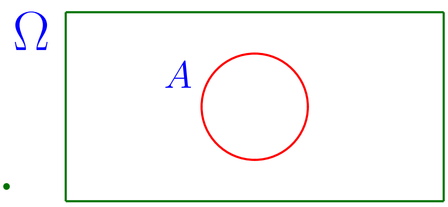
Líkindi – Skilgreining

Hugsum okkur að tilraun sé gerð og setjum

Ω = *útkomumengi* = mengi allra hugsanlegra útkoma

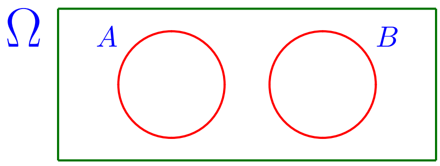
T.D. EF TENINGI ER KASTAÐ: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **EÐA LENGD ER MÆLD:** $\Omega = [0, \infty)$.

Atburður er hlutmengi í Ω.
Ω kallast ***öruggi*** atburðurinn.
$\varnothing$ kallast ***ómögulegi*** atburðurinn.

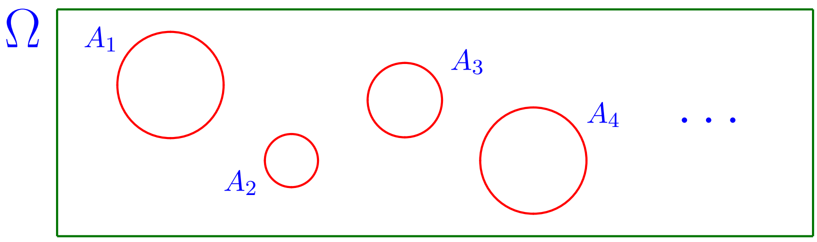


T.D. EF TENINGI ER KASTAÐ ER $\{1, 3, 5\}$ **ATBURÐURINN AÐ ODDATALA KOMI UPP.**

Atburðir A og B kallast ***sundurlægir*** ef $A \cap B = \varnothing$.



Atburðir $A_1, A_2, \ldots$ kallast ***sundurlægir*** ef þeir eru sundurlægir tveir og tveir: $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$.



Skilgreining: ***Líkindi*** (eða ***líkur***) eru fall $\mathbf{P}$ sem úthlutar sérhverjum atburði A tölu $\mathbf{P}(A)$ þannig að

(1) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

(2) $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$ fyrir alla atburði A.

(3) Ef $A_1, A_2, \ldots$ eru sundurlægir atburðir gildir:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

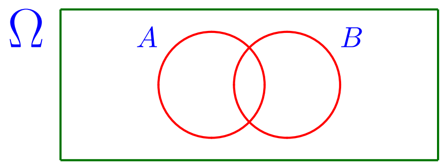
T.D. EF TENINGI ER KASTAÐ KALLAST $\mathbf{P}$ **JAFNAR LÍKUR EF** $\mathbf{P}(A) = (\text{fjöldi staka í } A)/6$

Nokkrar einfaldar reiknireglur fyrir líkindi

(1) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ og $0 \leqslant \mathbf{P} \leqslant 1$ og $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

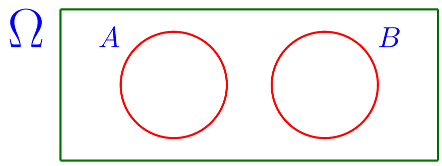
(2) Um alla atburði A og B gildir:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$



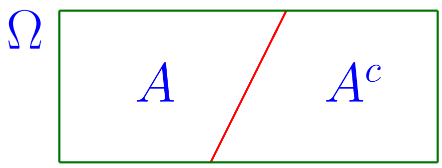
(3) Um sundurlæga atburði A og B gildir:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$$



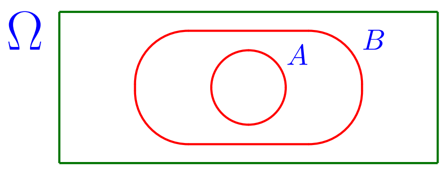
(4) Um alla atburði A gildir:

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$$



(5) Um alla atburði A og B gildir:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$$



Jafnar líkur

Skoðum $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ og setjum $p_i = \mathbf{P}(\{\omega_i\})$.

Skilgreining: Líkindi $\mathbf{P}$ á $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ kallast ***jöfn*** ef

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}.$$

Við segjum þá líka að útkoman sé valin af ***handahófi*** úr menginu $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Takið eftir að líkindi eru jöfn ef og aðeins ef

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\textbf{fjöldi staka í } A}{n}, \quad A \subseteq \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}.$$

Strjál líkindi

Líkindi $\mathbf{P}$ kallast ***strjál*** ef

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \ \ \textbf{eða} \ \ \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}.$$

Líkur á atburði $A \subseteq \Omega$ er þá hægt að reikna svona

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

Takið eftir því að þegar $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ þá eru jafnar líkur ekki til. Vegna þess að $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots$ hefur í för með sér þá mótsögn að $1 \neq 1$,

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_1 = \begin{cases} \infty, & \textbf{ef } p_1 > 0, \\ 0, & \textbf{ef } p_1 = 0. \end{cases}$$

Skilyrtar líkur

Skilgreining: Ef A og B eru atburðir og $\mathbf{P}(B) > 0$ þá kallast

$$\mathbf{P}(A \,|\, B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

skilyrtu líkurnar á A ***gefið*** B.

Takið eftir að $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \,|\, B)$.

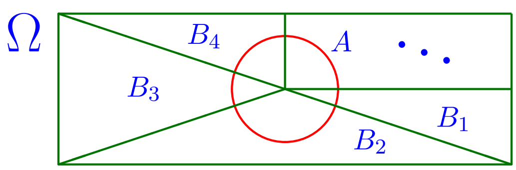
Takið líka eftir að fyrir jafnar líkur gildir (ef $B \neq \varnothing$)

$$\mathbf{P}(A \,|\, B) = \frac{\textbf{fjöldinn í } A \cap B}{\textbf{fjöldinn í } B}\,.$$

Sundurlægir atburðir $B_1, B_2, \ldots$ mynda ***skiptingu*** á Ω ef þeir þekja Ω þ.e. ef $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

Skiptingarregla: Ef $B_1, B_2, \ldots$ mynda skiptingu á Ω gildir $\mathbf{P}(A) = \sum_i \mathbf{P}(A \cap B_i)$ og því

$$\mathbf{P}(A) = \sum_i \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A \,|\, B_i).$$



Bayes-lögmálið: Ef $\mathbf{P}(A) > 0$ og $\mathbf{P}(B) > 0$ þá gildir

$$\mathbf{P}(B \,|\, A) = \frac{\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \,|\, B)}{\mathbf{P}(A)}$$

Óháðir atburðir

Það væri eðlilegt að segja að A sé óháður B ef

$$\mathbf{P}(A\,|\,B) = \mathbf{P}(A) \quad \text{þ.e.} \quad \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$$

og að B sé óháður A ef

$$\mathbf{P}(B\,|\,A) = \mathbf{P}(B) \quad \text{þ.e.} \quad \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B).$$

Þar sem þetta eru sömu eiginleikarnir er óþarfi að taka fram hvor sé óháður hvorum.

