



جامعة سيدي محمد بن عبد الله  
كلية العلوم

جامعة سيدي محمد بن عبد الله  
كلية العلوم

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah  
Faculté des Sciences Dhar Mahraz



## *Examens Corrigés*

# *Traitement Numérique des Images Et Vision par Ordinateur*

*Masters, M2ID & SIRM*

Réalisé par : Hamid TAIRI

Année Universitaire : 2014-2015

**Exercice N°1 :**

Donner une façon de calculer la moyenne  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$  (i.e, la carré de l'écart type) des variations des niveaux de gris dans une image en utilisant seulement  $h(1), h(2), \dots, h(255)$ , les valeurs de l'histogramme normalisé de cette image.

**Corrigé N1 :**

L'histogramme peut être vu comme une densité de probabilité des niveaux de gris dans l'image. Le calcul de la moyenne et de la variance est donc immédiat et s'apparente à un moment d'ordre 1 et 2 et s'écrit,

$$\mu = \sum_{i=0}^{255} ih(i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{255} (i - \mu)^2 h(i)$$

**Exercice N°2 : Opération ponctuelle**

Trouvez la transformation permettant de transformer une image  $Im\ g_1$  possédant une fonction d'histogramme dont le support est compris entre  $[\min_1, \max_1]$  ( $\min_1$  est le niveau de gris minimum de cette image et  $\max_1$  son niveau de gris maximum) en une image dont la fonction d'histogramme a un spectre compris entre  $[\min_2, \max_2]$  (correspondant par exemple au minimum et au maximum de niveau de gris d'une autre image  $Im\ g_2$

**Corrigé N°2 : Opération ponctuelle**

Le plus simple est d'abord de ramener l'histogramme de  $Im\ g_1$  dans le support  $[0, 255]$  (ou étirement d'histogramme) grâce à la relation vue en cours, i. e.

$$Im\ g_1'(x, y) = \frac{255}{\max_1 - \min_1} (Im\ g_1(x, y) - \min_1)$$

Puis d'allonger ou rétrécir cette histogramme pour qu'il est la même longueur de support que l'image  $Im\ g_2$  grâce à la relation linéaire  $Im\ g_1'' = Im\ g_1'(x, y)((\max_2 - \min_2) / 255)$  puis d'ajouter  $\min_2$  à tous les niveaux de gris de  $Im\ g_1''$  par la relation,  $Im\ g_1'''(x, y) = Im\ g_1''(x, y) + \min_2$ . Finalement, on trouve

$$Im\ g_1'(x, y) = \left( \frac{\max_2 - \min_2}{\max_1 - \min_1} (Im\ g_1(x, y) - \min_1) \right) + \min_2$$

Cela s'appelle une projection linéaire.

**Exercice N°3 :** Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

	Vraie	fausse
1- l'érosion d'une fonction est croissante par rapport à la fonction à éroder		
2- l'érosion d'une fonction est croissante par rapport à l'élément structurant		
3- l'érosion d'une image à niveaux de gris bouche des « vallées »		

4- lors d'une dilatation, si des objets sont situés à une distance moins grande que la taille de l'élément structurant, ils vont fusionner		
5- un ensemble convexe est invariant par fermeture par un élément structurant		
6- un ensemble convexe est invariant par ouverture par un élément structurant		
7- le squelette par amincissement préserve la topologie		
8- Dans une image, les basses fréquences représentent les zones lisses.		
9- Les hautes fréquences sont les zones très variables: textures, arrêtes, coins,		
10- Un filtre passe-haut diminue le bruit dans une image.		
11- la fermeture est indépendante du choix de l'origine de l'élément structurant.		

### Corrigé N3 :

	Vraie	fausse
1- l'érosion d'une fonction est croissante par rapport à la fonction à éroder	X	
2- l'érosion d'une fonction est croissante par rapport à l'élément structurant	X	
3- l'érosion d'une image à niveaux de gris bouche des « vallées »		X
4- lors d'une dilatation, si des objets sont situés à une distance moins grande que la taille de l'élément structurant, ils vont fusionner	X	
5- un ensemble convexe est invariant par fermeture par un élément structurant		X
6- un ensemble convexe est invariant par ouverture par un élément structurant	X	
7- le squelette par amincissement préserve la topologie	X	
8- Dans une image, les basses fréquences représentent les zones lisses.	X	
9- Les hautes fréquences sont les zones très variables: textures, arrêtes, coins,	X	
10- Un filtre passe-haut diminue le bruit dans une image.		X
11- la fermeture est indépendante du choix de l'origine de l'élément structurant.		X

### Exercice N°4 : Restauration d'image

Quelle est la nature du bruit présent sur cette image (figure 1)? Que proposez-vous comme algorithme pour restaurer cette image ?



Figure (1) Image de Lenna

### Corrigé N4 :

C'est du bruit Poivre et Sel qui provient d'une saturation de la quantification ou d'une dégradation de la pellicule photographique. Pour restaurer cette image, le filtrage médian (avec ici une fenêtre 3X3) permettrait de contrer et d'atténuer l'effet de ce bruit, On pourrait utiliser aussi la morphologie mathématique

### Exercice N°5 : Spectre

Associer à chacune des images le spectre (module de la TF) correspondant et explique pourquoi vous avez fait ce choix (Figure 2) ?

