

Approche probabiliste du modèle des piles abéliennes

Yvann Le Fay

Juillet 2020

Resumé

L'étude numérique proposée dans [JAA14] de la taille des blocs de glaces qui se détachent lors d'un vêlage, montre que cette grandeur suit une loi de puissance similaire à celles retrouvées dans l'étude des grandeurs moyennes associées au modèle des piles abéliennes. Dans ce cadre, les piles abéliennes modélisent un effondrement de particules qui à l'échelle locale suivent un processus de diffusion probabiliste caractérisé par un graphe. L'objet de ce travail est de calculer certaines grandeurs moyennes (Φ le flux carré moyen, σ le coefficient de diffusion) ainsi que des profils asymptotiques pour le modèle des piles abéliennes sur une certaine classe de graphes donnés par l'ensemble \mathcal{E} qui leur est associé.

Dhar dans [DD16] calcule grâce à de l'analyse complexe, de l'analyse numérique et avec l'aide de propriétés de symétrie, le flux carré moyen Φ associé à $\mathcal{E} = \{-1, 0, 1\}$.

L'objectif de ce papier est de généraliser et approfondir les travaux de Dhar dans [DD16]. Nous démontrons d'abord que l'équation qui régit la probabilité $p : (x, t) \mapsto p(x, t)$ qu'un site x s'effondre à l'instant t est identique à celle qui régit une marche aléatoire dont les pas dépendent du graphe que l'on s'est donné (théorème 1.1). En particulier, on montre que le calcul qu'un site (x, t) est une somme réalisée sur l'ensemble des solutions d'une équation diophantienne linéaire dépendante de \mathcal{E} , x et t (lemme 1.2). Dans le cas particulier où l'effondrement est isotropique (en ce sens, chaque arête du graphe a autant de probabilité d'être empruntée), ce calcul revient à dénombrer le nombre de solutions à cette équation diophantienne. Nous donnons l'expression exacte de la probabilité qu'un site s'effondre lorsque $\mathcal{E} = k\llbracket -n, n \rrbracket$ (théorème 1.10) en exploitant le théorème 1.6 et les calculs menés dans [CCSC00]. Nous montrons toujours dans ce cas que la taille d'un effondrement évolue en $n\sqrt{t}$ (théorème 1.7), (théorème 1.9), mieux encore, on montre que la loi de probabilité $(p(x, t))_{x \in \mathbb{Z}}$ est bien approchée par une loi normale centrée d'écart-type $\sqrt{n(n+1)t/3}$. Sous la condition d'isotropie de l'effondrement, nous proposons une généralisation du calcul du flux carré Φ défini par Dhar dans [DD16] (théorème 2.1). Nous confirmons par le calcul que le flux carré Φ évolue en \sqrt{t} pour t grand, en fait, nous obtenons un équivalent de Φ (théorème 2.1).

Dans une dernière partie, nous généralisons les équations régissant p à des mesures quelconques puis à des temps continus. Des intégrales de chemins apparaissent.

Mots clés— équation de diffusion, équation de Chapman-Kolmogorov, chaînes de Markov, équations diophantiennes, théorème centrale-limite, intégrale de chemin

1 Modèle sur \mathbb{Z}^d : définitions et résultats préliminaires

1.1 Définition de la dynamique du modèle

Soit un entier $d \geq 1$, $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}^d$ de cardinal fini c , appelé ensemble des déplacements admissibles, $\varphi : \mathcal{E} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ appelée application de pondération. Considérons le graphe associé

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}, \varphi) = (\mathcal{S} = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}, \{(s, s + (\delta, 1)) \text{ de poids } \varphi(\delta, t) : \delta \in \mathcal{E}, s = (x, t) \in \mathcal{S}\})$$

Une configuration sur \mathcal{G} est une application $\omega : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, celle-ci est dite stable à l'instant t si

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \omega(x, t) < s(t) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} \varphi(\delta, t)$$

Etant donné une configuration ω quelconque, on pose pour tout $t \geq 1$, $\omega_t = \omega(\cdot, t)$, $\tau(\omega_t) = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} T_{(x, t-1)}(\omega_t)$, où T_s l'opérateur de *toppling* (pour utiliser la terminologie des piles abéliennes) du site s , c'est-à-dire, celui qui fait effondrer s sur ses voisins, $\{s + (\delta, 1)\}_\delta$ selon les quantités $\varphi(\delta, t)$. On s'intéresse à l'événement « s s'effondre». On définit les variables suivantes