Skilgreining: Atburðir A og B kallast ***óháðir*** ef

$$\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Skilgreining: Atburðir A, B og C kallast ***óháðir*** ef

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \\ &\mathbf{P}(A\cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) \\ &\mathbf{P}(B\cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) \\ \text{og} \quad &\mathbf{P}(A\cap B\cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C). \end{aligned}$$

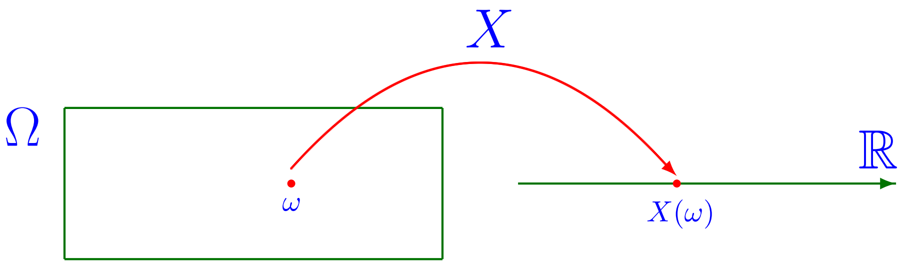
Almenn skilgreining: Atburðir $A_1, \ldots, A_n$ kallast ***óháðir*** ef fyrir öll k og $n_1 < \ldots < n_k$ gildir:

$$\mathbf{P}(A_{n_1}\cap \ldots \cap A_{n_k}) = \mathbf{P}(A_{n_1})\cdots \mathbf{P}(A_{n_k}).$$

Atburðir $A_1, A_2 \ldots$ kallast líka ***óháðir*** ef þetta gildir fyrir öll n.

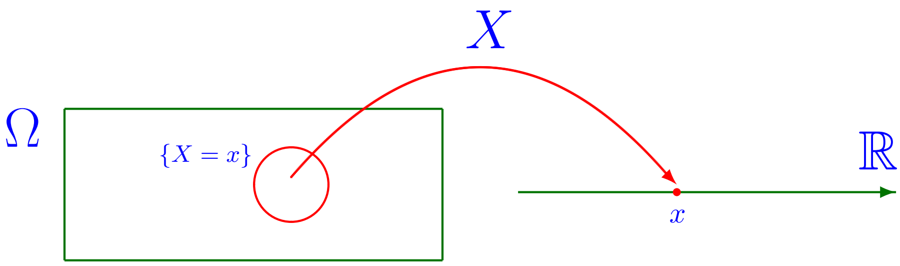
Slembistærðir

Slembistærð er fall $X : \Omega \to \mathbb{R}$.



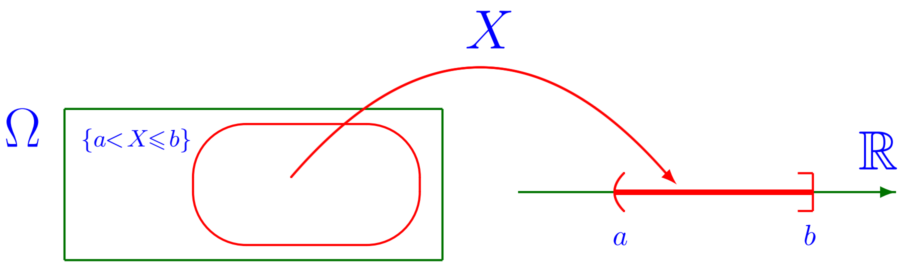
Fyrir $x \in \mathbb{R}$ skilgreinum við

$$\{X = x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}.$$



Fyrir $a < b$ skilgreinum við á sama hátt t.d.

$$\{a < X \leqslant b\} := \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leqslant b\}.$$



Og almennt fyrir $A \subseteq \mathbb{R}$ skilgreinum við

$$\{X \in A\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}.$$

Dreififall slembistærðar

Skilgreining: ***Dreififall*** slembistærðar X er

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leqslant x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Skrifum oft F_X í stað F. Þetta er gert til að greina F frá dreififöllum annarra slembistærða.

Regla: Dreififall F uppfyllir:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant F(y) \leqslant 1, \quad x < y$.

(2) $F(x) \to 0$ þegar $x \to -\infty$.

(3) $F(x) \to 1$ þegar $x \to +\infty$.

(4) F er samfellt frá hægri: $F(y) \to F(x)$ þegar $y \searrow x$.

Aths: Ef fall F hefur þessa 4 eiginleika, þá er til slembistærð X með F sem dreififall.

Regla: $\quad \mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a), \quad a < b.$

Setjum $\quad F(b-) := \lim_{a \nearrow b} F(a), \quad b \in \mathbb{R}.$

Takið eftir að fyrir öll $b \in \mathbb{R}$ gildir

$$\mathbf{P}(X = b) = F(b) - F(b-),$$

og sér í lagi

$$F \text{ samfellt í } b \;\Rightarrow\; \mathbf{P}(X = b) = 0.$$

Strjálar slembistærðir

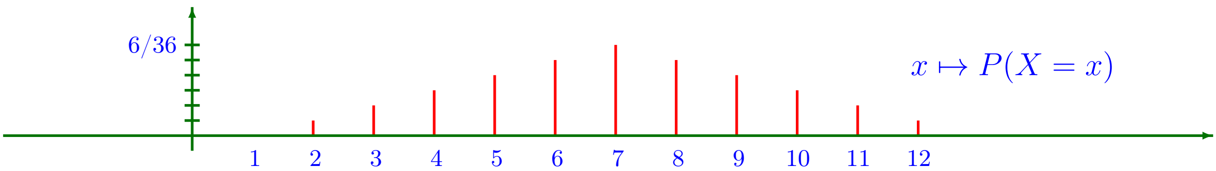
Skilgr: X kallast ***strjál*** ef hún tekur endanlega mörg gildi $\{a_1, \ldots, a_k\}$ eða teljanlega mörg gildi $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Fallið $x \mapsto \mathbf{P}(X = x)$ kallast þá ***líkindafall*** X.