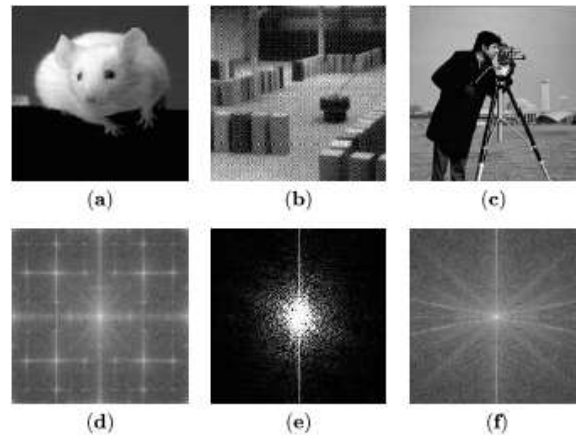


Figure 2 : Trois images et trois spectres

### Corrigé N°5 : Spectre

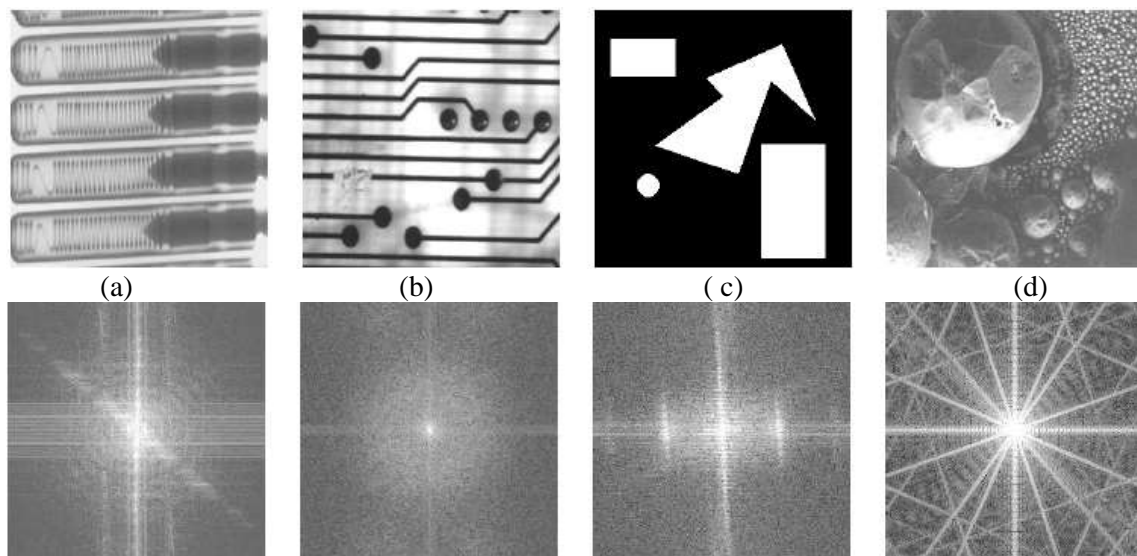
Image (a) avec spectre (e) : l'image de la souris présente une discontinuité ou transition brutale suivant l'axe des x qui se traduit par une TF présentant de nombreuses fréquences spatiales suivant l'axe des v (associé à l'axe des y).

Image (c) avec spectre (f) : l'image du caméra-man présente spatialement de nombreuses discontinuités suivant différents axes que l'on retrouve dans le domaine fréquentiel (de nombreuses fréquences spatiales associées à différents axes)

Image (b) avec spectre (d) : l'image est discrétisée par une sorte de peigne de Dirac bidimensionnel pondéré. Dans le domaine fréquentiel, cela se traduit par une convolution du motif spectral de base par un peigne de Dirac bidimensionnel pondéré.

### Exercice N°6 :

Les images 1 à 4 de la figure ci-dessous représentent le module du spectre de Fourier des différentes images (a) à (d). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image.



### Corrigé N6 :

- **c-4** : l'image est binaire et synthétique et fait donc apparaître des transitions ou discontinuités spatiales très nettes qui vont se matérialiser dans son spectre d'amplitude par des fréquences

spatiales élevées et des forts coefficients de module du spectre dans la direction perpendiculaire à toute transitions blanches-noire visibles dans l'image. Il s'agit donc, sans ambiguïté, de l'image 1

- **d-2** : l'image présente des formes présentant des transitions de différentes importances et des formes différentes qui vont se traduire spectralement par une diversité de fréquence dans le domaine spectral. Il s'agit donc de l'image 2
- **a-3** : Un type de transitions existe dans l'image (horizontale et diagonales droites) existent dans l'image et correspondent à deux type de forts coefficients spectraux sur une orientation perpendiculaire aux deux précédentes transitions.
- **b-1** : Deux types de transitions (horizontales, et diagonales droites) existent dans l'image et correspondent à deux type de forts coefficients spectraux sur une orientation perpendiculaire aux deux précédentes transitions

Le spectre de phase ou la partie imaginaire d'un signal paire est nulle,

### Exercice N°7 : Snake / Contour actif

On rappelle que les contours actifs cherchent à minimiser une énergie de type :

$$E(C) = \int_0^1 \left( \alpha \left| \frac{\partial v(s)}{\partial s} \right|^2 + \beta \left| \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} \right|^2 \right) ds + \lambda \int_0^1 -|\nabla I(v(s))|^2 ds \quad (1)$$

Cette énergie est transformée en équation d'évolution et discrétisée sous la forme :

$$\begin{aligned} X_t &= (A + \gamma I)^{-1} (\gamma X_{t-1} + f_x(X_{t-1}, Y_{t-1})) \\ Y_t &= (A + \gamma I)^{-1} (\gamma Y_{t-1} + f_y(X_{t-1}, Y_{t-1})) \end{aligned} \quad (2)$$

Les questions qui suivent sont indépendantes

1. Pourquoi la formulation précédente pousse-t-elle le contour actif vers des contours forts de l'image ?
2. Si on disposait d'une image binaire de contours J (par exemple obtenue par un détecteur type Canny-Deriche et seuillage), comment adapter la formulation (1) pour que le contour actif recherche les contours extraits dans l'image J ?
3. A quoi servent les deux termes d'énergie interne ? Sont-ils redondants ?
4. Si on modifie  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\lambda$ , le minimum global de l'énergie est-il modifié ?
5. La modification de  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\lambda$  implique-t-elle le recalcul de la matrice inverse de  $(A + \gamma I)$  ?
6. L'utilisateur veut définir un point d'ancrage au contour actif. C'est équivalent à tendre un ressort entre un point fixe de l'image  $P=(x,y)$  spécifié par l'utilisateur et un point du contour actif. Proposez une modification de (1) ou de (2) pour intégrer ce type de contrainte.
7. (Maximum 10 lignes) Le résultat d'une segmentation par contour actif est sensible à son initialisation (position initiale). Pourquoi ? Quelle(s) autre(s) définition(s) d'énergies externes pourai(en)t attendre cette sensibilité ?
8. Pourquoi faut-il recalculer régulièrement la matrice  $(A + \gamma I)$  et son inverse ?
9. Le coefficient  $\beta$  est parfois mis à zéro sur des points isolés du contour actif. Quelle géométrie particulière est alors capturée sur l'objet à segmenter ?

