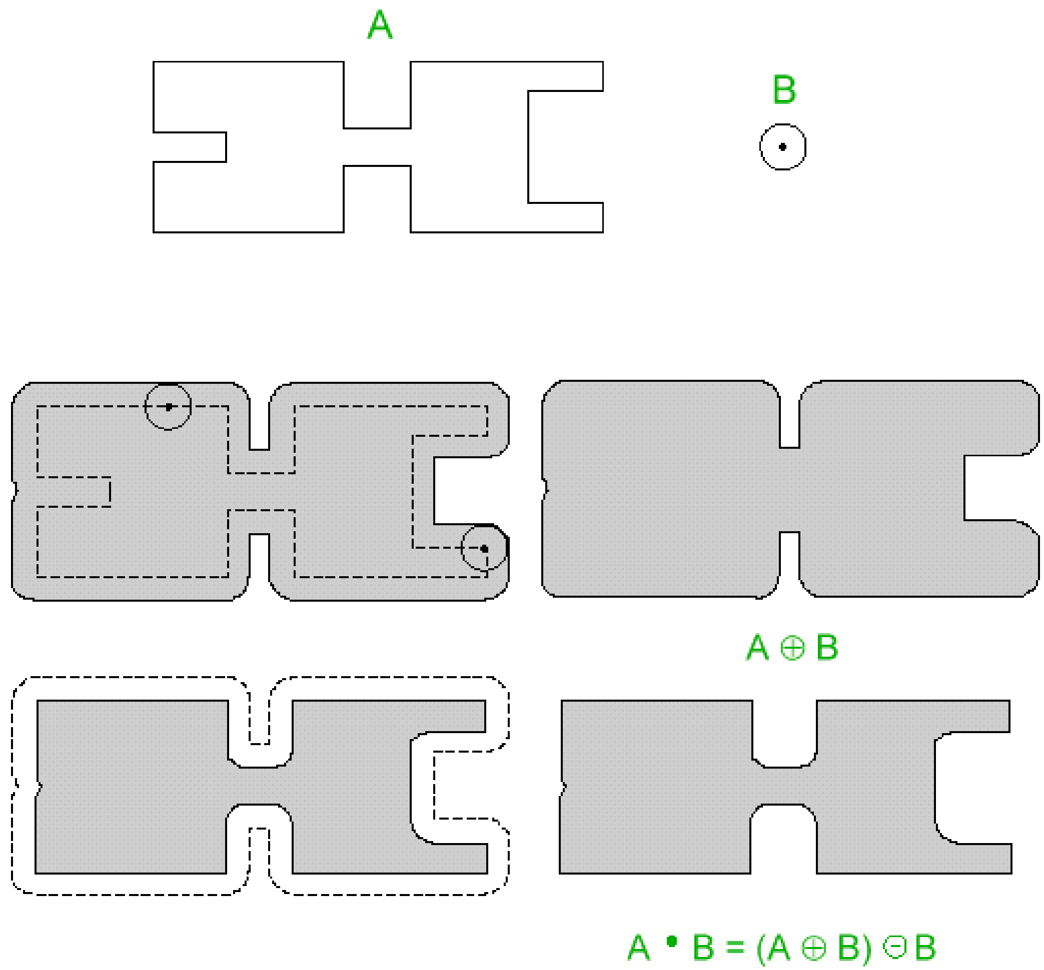
Ouverture

- Comme le montre l'image précédente , l'ouverture a pour propriété d'éliminer toutes les parties des objets qui ne peuvent pas contenir l'élément structurant

Fermeture

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$



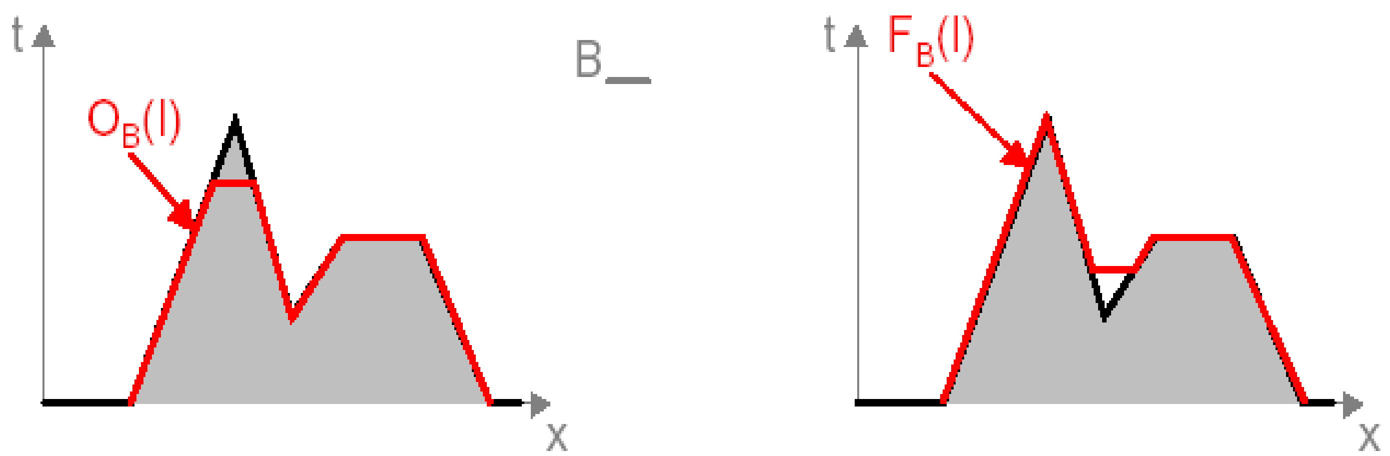


Fermeture

- Comme le montre l'image précédente, la fermeture a pour propriété de combler tout ce qui est de taille inférieur à l'élément structurant

Ouverture et fermeture : propriétés

- De même on définit ouverture et fermeture par composition des dilatations et érosions.

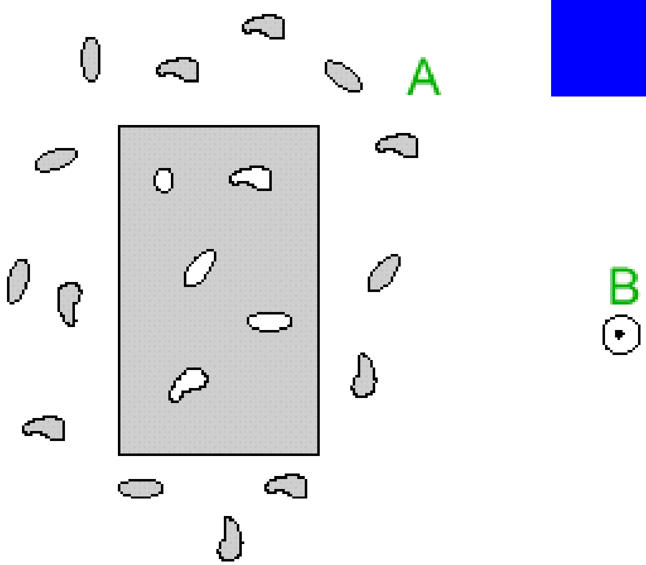


- Ouverture : « érodes » les pics plus petits que B
- Fermeture : remplit les creux plus petits que B

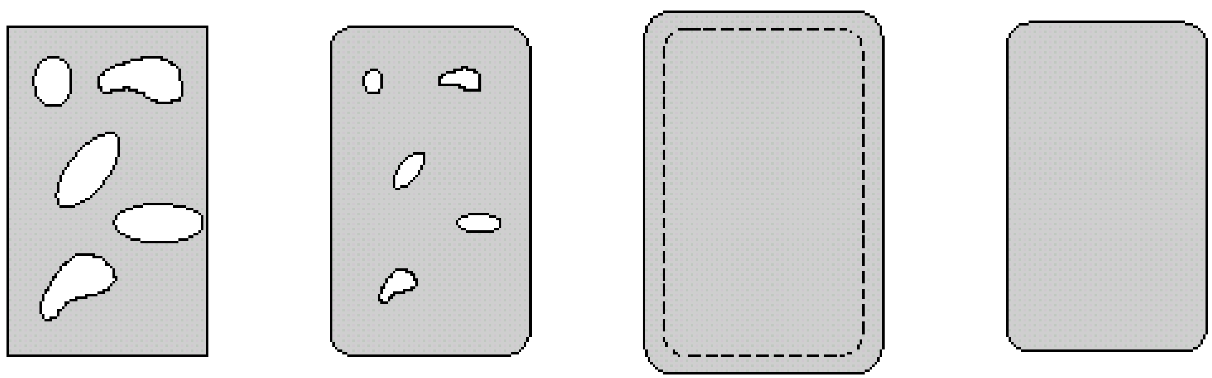
Ouverture et fermeture : propriétés

Ouverture	Fermeture
➔ Lisse les formes, ➔ élimine les composantes connexes plus petites que B, ➔ conserve souvent la taille et la forme ➔ ne conserve pas la nécessairement la topologie.	➔ Bouche les trous plus petits que B, ➔ conserve souvent la taille et la forme ➔ Ne conserve pas la nécessairement la topologie, ➔ En particulier : soude les formes proches