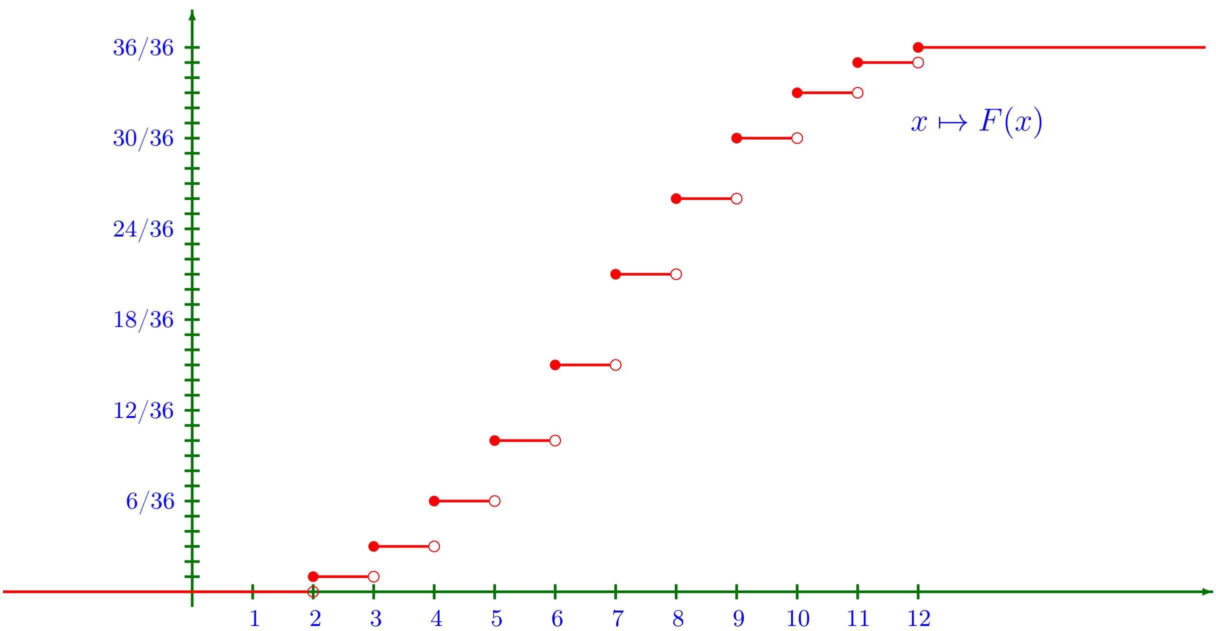
Takið eftir að ef X er strjál þá er dreififallið summa:

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leqslant x) = \sum_{y \leqslant x} \mathbf{P}(X = y).$$

Dæmi (tveir teningar): Látum $\mathbf{P}$ vera jafnar líkur á útkomumenginu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Látum X vera punktasummuna, þ.e. $X(i, j) = i + j$. Líkindafall X er þá svona:



Og dreififall X er svona:

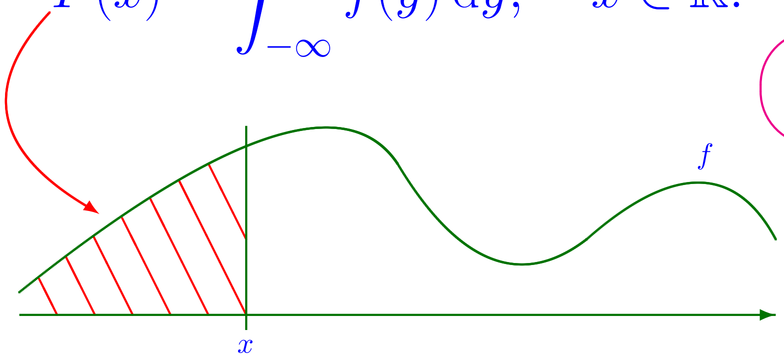


Samfelldar slembistærðir

Skilgreining: Fall f sem uppfyllir $f(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, og $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ kallast ***þéttleiki***. Slembistærð X kallast ***samfelld*** ef til er þéttleiki f þ.a.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{f = F'}$$



f kallast þá þéttleiki X. Skrifum oft f_X í stað f.

Aths: Ef f er þéttleiki, þá er til X með þéttleika f.

Regla: Ef X er samfelld slembistærð, þá er dreififallið F samfellt fall. Ennfremur gildir að

$$\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a < b,$$

og

$$\mathbf{P}(X = b) = 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Dæmi: Samfelld slembistærð X kallast ***jöfn*** á bilinu $[a, b]$ (þar sem $a < b$) ef hún hefur þéttleikann

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \textbf{annars}. \end{cases}$$

Við segjum þá líka að X hafi ***jafna dreifingu*** á $[a, b]$ og að X hafi verið valið ***af handahófi*** á milli a og b.

Samdreififall

Skoðum slembistærðir $X_1, \dots, X_n$ sem allar koma úr sömu tilraun, þ.e. sem allar eru skilgreindar á sama útkomumengi, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, með sama $\mathbf{P}$.

Skilgreining: Fallið F sem er skilgreint svona

$$F(x_1, \dots, x_n) := \mathbf{P}(X_1 \leqslant x_1, \dots, X_n \leqslant x_n)$$

kallast ***samdreififall*** slembistærðana $X_1, \dots, X_n$.

Takið eftir að dreififall t.d. X_1 fæst svona úr F,

$$F_{X_1}(x) = F(x, \infty, \dots, \infty)$$

Á sama hátt fást hin dreififöllin $F_{X_2}, \dots, F_{X_n}$ úr F. Þessi föll eru oft nefnd ***jaðardreififöll*** $X_1, \dots, X_n$.

Samlíkindafall

Skilgreining: Ef $X_1, \dots, X_n$ eru allar strjálar kallast

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

samlíkindafall þeirra.

Takið eftir að líkindafall t.d. X_1 fæst svona:

$$x \mapsto \mathbf{P}(X_1 = x) = \sum_{x_2, \dots, x_n} \mathbf{P}(X_1 = x, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).$$

Á sama hátt fást líkindaföllin fyrir $X_2, \dots, X_n$. Þessi föll eru oft nefnd ***jaðarlíkindaföll*** $X_1, \dots, X_n$.

Samþéttleiki

Skilgreining: Látum F vera samdreififall $X_1, \dots, X_n$. Ef til er fall $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ þannig að

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f(y_1, \dots, y_n)\, \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n$$

þá kallast f ***samþéttleiki*** stærðanna $X_1, \dots, X_n$.

Fallið f er oft fundið með því að diffra

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant x_1, \dots, X_n \leqslant x_n)$$

í öllum breytistærðum $x_1, \dots, x_n$.

Regla: Ef $C \subseteq \mathbb{R}^n$ er t.d. rétthyrningur, hringur, kassi eða kúla, þá má nota f til að reikna líkurnar á því að vigurinn sem stærðirnar mynda lendi í C:

$$\mathbf{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in C\big) = \underset{(x_1, \dots, x_n) \in C}{\int \cdots \int} f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Regla: Ef $X_1, \dots, X_n$ hafa samþéttleika, þá eru þær samfelldar hver fyrir sig og þéttleiki t.d. X_1 er

$$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x_2 \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Á sama hátt fást hinir þéttleikarnir $f_{X_2}, \dots, f_{X_n}$ úr f. Þessi föll eru oft nefnd ***jaðarþéttleikar*** $X_1, \dots, X_n$.

Aths: Þótt stærðirnar $X_1, \dots, X_n$ séu samfelldar hver fyrir sig, er ekki víst að þær hafi samþéttleika.