### Corrigé N°7 : Snake / Contour actif

On rappelle que les contours actifs cherchent à minimiser une énergie de type :

$$E(C) = \int_0^1 \left( \alpha \left| \frac{\partial v(s)}{\partial s} \right|^2 + \beta \left| \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} \right|^2 \right) ds + \lambda \int_0^1 -|\nabla I(v(s))|^2 ds \quad (1)$$

Cette énergie est transformée en équation d'évolution et discrétisée sous la forme :

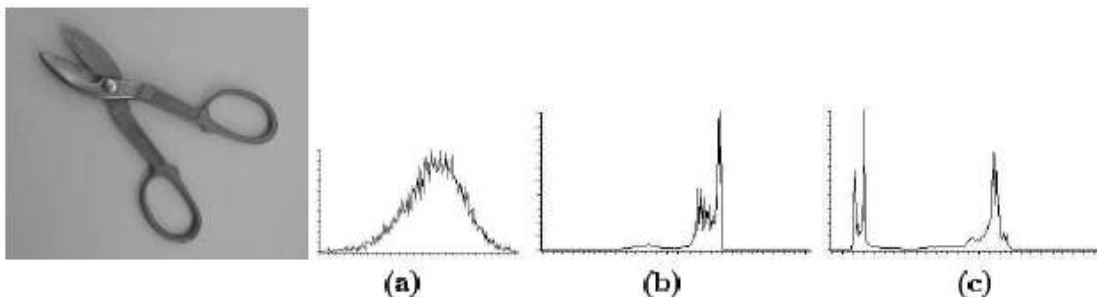
$$\begin{aligned} X_t &= (A + \gamma I)^{-1} (\gamma X_{t-1} + f_x(X_{t-1}, Y_{t-1})) \\ Y_t &= (A + \gamma I)^{-1} (\gamma Y_{t-1} + f_y(X_{t-1}, Y_{t-1})) \end{aligned} \quad (2)$$

Les questions qui suivent sont indépendantes

- 1) On cherche à minimiser la valeur de  $E(C)$ . Or, celle-ci intègre négativement les normes des gradients le long du contour. L'énergie est donc particulièrement négative sur son contour fort de l'image. Si le contour actif s'en éloigne aura tendance à baisser. Les équations d'évolution font couler le modèle vers un minimum local, donc dans la direction de gradients forts.
- 2) On écrira  $E(C) = \int_0^1 \left( \alpha \left| \frac{\partial v(s)}{\partial s} \right|^2 + \beta \left| \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} \right|^2 \right) ds + \lambda \int_0^1 -G_\sigma * J(v(s)) ds$ , où  $G_\sigma * J$  est la convolution de l'image de contours par un gaussien de variance  $\sigma$ .
- 3) Le premier terme pénalise la longueur de la courbe, le deuxième terme pénalise les fortes courbes le long de la courbe, ils ne sont pas redondants, le premier tend toujours à retractor le modèle et peut polygonaliser en certains points, ce qui n'est pas le cas du second, qui lisse la courbe partout sans crée de sommets.
- 4) Oui
- 5) Oui pour  $\alpha$ ,  $\beta$ , Non pour  $\lambda$ .
- 6) Soit  $P_t^i = (X_t^i, Y_t^i)$  le point concerné du contour actif. On rajoute pour ce point-là la forme  $-k \vec{PP}_t^i$  où  $k$  est la raideur du ressort, Une autre façon est de rajouter une autre forme d'énergie, sinon les équations d'Euler-Lagrange induisent alors la force indiquée ci-dessus.
- 7) On peut imaginer des énergies de région, tenant compte de propriétés internes au contour. Elles sont intrinsèquement plus stables que la recherche de contours. On peut utiliser aussi des cartes de distances à des images de contours, qui attirent un contour actif de beaucoup plus loin.
- 8) Cette matrice est valable pour un échantillonnage régulier des points de la courbe. Il faut donc théoriquement la recalculer périodiquement pour tenir compte des variations d'écartement entre sommets de la discrétisation du contour.
- 9) En ce point là, la courbe peut accuser un changement de tangente important, c'est-à-dire une très forte courbure, Cela permet de rechercher des formes connues avec quelques points anguleux tout en lissant le reste du contour actif pour éliminer les bruits.

## Exercice N°8 Représentation & Filtrage spatial

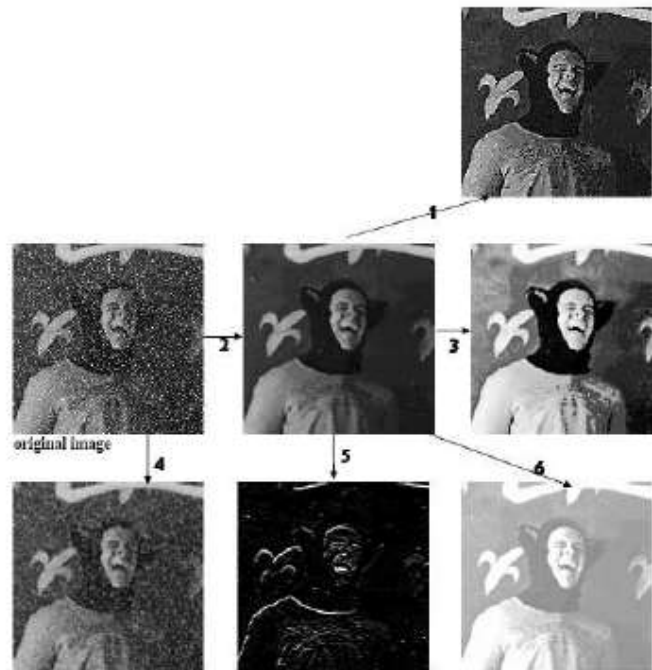
1. Affecter à l'image représentant un ciseau, l'un des trois histogrammes représenté ci-dessous en justifiant sommairement votre réponse.