Filtrage Morphologique



Élimination efficace du bruit



$A \ominus B$

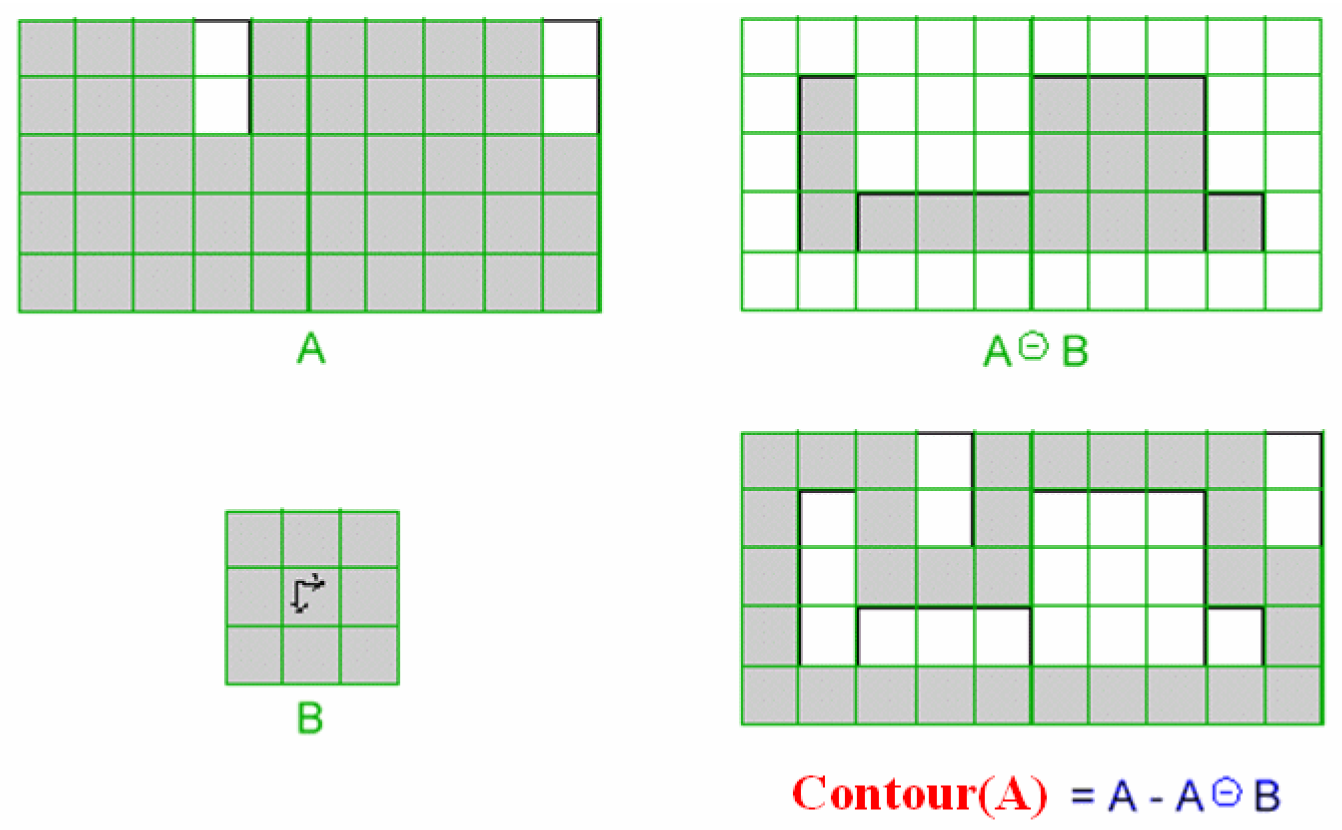
$(A \ominus B) \oplus B = A \circ B$

$(A \circ B) \oplus B$

$[(A \circ B) \oplus B] \ominus B = (A \circ B) \bullet B$

Detection de Contours

➔ Exemple pour un contour intérieur



Gradient interne, externe

➔ Gradient interne : contour intérieur $\quad A - (A \ominus B)$



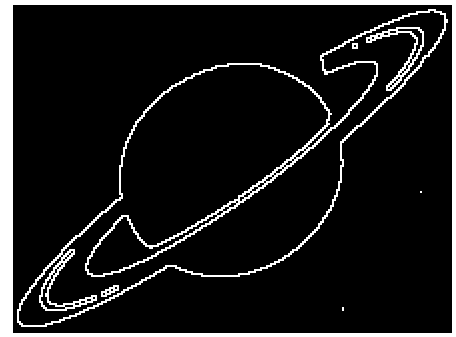


Image originale - Image érodée = Contour intérieur

➔ Gradient externe : contour extérieur $\quad (A \oplus B) - A$



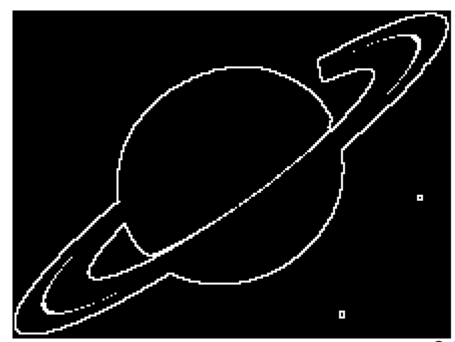


Image dilatée - Image originale = Contour extérieur

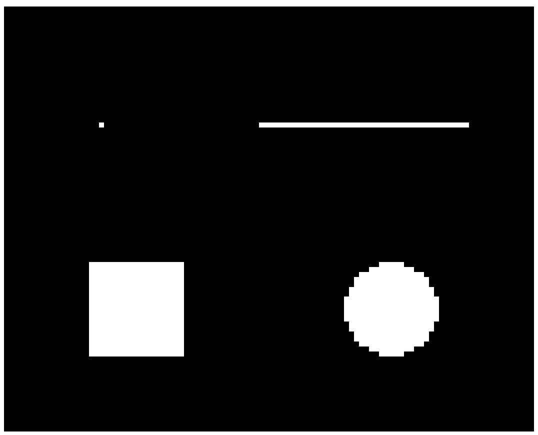
Gradient morphologique

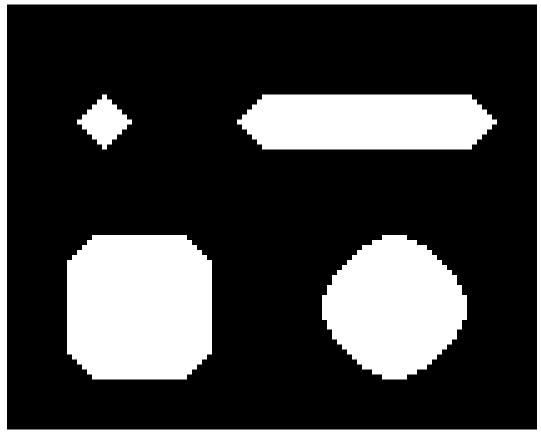
➔ Gradient morphologique $(A \oplus B) - (A \ominus B)$