Skilyrt líkindafall

Skilgreining: Ef $X_1, \ldots, X_n$ eru strjálar slembistærðir og $\mathbf{P}(X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) > 0$, þá kallast fallið

$$x \mapsto \mathbf{P}(X_1 = x \,|\, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

skilyrt líkindafall X_1 ***gefið*** $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$.

Munið að $\mathbf{P}(A \,|\, B) := \mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$ og því er

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 = x \,|\, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)& \\ := \frac{\mathbf{P}(X_1 = x, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)}{\mathbf{P}(X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)}&\end{aligned}$$

Skilyrtur þéttleiki

Skilgreining: Látum $X_1, \ldots, X_n$ hafa samþéttleika f. Látum $f_{X_2,\ldots,X_n}$ vera samþéttleika $X_2, \ldots, X_n$. Ef $f_{X_2,\ldots,X_n}(x_2, \ldots, x_n) > 0$, þá kallast fallið

$$x \mapsto f_{X_1|X_2,\ldots,X_n}(x \,|\, x_2, \ldots, x_n) := \frac{f(x, x_2, \ldots, x_n)}{f_{X_2,\ldots,X_n}(x_2, \ldots, x_n)}$$

skilyrtur þéttleiki X_1 ***gefið*** $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$.

Skilgreining: ***Skilyrtu líkurnar*** á að X_1 taki t.d. gildi á bili A ***gefið*** $X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ eru þá

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 \in A \,|\, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)& \\ := \int_A f_{X_1|X_2,\ldots,X_n}(x \,|\, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x\,.&\end{aligned}$$

Óháðar slembistærðir

Skilgreining: $X_1, \ldots, X_n$ kallast ***óháðar*** ef

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \ldots \mathbf{P}(X_n \in A_n),$$

fyrir öll bil $A_1, \ldots, A_n$.

Regla: Þetta gildir ef og aðeins ef

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n), \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

þar sem F er samdreififallið og F_{X_i} er dreififall X_i:

$$F_{X_i}(x_i) = \mathbf{P}(X_i \leqslant x_i), \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Regla: Strjálar slembistærðir $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar ef og aðeins ef

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \ldots \mathbf{P}(X_n = x_n)$$

fyrir öll $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Regla: Samfelldar slembistærðir $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar ef og aðeins ef

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

er samþéttleiki fyrir stærðirnar $X_1, \ldots, X_n$.

Væntigildi

Skilgreining: ***Væntigildi*** **(*meðalgildi*)** X **er**

$$\mu = \mu_X = \mathbf{E}[X] := \begin{cases} \displaystyle\sum_x x\mathbf{P}(X = x), & \textbf{ef } X \textbf{ er strjál,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x, & \textbf{ef } X \textbf{ er samfelld.} \end{cases}$$

Dæmi: **Látum** X **hafa þéttleikann**

$$f_X(x) = 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \textbf{(og } f_X(x) = 0 \textbf{ annars).}$$

Væntigildið fæst svona: $\mathbf{E}[X] = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Skoðum nú slembistærðina X^3. **Til að finna** $\mathbf{E}[X^3]$ **útfrá skilgreiningunni** $\mathbf{E}[X^3] := \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X^3}(y)\,\mathrm{d}y$ **þurfum við að finna** $f_{X^3} = F'_{X^3}$. **Dreififallið** F_{X^3} **fæst svona:**

$$F_{X^3}(y) := \mathbf{P}(X^3 \leqslant y) = \mathbf{P}(X \leqslant y^{\frac{1}{3}}) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y^{\frac{1}{3}}, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Þéttleikinn er því

$$f_{X^3}(y) = F'_{X^3}(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}, & 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \textbf{annars}. \end{cases}$$

Væntigildið fæst nú svona:

$$\mathbf{E}[X^3] := \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X^3}(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\frac{1}{3}\,y^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left[\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Takið eftir að $\frac{1}{4} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^3$ **þannig að** $\mathbf{E}[X^3] \neq (\mathbf{E}[X])^3$.

Þægileg væntigildisregla

Munið skilgreininguna á væntigildi:

$$\mathbf{E}[X] := \begin{cases} \displaystyle\sum_x x\mathbf{P}(X=x), & \textbf{ef } X \textbf{ er strjál}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x, & \textbf{ef } X \textbf{ er samfelld}. \end{cases}$$

Lögmál ómeðvitaða tölfræðingsins (ein stærð):
Látum $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vera fall (t.d. $g(x)=x^3$).
Þá gildir að

$$\mathbf{E}[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x g(x)\mathbf{P}(X=x), & \textbf{ef } X \textbf{ er strjál}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x, & \textbf{ef } X \textbf{ er samfelld}. \end{cases}$$

Dæmi (framhald): Látum aftur X hafa þéttleikann

$$f_X(x) = 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \textbf{(og } f_X(x)=0 \textbf{ annars).}$$

Við fengum áðan eftir vafstur við að finna $f_{X^3}(y)$

$$\mathbf{E}[X^3] := \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X^3}(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\frac{1}{3}\,y^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left[\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Við getum nú farið einfaldari leið:

$$\mathbf{E}[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Reglur um væntigildi

Munið skilgreininguna á væntigildi:

$$\mathbf{E}[X] := \begin{cases} \displaystyle\sum_x x\mathbf{P}(X = x), & \textbf{ef } X \textbf{ er strjál}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x, & \textbf{ef } X \textbf{ er samfelld}. \end{cases}$$

Lögmál ómeðvitað tölfræðingsins (margar stærðir):
Látum $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vera fall og setjum

$$Y = g(X_1, \dots, X_n).$$

Þá gildir að

$$\mathbf{E}[Y] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_n} \cdots \sum_{x_1} g(x_1, \dots, x_n)\mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ \qquad \textbf{ef } X_1, \dots, X_n \textbf{ eru strjálar}, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \\ \qquad \textbf{ef } X_1, \dots, X_n \textbf{ hafa samþéttleika } f. \end{cases}$$

Reglur: Fyrir $a, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gildir

(1) $\mathbf{E}[a] = a$.

(2) $\mathbf{E}[aX] = a\mathbf{E}[X]$.

(3) $\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$.

(4) $\mathbf{E}[a_1X_1 + \ldots + a_nX_n] = a_1\mathbf{E}[X_1] + \ldots + a_n\mathbf{E}[X_n]$

Regla: Ef X og Y eru óháð gildir $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$.

Dreifni

Skilgreining: ***Dreifni*** **slembistærðar** X **er**

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbf{E}[(X-\mu)^2] \qquad \big(\textbf{hér er } \mu = \mathbf{E}[X]\big)$$

og ***staðalfrávik*** **hennar er**

$$\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}.$$

Takið eftir að $\mathrm{Var}[X] \geqslant 0.$

Reglur:

(1) $$\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

(2) $$\mathrm{Var}[a+bX] = b^2\mathrm{Var}[X], \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Regla: **Ef** $X_1, \ldots, X_n$ **eru** **óháðar** **gildir að**

$$\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n].$$

Samdreifni og fylgni

Skilgreining: ***Samdreifni*** slembistærða X og Y er

$$\mathrm{Cov}[X,Y] := \mathbf{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

og ***fylgnistuðull*** þeirra er

$$\rho = \rho_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}\,.$$

Takið eftir að $\mathrm{Cov}[X,X] = \mathrm{Var}[X]$.