2. En traitement d'image, il existe une multitude de variante de filtre passe-bas, pls ou moins différents. Parmi ceux-ci, il existe le filtre que l'on appelle le filtre OLYMPIQUE qui consiste à faire la moyenne (dans un voisinage considéré, c'est-à-dire une fenêtre (3x3) de toutes les valeurs de niveaux de gris sauf les deux valeurs extrêmes (min et max). Discuter l'efficacité de ce type de filtre (comparé au filtre médian et Gaussien) sur une image entachée de bruit Gaussien et sur une image entachée de bruit sel et poivre.
3. Affecter à chaque flèche le traitement (filtre ou opération ponctuelle) qui lui correspond parmi les traitement suivant :
  - a. Egalisation
  - b. Filtre moyennneur

- c. Filtre médian
- d. Rehausseur de contour
- e. Filtre de Prewit
- f. Rehaussement de luminance (i.e., ajout d'une constante sur l'image)

**Nota :** Vous n'avez pas besoin de justifier votre réponse, donner seulement la bonne réponse.



## Corrigé N°8 : Représentation & Filtrage spatial

- 1) C'est l'Histogramme (b) qui représente l'image du ciseau. L'Histogramme doit être forcément bimodal puisque un objet d'une certaine couleur se détache du background. De plus, il existe un peu plus (en en proportion) de pixels appartenant au background que de pixel appartenant à l'objet, nous renseignant de ce fait que le deuxième pic de l'histogramme est plus important en hauteur et moins important en largeur que le premier pic associé au pixels appartenant à l'objet. De plus, il existe des niveaux de gris sur l'objet qui se rapprochent beaucoup du background nous indiquons que ces deux pics sont très proches l'un de l'autre.
- 2) Pour une image entachée de bruit Gaussien, ce filtre devrait se comporter de façon similaire au filtre Gaussien avec les mêmes défauts de ce dernier, lorsqu'on augmente la taille du voisinage, les contours deviennent de plus en plus flou ( pour une taille 3X3, le fait de faire une moyenne sur 9 valeurs ou  $9-2=7$  valeurs de niveaux de gris ne changerait pas grand-chose à la présentation des contours de l'image.  
Pour une image entachée de bruit sel et poivre, il devrait, se comporter similairement au filtre médian pour un bruit où les agrégats ne sont pas plus gros qu'un pixel. Par contre lorsque les agrégats de bruits ont une épaisseur supérieur à un pixel, ce filtre devrait se comporter comme le filtre Gaussien, c'est-à-dire pas très bien, et rien n'y changerait, même si on augmente la taille du voisinage.
- 3)
  1. (3-a) Egalisation
  2. (4-b) Filtre Moyenneur
  3. (2-c) Filtre médian
  4. (1-d) Rehausseur de contour
  5. (5-e) Filtre de Prewitt (1 direction)
  6. (6-f) Rehaussement de luminance (Ajout d'une constante sur l'image)

### Exercice N°9 : Filtrage Spatial

Rappelez l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle du masque de convolution  $h(x,y)$  donné ci-dessous et tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentielle (en une dimension). Quel transformation mathématique faut-il faire dans le domaine fréquentiel pour que ce masque de convolution soit un vrais filtre passe-haut ? (Quel fonction faut-il retrancher ou ajouter, multiplier, etc ?). Dans le domaine spatial, quelle opération cela implique t-il sur le masque de convolution 1D pour que cela soit un vrais filtre passe-haut ? Trouver le masque de convolution 2D correspondant.

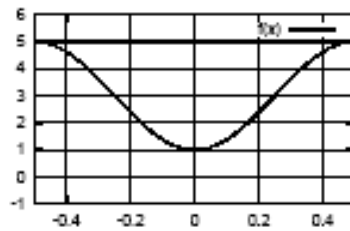
$$h(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

### Corrigé N°9 : Filtrage Spatial

Filtre séparable :  $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Quelle fonction faut il retrancher ou ajouter, multiplier, etc

$$\begin{aligned} H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi jux) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi jux) \\ &= \exp(2\pi ju) + 3 - \exp(-2\pi ju) = 3 - 2\cos(2\pi u) \end{aligned}$$



C'est un rehausseur de contour, ce n'est donc pas un réel filtre passe haut. Pour que cela soit un, il faudrait retrancher dans le domaine fréquentiel la fonction constante  $f(v) = -1$ , i.e, retrancher dans le domaine spatial la fonction  $F^{-1}(f(v)) = -\delta(x)$ . Dans ce cas, on obtiendrait le masque de convolution  $[-1 \ 3 \ -1] - [0 \ 1 \ 0] = [-1 \ 2 \ -1]$ , qui est bien un vrais filtre passe haut, En 2D cela correspond au masque de convolution ci-dessous.

1	-2	1
-2	4	-2
1	-2	1

### Exercice N°10 : Filtrage spatial

1. Trouvez les expressions mathématiques et l'allure des réponses fréquentielles (module de la TF) du masque de convolution  $h(x,y)$  donné ci-dessous respectivement en  $u$  (horizontalement) et en  $v$  (verticalement)
2. Tracez sommairement l'allure de sa réponse fréquentielle (module) en  $u$  et en  $v$ . Expliquer pourquoi une représentation de ces réponses fréquentielles sur  $[-0.5, 0.5]$  est satisfaisante.
3. De quel type de filtre pour chacune des dimensions considérées (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc) s'agit t-il ? Pouvait-on prévoir le résultat juste en regardant les coefficients de ce filtre ? Expliquer maintenant qualitativement ce que va faire ce masque de convolution. Donner son nom.



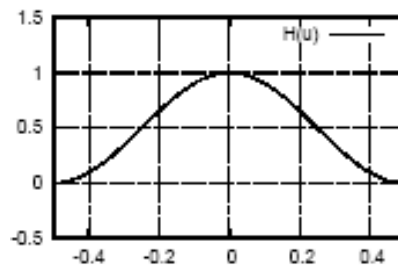
$$h(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Corrigé N°10 : Filtrage Spatial

Filtre séparable mais non symétrique :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- En x et en utilisant un facteur de normalisation  $1/4$  ;

$$\begin{aligned} H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi jux) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi jux) \\ &= \frac{1}{4} [\exp(2\pi ju) + 2 + \exp(-2\pi ju)] = \frac{1}{4} [2 + 2 \cos(2\pi u)] = \frac{1 + \cos(2\pi u)}{2} \end{aligned}$$

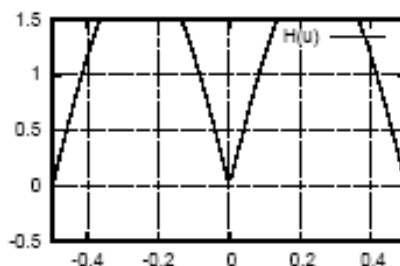


En x, c'est un filtre passe-bas ; ce que l'on pouvait prévoir en constatant que tous les coefficients de ce filtre sont positifs,

- En y :

$$\begin{aligned} H(v) &= \sum_{y=-\infty}^{+\infty} h(y) \exp(-2\pi jvy) = \sum_{y=-1}^{+1} h(y) \exp(-2\pi jvy) \\ &= -\exp(2\pi jv) + \exp(-2\pi jv) = -2j \sin(2\pi v) \end{aligned}$$