Image dilatée - Image érodée = Gradient morphologique

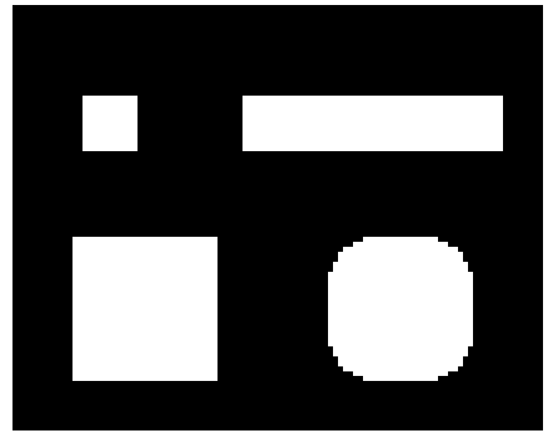
Exemple

➔ Influence de l'élément structurant

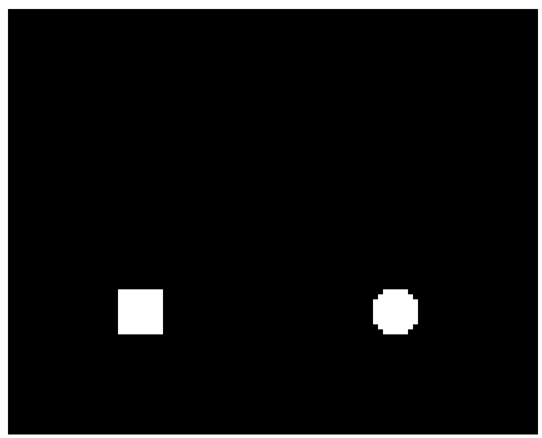




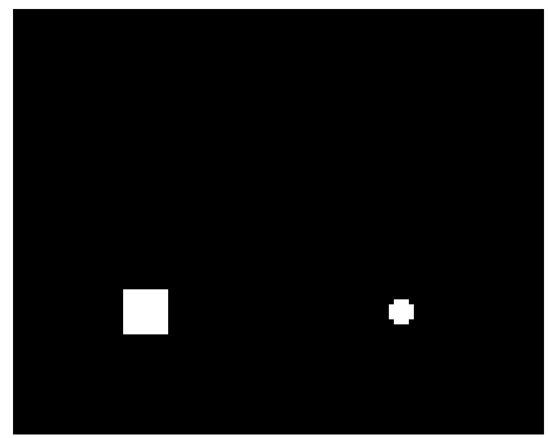
Dilatations V4



Dilatations V8

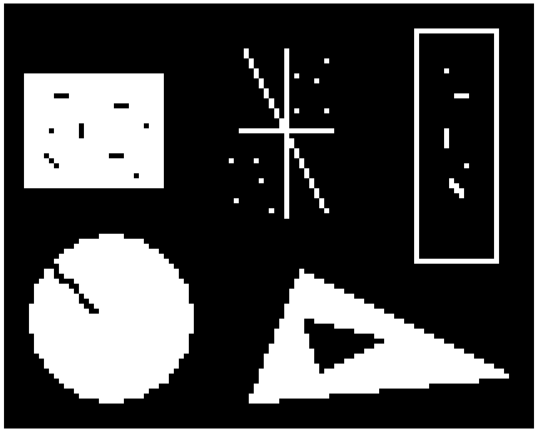


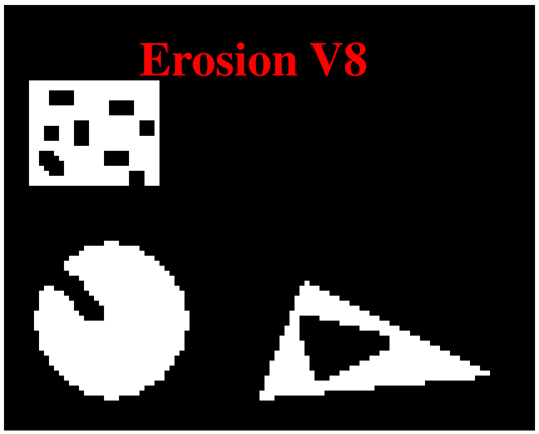
Erosions V4

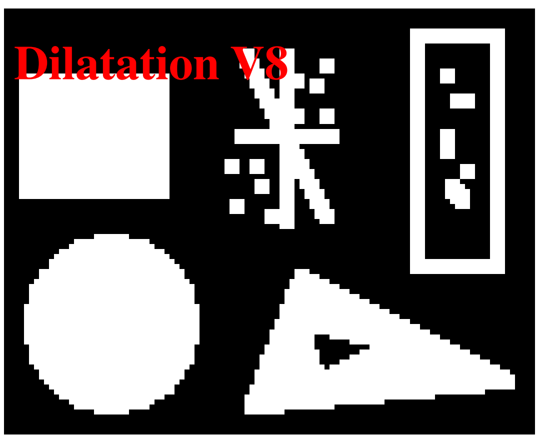


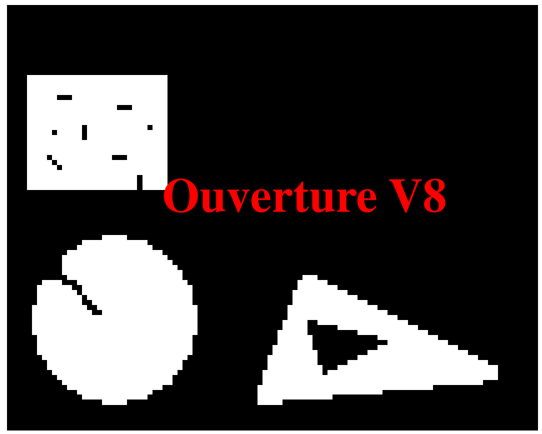
Erosions V8

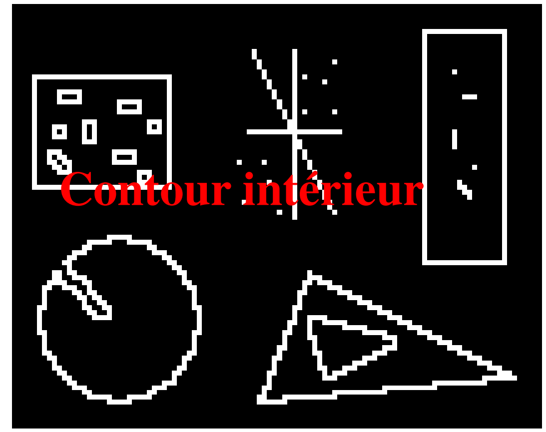
Exemple récapitulatif…

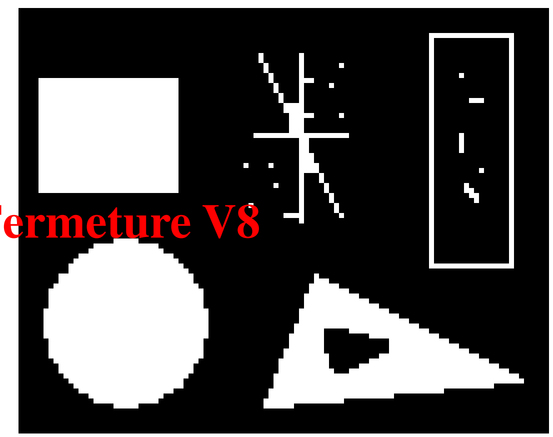


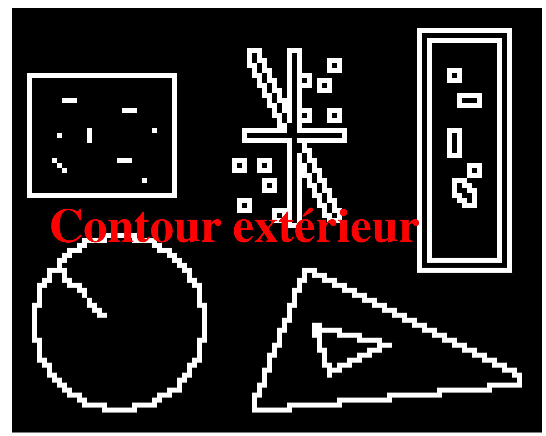




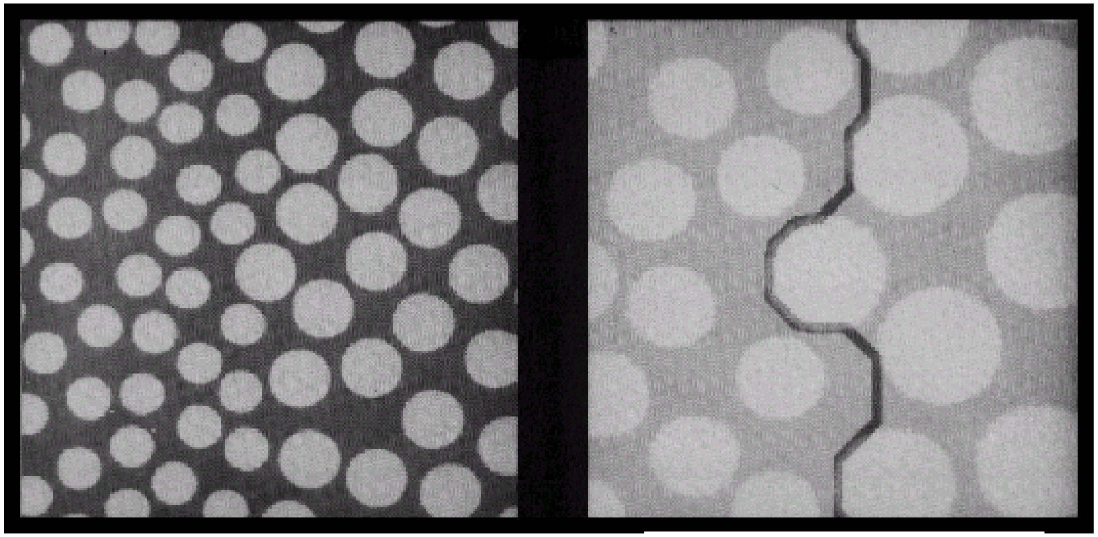








Texture granulaire



Zoom avec contour

SEGMENTATION

(1) Ouverture (Erosion puis Dilatation) avec un élément structurant qui fait disparaître les petits disques blancs (objet)
(2) Fermeture qui fusionne les gros disques
(3) Détection du contour (filtre de gradient)

Morphologie Mathématique des images de niveaux de gris

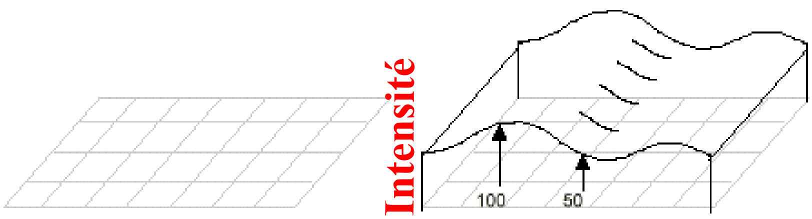
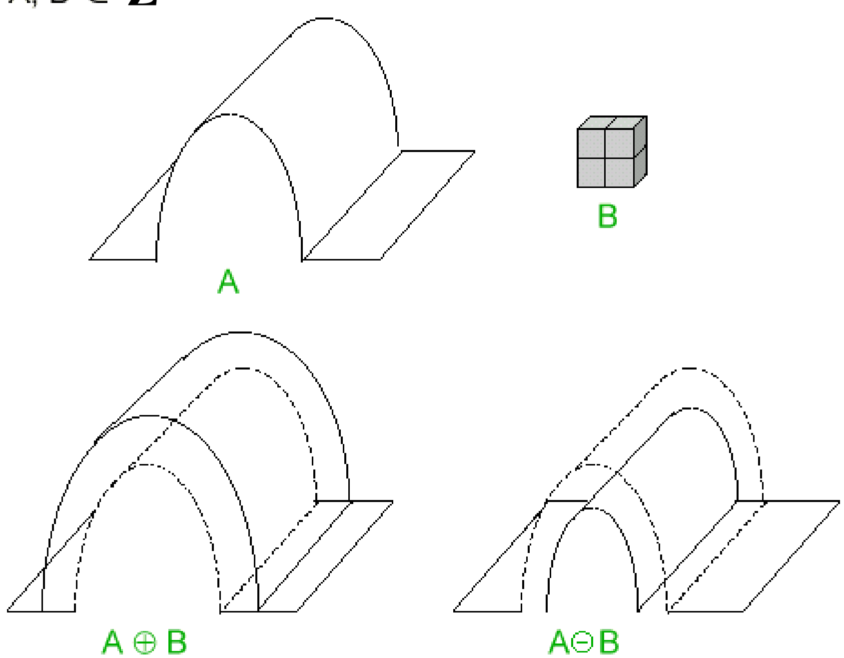
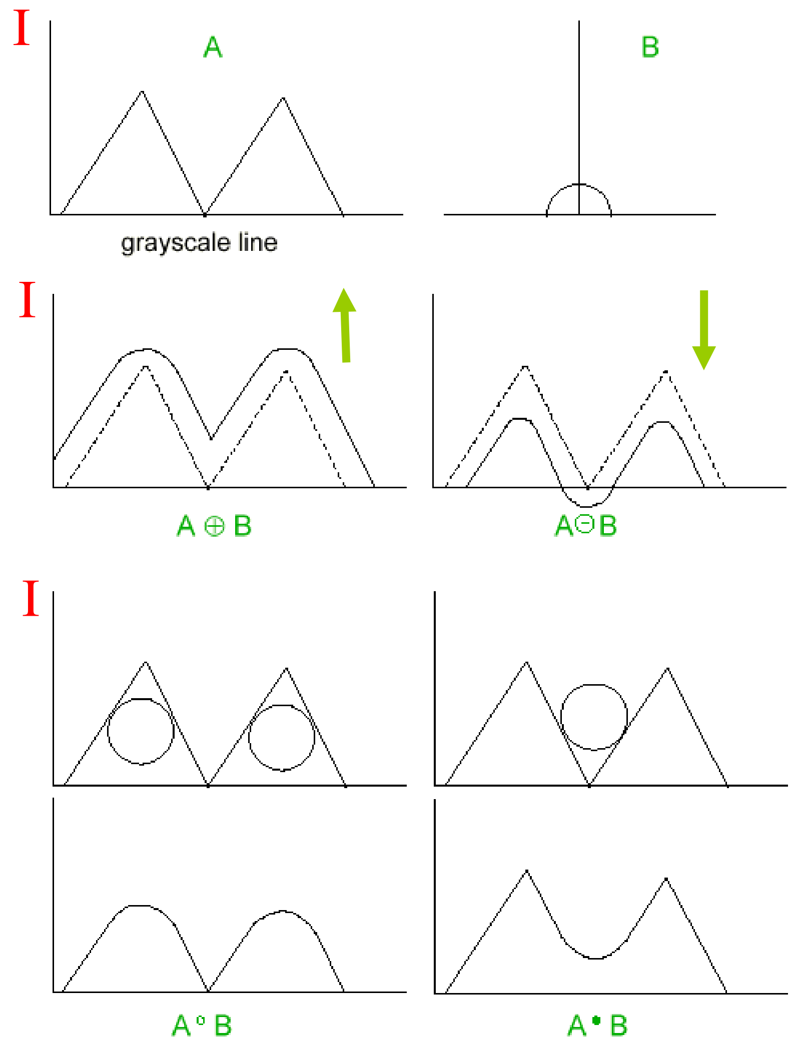


Image NdeG

$A, B \in \mathbf{Z}^3$





Définitions formelles

Dilatation:

