

# Approche probabiliste du modèle des piles abéliennes

Yvann Le Fay

Juillet 2020

## Resumé

L'étude numérique proposée dans [JAA14] de la taille des blocs de glaces qui se détachent lors d'un vélage, montre que cette grandeur suit une loi de puissance similaire à celles retrouvées dans l'étude des grandeurs moyennes associées au modèle des piles abéliennes. Dans ce cadre, les piles abéliennes modélisent un effondrement de particules qui à l'échelle locale suivent un processus de diffusion probabiliste caractérisé par un graphe. L'objet de ce travail est de calculer certaines grandeurs moyennes ( $\Phi$  le flux carré moyen,  $\sigma$  le coefficient de diffusion) ainsi que des profils asymptotiques pour le modèle des piles abéliennes sur une certaine classe de graphes donnés par la fonction de pondération  $\varphi$  qui leur est associée. Il est à noter que le modèle ainsi étudié est très proche des modèles des marches aléatoires embranchantes dans des milieux variables (BRWE).

Dhar dans [DD16] calcule grâce à de l'analyse complexe, de l'analyse numérique et avec l'aide de propriétés de symétrie, le flux carré moyen  $\Phi$  associé à  $\varphi(\delta, t) = 1/3\mathbb{1}(\delta)_{\{-1,0,1\}}$ .

L'objectif de ce papier est de généraliser et approfondir les travaux de Dhar dans [DD16]. Nous démontrons d'abord que l'équation qui régit la probabilité  $p : (x, t) \mapsto p(x, t)$  qu'un site  $x$  s'effondre à l'instant  $t$  est identique à celle qui régit une marche aléatoire dont les pas dépendent du graphe que l'on s'est donné (théorème 1.1). En particulier, on montre que le calcul qu'un site  $(x, t)$  est une somme réalisée sur l'ensemble des solutions d'une équation diophantienne linéaire dépendante de  $\varphi$ ,  $x$  et  $t$  (lemme 1.2). Dans le cas particulier où l'effondrement est isotropique (en ce sens, chaque arête du graphe a autant de probabilité d'être empruntée), ce calcul revient à dénombrer le nombre de solutions à cette équation diophantienne. Nous donnons l'expression exacte de la probabilité qu'un site s'effondre lorsque  $\varphi(\delta, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(\delta)_{k[-n,n]}$  (théorème 1.10) en exploitant le théorème 1.6 et les calculs menés dans [CCSC00]. Nous montrons toujours dans ce cas que la taille d'un effondrement évolue en  $n\sqrt{t}$  (théorème 1.7), (théorème 1.9), mieux encore, on montre que la loi de probabilité  $(p(x, t))_{x \in \mathbb{Z}}$  est bien approchée par une loi normale centrée d'écart-type  $\sqrt{n(n+1)t/3}$ . Sous la condition d'isotropie de l'effondrement, nous proposons une généralisation du calcul du flux carré  $\Phi$  défini par Dhar dans [DD16] (théorème 2.1). Nous confirmons par le calcul que le flux carré  $\Phi$  évolue en  $\sqrt{t}$  pour  $t$  grand, en fait, nous obtenons un équivalent de  $\Phi$  (théorème 2.1). Sous la conjecture supportée par des tests numériques que les flux d'ordres  $k$ ,  $\Phi_k$  évoluent proportionnellement en  $t^{(k-1)/2}$ , nous faisons le lien entre ces flux et le temps de relaxation du système et nous conjecturons que la probabilité que le système ne soit pas relaxé à l'instant  $t$ , qu'on note  $\mathbb{P}(T \geq t)$ , est proportionnelle à  $1/\sqrt{t}$ .

Dans une dernière partie, nous généralisons les équations régissant  $p$  à des mesures quelconques puis à des temps continus. Des intégrales de chemins apparaissent.

**Mots clés**— marche aléatoire embranchante dans des milieux variables (BRWE), équation de diffusion, équation de Chapman-Kolmogorov, chaînes de Markov, équations diophantiennes, théorème centrale-limite, intégrale de chemin

# 1 Modèle sur $\mathbb{Z}^d$ : définitions et résultats préliminaires

## 1.1 Définition de la dynamique du modèle

Un sommet du graphe est de la forme  $(x, t) \in \mathcal{S} = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ . Une application de pondération est une application notée  $\varphi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}^+$ . Considérons le graphe associé

$$\mathcal{G}(\varphi) = (\mathcal{S}, \{(s, s + (\delta, 1)) \text{ de poids } \varphi(\delta, t) : \delta \in \mathbb{Z}^d, s = (x, t) \in \mathcal{S}\})$$

Une configuration sur  $\mathcal{G}$  est une application  $\omega : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , celle-ci est dite stable à l'instant  $t$  si

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \omega(x, t) < \sigma_t = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\delta, t)$$