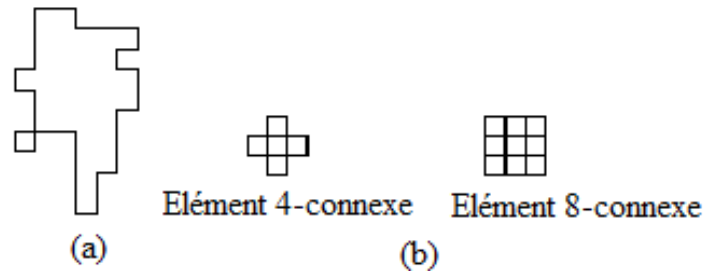
En module on a donc  $H(v) = |2j \sin(2\pi v)|$ , ce on trouve graphiquement :



Finalement ce filtre va lisser en x et calculer une dérivée en y, c'est un filtre de prewitt. Il sert à faire la détection des contours (grâce au filtre passe-haut) tout en étant robuste au bruit (grâce au filtre passe-bas)

## Exercice N°11 / Erosion & Dilatation

Calculer l'érosion et la dilatation de la forme F par les éléments 4-connexe et 8-connexe donnés ci-dessous



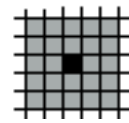
(a) Forme F, (b) éléments à 4-connexe et 8-connexe

### Exercice N°12 :

Les différents filtrages morphologiques sont appliqués sur une image de référence, avec un élément structurant schématisé ci-dessous: pour chaque image donner le type d'opération morphologique et commenter les résultats.



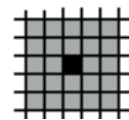
Image de référence



l'élément structurant

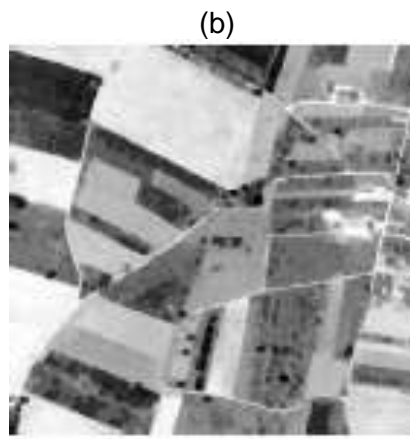
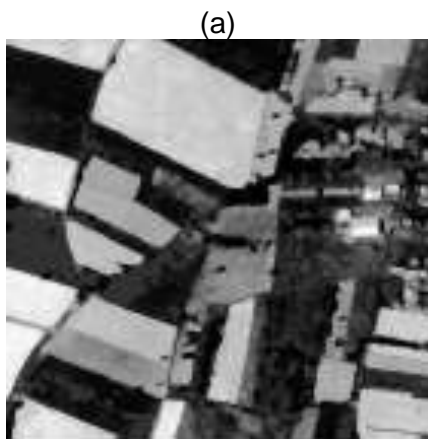


Image de référence



l'élément structurant





(c)

(d)

**Corrigé N°12 :**



Dilatation



Erosion

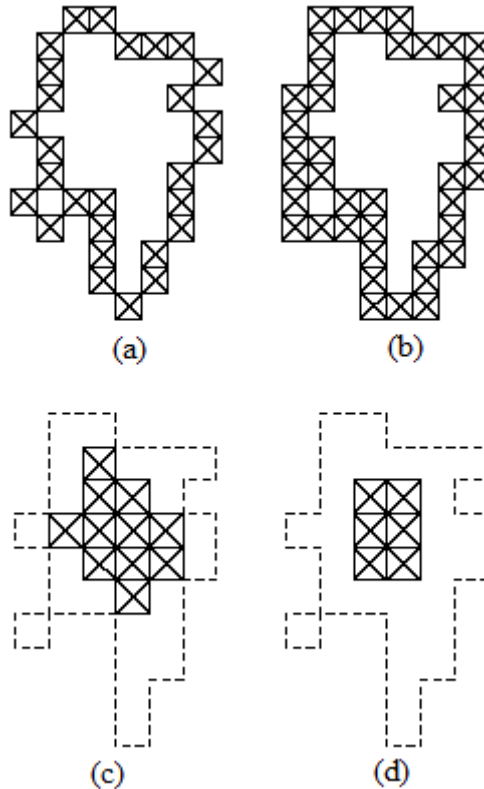


Ouverture



Fermeture

**Corrigé N°13 : Erosion & Dilatation**



(a) Forme dilatée par l'élément 4-connexe, (b) Forme dilatée par l'élément 8-connexe, (c) Forme érodée par l'élément 8-connexe, (d) Forme érodée par l'élément 8-connexe

#### Exercice N°14 :

Soit I une image en niveaux de gris, représentée par la matrice suivante. On va considérer un élément structurant S rectangulaire de taille 1\*3 dont l'élément central est le centre du rectangle.

I	10	10	10	10	10
	10	30	30	30	10
	10	30	50	30	10
	10	30	30	30	10
	10	10	10	10	10

1. Donnez la matrice résultant d'une érosion de l'image I par l'élément structurant S. Laissez vides les pixels ne pouvant pas être traités.
2. Donnez la matrice résultant d'une dilatation de l'image I par l'élément structurant S. Laissez vides les pixels ne pouvant pas être traités.
3. Ecrivez l'algorithme qui permet de déterminer la valeur maximale des pixels se trouvant dans un carré de taille  $n \times n$  ( $n$  impair) de centre  $(i,j)$ . On suppose que le carré ne dépasse pas de l'image ; il n'y a donc pas de test à faire sur les valeurs des indices.
4. Que faut-il modifier dans l'algorithme précédent pour obtenir la valeur minimale ?

#### Corrigé N14

Matrice résultante d'une érosion de l'image I par l'élément structurant S.

Ie		10	10	10	
		10	30	10	
		10	30	10	
		10	30	10	
		10	10	10	

Matrice résultante d'une dilatation de l'image I par l'élément structurant S.