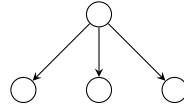
$$\begin{aligned} A : s = (x, t) \in \mathcal{S} &\mapsto \mathbf{1}\{x \text{ s'effondre à l'instant } t\} \\ X : s &\mapsto \text{Qté de grains qui s'effondre sur } s \\ H : s &\mapsto \text{Qté de grains en } s \text{ après effondrement} \end{aligned}$$

Le modèle des piles abéliennes est

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathcal{S}^* = \mathcal{S} \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{Z}^d\}, \\ X(s) &= \sum_{\delta \in \mathcal{E}} A(s - (\delta, 1)) \varphi(\delta, t-1) \\ H(s) &= \omega_t(x) + X(s) \\ A(s) &= \mathbf{1}\{H(s) \geq s(t)\} \end{aligned}$$

1.2 Un exemple

Posons $E = \{-1, 0, 1\}$ et $d = 1$, le graphe correspondant est composé de la maille suivante



Si l'on fixe $\varphi(\delta, t) = 1$ pour tout t , $\delta \in E$, alors la dynamique associée est la suivante : si un site (x, t) est à hauteur $\omega(x, t) \geq 3$ alors ce site distribue un grain à ses voisins $(x + \delta, t + 1)$ pour $\delta \in E$.

1.3 Modèle probabiliste

Etant donné une configuration ω tirée uniformément parmi l'ensemble des configurations instables qu'en $s = (0, 0) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$, i.e $\omega \in \Omega_0 = \{\omega : \forall s \in (\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}) \setminus \{(0, 0)\}, \omega(s) < s(t), \omega(0, 0) = s(0)\}$, on considère la variable aléatoire après normalisation, $X(s) = X(s)/s(t)$ qui est la quantité normalisée de grains qui s'effondrent.

On note $p : s \in \mathcal{S} \mapsto \mathbb{E}(X(s))$, la quantité normalisée de grains qui s'effondrent sur s sachant qu'il y a initialement ($t = 0$) effondrement qu'en $0 \in \mathbb{Z}^d$. On normalise les poids φ en posant

$$\forall \delta \in \mathcal{E}, t \in \mathbb{N}, \varphi_{\delta, t}^* = \frac{\varphi(\delta, t)}{s(t+1)}$$

De la relation de récurrence précédente, on obtient une relation identique à celle d'une marche aléatoire pour des pas de déplacement $\delta \in \mathcal{E}$ est de poids $\varphi_{\delta, t}$ donnée par le théorème suivant

Théorème 1.1. *La quantité moyenne de grains qui se transmettent au sommet s normalisée est donnée par*

$$\forall s \in \mathcal{S}^*, p(s) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} p(s - (\delta, 1)) \varphi_{\delta, t-1}^*$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega_0$, notons

$$\mathcal{A}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : x \text{ est accessible depuis } 0 \text{ en un temps } t \text{ avec des déplacements admissibles}\}$$

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$, on pose $\mathcal{E}^{-1}(x) = \{x - \delta : \delta \in \mathcal{E}\}$.

On se donne une bijection $i : \mathcal{A}_{t-1} \rightarrow \llbracket 1; |\mathcal{A}_{t-1}| \rrbracket$ pour énumérer \mathcal{A}_{t-1} et on définit

$$\forall j \in \llbracket 0; |\mathcal{A}_{t-1}| \rrbracket, \omega_{j, t} = \begin{cases} \omega_t & \text{si } j = 0 \\ T_{(i^{-1}(j), t-1)}(\omega_{j-1, t}) & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$, on décompose l'application de l'opérateur de toppling τ sur ω_t par les états successifs $(\omega_{j, t})_j$, ainsi l'ordre d'un produit de toppings est selon l'énumération i , posons $A_0 = \emptyset$ et $A_k = \{\omega : (\prod_{y \in \mathcal{A}_{t-1} \cap \mathcal{E}^{-1}(x) : i(y) \leq k} T_{(y, t-1)})(\omega_t)(x) \geq s(t)\}$, alors A_k est l'ensemble des configurations dont l'effondrement sur x des k premiers-sites y (selon l'énumération i) fait de x un site instable en t . Nous avons

$$\begin{aligned} \{\omega : x \text{ s'effondre à l'instant } t\} &= \{\omega : \tau(\omega_t)(x) \geq s(t)\} \\ &= \{\omega : (\prod_{y \in \mathcal{A}_{t-1}} T_{(y, t-1)})(\omega_t)(x) \geq s(t)\} \\ &= \{\omega : (\prod_{y \in \mathcal{A}_{t-1} \cap \mathcal{E}^{-1}(x)} T_{(y, t-1)})(\omega_t)(x) \geq s(t)\} \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{A}_{t-1}|} A_k \setminus A_{k-1} = \bigsqcup_{k=1, k \in i(\mathcal{E}^{-1}(x))}^{|\mathcal{A}_{t-1}|} A_k \setminus A_{k-1} \end{aligned}$$