Regla: $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$

Regla: $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$

Reglur: Fyrir $a \in \mathbb{R}$ og $n, m \in \mathbb{N}$ gildir að

(1) $\mathrm{Cov}[aX,Y] = a\,\mathrm{Cov}[X,Y]$

(2) $\mathrm{Cov}[X+Y,Z] = \mathrm{Cov}[X,Z] + \mathrm{Cov}[Y,Z]$

(3) $$\mathrm{Cov}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}[X_i, Y_j]$$

(4) $$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

Regla: Ef X og Y eru óháðar gildir að $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$.

Aths: Hins vegar þurfa X og Y ekki að vera óháðar þótt $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$. Fylgnileysi útilokar ekki hæði.

Ójöfnur Markovs og Chebyshevs

Ójafna Markovs: Ef $\mathbf{P}(X \geqslant 0) = 1$ þá gildir að

$$\mathbf{P}(X > a) \leqslant \frac{\mathbf{E}[X]}{a}, \quad a > 0.$$

Sönnun: Setjum

$$Y := \begin{cases} 0, & \textbf{ef } X \leqslant a, \\ a, & \textbf{ef } X > a. \end{cases}$$

Þá er $\mathbf{P}(Y \leqslant X) = 1$ sem gefur $\mathbf{E}[Y] \leqslant \mathbf{E}[X]$.

Takið nú eftir að $\mathbf{E}[Y] = a\,\mathbf{P}(X > a)$.

Þetta tvennt gefur að $a\,\mathbf{P}(X > a) \leqslant \mathbf{E}[X]$.

Ójafna Chebyshevs: Ef $|\mathbf{E}[Y]| < \infty$ þá gildir að

$$\mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}[Y]| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[Y]}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Sönnun: Setjum $X := (Y - \mathbf{E}[Y])^2$. Þá er

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}[Y]| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(X > \varepsilon^2) \\ &\leqslant \frac{\mathbf{E}[X]}{\varepsilon^2} \quad \textbf{(ójafna Markovs)} \\ &= \frac{\mathbf{E}[(Y - \mathbf{E}[Y])^2]}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\mathrm{Var}[Y]}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Lögmál mikils fjölda

Munið ójöfnu Chebyshevs: Ef $|\mathbf{E}[Y]| < \infty$ þá gildir að
$$\mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}[Y]| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[Y]}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$
Við notum nú þessa ójöfnu til að sanna merka reglu.

Lögmál mikils fjölda: Ef $X_1, X_2, \ldots$ eru óháðar og hafa allar sama endanlega væntigildi $\mu = \mathbf{E}[X_i]$ og allar sömu endanlegu dreifni $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_i]$, þá gildir fyrir öll $\varepsilon > 0$ að

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Sönnun: Setjum $Y := (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Þá er
$$\mathbf{E}[Y] = (\mu + \ldots + \mu)/n \quad \text{þ.e. } \mathbf{E}[Y] = \mu$$
og vegna þess að $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar fæst líka
$$\mathrm{Var}[Y] = (\sigma^2 + \ldots + \sigma^2)/n^2 \quad \text{þ.e. } \mathrm{Var}[Y] = \sigma^2/n\,.$$
Ójafna Chebyshevs gefur nú
$$\mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}[Y]| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Lögmál mikils fjölda og túlkun líkinda

Við vorum að sanna eftirfarandi reglu:

Lögmál mikils fjölda: Ef $X_1, X_2, \ldots$ eru óháðar og hafa allar sama endanlega væntigildi $\mu = \mathbf{E}[X_i]$ og allar sömu endanlegu dreifni $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_i]$, þá gildir fyrir öll $\varepsilon > 0$ að

$$\mathbf{P}\left(\left| \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Þetta skrifum við stundum losaralega svona:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \approx \mu \quad \text{þegar } n \text{ er stórt.}$$

Um túlkun líkinda: Hugsum okkur að við framkvæmum tilraun í n óháð skipti og skráum hjá okkur 1 eða 0 eftir því hvort tiltekinn atburður gerist eða gerist ekki. Við fáum þá óháðar slembistærðir $X_1, \ldots, X_n$ þ.a. $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$ þar sem p eru líkurnar á að atburðurinn gerist í einni tiltekinni tilraun (segjum þá að sú tilraun heppnist). Nú er $\mu = p$ og lögmál mikils fjölda gefur: eftir margar tilraunir er

$$\text{hlutfallsleg tíðni heppnaðra tilrauna} \approx p.$$

Þess vegna er eðlilegt að túlka líkindin p sem hlutfallslega tíðni heppnaðra tilrauna þegar tilraun er endurtekin í mörg óháð skipti.

Nokkrar mikilvægar slembistærðir

STRJÁLAR:

	Bernoulli-stærð	$X \sim \mathrm{Ber}(p)$
	tvíkostastærð	$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
	Poisson-stærð	$X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$
	strjál veldisstærð	$X \sim \mathrm{Geo}(p)$
	happadrættisstærð	$X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$

SAMFELLDAR:

	jöfn stærð	$X \sim \mathrm{Unf}([a, b])$
	veldisstærð	$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
	normleg stærð	$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Bernoulli-stærð $X \sim \mathrm{Ber}(p)$

Skilgreining: Látum $0 < p < 1$. Slembistærð X kallast ***Bernoulli-stærð*** með stika p ef

$$\mathbf{P}(X = 1) = p \quad \text{og} \quad \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Reglur: Ef $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ gildir að

(1) $$\mathbf{E}[X] = p$$

(2) $$\mathrm{Var}[X] = p(1 - p)$$

Sönnun: (1) $\mathbf{E}[X] = 0\,\mathbf{P}(X=0) + 1\,\mathbf{P}(X = 1) = p$.
(2) Þar eð $0^2 = 0$ og $1^2 = 1$, er $X^2 \sim \mathrm{Ber}(p)$. Því er $\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[X] = p$. Notum $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2$. Fáum $\mathrm{Var}[X] = p - p^2 = p(1 - p)$.