$$(f \oplus b)(x, y) = \max\{f(s,t) + b(x-s, y-t) \mid \underbrace{(s,t) \in D_f ; (x-s, y-t) \in D_b}_{\text{On s'assure de ne pas sortir de l'image ni du masque}}\}$$

Convolution mais + et max

On s'assure de ne pas sortir de l'image ni du masque

Érosion:

$$(f \Theta b)(x, y) = \min\{f(s,t) - b(x-s, y-t) \mid (s,t) \in D_f ; (x-s, y-t) \in D_b\}$$

Convolution mais - et min

Exemple

1	2	1
2	3	2
1	2	1

b

f

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	10	11	12	0	0
0	0	11	12	13	0	0
0	0	12	13	14	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

D_f : { (x,y) | 0 ≤x ≤ 6 et 0 ≤ y ≤ 6 }
c-à-d toute l'image

$f \ominus b$

$(f \ominus b)(4,4)$

-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-2	-2	-2	-3	-3
-3	-3	-2	9	-2	-3	-3
-3	-3	-2	-2	-2	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3

$f \oplus b$

3	3	3	3	3	3	3
3	11	12	13	14	13	3
3	12	13	14	15	14	3
3	13	14	15	16	15	3
3	14	15	16	17	16	3
3	13	14	15	16	15	3
3	3	3	3	3	3	3

$$(f \ominus b)(x,y) = ?$$

$$\min\left\{ f(s,t) - b(4-s,4-t) \mid (s,t) \in D_f ; (4-s,4-t) \in D_b \right\}$$

f

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	10	11	12	0	0
0	0	11	12	13	0	0
0	0	12	13	14	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

