FICHE 02-03 : Sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ et réciproque du théorème de Lagrange : MET Algebre E7

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ tel que $[\mathfrak{S}_p : H] = \frac{|\mathfrak{S}_p|}{|H|} \leq p-1$. Montrer que $[\mathfrak{S}_p : H] \in \{1{,}2\}$. On montrera d'abord que les p-cycles sont dans H.

Solution

Soit $\gamma \in \mathfrak{S}_p$, un p-cycle, introduisons $\gamma^i H$ pour $0 \leq i \leq p-1$. Il existe alors $i, j \in [\![0; p-1]\!], i \neq j$ tels que $\gamma^i H \cap \gamma^j H \neq \varnothing$ car sinon

$$|\mathfrak{S}_p| \geq \sum_{k=0}^{p-1} |\gamma^k H| = p|H|$$

Ainsi, $e \neq \gamma^{j-i} \in H$ puis $\langle\gamma\rangle \subset H$. Or les 3-cycles peuvent s'écrire avec des p-cycles, en effet,

$$(i\, j\, k) = (i\, k\, j\, a_{p-3}\, \ldots a_1)(j\, i\, k\, a_1, \ldots\, a_{p-3}).$$

De plus les 3-cycles génèrent $\mathfrak{A}_p$, ainsi $p!/2 \leq |H|$, d'où $[\mathfrak{S}_p : H] \in \{1{,}2\}$.

Remarquons que cela donne un contre-exemple à la réciproque du théorème de Lagrange, pour $p = 5$, il n'existe pas de sous-groupe d'ordre 40 ($120/40 = 3 \leq 5$). ■