Tvíkostastærð $\quad X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

Skilgreining: Látum $n \geqslant 1$ og $0 < p < 1$. Slembistærð X kallast ***tvíkostastærð*** (***binomial***) með stika n, p ef

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Regla: Ef $X_1, \ldots, X_n$ eru **óháðar** $\mathrm{Ber}(p)$, þá er

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p).$$

Sönnun: Til að $\{X_1 + \ldots + X_n = k\}$ gerist þarf að fá 1 í k skipti og 0 í hin. Látum $\{i_1, \ldots, i_k\}$ vera hlutmengi úr $\{1, \ldots, n\}$ með k stökum og $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$ vera fyllimengið. Notum að $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar $\mathrm{Ber}(p)$:

$$\mathbf{P}(X_{i_1} = 1, \ldots, X_{i_k} = 1, X_{j_1} = 0, \ldots, X_{j_{n-k}} = 0) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

Margföldun með fjölda hlutmengja $\{i_1, \ldots, i_k\}$ gefur

$$\mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Reglur: Ef $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ gildir að

(1) $\qquad \mathbf{E}[X] = np$

(2) $\qquad \mathrm{Var}[X] = np(1-p)$

Sönnun: Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera óháðar $\mathrm{Ber}(p)$. Notum $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, summureglur um væntigildi og dreifni, og loks að $\mathbf{E}[X_i] = p$ og $\mathrm{Var}[X_i] = p(1-p)$:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \ldots + \mathbf{E}[X_n] = np,$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] \quad \text{(notum næst óhæðið)}$$

$$= \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n] = np(1-p).$$

Poisson-stærð $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$

Skilgreining: Látum $0 < \lambda < \infty$. Slembistærð X kallast ***Poisson-stærð*** með stika λ ef

$$\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Þetta er líkindafall: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ svo $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

Regla: Ef $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ og $X \sim \mathrm{Poi}(np)$ þá gildir að

$$|\mathbf{P}(Y \in A) - \mathbf{P}(X \in A)| \leqslant \begin{cases} np^2 \\ p \end{cases} \quad \text{fyrir öll } A \subseteq \mathbb{R}.$$

Skrifum þetta stundum losaralega svona:

$$\mathrm{Bin}(n,p) \approx \mathrm{Poi}(np) \quad \text{þegar } p \text{ er lítið.}$$

Þetta þýðir að ef tilraun er endurtekin í n óháð skipti og líkurnar p á að heppnast í einni tiltekinni tilraun eru hverfandi litlar, þá er fjöldi heppnaðra tilrauna næstum Poisson með $\lambda = np$.

Reglur: Ef $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ gildir að

(1) $$\mathbf{E}[X] = \lambda$$

(2) $$\mathrm{Var}[X] = \lambda$$

Sönnun: (1) $\mathbf{E}[X] = \sum_0^{\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_1^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$.
(2) $\mathbf{E}[X(X-1)] = \sum_0^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \sum_2^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$
gefur lokaskrefið í $\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}[X] = \lambda^2 + \lambda$
sem gefur $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$.

Strjál veldisstærð $X \sim \mathrm{Geo}(p)$

Skilgreining: Látum $0 < p < 1$. Slembistærð X kallast ***strjál veldisstærð*** með stika p ef

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Þetta er líkindafall: $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$.

Regla: Látum $Y_1, Y_2, \ldots$ vera óháðar $\mathrm{Ber}(p)$. Látum X vera fyrsta n þannig að $Y_n = 1$, þ.e.

$$X := \min\{n \geqslant 1 : Y_n = 1\}.$$

Þá er $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Sönnun: $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y_1 = 0, \ldots, Y_{k-1} = 0, Y_k = 1)$
$= \mathbf{P}(Y_1 = 0) \ldots \mathbf{P}(Y_{k-1} = 0)\mathbf{P}(Y_k = 1) = (1-p)^{k-1}p$, $k \geqslant 1$

Regla: Ef X tekur eingöngu heiltölugildi þá:

$$X \sim \mathrm{Geo}(p) \iff \mathbf{P}(X > n) = (1-p)^n, \; n \geqslant 0$$

Sönnun á $\Rightarrow$: Notum $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ úr reglunni hér að ofan: $\mathbf{P}(X > n) = \mathbf{P}(Y_1 = 0, \ldots, Y_n = 0) = (1-p)^n$.

Sönnun á $\Leftarrow$: $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X > k-1) - \mathbf{P}(X > k)$
$= (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = (1-p)^{k-1}(1-(1-p))$, $k \geqslant 1$

Reglur: Ef $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ gildir að

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{p} \qquad \textbf{og} \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Happadrættisstærð $\quad X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$

Kúlur eru settar í kassa, N hvítar og M svartar.

Svo eru dregnar n kúlur af handahófi án skila.

Hverjar eru líkurnar á að nákvæmlega k séu hvítar?

Látum X vera fjölda hvítra kúlna sem dregnar eru.

Til að fá $\{X = k\}$ þarf k hvítar og $n - k$ svartar.

Hægt er að draga k úr N hvítum á $\binom{N}{k}$ marga vegu og $n - k$ úr M svörtum á $\binom{M}{n-k}$ marga vegu.

Margföldunarreglan gefur
að hægt er að fá $\{X = k\}$ á $\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}$ marga vegu.

Heildarfjöldi möguleika á að draga n úr $N + M$ er $\binom{N+M}{n}$ svo líkurnar á að fá nákvæmlega k hvítar eru

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$$

þar sem k uppfyllir $\max\{0, n - M\} \leqslant k \leqslant \min\{n, N\}$.

Stærð með þetta líkindafall kallast *happadrættistærð*

Regla: Látum $X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$. Setjum $p = \frac{N}{N+M}$.
Þá gildir

$$\mathbf{E}[X] = np$$

$$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right)$$

Jöfn stærð $\quad X \sim \mathrm{Unf}[a,b]$

Skilgreining: **Látum $-\infty < a < b < \infty$. Slembistærð X kallast *jöfn stærð* á bilinu $[a,b]$ ef**

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \textbf{annars}. \end{cases}$$

Reglur: **Ef $X \sim \mathrm{Unf}[a,b]$ gildir að**

(1) $$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leqslant x \leqslant b$$

(2) $$\mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

(3) $$\mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \textbf{og} \quad \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Sönnun: (1) $\quad F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dy = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$

(2) $\mathbf{E}[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{b-a}\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(b-a)}{b-a} = \frac{a+b}{2}.$

(3) $\mathbf{E}[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{1}{3}\frac{(a^2+ab+b^2)(b-a)}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$

og því $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2$

$$= \frac{4(a^2+ab+b^2)-3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Varðveisluregla: $\quad X \sim \mathrm{Unf}[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{X-a}{b-a} \sim \mathrm{Unf}[0,1]$

Sönnun: **Tökum $u \in [0,1]$ og $x \in [a,b]$ þ.a. $u = \frac{x-a}{b-a}$. Þá er $\mathbf{P}(X \leqslant x) = \frac{x-a}{b-a} \Leftrightarrow \mathbf{P}(\frac{X-a}{b-a} \leqslant u) = u$.**

Veldisstærð $\quad X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Skilgreining: Látum $0 < \lambda < \infty$. Slembistærð X kallast ***veldisstærð*** með stika λ ef

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Reglur: Ef $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ gildir að

(1) $$\mathbf{P}(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$$

(2) $$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0$$

(3) $$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

(4) $$\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Sönnun: (1) $\mathbf{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{d}y = e^{-\lambda x}, \qquad x \geqslant 0$

(2) $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = 1 - \mathbf{P}(X > x) = 1 - e^{-\lambda x}, \; x \geqslant 0$

(3) $\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{d}x = [-x e^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbf{d}x = \frac{1}{\lambda}$

(4) $\mathbf{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{d}x = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} \mathbf{d}x$
$= \frac{2}{\lambda} \mathbf{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}$ **og því** $\mathrm{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$

Skilgreining: Slembistærð X sem tekur bara jákvæð gildi kallast ***minnislaus*** ef

$$\mathbf{P}(X > a + b \,|\, X > a) = \mathbf{P}(X > b), \quad a, b \geqslant 0.$$

Takið eftir að ef tæki er alltaf eins og nýtt meðan það er nothæft, þá er endingartími þess minnislaus.