Etant donné une configuration  $\omega$  quelconque, on pose pour tout  $t \geq 1$ ,  $\omega_t = \omega(\cdot, t)$ ,  $\tau(\omega_t) = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} T_{(x, t-1)}(\omega_t)$ , où  $T_s$  l'opérateur de *toppling* (pour utiliser la terminologie des piles abéliennes) du site  $s$ , c'est-à-dire, celui qui fait effondrer  $s$  sur ses voisins,  $\{s + (\delta, 1)\}_\delta$  selon les quantités  $\varphi(\delta, t)$ . On s'intéresse à l'événement « $s$  s'effondre». On définit les variables suivantes

$$A : s = (x, t) \in \mathcal{S} \mapsto \mathbb{1}\{x \text{ s'effondre à l'instant } t\}$$

$$X : s \mapsto \text{Qté de grains qui s'effondre sur } s$$

$$H : s \mapsto \text{Qté de grains en } s \text{ après effondrement}$$

Le modèle des piles abéliennes est

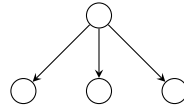
$$\forall s \in \mathcal{S}^* = \mathcal{S} \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{Z}^d\},$$

$$X(s) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} A(s - (\delta, 1)) \varphi(\delta, t - 1)$$

$$H(s) = \omega_t(x) + X(s)$$

$$A(s) = \mathbb{1}\{H(s) \geq \sigma_t\}$$

**Exemple 1.1.** Posons  $d = 1$  et  $\varphi(x, t) = 1/3 \mathbb{1}_{\{-1, 0, 1\}}$ , le graphe correspondant est composé de la maille suivante



Si l'on fixe  $\varphi(\delta, t) = \mathbb{1}_{\{-1, 1\}}$ , alors la dynamique associée est la suivante : si un site  $(x, t)$  est à hauteur  $\omega(x, t) \geq \sigma_t = 3$  alors ce site distribue un grain à ses voisins  $(x + \delta, t + 1)$  pour  $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ .

### 1.1.1 Normalisation

Dans toute la suite, on considère  $\varphi$  normalisée, quitte à poser  $\varphi(\cdot, t) = \varphi(\cdot, t) / \sigma_{t+1}$ , et  $\sigma_t = \sigma_t / \sigma_{t+1}$ . A chaque instant  $t$ , on a trois cas,

- $\sigma_t < 1$  alors le système tend à se relaxer car à l'instant  $t$ , le graphe redistribue plus de grains qu'il peut en redistribuer à la ligne  $t + 1$ .
- $\sigma_t > 1$  alors le système tend à s'exciter.
- $\sigma_t = 1$  alors le système se conserve (dans l'exemple précédent, le système est conservatif).

## 1.2 Modèle probabiliste

Etant donné une configuration  $\omega$  tirée uniformément parmi l'ensemble des configurations exactement instables qu'en  $s = (0, 0) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ , i.e  $\omega \in \Omega_0 = \{\omega : \forall s \in (\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}) \setminus \{(0, 0)\}, \omega(s) < \sigma_t, \omega(0, 0) = \sigma_0\}$ .

On note  $p : s \in \mathcal{S} \mapsto \mathbb{E}(X(s))$ , la quantité (normalisée) de grains qui s'effondrent sur  $s$  sachant qu'il y a initialement ( $t = 0$ ) effondrement qu'en  $0 \in \mathbb{Z}^d$ .

De la relation de récurrence précédente, on obtient une relation identique à celle d'une marche aléatoire partant de  $(0, 0)$  avec des pas de déplacements  $(\delta, +1)$  de poids  $\varphi(\delta, t)$  donnée par le théorème suivant

**Théorème 1.1.** *La quantité moyenne de grains qui se transmettent au sommet  $s$  normalisée est donnée par*

$$\forall s \in \mathcal{S}^*, \quad p(s) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} p(s - (\delta, 1)) \varphi(\delta, t - 1)$$

*Démonstration.* Soit  $\omega \in \Omega_0$ , notons

$$\mathcal{A}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : x \text{ est accessible depuis } 0 \text{ en un temps } t \text{ avec des déplacements admissibles}\}$$

Soit  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on se donne une bijection  $i : \mathcal{A}_{t-1} \rightarrow \llbracket 1; |\mathcal{A}_{t-1}| \rrbracket$  pour énumérer  $\mathcal{A}_{t-1}$  et on définit

$$\forall j \in \llbracket 0; |\mathcal{A}_{t-1}| \rrbracket, \omega_{j,t} = \begin{cases} \omega_t & \text{si } j = 0 \\ T_{(i^{-1}(j), t-1)}(\omega_{j-1,t}) & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