	10	10	10	
	30	30	30	
Id	50	50	50	
	30	30	30	
	10	10	10	

Algorithme permettant de déterminer la valeur maximale des pixels se trouvant dans un carré de taille  $n \times n$  ( $n$  impair) de centre  $(i,j)$  dans une image  $Im$   
 $max_{i,j} Im(i,j)$

```

Pour lig de  $i-(n-1)/2$  à  $i+(n-1)/2$  FAIRE
  Pour col de  $j-(n-1)/2$  à  $j+(n-1)/2$  FAIRE
    SI  $Im(lig,col) > maxi$ 
      ALORS  $maxi = Im(lig,col)$ 
    FIN SI
  FIN POUR
FIN POUR

```

Pour obtenir la valeur minimale, il suffit de remplacer  $maxi$  par  $mini$  et  $>$  par  $<$  dans le test SI

### Programme matlab

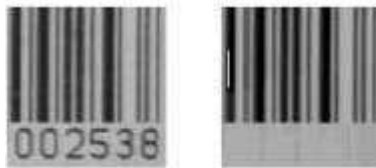
```

Maxi=max(max(I(i-(n-1)/2 : I(i+(n-1)/2 , I(j-(n-1)/2 : I(j+(n-1)/2)));
Mini=min(min(I(i-(n-1)/2 : I(i+(n-1)/2 , I(j-(n-1)/2 : I(j+(n-1)/2)));

```

### Exercice N°15 : Morphologie mathématique

- Comment pourrait-on facilement enlever les chiffres sous ce code barre avec un traitement utilisant les outils de la morphologie mathématique ?



- Quel traitement utilisant les outils de la morphologie mathématique permettrait de faire l'opération inverse, i.e., éliminer les codes barres et garder les chiffres ?
- Comment pourrait-on facilement compter le nombre de pastilles blanches restantes et déterminer leurs tailles avec un traitement utilisant les outils de la morphologie mathématique ? (Nota : on sait que les pastilles sont rondes)



### Corrigé N°15 : Morphologie mathématique

1)

- Par exemple : Ouverture par un élément morphologique linéique et verticale, par exemple une ligne verticale de largeur 1 pixel et de longueur supérieure à l'épaisseur maximal des chiffres. Ce traitement pourrait se faire sur l'image binarisée ou en niveau de gris.
- De façon presque équivalente, on pourrait aussi squelettiser l'image. Le traitement qui consisterait ensuite à faire un filtre médian sur un voisinage 1 ligne et  $n$  colonnes ( $n$  impair supérieur à trois) permettrait de supprimer les chiffres.

2)

- Par exemple : Ouverture par un élément morphologique linéique et horizontal, par exemple une ligne horizontale de largeur 1 pixel et de longueur supérieure à l'épaisseur maximal des barres code. Ce traitement pourrait se faire sur l'image binarisée ou en niveau de gris.

- Si on fait le traitement précédent, il suffirait de faire une différence entre l'image originale et l'image obtenue en 1.a.
- 3)
- Une binarisation permettrait d'obtenir les pastilles blanches sur fond noir. Une technique utilisant une érosion avec des opérateurs morphologiques circulaires de plus en plus grand permettrait, pour une certaine taille de l'élément morphologique, de supprimer toutes les régions blanches de l'image binarisée, permettant ainsi de déterminer à la fois la taille de la pastille (i.e, la taille de l'élément morphologique circulaire utilisé) et le nombre de pastille (i.e, le nombre de pixels blanc éliminé par cette opération divisée par la taille de l'élément morphologique circulaire utilisé.
  - Une binarisation permettrait d'obtenir les pastilles blanches sur fond noir. Une squelettisation permettrait en final d'avoir autant de points blancs que de pastilles.

### Exercice N°16 : Transformée de Hough

Ecrire l'algorithme et le programme de La transformée de Hough pour la détection des droites dans une image ?

### Corrigé N°16 : Transformée de Hough

- 1) Quadrillage de l'espace (c,m)
- 2) Pour chaque case  $A(u,v)=0$
- 3) Pour chaque point image
  - a) Choisir  $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$
  - b) Calculer  $c = -xm + y$
  - c) Calculer la case (u,v)
  - d)  $A(u,v) = A(u,v) + 1$
- 4) Pour toute case (u,v), si  $A(u,v) > \text{seuil}$ , cette case représente une droite

### Exercice 17 : Transformée de Hough

Soient trois points  $A(-2,5)$ ,  $B(2,-3)$  et  $C(0,3)$  supposés appartenir à un même contour linéaire. On souhaite déterminer, à l'aide de la transformée de Hough l'équation de la droite approximant au mieux ce contour.

**Question 1 :** On modélise les droites par leur équation sous la forme  $y = a.x + b$ . De ce fait, les deux dimensions de l'espace de Hough sont :

- le coefficient de pente a,
- le coefficient de translation b.

Donner les coordonnées des points de l'espace de Hough recevant au moins 2 votes lors du traitement des 3 points A, B et C.

En déduire la taille minimale de la matrice représentant l'espace de Hough si celle ne peut représenter que des valeurs entières relatives pour a et b.

**Question 2 :** En fonction des informations issues de la transformée de Hough, proposer une solution pour déterminer l'équation de la droite approximant le contour passant par A, B et C.

Donner l'équation de cette droite dans l'espace de l'image.

### Corrigé 17 : Transformée de Hough

**Question 1 :**

Les points recevant au moins 2 votes correspondent aux droites (AB), (AC) et (BC).

Dans l'espace de Hough, les points représentant les points A, B et C ont pour équations :

(A)  $5 = -2a + b \rightarrow b = 2a + 5$

(B)  $-3 = 2a + b \rightarrow b = -2a - 3$

(C)  $3 = b \rightarrow b = 3$

Le point d'intersection de (A) et (B) vérifie simultanément les équations de (A) et (B) :

$$2a + 5 = -2a - 3 \rightarrow 4a = -8 \rightarrow a = -2 \rightarrow b = -4 + 5 = 1$$

Le point d'intersection de (A) et (C) vérifie simultanément les équations de (A) et (C) :

$$3 = 2a + 5 \rightarrow a = -1$$

Le point d'intersection de (B) et (C) vérifie simultanément les équations de (B) et (C) :

$$3 = 2a - 3 \rightarrow a = 3$$

Les trois points recevant 2 votes ont pour coordonnées : (-2,1), (-1,3), (3,3)

Il faut donc 3 cases pour le coefficients a (indices de -3 à -1) et 3 cases pour le coefficients b (indices 1 à 3).