1	2	1
2	3	2
1	2	1

$b(s,t)$

Origine

$b(4\text{-}s,4\text{-}t)$

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	2	1	0
0	0	0	2	3	2	0
0	0	0	1	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0

$f(s,t)\text{-}\ b(4\text{-}s,4\text{-}t)$

min

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	10	11	12	0	0
0	0	11	11	11	-1	0
0	0	12	11	11	-2	0
0	0	0	-1	-2	-1	0
0	0	0	0	0	0	0

$(f \ominus b)$

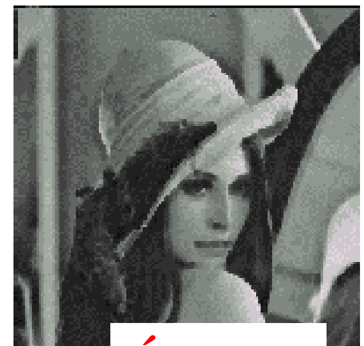
$(f \ominus b)(4,4)$

-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-2	-2	-2	-3	-3
-3	-3	-2	9	-2	-3	-3
-3	-3	-2	-2	-2	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3

Exemples

Original

Dilatation



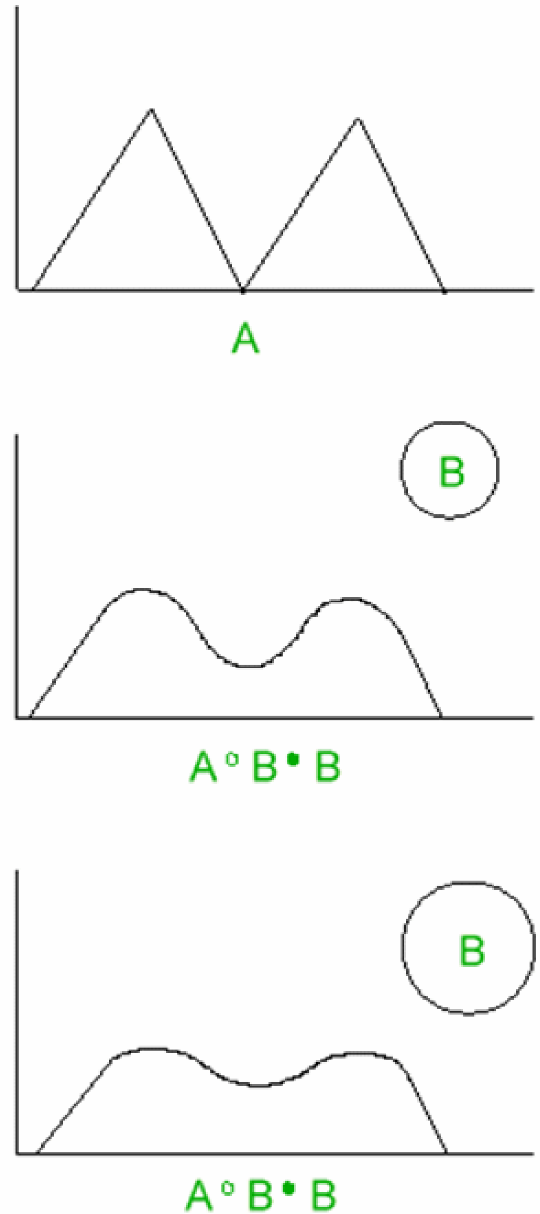
Érosion

Ouverture

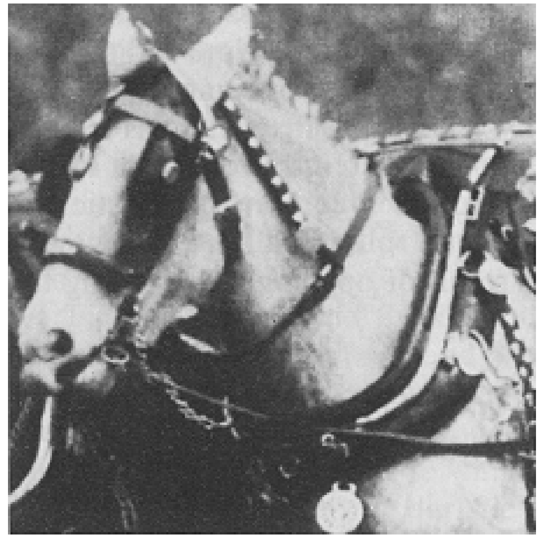
Fermeture

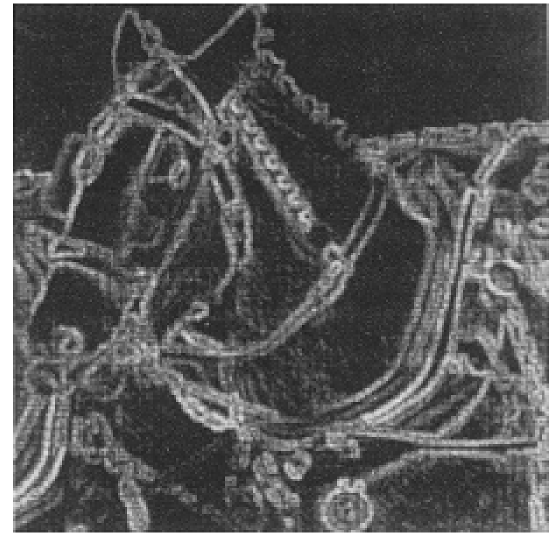
Lissage morphologique d’image

- Ouverture ➔ Elimine les pics clairs plus petits que l'élément structurant
- Fermeture ➔ Elimine les vallées sombres plus petites que l'élément structurant