Soit  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on décompose l'application de l'opérateur de toppling  $\tau$  sur  $\omega_t$  par les états successifs  $(\omega_{j,t})_j$ , ainsi l'ordre d'un produit de toppings est selon l'énumération  $i$ , posons  $A_0 = \emptyset$  et  $A_k = \{\omega : (\prod_{y \in \mathcal{A}_{t-1} : i(y) \leq k} T_{(y, t-1)})(\omega_t)(x) \geq \sigma_t\}$ , alors  $A_k$  est l'ensemble des configurations dont l'effondrement sur  $x$  des  $k$  premiers-sites  $y$  (selon l'énumération  $i$ ) fait de  $x$  un site instable en  $t$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \{\omega : x \text{ s'effondre à l'instant } t\} &= \{\omega : \tau(\omega_t)(x) \geq \sigma_t\} \\ &= \{\omega : (\prod_{y \in \mathcal{A}_{t-1}} T_{(y, t-1)})(\omega_t)(x) \geq \sigma_t\} \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{A}_{t-1}|} A_k \setminus A_{k-1} \end{aligned}$$

La première égalité s'obtient par définition de  $(x, t)$  instable, la seconde égalité est justifiée car seuls les sites  $y \in \mathcal{A}_{t-1}$  s'effondrent à l'instant  $t - 1$ .

Et  $A_k \setminus A_{k-1} = \{\omega : \omega_t(x) + \sum_{j < k} \varphi(x - i^{-1}(j), t-1) < \sigma_t, \omega_t(x) + \sum_{j \leq k} \varphi(x - i^{-1}(j), t-1) \geq \sigma_t\}$ , cela car les  $k-1$  premiers effondrements ne rendent pas  $(x, t)$  instable mais les  $k$  premiers, si. Les quantités  $\omega_t(x)$  étant distribuées uniformément, on a que pour tout  $k \in \llbracket 1; |\mathcal{A}_{t-1}| \rrbracket$ , la contribution moyenne au site  $(x, t)$  du  $k$ -ème effondrements sachant que  $(x, t)$  n'est pas instable après les  $k-1$  premiers est

$$p(i^{-1}(k), t-1) \varphi(x - i^{-1}(k))$$

En sommant toutes les contributions, on obtient

$$p(x, t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p(y, t-1) \varphi(x - y, t-1) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} p(s - (\delta, 1)) \varphi(\delta, t-1)$$

□

On définit la série génératrice  $\tilde{p}(\Theta, t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x, t) e^{ix \cdot \Theta}$  et posons  $\mathcal{L}(t, \Theta) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^d} e^{i\delta \cdot \Theta} \varphi(\delta, t-1)$ . Nous obtenons

$$\tilde{p}(\Theta, t) = \tilde{p}(\Theta, t-1) \mathcal{L}(t, \Theta)$$

**Exemple 1.2.** L'exemple du graphe précédent donne

$$p(x, t) = \frac{1}{3} \sum_{\delta=-1}^1 p(x + \delta, t-1) \quad \mathcal{L}(t, \theta) = 1/3(1 + 2 \cos(\theta)) \quad \tilde{p}(\theta, t) = 1/3^t(1 + 2 \cos(\theta))^t$$

**Lemme 1.2.** Si l'effondrement initial a lieu en  $(0, 0)$  alors

$$\forall s \in S, p(s) = \sum_{\Delta : (E)} \Psi(\Delta)$$

où  $\Delta = (\delta_i) : (E)$  est la condition  $\sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x$  et  $\Psi(\Delta) = \prod_{i=0}^{t-1} \varphi(\delta_i, i)$ .

*Démonstration.* Par hypothèse, l'effondrement initial a lieu en  $(0, 0)$  ainsi  $\tilde{p}(\Theta, 0) = 1$ . D'après le résultat qui précède,

$$\tilde{p}(\Theta, t) = \prod_{i=1}^t \mathcal{L}(i, \theta) = \sum_{\Delta \in (\mathbb{Z}^d)^t} e^{i\Theta \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i} \Psi(\Delta)$$

et en appliquant la transformée de Fourier inverse,

$$p(s) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Theta \in [0, 2\pi]^d} e^{-i\Theta \cdot x} \tilde{p}(\Theta, t) d\Theta = \sum_{\Delta \in (\mathbb{Z}^d)^t} \mathbf{1}_{(E)}(\Delta) \Psi(\Delta)$$

□

Dans le cas particulier où la quantité  $\varphi = C \mathbf{1}_E$ , le lemme précédent dit que  $p(s) = C^t \text{Card}\{(\delta_i) \in (E^d)^t : \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x\}$ .

**Lemme 1.3.** Soit  $X \subset \mathbb{Z}^d$ , on a  $\tilde{p}(\Theta, t|X) = \tilde{p}(\Theta, t) \sum_{x \in X} e^{i\Theta \cdot x}$  i.e  $p(s|X) = \sum_{x' \in X} p(x - x', t)$ .