La première égalité s'obtient par définition de (x, t) instable, la seconde égalité est justifiée car seuls les sites $y \in \mathcal{A}_{t-1}$ s'effondre à l'instant $t - 1$, la troisième car seuls les sites $y \in \mathcal{E}^{-1}(x)$ peuvent changer l'état de x .

Et $A_k \setminus A_{k-1} = \{\omega : \omega_t(x) + \sum_{j \leq k} \varphi(x - i^{-1}(j), t-1) < s(t), \omega_t(x) + \sum_{j \leq k} \varphi(x - i^{-1}(j), t-1) \geq s(t)\}$, cela car les $k-1$ premiers effondrements ne rendent pas (x, t) instable mais les k premiers, si. Les quantités $\omega_t(x)$ étant distribuées uniformément, on a pour tout $k \in i(\mathcal{E}^{-1}(x))$,

$$\mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = p(i^{-1}(k), t-1) \varphi(x - i^{-1}(k)) / s(t)$$

Pour le voir, on peut poser pour tout $I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)$, $X_I = \bigcap_{i \in I} \{\omega : A(i, t-1) = 1\} \cap_{i \notin I} \{\omega : A(i, t-1) = 0\} \cap \{\omega : A(i^{-1}(k), t-1) = 1\}$. La formule des probabilités totales donne que $\mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \sum_{I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1} | X_I) \mathbb{P}(X_I)$. Comme les quantités $\omega_t(x)$ sont distribuées uniformément, on a $\mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1} | X_I) = \varphi(x - i^{-1}(k), t-1) / s(t)$. De plus, $\sum_{I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)} \mathbb{P}(X_I) = p(\sqcup_{I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)} X_I) = p(A(i^{-1}(k), t-1) = 1) = p(i^{-1}(k), t-1)$. Ainsi,

$$p(x, t) = \frac{1}{s(t)} \sum_{y \in \mathcal{E}^{-1}(x)} p(y, t-1) \varphi(x - y, t-1) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} p(s - (\delta, 1)) \varphi_{\delta, t-1}^*$$

On a en plus montré que $\mathbb{E}(A(s)) = \min\{1, p(s)\}$. □

On définit la série génératrice $\tilde{p}(\Theta, t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x, t) e^{ix \cdot \Theta}$ et posons $\mathcal{L}(t, \Theta) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} e^{i\delta \cdot \Theta} \varphi_{\delta, t-1}^*$. Nous obtenons

$$\tilde{p}(\Theta, t) = \tilde{p}(\Theta, t-1) \mathcal{L}(t, \Theta)$$

Lemme 1.2. *Si l'effondrement initial a lieu en $(0, 0)$ alors*

$$\forall s \in S, p(s) = \sum_{\Delta : (E)} \Psi(\Delta)$$

où $\Delta = (\delta_i) : (E)$ est la condition $s(\Delta) = \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x$ et $\Psi(\Delta) = \prod_{i=0}^{t-1} \varphi_{\delta_i, i}^*$.

Démonstration. Par hypothèse, l'effondrement initial a lieu en $(0, 0)$ ainsi $\tilde{p}(\Theta, 0) = 1$. D'après le résultat qui précède,

$$\tilde{p}(\Theta, t) = \prod_{i=1}^t \mathcal{L}(i, \theta) = \sum_{\Delta \in \mathcal{E}^t} e^{i\Theta \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i} \Psi(\Delta)$$

et en appliquant la transformée de Fourier inverse,

$$p(s) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Theta \in [0, 2\pi]^d} e^{-i\Theta \cdot x} \tilde{p}(\Theta, t) d\Theta = \sum_{\Delta \in \mathcal{E}^t} \mathbf{1}_{(E)}(\Delta) \Psi(\Delta)$$

□

Dans le cas particulier où la quantité $\varphi^* = C$ est constante (par exemple $C = 1/c$), le lemme précédent dit que $p(s) = C^t \text{Card}\{(\delta_i) \in \mathcal{E}^t : \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x\}$.