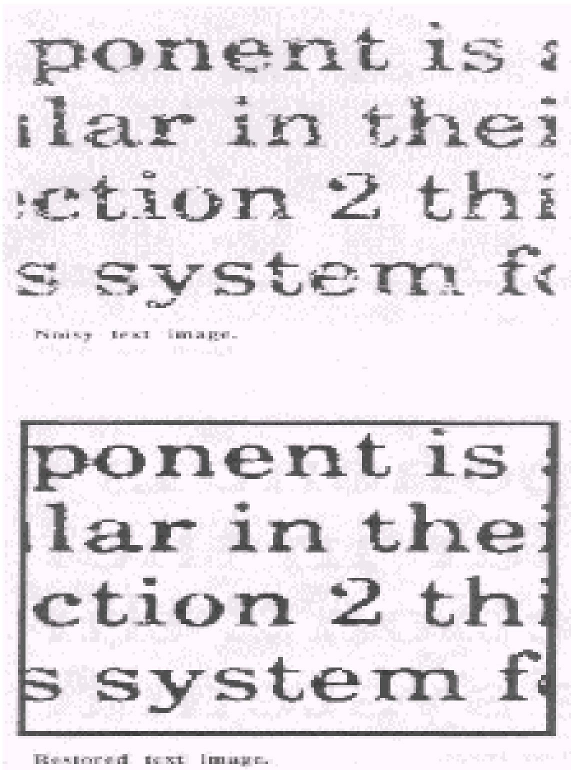


Exemples

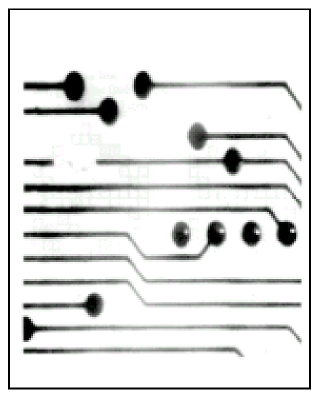




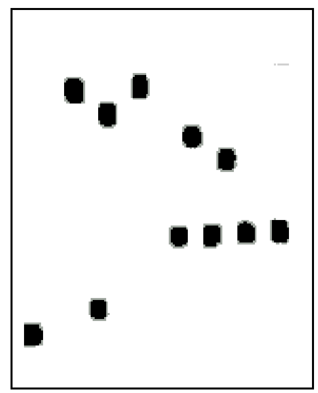
$$A \oplus B - A \Theta B$$



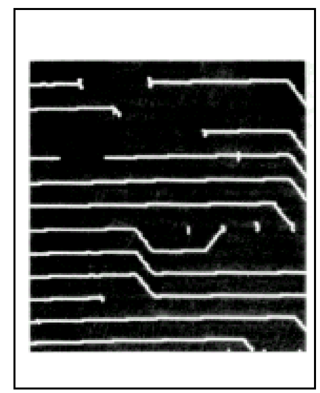
$$A \circ B \bullet B$$



Circuit imprimé



$A \circ B$



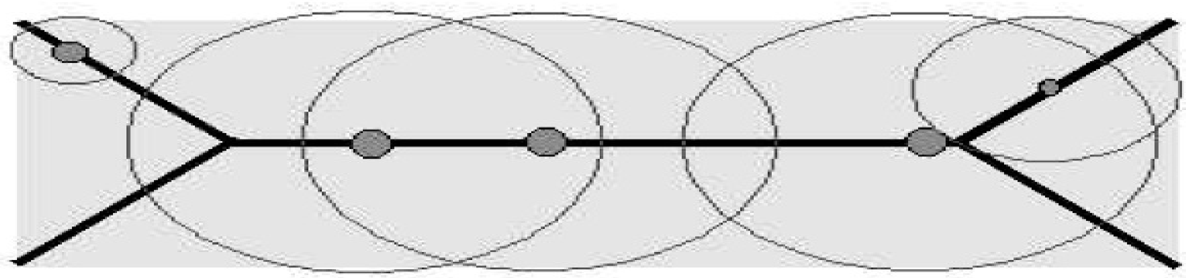
Squelette

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE
ESTIMATION DE SQUELETTE

Squelette d'un objet

- Estimation de l'axe intermédiaire d'un objet

(Méthode des feux de prairies ou des disques circulaires)



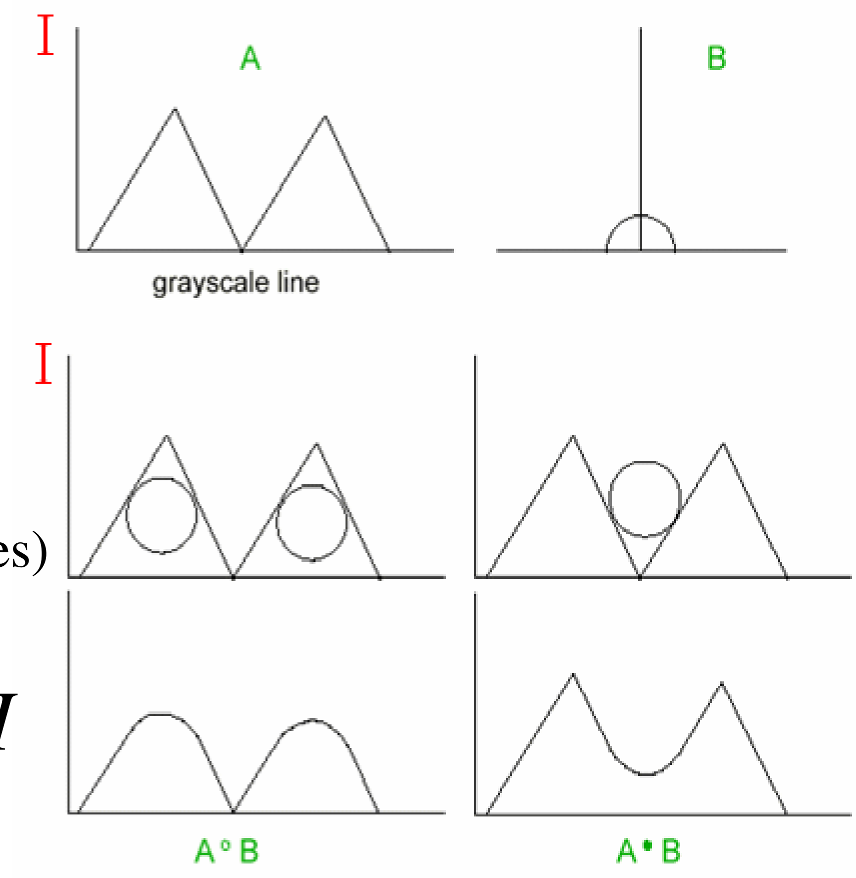
Original — Erosion — Multiple Erosion = Skeleton

Si on conserve les derniers résultats juste avant la disparition du point ou du segment

Chapeau haut de forme (Top Hat)

- Chapeau haut de forme blanc (White Top Hat) :
  - Détection des régions claires (extraction des pics d'intensité selon des critères de taille et forme NdG)

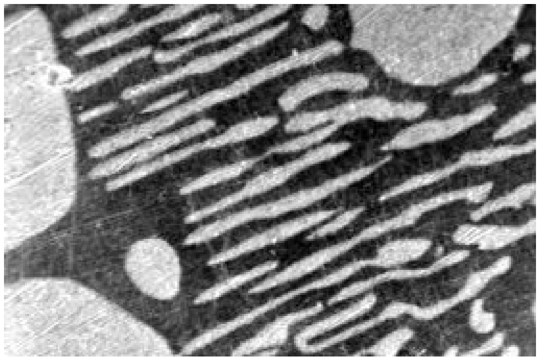
$$I_{TopHat} = I - Ouverture$$



- Chapeau haut de forme noir (Black Top Hat) :
  - Détection des régions foncées (vallées)

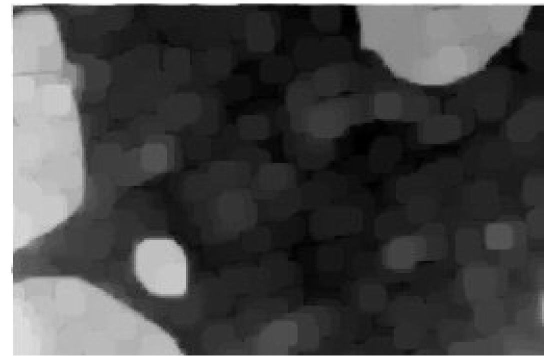
$$I_{TopHat} = Fermeture - I$$

Exemple 1

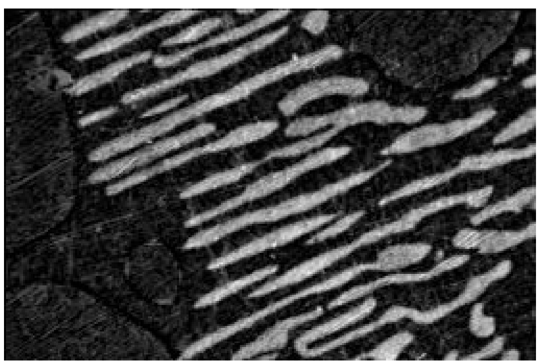


Bandes ≈ 15 pixels de large

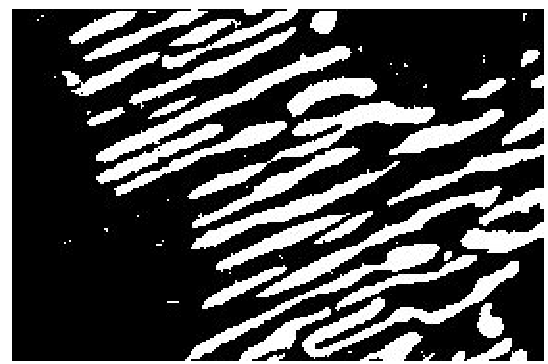
➔ Impose le choix de l'élément structurant



Ouverture

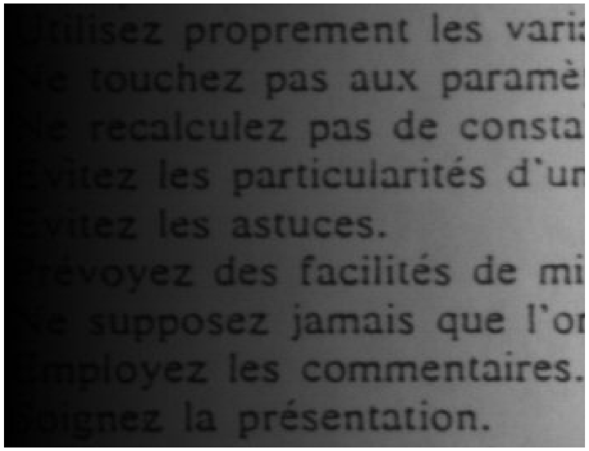


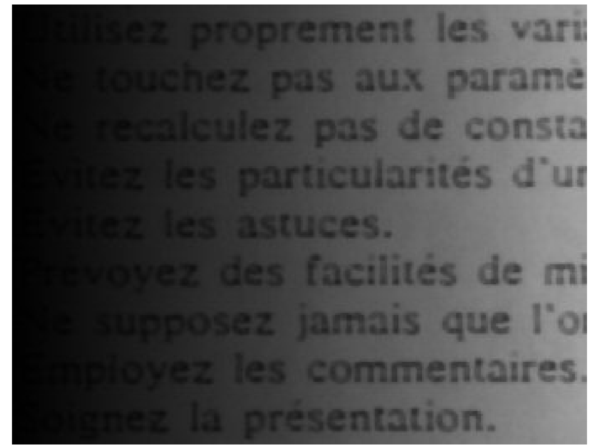
Chapeau haut de forme
= image - ouverture