*Démonstration.* Le résultat du lemme 1.1 étant valable pour  $p(s|X)$ , il suffit de poser que les sites  $x \in X$  s'effondrent initialement, i.e  $p(x, 0) = \mathbb{1}_X(x)$  et alors

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\Theta, t|X) &= \tilde{p}(\Theta, t|\{0\})\tilde{p}(\Theta, 0|X) \\ &= \tilde{p}(\Theta, t) \sum_{x \in X} e^{i\Theta \cdot x} \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.4.** Notons  $\mathbb{P}(s_x)$ , la probabilité  $\mathbb{P}(A(x, t) = 1)$ . En supposant que  $p \leq 1$  (par exemple la quantité de grains totales  $s(t)$  qui peuvent être communiqués par chaque sommet de la ligne  $t - 1$  est croissante en  $t$ ), la loi conjointe est à un instant  $t$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{N}^*, x \neq y, \\ p(s_x \cap s_y) = \sum_{(\delta_1, \delta_2) \in (\mathbb{Z}^d)^2} p(s_x - (\delta_1, 1) \cap s_y - (\delta_2, 1)) \varphi(\delta_1, t - 1) \varphi(\delta_2, t - 1) \quad (1) \end{aligned}$$

Et initialement,  $p((x, 0) \cap (y, 0)) = A(x, 0)A(y, 0)$ .

*Démonstration.* Comme  $p \leq 1$ , on sait que  $X$  et  $A$  coïncident en loi. La démonstration est semblable à celle du premier lemme et on obtient pour un effondrement initial en  $(0, 0)$ ,  $\tilde{p}(\Theta_1, \Theta_2, t) = \sum_{(\Delta_1, \Delta_2) \in (\mathbb{Z}^d)^t \times (\mathbb{Z}^d)^t} e^{i(\Theta_1 \cdot s(\Delta_1) + \Theta_2 \cdot s(\Delta_2))} \Psi(\Delta_1) \Psi(\Delta_2)$  où l'on note  $s(\Delta) = \sum_{\delta \in \Delta} \delta$  et cela se généralise facilement. □

**Lemme 1.5.** Le processus respecte l'équation de Chapman-Kolmogorov,

$$\forall t_2 \leq t, p(s|s') = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p(s|(y, t_2))p((y, t_2)|s')$$

Avec la condition initiale,  $p((x, t')|(x', t')) = \delta_{x, x'}$ .

## 2 Le cas où $\varphi(x, t) = 1/(2n + 1)\mathbb{1}(x)_{[-n; n]}$

**Théorème 2.1.** Si  $\varphi(x, t) = 1/(2n + 1)\mathbb{1}(x)_{[-n; n]}$  alors

$$\frac{1}{C^t} \sum_{x \in \mathbb{Z}} p(x, t) X^{nt+x} = \left( \sum_{i=0}^{2n} X^i \right)^t$$

*Démonstration.* On a  $C\mathcal{L}(\theta) = \sum_{\delta=-n}^n e^{i\delta\theta} = 1 + 2 \sum_{\delta=1}^n \cos \delta\theta$ . En posant  $\theta = -i \ln X$ , le résultat est obtenu. □

**Théorème 2.2.** Dans les conditions précédentes,

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{3}n(1+n)t$$

*Démonstration.* Notons  $P(X) = \sum_{i=0}^{2n} X^i$  et  $\binom{t}{j}_{2n+1}$  le coefficient en  $X^j$  dans  $P(X)^t$ , par le théorème qui précède, on a

$$(2n+1)^t p(j-nt, t) = \binom{t}{j}_{2n+1}$$

Par symétrie,  $p(x, t) = p(-x, t)$  et donc  $\mathbb{E}(x : (x, t) \text{ s'effondre}) = \sum_{x=-nt}^{nt} p(x, t)x = 0$ .  
Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \text{Var}(x : (x, t) \text{ s'effondre}) = \sum_{x=-nt}^{nt} x^2 p(x, t) - \mathbb{E}(x : (x, t) \text{ s'effondre})^2 \\ &= \frac{1}{(2n+1)^t} \sum_{j=0}^{2nt} (j-nt)^2 \binom{t}{j}_{2n+1} \end{aligned}$$

Aussi, les identités 4.2 et 4.3 de [CCSC00] sont

$$\sum_{j=0}^{2nt} j^2 \binom{t}{j}_{2n+1} = \frac{2nt(2n+1)^t}{12} (2n(3t+1) + 2) \quad \sum_{j=0}^{2nt} j \binom{t}{j}_{2n+1} = \frac{2nt(2n+1)^t}{2}$$

d'où le résultat. Un calcul similaire peut-être mené dans le cas où  $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(x)_{\llbracket -n, n \rrbracket + \mu}$ , la variance est inchangée.  $\square$

**Théorème 2.3.** Si  $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(x)_{\llbracket -n, n \rrbracket + \mu}$  alors

$$X(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu t, \sigma(t)^2 = \frac{1}{3}tn(n+1))$$