#### Question 2 :

On peut par exemple calculer les coordonnées entières approximant celles du barycentre des 3 points obtenus à la question précédente.

$$G_a = (-2 - 1 - 3) / 3 = -2$$

$$G_b = (1 + 3 + 3) / 3 = 2,33333 \text{ soit } 2 \text{ par approximation entière.}$$

Dans ce cas, l'équation de la droite est :  $y = -2x + 2$

#### Exercice N°18 : Transformée de Hough

- 1- Donner l'organigramme de l'algorithme permettant de détecter, par la transformée de Hough, les centres d'objets circulaires (quelque soit le rayon de ces objets circulaires !) dans une image de contour NxN préalablement détecté (donc une image binaire de contour). Donner dans cet organigramme l'équation qui est évaluée pour toutes les cellules de la matrice d'accumulation.
- 2- Donner la principale limitation de la transformée de Hough pour la détermination de formes complexes qui pourrait être paramétrisée ?

#### Corrigé N 18 :

Initialisation à zéro d'une matrice 2D, NXN (matrice d'accumulation avec en abscisse la coordonnée x et en ordonnée la coordonnée y du centre d'un objet circulaire recherché).

1. Pour tout les points  $(x_i, y_i)$  de contours de l'image,
2. Pour tout les points  $(x_s, y_s)$  de la matrice d'accumulation ;
3. Pour R variant de 0 à N par pas discret ;
4. Evaluer  $(x_i - x_s)^2 + (y_i - y_s)^2 = R^2$
5. Si l'équation précédente est vraie, incrémenter de 1 la cellule  $(x_s, y_s)$

Ensuite on doit détecter les maxima de cette matrice d'accumulation, ces maxima nous donne la position du cercle des objets circulaires présent dans l'image de contour mais pas le rayon de ces objets circulaires

La paramétrisation de ces formes nécessite beaucoup de paramètres et donc une matrice de stockage très importante et un temps de calcul très important

**Exercice N°19 :** Ecrire l'algorithme et le programme de la détection des points d'intérêt par la méthode de Harris?

#### Corrigé N°19 : Points d'intérêt

##### Algorithme 1

- 1) Calculer les images gradients X et Y
- 2) Filtrer l'image par un filtre Gaussien

- 3) Pour chaque pixel de l'image contour
  - Calculer la matrice M sur une fenêtre de taille définie
  - Calculer les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  de la matrice M
  - Si les deux valeurs propres sont élevées (seuil) : détection d'un coin
- 4) Conserver les maximums locaux pour les coins détectés

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + d - \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2ad + d^2})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(a + d + \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2ad + d^2})$$

On ne calcule pas comme cela en pratique

## Algorithme 2

- Plutôt que de calculer les valeurs propres, il est possible de calculer les valeurs suivantes :
  - $trace(M) = \lambda_1 + \lambda_2 = M_{1,1} + M_{2,2}$
  - $Det(M) = \lambda_1 \lambda_2 = M_{1,1}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,1}$
- Et on calcule la réponse suivante
  - $R = Det(M) - k(trace(M))^2$
  - Les coins correspondent aux maximums locaux de R où
 
$$R > 0$$

$$trace(M) > t$$
  - Constante k=0.04 (typiquement)
  - Constante t selon le nombre de points voulus

## Programme 2

```
img=imread('lena.png');
imd=double(img);
sigma=1; k=0.04; w=5*sigma; seuil=50; r=6; sze=2*r+1;
dx=[-1 0 1]; dy=dx'; % filtre dérivatif
g = fspecial('gaussian',max(1,fix(w)), sigma); % filtre gaussien
Ix=conv2(imd,dx,'same');
Iy=conv2(imd,dy,'same');
Ix2 = conv2(Ix.^2, g, 'same');
Iy2 = conv2(Iy.^2, g, 'same');
Ixy = conv2(Ix.*Iy, g, 'same');
R=Ix2.*Iy2-Ixy.^2-k*(Ix2+Iy2).^2;
R1=(1000/(max(max(R))))*R;
%***** Seuillage et extraction des points d'intérêt *****
[u,v]=find(R1<=seuil);
nb=length(u);
for l=1:nb
```



```

    R1(u(l),v(l))=0;
end
R11=zeros(m+2*r,n+2*r);
R11(r+1:m+r,r+1:n+r)=R1;
[m1,n1]=size(R11);
for i=r+1:m1-r
    for j=r+1:n1-r
        fenetre=R11(i-r:i+r,j-r:j+r);
        ma=max(max(fenetre));
        if fenetre(r+1,r+1)<ma
            R11(i,j)=0;
        end
    end
end
R11=R11(r+1:m+r,r+1:n+r);
[x,y]=find(R11);
%=====
===
MX=ordfilt2(R1,size^2,ones(size));
R11 = (R1==MX)&(R1>seuil);
[x,y]=find(R11);
%***** affichage des points d'intérêt *****
nb=length(x);
imshow(img)
hold on
plot(y,x,'r.')

```

### Exercice N°20 :

- 1) Quelles sont les avantages d'un filtre passe-haut de Butterworth par rapport à un filtre passe haut idéal ?
- 2) soit  $F(u, v) = \text{TF}(f(x, y))$  (i.e,  $F(u, v)$  représente la transformée de Fourier (TF) de  $f(x, y)$ )  
Calculer la TF du Laplacien de l'image  $f(x, y)$  en fonction de  $F(u, v)$ . Nota : rester en continu

### Corrigé N 20

- 1) En choisissant une pente de la fréquence de la courbe moins abrupte, on aura moins de ringing (ou ripples, ou distorsions) et un filtrage passe-haut moins sensible au bruit (plus précisément le rapport signal sur bruit de l'estimation du gradient ou des hautes fréquences spatiales de l'image est plus important.

$$2) \nabla^2 f(x, y) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \bullet f(x, y) = \left\{ (2\pi j u)^2 + (2\pi j v)^2 \right\} F(u, v) = -4\pi^2 (u^2 + v^2) F(u, v)$$

### Exercice 21 (Questions de cours)

1. Les paramètres intrinsèques d'une caméra doivent-ils être ré-estimés si on déplace la caméra ?
2. Le calibrage d'une caméra de résolution  $800 \times 600$  pixels (capteur avec pixels carrés) a fourni les résultats suivants :  $c_x = 225$  ;  $c_y = 280$  ;  $f_x = 3250$  ;  $f_y = 4510$ . Qu'est-ce qui permet de suspecter que le calibrage n'est pas bon ?

### Corrigé N 21

- 1) NON (sauf si on secoue la caméra au point de modifier le réglage de la focale. . . ).
- 2) on doit trouver  $(c_x, c_y) \simeq (400, 300)$  (i.e. le centre du capteur) et comme les pixels sont carrés on doit trouver  $f_x \simeq f_y$ .