Lemme 1.3. *Soit $X \subset \mathbb{Z}^d$, on a $\tilde{p}(\Theta, t | X) = \tilde{p}(\Theta, t) \sum_{x \in X} e^{i\Theta \cdot x}$ i.e $p(s | X) = \sum_{x' \in X} p(x - x', t)$.*

Démonstration. Le résultat du lemme 1.1 étant valable pour $p(s|X)$, il suffit de poser que les sites $x \in X$ s'effondrent initialement, i.e $p(x, 0) = \mathbb{1}_X(x)$ et alors

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\Theta, t|X) &= \tilde{p}(\Theta, t|\{0\})\tilde{p}(\Theta, 0|X) \\ &= \tilde{p}(\Theta, t) \sum_{x \in X} e^{i\Theta \cdot x}\end{aligned}$$

□

Lemme 1.4. *En supposant que $p \leq 1$ (par exemple la quantité de grains totales $s(t)$ qui peuvent être communiqués par chaque sommet de la ligne $t - 1$ est croissante en t), la loi conjointe est à un instant t ,*

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{N}^*, x \neq y, \\ p(s_x \cap s_y) &= \sum_{(\delta_1, \delta_2) \in \mathcal{E}^2} p(s_x - (\delta_1, 1) \cap s_y - (\delta_2, 1)) \varphi_{\delta_1, t-1}^* \varphi_{\delta_2, t-1}^*\end{aligned}\quad (1)$$

Et initialement, $p((x, 0) \cap (y, 0)) = A(x, 0)A(y, 0)$.

Démonstration. Comme $p \leq 1$, on sait que X et A coïncident en loin. La démonstration est semblable à celle du premier lemme et on obtient pour un effondrement initial en $(0, 0)$, $\tilde{p}(\Theta_1, \Theta_2, t) = \sum_{(\Delta_1, \Delta_2) \in \mathcal{E}^t \times \mathcal{E}^t} e^{i(\Theta_1 \cdot s(\Delta_1) + \Theta_2 \cdot s(\Delta_2))} \Psi(\Delta_1) \Psi(\Delta_2)$ où l'on note $s(\Delta) = \sum_{\delta \in \Delta} \delta$ et cela se généralise facilement. □

Lemme 1.5. *Le processus respecte l'équation de Chapman-Kolmogorov,*

$$\forall t_2 \leq t, p(s|s') = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p(s|(y, t_2))p((y, t_2)|s')$$

Avec la condition initiale, $p((x, t')|(x', t')) = \delta_{x, x'}$.

2 Le cas où $\mathcal{E} = \llbracket -n; n \rrbracket$

Théorème 2.1. *Si $\varphi^* = C$ est constante et $\mathcal{E} = \llbracket -n, n \rrbracket$ alors*

$$\frac{1}{C^t} \sum_{x \in \mathbb{Z}} p(x, t) X^{nt+x} = \left(\sum_{i=0}^{2n} X^i \right)^t$$

Démonstration. On a $C\mathcal{L}(\theta) = \sum_{\delta=-n}^n e^{i\delta\theta} = 1 + 2 \sum_{\delta=1}^n \cos \delta t$. Posons $\theta = -i \ln X$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^t} X^{nt} \tilde{p}(-i \ln X, t) &= \frac{1}{C^t} \sum_{x \in \mathbb{Z}} p(x, t) X^{nt+x} \\ &= \frac{1}{C^t} X^{nt} \mathcal{L}(-i \ln X)^t \\ &= X^{nt} \left(1 + 2 \sum_{\delta=1}^n \cos\{i \ln X^\delta\} \right)^t \\ &= X^{nt} \left(1 + \sum_{\delta=1}^n \frac{1 + X^{2\delta}}{X^\delta} \right)^t \\ &= \left(\frac{X^{2n+1} - 1}{X - 1} \right)^t \end{aligned}$$

Si \mathcal{E}' est à une translation près $\mathcal{E} = \llbracket -n, n \rrbracket$ alors le théorème reste valable au décalage près des exposants. □

Théorème 2.2. Si $\varphi^* = C$ est constante et $\mathcal{E} = \llbracket -n, n \rrbracket$ alors