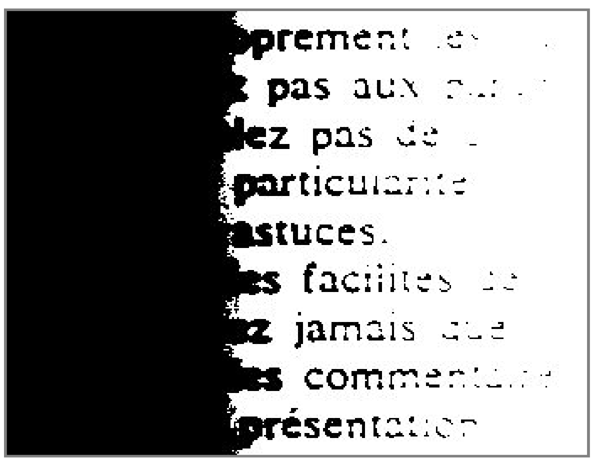
Seuillage S=85

Exemple 2

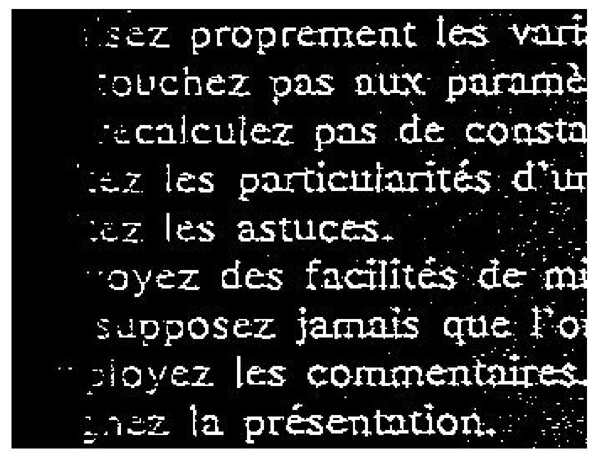




Fermeture



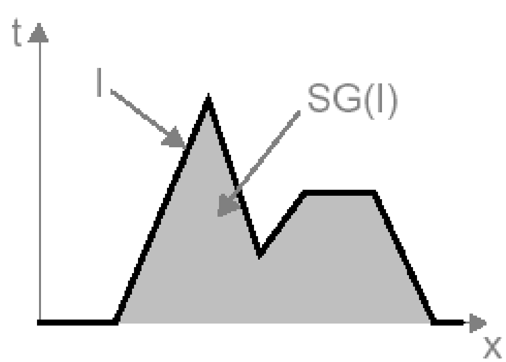
Seuillage S=50



Chapeau haut de forme
= fermeture – image
Puis seuillage

Érosion d'une image en niveaux de gris

➔ Extension simple : soit I une image et SG(I) le sous-graphe de I $\Rightarrow$ SG(I)={ (x,t) : t≤I(x) }



Une définition simplifiée des dilatations et érosions *pour des éléments structurants « plats » et symétriques* est :

$E_B(I)(x)=\inf \{f(y), y\in B_x\}$
$D_B(I)(x)=\sup \{f(y), y\in B_x\}$

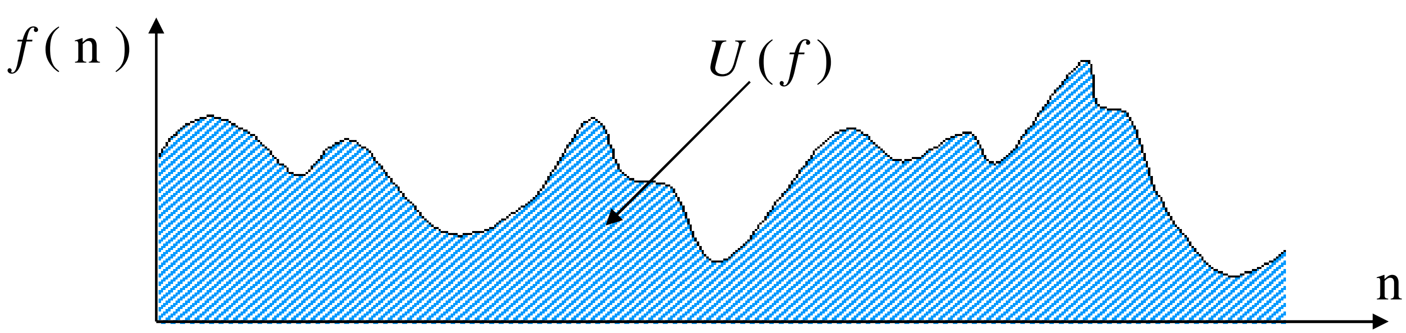
Où B_x est le translaté de B en x

Filtrage morphologique des images monochromes

- Extension de la morphologie binaire à travers la notion d'***ombre*** (ou ***sous-graphe***) de la fonction image
- Définitions :
  - niveau de gris « f » d'un pixel P : $f(m, n)$ où (m, n) est l'affixe de P
  - sous-graphe « $U(f)$ » : $U(f) = \{ (m, n, l), l \in R, \text{ tel que : } l \leq f(m, n) \}$
  - reconstruction **T** de l'image « f » à partir de son sous-graphe $U(f)$:

$$f(m, n) = T[\,U(f)\,] = \mathrm{Sup}_l \{ l \text{ tel que } (m, n, l) \in U(f) \}$$

- <u>exemple</u> (cas d'un signal 1-D) :



Érosion d'une image en niveaux de gris

➢ L'érosion (notée Θ) d'une image monochrome « *f* » par un élément structurant « B » est définie en terme de sous-graphe :

- $Y = U(f) \;\Theta\; U(B)$
- $f \;\Theta\; B = T[\,Y\,] = \mathrm{Sup}_l \,\{\, l \text{ tel que } (m, n, l) \in Y \,\}$

➢ Classiquement, on considère un élément structurant plan de valeur nulle sur son support

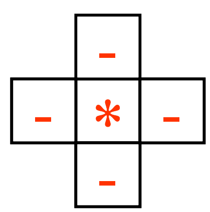
$$\boxed{(f \;\Theta\; B)(P) = \mathrm{Min}\,\{\text{ valeurs des pixels du voisinage du pixel P }\}}$$

▪ <u>exemple</u> :

		n	
m	115	91	77
	95	68	90
	55	151	210

Image de référence

Θ



Élément structurant (4-connexité)

liste ordonnée des valeurs du voisinage :

68 , 90 , 91 , 95 , 151

min

$(f \;\Theta\; B)(P) = 68$

Dilatation d'une image en niveaux de gris

➢ Comme pour l'érosion, la dilatation (notée $\oplus$) est définie en terme de sous-graphe : • $Y = U(f) \oplus U(B)$

• $f \oplus B = T[Y] = \mathrm{Sup}_l \{ l \text{ tel que } (m, n, l) \in Y \}$

➢ En considérant un élément structurant plan de valeur nulle sur son support :

$$\boxed{(f \oplus B)(P) = \mathrm{Max} \{ \text{valeurs des pixels du voisinage du pixel P} \}}$$

▪ <u>exemple</u> :

		n	
	115	91	77
m	95	68	90
	55	151	210

Image de référence

$\oplus$

-	-	-
-	*	-
-	-	-

Élément structurant (8-connexité)

liste ordonnée des valeurs du voisinage :

55 , 68 , 77 , 90 , 91 , 95 , 115 , 151 , **210**

max

$(f \oplus B)(P) = 210$

Exemples de filtrages morphologiques
(élément structurant 3×3 complet)

- Image de référence

- Image dilatée morphologiquement

➢ Observation :