Regla: X er minnislaus $\Leftrightarrow$ til er λ þ.a. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Normleg stærð $\quad X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Skilgreining: **Látum $\mu \in \mathbb{R}$ og $0 < \sigma < \infty$. Slembistærð X kallast *normleg stærð* með stika μ og σ^2 ef**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Regla: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\; \mathbf{E}[X] = \mu$ **og** $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$

Varðveisluregla: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$

Z **kallast *stöðluð* normleg stærð ef**

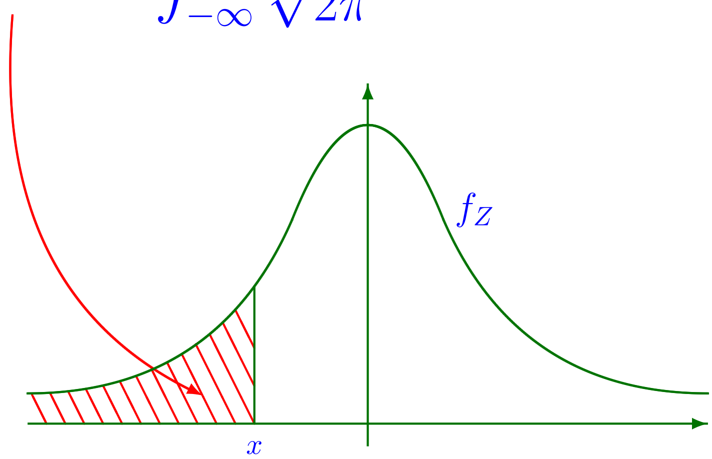
$$Z \sim \mathrm{N}(0,1).$$

Þá er $\mathbf{E}[Z] = 0$ og $\mathrm{Var}[Z] = 1$ og

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Loks er $F_Z = \Phi$ þar sem

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Notkun á $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ og Φ

Regla: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\Leftrightarrow\; F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Normleg stærð X er samfelld og því gildir fyrir $a \in \mathbb{R}$ að $\mathbf{P}(X = a) = 0$ og $\mathbf{P}(X < a) = \mathbf{P}(X \leqslant a)$. Þess vegna má skipta á $<$ og $\leqslant$ (og á $>$ og $\geqslant$) alls staðar hér fyrir neðan.

Nota má Φ til að reikna líkur fyrir $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbf{P}(X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

og

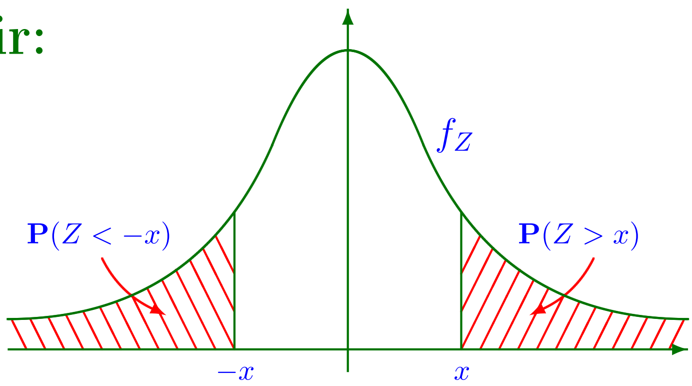
$$\mathbf{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Vegna samhverfu gildir:

$$\mathbf{P}(Z < -x) = \mathbf{P}(Z > x)$$

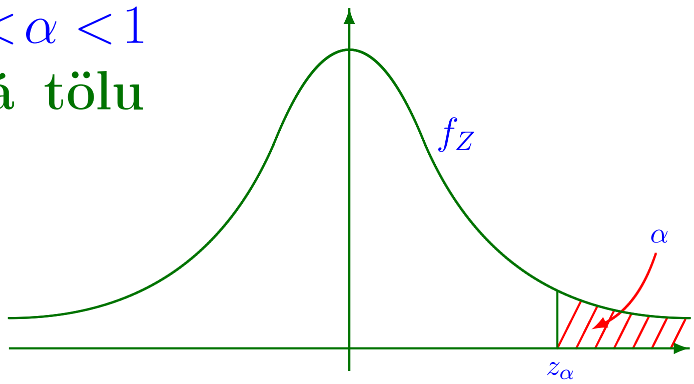
og því

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$



Skilgreining: **Fyrir $0 < \alpha < 1$ látum við z_α vera þá tölu sem uppfyllir**

$$\mathbf{P}(Z > z_\alpha) = \alpha.$$



$z_{0{,}05} = 1{,}645 \quad z_{0{,}025} = 1{,}960 \quad z_{0{,}01} = 2{,}326 \quad z_{0{,}005} = 2{,}576$

Varðveislureglur

Eftirfarandi reglur gilda um óháðar stærðir X og Y.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathrm{Bin}(n,p) \\ Y \sim \mathrm{Bin}(m,p) \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p).$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathrm{Poi}(\lambda) \\ Y \sim \mathrm{Poi}(\mu) \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda+\mu).$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2) \\ Y \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2) \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y \sim \mathrm{N}(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1) \\ Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \min\{X,Y\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1+\lambda_2).$$

Sönnun á síðustu reglunni: **Fyrir** $x > 0$ **fæst**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\min\{X,Y\} > x) &= \mathbf{P}(X > x, Y > x) \\ &= \mathbf{P}(X > x)\mathbf{P}(Y > x) \quad (X \textbf{ og } Y \textbf{ eru óháðar}) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \qquad (X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1) \textbf{ og } Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)) \end{aligned}$$

það er

$$\mathbf{P}(\min\{X,Y\} > x) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}, \quad x > 0.$$

Þetta þýðir að $\min\{X,Y\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1+\lambda_2)$.