*Démonstration.* Nous pouvons supposer que  $\varphi(x, t)_{\llbracket -n, n \rrbracket}$ , le théorème précédent nous dit que si  $A(t)$  suit une loi normale de variance  $\sigma^2(t)$  alors nécessairement

$$\mu = C_1(t) = 0 \quad C_2(t) = \sigma^2(t) = \frac{n(n+1)t}{3}$$

On va utiliser le théorème centrale-limite sur les  $(X_i)$  qui sont i.i.d suivant  $X$  une variable aléatoire discrète uniforme sur  $\llbracket -n, n \rrbracket$ . L'expression donnée de  $p$  dans le théorème 2.2,  $(2n+1)^t p(j-nt, t) = \binom{t}{j}_{2n+1}$  ainsi que le théorème 2.1 de [CCSC00] montrent que

$$X(t) = \sum_{i=1}^t X_i - nt$$

Le théorème centrale-limite donne le résultat, la variance peut être obtenue en utilisant l'expression de la variance de  $X$  et l'équation précédente. Il est à noter que le papier [?] présente un théorème centrale limite pour les marches aléatoires embranchantes à milieux variables. Ce théorème s'applique dans ce cadre et est plus général que le résultat ainsi démontré.  $\square$

**Théorème 2.4.** Si  $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(x)_{[-n, n]}$  alors

$$p(x, t) = t/(2n+1)^t \sum_{p=0}^{\lfloor (x+nt)/(2n+1) \rfloor} \frac{(-1)^p \Gamma(t+x+nt-p(2n+1))}{\Gamma(p+1)\Gamma(t-p+1)\Gamma(x+nt-p(2n+1)+1)}$$

*Démonstration.* Pour l'expression de  $p$ , voir 2.8 de [CCSC00] donnant l'expression de  $\binom{t}{j}_{2n+1}$ .  $\square$

**Théorème 2.5.** Si  $\varphi(x, t) = 1/(2n+1)\mathbb{1}(x)_{k[-n, n] + \mu}$  pour un certain  $k \geq 1$  alors

$$p(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2k^2\sigma(t)^2}} \mathbb{1}_{k\mathbb{Z}}(x - \mu t)$$

où  $\sigma(t)^2 = 1/3n(n+1)t$ .

*Démonstration.* Supposons, sans perte de généralité que  $\mu = 0$ . D'après le lemme 1.2, on a pour tout  $s \in \mathcal{S}$ ,

$$p(s) = C^t \text{Card}\{\{\delta_i\} \in [-n, n] : k \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x\}$$

Si  $x$  n'est pas divisible par  $k$ , alors  $p(s) = 0$ . Sinon,  $p(s) = C^t \text{Card}\{\{\delta_i\} \in [-n, n] : \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x/k\}$ . D'après le théorème 2.3, on a le résultat.  $\square$

### 3 Flux carré moyen

Le flux carré moyen  $\Phi$  est défini par

$$\forall t, \Phi(t) = \mathbb{E} \left( \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} A(s_x) \right)^2$$

**Théorème 3.1.** En dimension  $d = 1$ , supposons que  $\varphi$  ne dépend pas de  $t$  alors

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

où  $\gamma$  est défini dans la démonstration.

*Démonstration.* Comme  $\varphi$  ne dépend pas de  $t$ , on a que  $X$  et  $A$  coïncident en loi puis

$$\Phi(t) = \sum_{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} p(s_x \cap s_y)$$

L'équation linéaire (1) que respecte la loi conjointe sur une même ligne  $t$  a pour solution, pour une certaine fonction  $f$ ,

$$p(s_x \cap s_y) = \sum_{Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z) p(s_y|Z)$$

Définissons  $F(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(s_x)$ . L'hypothèse d'indépendance de  $\varphi$  par rapport à  $t$  implique qu'il y a conservation du nombre moyen de grains qui se déplacent à chaque instant, donc de  $\mathbb{E} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} A(s_x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x)$ . On pose, sans perte de généralité par linéarité,  $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x) = 1$ .

Nous obtenons en utilisant ce qui précède,

$$\Phi(t) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} \sum_{Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z) p(s_y|Z) = \sum_{t'=0}^t F(t')$$

Posons  $K(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x)^2$ ,  $\tilde{F}(z) = \sum_{t \in \mathbb{N}} F(t) z^t$  et  $\tilde{K}$  les séries génératrices associées. L'hypothèse d'indépendance de  $\varphi$  par rapport au temps implique  $p(s|s') = p(s - s')$  puis

$$1 = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d, Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z)^2 = \sum_{t'=0}^t F(t') K(t - t')$$

Sur les fonctions génératrices,

$$\tilde{K}(z) \tilde{F}(z) = \frac{1}{1 - z} \quad (2)$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $K(t)$ . Si la distribution admet une symétrie par rapport à  $0_d$ , c'est-à-dire  $\varphi(-\delta) = \varphi(\delta)$  alors l'équation de Chapman-Kolmogorov donne  $p(0, 2t) = K(t)$ .