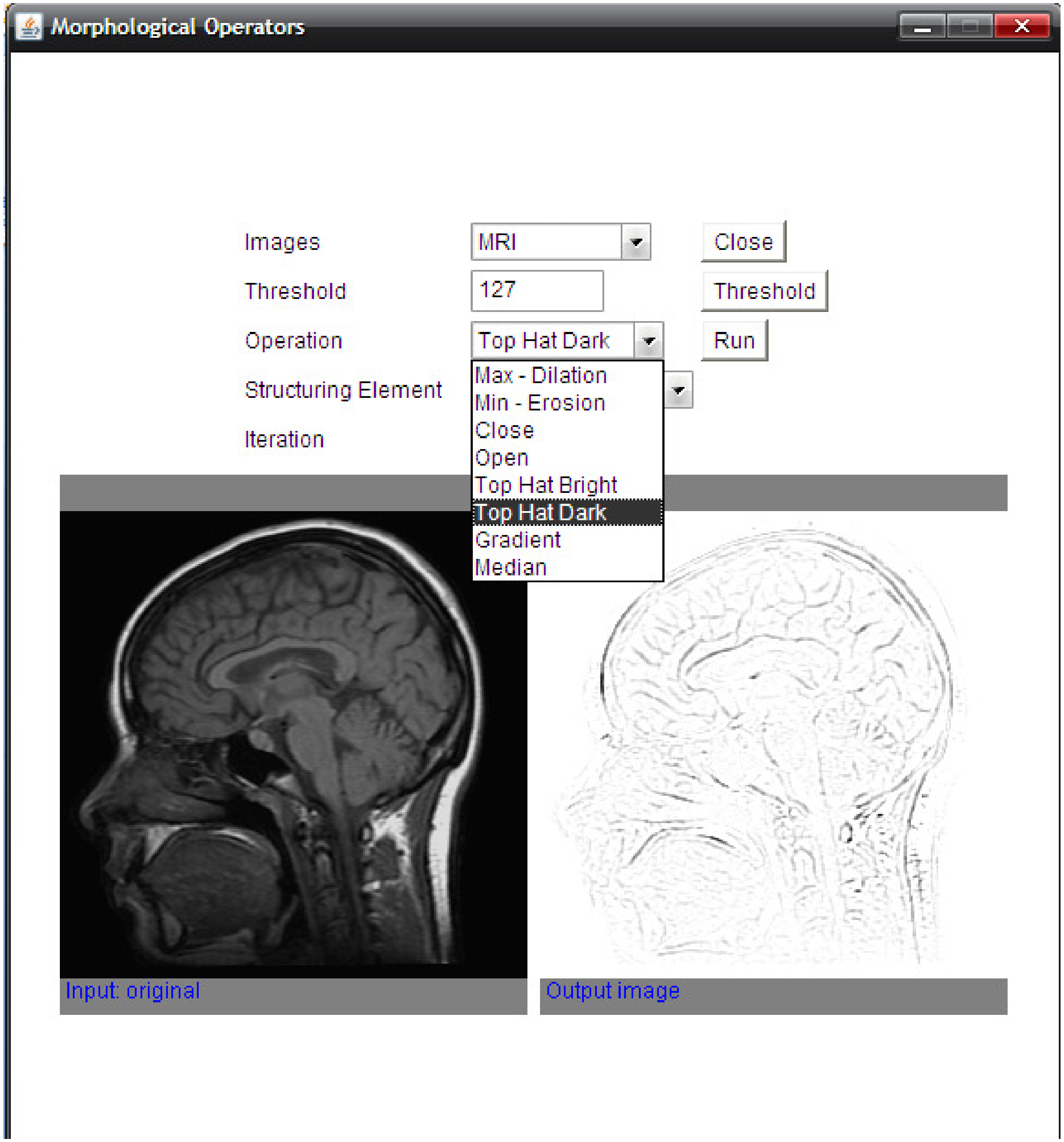
La **dilatation** en niveaux de gris accroît la luminance des pixels entourés de voisins plus lumineux

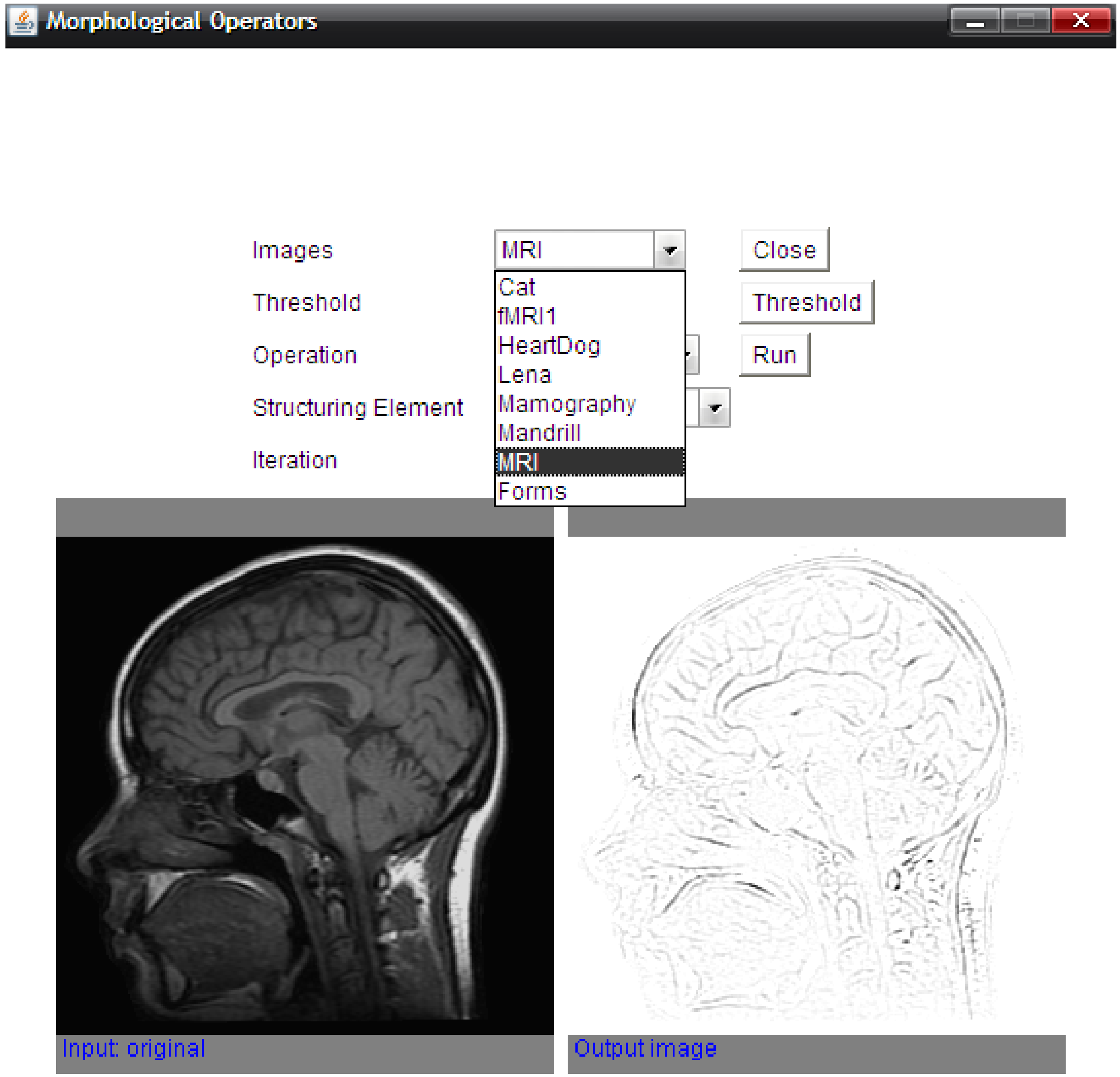
- Image érodée

➢ Observation

L'**érosion** en niveaux de gris réduit la luminance des pixels qui sont entourés de voisins de moindre intensité

Application


Morphological Operators
Images
MRI
Close
Threshold
127
Threshold
Operation
Top Hat Dark
Run
Structuring Element
Iteration
Max - Dilation
Min - Erosion
Close
Open
Top Hat Bright
Top Hat Dark
Gradient
Median
Input: original
Output image


Morphological Operators
Images
MRI
Close
Threshold
Threshold
Operation
Run
Structuring Element
Iteration
Cat
fMRI1
HeartDog
Lena
Mamography
Mandrill
MRI
Forms
Input: original
Output image

Thinning Algorithm