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{3} n(1+n)t$$

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $C = 1/(2n+1)$. Notons $P(X) = \sum_{i=0}^{2n} X^i$ et $\binom{t}{j}_{2n+1}$ le coefficient en X^j dans $P(X)^t$, par le théorème qui précède, on a

$$(2n+1)^t p(j-nt, t) = \binom{t}{j}_{2n+1}$$

Par symétrie, $p(x, t) = p(-x, t)$ et donc $\mathbb{E}(x : (x, t) \text{ s'effondre}) = \sum_{x=-nt}^{nt} p(x, t)x = 0$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= \text{Var}(x : (x, t) \text{ s'effondre}) = \sum_{x=-nt}^{nt} x^2 p(x, t) - \mathbb{E}(x : (x, t) \text{ s'effondre})^2 \\ &= \frac{1}{(2n+1)^t} \sum_{j=0}^{2nt} (j-nt)^2 \binom{t}{j}_{2n+1} \end{aligned}$$

Aussi, les identités 4.2 et 4.3 de [CCSC00] sont

$$\sum_{j=0}^{2nt} j^2 \binom{t}{j}_{2n+1} = \frac{2nt(2n+1)^t}{12} (2n(3t+1) + 2) \quad \sum_{j=0}^{2nt} j \binom{t}{j}_{2n+1} = \frac{2nt(2n+1)^t}{2}$$

d'où le résultat. Un calcul similaire peut-être mené dans le cas où $\mathcal{E}' = \llbracket -n, n \rrbracket + \mu$, la variance est inchangée. □

Théorème 2.3. Si $\varphi^* = C$ et $\mathcal{E} = \llbracket -n, n \rrbracket + \mu$ alors

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma(t)^2 = \frac{1}{3}tn(n+1))$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $\mathcal{E} = \llbracket -n, n \rrbracket$, le théorème précédent nous dit que si $A(t)$ suit une loi normale de variance $\sigma^2(t)$ alors nécessairement

$$\mu = C_1(t) = 0 \quad C_2(t) = \sigma^2(t) = \frac{n(n+1)t}{3}$$

On va utiliser le théorème centrale-limite sur les (X_i) qui sont i.i.d suivant X une variable aléatoire discrète uniforme sur $\llbracket -n, n \rrbracket$. L'expression donnée de p dans le théorème 2.2, $(2n+1)^t p(j - nt, t) = \binom{t}{j}_{2n+1}$ ainsi que le théorème 2.1 de [CCSC00] montrent que

$$X(t) = \sum_{i=1}^t X_i - nt$$

Le théorème centrale-limite donne le résultat, la variance peut être obtenue en utilisant l'expression de la variance de X et l'équation précédente. \square

Théorème 2.4. Si $\varphi^* = C$ et $\mathcal{E} = \llbracket -n, n \rrbracket$ alors

$$p(x, t) = tC^t \sum_{p=0}^{\lfloor (x+nt)/(2n+1) \rfloor} \frac{(-1)^p \Gamma(t+x+nt-p(2n+1))}{\Gamma(p+1)\Gamma(t-p+1)\Gamma(x+nt-p(2n+1)+1)}$$

Démonstration. Pour l'expression de p , voir 2.8 de [CCSC00] donnant l'expression de $\binom{t}{j}_{2n+1}$. \square

Théorème 2.5. Si $\varphi^* = C$ et $\mathcal{E} = k\llbracket -n, n \rrbracket + \mu$ pour un certain $k \geq 1$ alors

$$p(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2k^2\sigma(t)^2}} \mathbf{1}_{k\mathbb{Z}}(x - \mu t)$$

où $\sigma(t)^2 = 1/3n(n+1)t$.

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité que $\mu = 0$. D'après le lemme 1.2, on a pour tout $s \in \mathcal{S}$,

$$p(s) = C^t \text{Card}\{\{\delta_i\} \in \llbracket -n, n \rrbracket : k \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x\}$$

Si x n'est pas divisible par k , alors $p(s) = 0$. Sinon, $p(s) = C^t \text{Card}\{\{\delta_i\} \in \llbracket -n, n \rrbracket : \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x/k\}$. D'après le théorème 2.3, on a le résultat. \square

3 Flux carré moyen pour \mathcal{E} quelconque

Le flux carré moyen Φ est défini par

$$\forall t, \Phi(t) = \mathbb{E} \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} A(s_x) \right)^2$$

Théorème 3.1. *En dimension $d = 1$, supposons que*

1. φ^* ne dépend pas de t
2. $c_1 = \sum_{\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{E}^2} \varphi_1^* \varphi_2^* = 1$

alors

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

où γ est défini dans la démonstration.