Plus généralement,

$$|\mathcal{L}(\Theta)|^{2t} \tilde{p}(\Theta, 0) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} e^{i\Theta \cdot (x-y)} p(s_x) p(s_y)$$

d'où,

$$K(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x)^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} |\mathcal{L}(\Theta)|^{2t} \tilde{p}(\Theta, 0) d\Theta$$

Ainsi,

$$\tilde{K}(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} \frac{d\Theta}{1 - z |\mathcal{L}(\Theta)|^2} \tilde{p}(\Theta, 0)$$

Supposons que  $d = 1$ , posons  $c_2 = \sum_{\delta_1 < \delta_2} (\delta_1 - \delta_2)^2 \varphi(\delta_1) \varphi(\delta_2)^*$  alors

$$|\mathcal{L}(\theta)|^2 = 1 - c_2 \theta^2 + o(\theta^4)$$

Où la dernière ligne est obtenue en effectuant un développement limité de  $\cos$  et la constante est bien  $c_1 = \sum_{\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}} \varphi(\delta_1) \varphi(\delta_2) = 1 \times 1$  par normalisation et indépendance de  $\varphi$  par rapport à  $t$ .



Il s'agit d'obtenir un équivalent de  $\tilde{K}$  lorsque  $z \rightarrow 1^-$ . Sans perte de généralité, prenons  $\tilde{p}(\Theta, 0) = 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, pour  $z$  au voisinage de 1,

$$\tilde{K}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 - z|\mathcal{L}(\theta)|^2} \sim \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{d\theta}{1 - z(1 - c_2\theta^2)}$$

La première égalité est justifiée par  $|\mathcal{L}(\theta)|^2 = |\mathcal{L}(2\pi - \theta)|^2$ . La première équivalence est justifiée car les deux seuls pôles de la fonction qu'on intègre quand  $z \mapsto 1^-$  sont  $\{0, 2\pi\}$ . De plus,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{d\theta}{1 - z(1 - c_2\theta^2)} = \frac{1}{\pi} \frac{\arctan \varepsilon \sqrt{\frac{c_2 z}{1-z}}}{\sqrt{c_2 z(1-z)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{c_2}} \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{2\gamma}{\sqrt{1-z}}$$

Ainsi,

$$\Phi(t) = \sum_{t'=0}^t \left( \frac{1}{(1-z)\tilde{K}(z)} \right)_{t'} \sim \frac{1}{2\gamma} \sum_{t'=0}^t \left( \frac{1}{\sqrt{1-z}} \right)_{t'}$$

En utilisant les deux identités suivantes

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{t'=0}^{+\infty} z^{t'} \binom{-1/2}{t'} (-1)^{t'} \quad \sum_{t'=0}^t \binom{-1/2}{t'} (-1)^{t'} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(1+t)\Gamma(1/2(3+2t))}{\Gamma(2+t)} \sim 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

On obtient

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Si  $\varphi = 1/(2n+1)\mathbb{1}_{[-n,n]}$ , on a  $c_1 = 1$  et  $c_2 = 1/3n(n+1)$  puis

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n(n+1)}}$$

et pour  $t$  grand,

$$\Phi(t) \sim 4\sqrt{\frac{tn(n+1)}{3\pi}}$$

De plus, par rapport au théorème 1.7, on remarque que  $\sigma(t) = \sigma(x : (x, t) \text{ s'effondre})$  et  $\Phi(t)$  sont proportionnels pour  $t$  grand et le facteur de proportionnalité est  $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$  i.e

$$\Phi(t) \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma(t)$$

□

**Exemple 3.1.** Dans le cas du graphe initialement traité par Dhar dans [DD16] qui nous sert d'exemple,

$$\varphi = 1/3\mathbb{1}_{[-1,1]}, \quad \Phi(t) \sim \sqrt{\frac{32t}{3\pi}}$$

Dans les conditions du théorème précédent,

**Lemme 3.2.**

$$F(t) \sim \frac{1}{2\gamma\sqrt{t\pi}}$$

*Démonstration.* En reprenant la démonstration du théorème précédent, on obtient

$$F(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x, t) \sim \frac{1}{2\gamma} \binom{-1/2}{t} (-1)^t$$