### Exercice 22

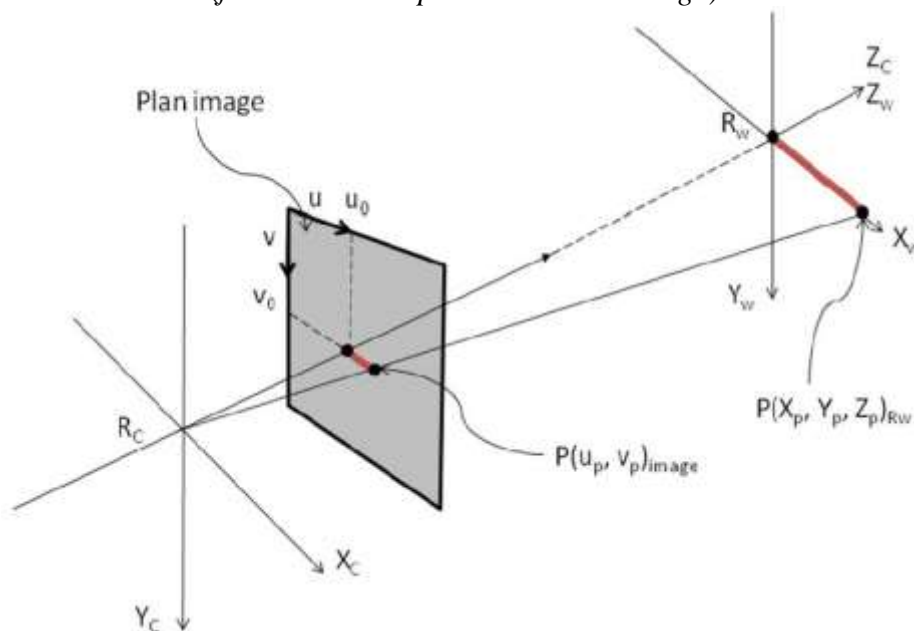
On utilise une caméra CCD 1/2 dont la taille du capteur vaut  $6,4 \times 4,8$  mm. Sa résolution vaut  $800 \times 600$  pixels. On utilise un objectif de focale 25 mm.

1. Calculer la taille des pixels.
2. Calculer la valeur de  $k_x$ .
3. Calculer la valeur de  $f_x$  que doit fournir le calibrage.

### Corrigé N 22

1. pixels carrés de taille :  $8 \mu m$ .
  2.  $k_x = k_y = 125 mm^{-1}$
- $f_x = f_y = 3125$  pixels

### Exercice 23 : (formulation du problème de calibrage)



On souhaite connaître les coordonnées pixel du point P dans l'image connaissant :

- focale de la caméra :  $f=50mm$
- $dx=dy=24microns$
- longueur du segment (en rouge sur la figure) : 50cm
- distance du segment à la caméra : 5m
- $u_0=512, v_0=384$

## Corrigé N 23

$$\begin{bmatrix} su_p \\ sv_p \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} su_p \\ sv_p \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/24e-6 & 0 & 512 \\ 0 & 1/24e-6 & 384 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50e-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50e-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} su_p \\ sv_p \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3601 \\ 1920 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$u_p = 720$$

$$v_p = 384$$

## Exercice 24 : Restauration

On rappelle que dans le cas d'un modèle de dégradation linéaire tel que  $g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$ , le filtre (inverse) qu'il faut appliquer à  $g(x, y)$  pour estimer  $f(x, y)$  au sens de Wiener est,

$$T(u, v) = \left[ \frac{1}{H(u, v)} \cdot \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2}} \right]$$

Dans lequel  $|N(u, v)|^2$  correspond à la puissance du bruit ( $\sigma^2$  dans le cas d'un bruit Gaussien) et  $|F(u, v)|^2$  représente la puissance du signal que l'on cherche.

- 1) Rappeler à quoi sert fondamentalement le terme  $\frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2}$  au dénominateur de ce filtre inverse et

quel filtre aurait-on si ce terme était nul et quels problèmes rencontre ce type de filtre (i.e, celui pour lequel ce terme est nul)

- 2) Donner une solution simple si on connaît rien sur la puissance du bruit, pour utiliser une version simplifiée du filtre de Wiener (qui n'ai toutefois pas les problèmes du filtre obtenu lorsque

$\frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2}$  est nul).

## Corrigé N24 : Restauration

- 1) Si ce terme était nul, on aurait le classique filtre inverse correspondant à  $F(u, v) = G(u, v) / H(u, v)$ . Le problème avec ce filtre est que cette division a numériquement aucun sens pour les valeurs où  $F(u, v)$  est nulle. Le premier rôle du terme  $|N(u, v)|^2 / |F(u, v)|^2$  du filtre de Wiener permet donc d'éviter cette division par zéro.
- 2) Il suffit de poser le terme  $|N(u, v)|^2 / |F(u, v)|^2$  égale à une constante non nulle (ou une fonction donnée) obtenue après, par exemple, différents essais successifs.
- 3) En considérant au tout début du processus itératif que  $F^{(0)}(u, v) = G(u, v)$  (ou considérer au tout

$$\text{début une constante) et, } F^{(n+1)}(u, v) = G(u, v) \left[ \frac{1}{H(u, v)} \cdot \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \frac{\sigma^2}{|F^{(n)}(u, v)|^2}} \right]$$

C'est ce que l'on appelle le filtre de Wiener itérative (un point fixe qui converge bien)

- 4) Le flou uniforme et en fait tous les flous pour lesquels la TF de la PSF engendre des zéros dans le domaine spectral.
- 5) C'est l'inverse, les plus faciles estimer sont les PSF pour lesquels des zéros sont engendrés dans le domaine fréquentiel (comme vu en cours, on peut utiliser facilement ces zéros pour identifier les paramètres de la PSF)
- 6) Ce filtre permet de régulariser la solution. Dans notre cas, il permet d'empêcher d'estimer de voir ces hautes fréquences s'amplifier d'itérations en itérations et d'obtenir une solution aberrante. Dans les deux cas il s'agit d'un filtrage donc par définition d'une suppression (ou atténuation) de fréquences du signal. Dans le cas des ondelettes cette suppression (ou atténuation) des fréquences est fait localement et non pas globalement comme le ferait le filtrage dans le domaine de Fourier et dont l'effet produit l'effet de ringing.