Démonstration. Comme φ^* ne dépend pas de t , on a que X et A coïncident en loi puis

$$\Phi(t) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} p(s_x \cap s_y)$$

L'équation linéaire (1) que respecte la loi conjointe sur une même ligne t a pour solution, pour une certaine fonction f ,

$$p(s_x \cap s_y) = \sum_{Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z) p(s_y|Z)$$

Définissons $F(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(s_x)$. L'hypothèse d'indépendance de φ par rapport à t implique qu'il y a conservation du nombre moyen de grains qui se déplacent à chaque instant, donc de $\mathbb{E} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} A(s_x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x)$. On pose, sans perte de généralité par linéarité, $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x) = 1$.

Nous obtenons en utilisant ce qui précède,

$$\Phi(t) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} \sum_{Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z) p(s_y|Z) = \sum_{t'=0}^t F(t')$$

Posons $K(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x)^2$, $\tilde{F}(z) = \sum_{t \in \mathbb{N}} F(t) z^t$ et \tilde{K} les séries génératrices associées. L'hypothèse d'indépendance de φ par rapport au temps implique $p(s|s') = p(s - s')$ puis

$$1 = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(s_x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d, Z \in \mathcal{S}} f(Z) p(s_x|Z)^2 = \sum_{t'=0}^t F(t') K(t - t')$$

Sur les fonctions génératrices,

$$\tilde{K}(z) \tilde{F}(z) = \frac{1}{1 - z} \tag{2}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $K(t)$. Si la distribution admet une symétrie par rapport à 0_d , c'est-à-dire $\mathcal{E} = -\mathcal{E}$ et $\varphi(-\delta) = \varphi(\delta)$ alors l'équation de Chapman-Kolmogorov donne $p(0, 2t) = K(t)$.

Plus généralement,

$$|\mathcal{L}(\Theta)|^{2t} \tilde{p}(\Theta, 0) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d} e^{i\Theta \cdot (x-y)} p(s_x) p(s_y)$$

d'où,

$$K(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} p(s_x)^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} |\mathcal{L}(\Theta)|^{2t} \tilde{p}(\Theta, 0) d\Theta$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{K}(z) &= \sum_{t=0}^{+\infty} K(t) z^t \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} \tilde{p}(\Theta, 0) d\Theta \sum_{t=0}^{+\infty} (z |\mathcal{L}(\Theta)|^2)^t \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0, 2\pi]^d} \frac{d\Theta}{1 - z |\mathcal{L}(\Theta)|^2} \tilde{p}(\Theta, 0) \end{aligned}$$

Supposons que $d = 1$, posons $c_2 = \sum_{\delta_1 < \delta_2} (\delta_1 - \delta_2)^2 \varphi_{\delta_1}^* \varphi_{\delta_2}^*$ alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\theta)|^2 &= \sum_{(\delta_1, \delta_2) \in \mathcal{E}^2} \varphi_{\delta_1}^* \varphi_{\delta_2}^* e^{i\theta(\delta_1 - \delta_2)} \\ &= 2 \sum_{\delta_1 < \delta_2} \varphi_{\delta_1}^* \varphi_{\delta_2}^* \cos(\theta(\delta_2 - \delta_1)) + \sum_{\delta \in \mathcal{E}} (\varphi_{\delta}^*)^2 \\ &= 1 - c_2 \theta^2 + o(\theta^4) \end{aligned}$$

Où la dernière ligne est obtenue en effectuant un développement limité de cos.

Il s'agit d'obtenir un équivalent de \tilde{K} lorsque $z \rightarrow 1^-$. Sans perte de généralité, prenons $\tilde{p}(\Theta, 0) = 1$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, pour z au voisinage de 1,

$$\tilde{K}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 - z |\mathcal{L}(\theta)|^2} \sim \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{d\theta}{1 - z |\mathcal{L}(\theta)|^2} \sim \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{d\theta}{1 - z(1 - c_2 \theta^2)}$$

La première égalité est justifiée par $|\mathcal{L}(\theta)|^2 = |\mathcal{L}(2\pi - \theta)|^2$. La première équivalence est justifiée car les deux seuls pôles de la fonction qu'on intègre quand $z \mapsto 1^-$ sont $\{0, 2\pi\}$. De plus,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{d\theta}{1 - z(1 - c_2 \theta^2)} = \frac{1}{\pi} \frac{\arctan \varepsilon \sqrt{\frac{c_2 z}{1-z}}}{\sqrt{c_2 z(1-z)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{c_2}} \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{2\gamma}{\sqrt{1-z}}$$

Ainsi,

$$\Phi(t) = \sum_{t'=0}^t \left(\frac{1}{(1-z)\tilde{K}(z)} \right)_{t'} \sim \frac{1}{2\gamma} \sum_{t'=0}^t \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}} \right)_{t'}$$