Athugasemd um stöðlun

Ef X er slembistærð með endanlegt væntigildi μ og endanlega strangt jákvæða dreifni σ^2, kallast

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \quad \textit{stöðluð} \textbf{ stærð.}$$

Þá gildir

$$\mathbf{E}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = 0 \quad \textbf{og} \quad \mathrm{Var}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = 1.$$

Látum $X_1, X_2, \ldots$ vera óháðar slembistærðir sem allar hafa sama endanlega væntigildi

$$\mu = \mathbf{E}[X_i], \quad i = 1, 2, \ldots,$$

og sömu endanlegu strangt jákvæðu dreifni

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_i], \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Þá gildir fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ að

$$\mathbf{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu \ \textbf{og}\ \mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = n\sigma^2$$

og því gefur stöðlun

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = 0$$

og

$$\mathrm{Var}\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = 1.$$

Höfuðmarkgildisreglan – Normleg nálgun

Höfuðmarkgildisreglan: Látum $X_1, X_2, \ldots$ vera óháðar slembistærðir sem allar hafa sama dreififall með endanlegt væntigildi

$$\mu = \mathbf{E}[X_i], \quad i = 1, 2, \ldots,$$

og endanlega strangt jákvæða dreifni

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_i], \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Þá gildir fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ að

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) \to \Phi(x), \quad n \to \infty.$$

Við skrifum þetta oft losaralega svona:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx \mathrm{N}(0, 1) \quad \text{þegar } n \text{ stórt}$$

eða svona:

$$X_1 + \ldots + X_n \approx \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2) \qquad \text{þegar } n \text{ stórt.}$$

Dæmi: Byggja á 1000 íbúða hverfi. Vitað er að bílafjöldi á dæmigerða fjölskyldu í svona hverfi hefur eftirfarandi dreifingu:

20% á engan bíl,
70% á einn bíl,
10% á tvo bíla.

Spurning: Hvað þarf stóra bílageymslu til að hún dugi fyrir hverfið með u.þ.b. 95% líkum?

Normleg nálgun á $\mathrm{Bin}(n,p)$ og á $\mathrm{Poi}(\lambda)$

Höfuðmarkgildisreglan segir að ef $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar slembistærðir sem allar hafa sama dreififall með endanlegt væntigildi μ og endanlega strangt jákvæða dreifni σ^2 þá gildir að

$$X_1 + \ldots + X_n \approx \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2) \qquad \textbf{þegar } n \textbf{ stórt.}$$

Vegna þess að $\mathrm{Bin}(n,p)$ er summa n óháðra $\mathrm{Ber}(p)$ leiðir af þessu að

$$\mathrm{Bin}(n,p) \approx \mathrm{N}(np, np(1-p)) \quad \textbf{þegar } n \textbf{ er stórt.}$$

Hversu stórt n þarf að vera fer eftir því hvað p er. Nálgunin verður þeim mun betri sem p er nær $\frac{1}{2}$. Hér er algeng puttaregla:

$$\boxed{\textbf{puttaregla:} \quad np(1-p) \geqslant 10}$$

Vegna þess að $\mathrm{Poi}(\lambda) \approx \mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ þegar n er stórt leiðir af þessu að

$$\mathrm{Poi}(\lambda) \approx \mathrm{N}(\lambda, \lambda) \quad \textbf{þegar } \lambda \textbf{ er stórt.}$$

Hér er algeng puttaregla:

$$\boxed{\textbf{puttaregla:} \ \lambda \geqslant 10}$$

Poisson-ferli (c)

Látum $T_1, T_2, \ldots$ vera slembistærðir þ.a.

$$0 < T_1 < T_2 < \ldots \quad \textbf{og} \quad T_n \to \infty, \ n \to \infty.$$

Hugsum okkur að þessi T_n séu tímapunktar þegar einhver viðburður gerist.

Talningarferli viðburðastreymisins er $(N_t)_{t \geqslant 0}$ þar sem
$N_t = \#\{n \geqslant 1 : T_n \leqslant t\} =$ **fjöldi viðburða á bilinu** $[0, t]$

Billengdir viðburðastreymisins eru

$$X_1 = T_1 \quad \textbf{og} \quad X_n = T_n - T_{n-1}, \ n \geqslant 2.$$

Skilgreining: Látum $0 < c < \infty$. Talningarferli $(N_t)_{t \geqslant 0}$ kallast ***Poisson-ferli*** með ***tíðni*** c ef

- $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ eru óháðar slembistærðir fyrir öll $n \geqslant 1$ og $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.
- $\mathbf{E}[N_t] = ct$ fyrir öll $t \geqslant 0$.

Regla: Ef $(N_t)_{t \geqslant 0}$ er Poisson-ferli með tíðni c gildir:

$$N_t \sim \mathrm{Poi}(ct), \quad t \geqslant 0.$$

Jafngildisregla: $(N_t)_{t \geqslant 0}$ er Poisson-ferli með tíðni c

$$\Leftrightarrow$$

$X_1, X_2, \ldots$ eru óháðar og allar $\mathrm{Exp}(c)$

$$\Leftrightarrow$$

$N_t \sim \mathrm{Poi}(ct)$, $t \geqslant 0$, og ef skilyrt er með $\{N_t = n\}$ er eins og þessum n punktum hafi verið stráð af handahófi á bilið $[0, t]$.

Poisson-ferli – samruni og sundrun

Regla (samruni): Látum $(L_t)_{t\geqslant 0}$ og $(M_t)_{t\geqslant 0}$ vera óháð Poisson-ferli með tíðnir a og b. Setjum

$$N_t = L_t + M_t, \quad t \geqslant 0,$$

og fyrir $n \geqslant 1$

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{ef } n^{\text{ti}} \text{ punktur } (N_t)_{t\geqslant 0} \text{ kemur úr } (L_t)_{t\geqslant 0}, \\ 1 & \text{ef } n^{\text{ti}} \text{ punktur } (N_t)_{t\geqslant 0} \text{ kemur úr } (M_t)_{t\geqslant 0}. \end{cases}$$

Þá gildir að

- $(N_t)_{t\geqslant 0}$ er Poisson-ferli með tíðni $c = a + b$,
- $I_1, I_2, \ldots$ eru óháðar og allar $\mathrm{Ber}(p)$ þar sem $p = \frac{b}{c}$,
- og runan $(I_1, I_2, \ldots)$ er óháð $(N_t)_{t\geqslant 0}$.

Regla (sundrun): Látum

- $(N_t)_{t\geqslant 0}$ vera Poisson-ferli með tíðni c,
- $I_1, I_2, \ldots$ vera óháðar og allar $\mathrm{Ber}(p)$,
- og rununa $(I_1, I_2, \ldots)$ vera óháða $(N_t)_{t\geqslant 0}$.

Látum $(L_t)_{t\geqslant 0}$ og $(M_t)_{t\geqslant 0}$ vera talningarferli þannig að

$$L_t + M_t = N_t, \quad t \geqslant 0,$$

og

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{ef } n^{\text{ti}} \text{ punktur } (N_t)_{t\geqslant 0} \text{ kemur úr } (L_t)_{t\geqslant 0}, \\ 1 & \text{ef } n^{\text{ti}} \text{ punktur } (N_t)_{t\geqslant 0} \text{ kemur úr } (M_t)_{t\geqslant 0}. \end{cases}$$

Þá eru $(L_t)_{t\geqslant 0}$ og $(M_t)_{t\geqslant 0}$ óháð Poisson-ferli með tíðnir $a = (1-p)c$ og $b = pc$.