D'où le résultat. □

## 4 Généralisations du modèle

### 4.1 Généralisation à une mesure quelconque

Remarquons que  $p(\cdot, t-1)$  est défini par un produit de convolution de  $p(\cdot, t-1)$  avec une certaine mesure qui dépend de  $t$ . Donnons-nous une collection  $(\mu_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  de mesures finies sur les boréliens de  $\mathbb{R}$  de la forme

$$d\mu_t(y) = g_t(y)dy$$

où  $g_t$  est une fonction quelconque intégrable. On définit  $\mathfrak{s}_t$  par

$$\mathfrak{s}_t(f)(x) = \int f(x-y) d\mu_t(y) \tag{1}$$

où  $f$  est une fonction  $\mu_t$ -intégrale quelconque. On définit  $\mathfrak{s}_0(f) = f$ . On définit par récurrence,

$$\begin{aligned} \Phi(f)(t)(x) &= \mathfrak{s}_t(\Phi(f)(t-1))(x) \\ &= \int \Phi(f)(t-1)(x-y_t) d\mu_t(y_t) \\ &= \int \dots \left( \int f(x - \sum_{j=1}^t y_j) d\mu_1(y_1) \right) \dots d\mu_t(y_t) \end{aligned}$$

**Lemme 4.1.** On note  $p(x, t) = p(t)(x)$  et  $A(0)$  est le profil initial de l'avalanche en  $t = 0$ , on a alors  $p(t)(x) = \Phi(A(0))(t)(x)$  pour  $t \geq 1$ , en posant pour  $t \geq 1$

$$g_t(y) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} \varphi(t-1, \delta) \delta'(y - \delta)$$

où  $\delta'$  est compris comme la limite de la suite des dérivées d'une famille naissante de Dirac.

*Démonstration.* Posons  $g_t$  comme dans l'énoncé. Montrons que  $p(t) = \mathfrak{s}_t(p(t-1))$  et par récurrence, on aura le résultat. Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s}_t(p(t-1))(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}} d\mu_t(y) p(t-1)(x-y) \\
&= \int_{y \in \mathbb{R}} g_t(y) p(t-1)(x-y) dy \\
&= \int_{y \in \mathbb{R}} \left[ \sum_{d \in \mathcal{E}} \delta'(y-d) \varphi(t-1, d) \right] p(t-1)(x-y) dy \\
&= \sum_{d \in \mathcal{E}} \varphi(t-1, d) \int_{y \in \mathbb{R}} \delta'(y-d) p(t-1)(x-y) dy \\
&= \sum_{d \in \mathcal{E}} \varphi(t-1, d) p(t-1)(x-d) \\
&= p(t)(x)
\end{aligned}$$

La somme est finie, l'interversion somme-intégrable est donc justifiée, la dernière égalité est donnée par le théorème 1.1. L'initialisation est bien vérifiée car  $p(0) = A(0)$ .  $\square$

**Lemme 4.2.** *Etant donné  $p(0)$  un profil initial, et  $(\mu_t)$  une collection de mesures finies. On définit  $p(t) = \Phi(p(0))(t)$  et on note  $\mathcal{L}(\theta, t) = \int_{y \in \mathbb{R}} e^{iy\theta} g_t(y) dy$  et on définit  $\tilde{p}(\theta, t) = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} p(t)(x) dx$  alors*

$$\tilde{p}(\theta, t) = \mathcal{L}(\theta, t) \tilde{p}(\theta, t-1)$$

*C'est le pendant des lemmes 1.2 et 1.3.*

*Démonstration.* Soit  $t \in \mathbb{N}^*$ , on a formellement

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(\theta, t) &= \int_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} \int_{y \in \mathbb{R}} g_t(y) p(t-1)(x-y) dy dx \\
&= \tilde{p}(\theta, t-1) \int_{y \in \mathbb{R}} e^{iy\theta} g_t(y) dy \\
&= \tilde{p}(\theta, 0) \int_{y \in \mathbb{R}^t} e^{i\theta(y_1 + \dots + y_t)} \times \left( \underbrace{\prod_{j=1}^t g_j(y_j)}_{=\mathcal{P}(y) \text{ poids du chemin } (y_1, \dots, y_t)} \right) dy
\end{aligned}$$

Où les interversions des intégrales sont justifiées par le théorème de Fubini-Lebesgue ( $\mu_t$  est une mesure finie). Nous sommes à deux doigts d'arriver à une intégrale de chemin... Ainsi,

$$p(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^t} \int_{y \in \mathbb{R}^t} e^{i\theta(y \cdot \mathbf{1} - x)} \tilde{p}(\theta, 0) \mathcal{P}(y) dy$$

On pose  $\tilde{p}(\theta, 0) = 1$ , alors

$$p(t)(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^t} \mathbb{1}_{y \cdot \mathbb{1} = x} \mathcal{P}(y) dy$$

Ainsi, si  $\tilde{p}(\theta, 0) = \int p(x, 0) e^{ix\theta} dx$  alors

$$p(t)(x) = \int_{z \in \mathbb{R}} p(0)(z) \int_{y \in \mathbb{R}^t} \mathbb{1}_{y \cdot \mathbb{1} = x - z} \mathcal{P}(y) dy dz$$