En utilisant les deux identités suivantes

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{t'=0}^{+\infty} z^{t'} \binom{-1/2}{t'} (-1)^{t'} \quad \sum_{t'=0}^t \binom{-1/2}{t'} (-1)^{t'} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(1+t)\Gamma(1/2(3+2t))}{\Gamma(2+t)} \sim 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

On obtient

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Si $\mathcal{E} = \llbracket -n, n \rrbracket$ et $\varphi^* = 1/c = 1/(2n+1)$, on a $c_1 = 1$ et $c_2 = 1/3n(n+1)$ puis

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n(1+n)}}$$

et pour t grand,

$$\Phi(t) \sim 4\sqrt{\frac{tn(n+1)}{3\pi}}$$

Dans le cas du graphe initialement traité par Dhar dans [DD16],

$$\mathcal{E} = \{-1, 0, 1\}, \varphi^* = 1/3, \Phi(t) \sim \sqrt{\frac{32t}{3\pi}}$$

De plus, par rapport au théorème 1.7, on remarque que $\sigma(t) = \sigma(x : (x, t) \text{ s'effondre})$ et $\Phi(t)$ sont proportionnels pour t grand et le facteur de proportionnalité est $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ i.e

$$\Phi(t) \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma(t)$$

□

Dans les conditions du théorème précédent,

Lemme 3.2.

$$F(t) \sim \frac{1}{2\gamma\sqrt{t\pi}}$$

Démonstration. En reprenant la démonstration du théorème précédent, on obtient

$$F(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x, t) \sim \frac{1}{2\gamma} \binom{-1/2}{t} (-1)^t$$

D'où le résultat.

□

4 Généralisations du modèle

4.1 Généralisation à une mesure quelconque

Remarquons que $p(\cdot, t-1)$ est défini par un produit de convolution de $p(\cdot, t-1)$ avec une certaine mesure qui dépend de t . Donnons-nous une collection $(\mu_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ de mesures finies sur les boréliens de \mathbb{R} de la forme

$$d\mu_t(y) = g_t(y)dy$$

où g_t est une fonction quelconque intégrable. On définit \mathfrak{s}_t par

$$\mathfrak{s}_t(f)(x) = \int f(x-y)d\mu_t(y) \quad (1)$$

où f est une fonction μ_t -intégrale quelconque. On définit $\mathfrak{s}_0(f) = f$. On définit par récurrence,

$$\begin{aligned} \Phi(f)(t)(x) &= \mathfrak{s}_t(\Phi(f)(t-1))(x) \\ &= \int \Phi(f)(t-1)(x-y_t)d\mu_t(y_t) \\ &= \int \dots \left(\int f(x - \sum_{j=1}^t y_j d\mu_1(y_1) \right) \dots d\mu_t(y_t) \end{aligned}$$

Lemme 4.1. *On note $p(x, t) = p(t)(x)$ et $A(0)$ est le profil initial de l'avalanche en $t = 0$, on a alors $p(t)(x) = \Phi(A(0))(t)(x)$ pour $t \geq 1$, en posant pour $t \geq 1$*

$$g_t(y) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} \varphi_{t-1, \delta}^* \delta'(y - \delta)$$

où δ' est compris comme la limite de la suite des dérivées d'une famille naissante de Dirac.

Démonstration. Posons g_t comme dans l'énoncé. Montrons que $p(t) = \mathfrak{s}_t(p(t-1))$ et par récurrence, on aura le résultat. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_t(p(t-1))(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}} d\mu_t(y) p(t-1)(x-y) \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} g_t(y) p(t-1)(x-y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} \left[\sum_{d \in \mathcal{E}} \delta'(y-d) \varphi_{t-1, d}^* \right] p(t-1)(x-y) dy \\ &= \sum_{d \in \mathcal{E}} \varphi_{t-1, d}^* \int_{y \in \mathbb{R}} \delta'(y-d) p(t-1)(x-y) dy \\ &= \sum_{d \in \mathcal{E}} \varphi_{t-1, d}^* p(t-1)(x-d) \\ &= p(t)(x) \end{aligned}$$

La somme est finie, l'interversion somme-intégrable est donc justifiée, la dernière égalité est donnée par le théorème 1.1. L'initialisation est bien vérifiée car $p(0) = A(0)$. □

Lemme 4.2. *Etant donné $p(0)$ un profil initial, et (μ_t) une collection de mesures finies. On définit $p(t) = \Phi(p(0))(t)$ et on note $\mathcal{L}(\theta, t) = \int_{y \in \mathbb{R}} e^{iy\theta} g_t(y) dy$ et on définit $\tilde{p}(\theta, t) = \int_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} p(t)(x) dx$ alors*

$$\tilde{p}(\theta, t) = \mathcal{L}(\theta, t) \tilde{p}(\theta, t-1)$$

C'est le pendant des lemmes 1.2 et 1.3.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{N}^*$, on a formellement

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\theta, t) &= \int_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} \int_{y \in \mathbb{R}} g_t(y) p(t-1)(x-y) dy dx \\ &= \tilde{p}(\theta, t-1) \int_{y \in \mathbb{R}} e^{iy\theta} g_t(y) dy \\ &= \tilde{p}(\theta, 0) \int_{y \in \mathbb{R}^t} e^{i\theta(y_1 + \dots + y_t)} \times \left(\underbrace{\prod_{j=1}^t g_j(y_j)}_{=\mathcal{P}(y) \text{ poids du chemin } (y_1, \dots, y_t)} \right) dy \end{aligned}$$

Où les interversions des intégrales sont justifiées par le théorème de Fubini-Lebesgue (μ_t est une mesure finie). Nous sommes à deux doigts d'arriver à une intégrale de chemin... Ainsi,

$$p(t)(x) = \frac{1}{(2\pi)^t} \int_{y \in \mathbb{R}^t} e^{i\theta(y \cdot \mathbf{1} - x)} \tilde{p}(\theta, 0) \mathcal{P}(y) dy$$

On pose $\tilde{p}(\theta, 0) = 1$, alors

$$p(t)(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^t} \mathbf{1}_{y \cdot \mathbf{1} = x} \mathcal{P}(y) dy$$

Ainsi, si $\tilde{p}(\theta, 0) = \int p(x, 0) e^{ix\theta} dx$ alors

$$p(t)(x) = \int_{z \in \mathbb{R}} p(0)(z) \int_{y \in \mathbb{R}^t} \mathbf{1}_{y \cdot \mathbf{1} = x - z} \mathcal{P}(y) dy dz$$

Dans le cas précédent, on a $\tilde{p}(\theta, 0) = \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{ix\theta} p(x, 0)$, ainsi pour passer d'une transforation de Fourier discrète à une transformation de Fourier continue, on remplace $p(0)(x)$ dans $\tilde{p}(\theta, 0) = \int p(0)(x) e^{ix\theta} dx$ par $p(x, 0) g_0(x)$ avec $g_0(x) = \sum_d \delta'(x-d) p(d, 0)$. Soit (y_1, \dots, y_t) un chemin, on a dans ce cas

$$\mathcal{P}(y) = \prod_{j=1}^t g_j(y_j) = \mathbf{1}_{\mathcal{E}^t}(y) \prod_{j=1}^t \varphi_{j-1, y_j}^*$$

Et l'on retrouve le résultat les lemmes 1.2 et 1.3. □

4.2 Passage en temps continu

On exploite le lemme 4.2 pour nous ramener à une intégrale de chemin. Notons $g_t(y) = g(t, y)$. Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un chemin. On définit alors le poids du chemin y par

$$\mathcal{P}(y) = \exp\left\{\int_0^t \ln g(t, \dot{y}(t)) dt\right\}$$

alors en utilisant la notation des intégrales de chemin de Feynman,

$$\tilde{p}(\theta, t) = \tilde{p}(\theta, 0) \int e^{i\theta(y(t)-y(0))} \mathcal{P}(y) \mathcal{D}y$$

Puis,

$$p(t)(x) = \int_{z \in \mathbb{R}} p(0)(z) \int_{y(t)-y(0)=x-z} \mathcal{P}(y) \mathcal{D}y dz$$

References

- [CCSC00] Pushpa N. Rathie Camila C. S Caiado. Polynomial coefficients and distribution of the sum of discrete uniform variables. 2000.
- [DD16] Paul Expert Kim Christensen Nicky Zachariou Deepak Dhar, Gunnar Pruessner. Directed abelian sandpile with multiple downward neighbors. *Phys. Rev. E* 93, 042107, 2016.
- [JAA14] M. Schäfer E.Z. Welty S. O’Neel T.C. Bartholomäus Yan Liu T. I. Riikilä T. Zwinger J. Timonen J. C. Moore J. A. Astrom, D. Vallot. Termini of calving glaciers as self-organized critical systems. *Nature geoscience*, 2014.