Dans le cas précédent, on a  $\tilde{p}(\theta, 0) = \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} p(x, 0)$ , ainsi pour passer d'une transforation de Fourier discrète à une transformation de Fourier continue, on remplace  $p(0)(x)$  dans  $\tilde{p}(\theta, 0) = \int p(0)(x) e^{ix\theta} dx$  par  $p(x, 0) g_0(x)$  avec  $g_0(x) = \sum_d \delta'(x - d) p(d, 0)$ . Soit  $(y_1, \dots, y_t)$  un chemin, on a dans ce cas

$$\mathcal{P}(y) = \prod_{j=1}^t g_j(y_j) = \mathbb{1}_{\mathcal{E}^t}(y) \prod_{j=1}^t \varphi_{j-1, y_j}$$

Et l'on retrouve le résultat les lemmes 1.2 et 1.3.  $\square$

## 4.2 Passage en temps continu

On exploite le lemme 4.2 pour nous ramener à une intégrale de chemin. Notons  $g_t(y) = g(t, y)$ . Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un chemin. On définit alors le poids du chemin  $y$  par

$$\mathcal{P}(y) = \exp\left\{\int_0^t \ln g(t, \dot{y}(t)) dt\right\}$$

alors en utilisant la notation des intégrales de chemin de Feynman,

$$\tilde{p}(\theta, t) = \tilde{p}(\theta, 0) \int e^{i\theta(y(t) - y(0))} \mathcal{P}(y) \mathcal{D}y$$

Puis,

$$p(t)(x) = \int_{z \in \mathbb{R}} p(0)(z) \int_{y(t) - y(0) = x - z} \mathcal{P}(y) \mathcal{D}y dz$$

## 5 Temps d'arrêt du modèle discret

### 5.1 Flux d'ordre supérieur et temps d'effondrement

On définit le flux d'ordre  $k$  pour  $k \geq 1$  par

$$\Phi_k(t) = \mathbb{E}\left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} A(s_x)\right)^k = \sum_{X=(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k} \mathbb{P}(s_{x_1} \cap \dots \cap s_{x_k})$$

De manière à ce que le flux carré moyen soit noté  $\Phi_2(t)$ . Définissons la variable  $T = \inf\{t \in \mathbb{N} : \cap_{x \in \mathbb{Z}} [A(s_x) = 0]\}$ , étant donné une configuration  $\omega$ ,  $T(\omega)$  est le temps d'effondrement. On a

**Lemme 5.1.**

$$\mathbb{P}(T \geq t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2n+1}(t) - \Phi_{2n}(t)$$

*Démonstration.* On a par la formule du crible

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \geq t) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}} s_x\right) \\ &= \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{Z}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} s_x\right) \\ &= 1 - (\Phi_2(t) - 1) + (\Phi_3(t) - \Phi_2(t)) - \dots \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2n+1}(t) - \Phi_{2n}(t) \end{aligned}$$

□

En reprenant le calcul de  $\Phi_2$ , on pose par analogie  $K_k(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} p(x, t)^k$ . La conjecture (motivée par des résultats numériques) que nous faisons est que

$$K_k(t) \sim t^{(1-k)/2} / C_k$$

pour une certaine constante  $C_k$ , puis similairement, on obtient  $\Phi_k(t) \sim C_k \sum_{t'=0}^t \left( (1-z)^{(1-k)/2} \right)_{t'}$ .

En utilisant  $\sum_{t'=0}^t (-1)^{t'} \binom{(1-k)/2}{t'} \sim t^{(k-1)/2} C_{2,k}$ , on aurait,  $\Phi_k(t) \sim C_k C_{2,k} t^{(k-1)/2}$  avec  $C_{2,2k} = 2^k / (2k-1)!! \sqrt{\pi}$  et  $C_{2,2k+1} = 1/k!$ . De manière à ce qu'on ait

$$\mathbb{P}(T \geq t) \sim 2 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \left( \frac{C_{2n+1}}{n!} - \frac{C_{2n} 2^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!! \sqrt{t}} \right)$$

La conjecture que nous faisons est que

$$\mathbb{P}(T \geq t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

## References

- [CCSC00] Pushpa N. Rathie Camila C. S Caiado. Polynomial coefficients and distribution of the sum of discrete uniform variables. 2000.
- [DD16] Paul Expert Kim Christensen Nicky Zachariou Deepak Dhar, Gunnar Pruessner. Directed abelian sandpile with multiple downward neighbors. *Phys. Rev. E* *93*, 042107, 2016.
- [JAA14] M. Schäfer E.Z. Welty S. O’Neel T.C. Bartholomaus Yan Liu T. I. Riikilä T. Zwinger J. Timonen J. C. Moore J. A. Astrom, D. Vallot. Termini of calving glaciers as self-organized critical systems. *Nature geoscience*, 2014.