FICHE 02-02 : Nombre de dérangements : ALG? K-09-5-2

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit $(A, + , \times)$ un anneau unifère tel que,

$$\forall a,b \in A, \quad ab = \pm ba$$

Montrer que A est commutatif.

Solution

Notons $Z(A)$ le centre de A est $Z^*(A)$ l'anticentre de A. Montrons que $A = Z(A) \cup Z^*(A)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in A \backslash Z(A) \cup Z^*(A)$, c'est-à-dire qu'il existe $x,y \in A$ tels que

$$\begin{cases} ax = xa, \quad ax \neq -xa \\ ay = -ya, \quad ay \neq ya \end{cases}$$

En sommant, $a(x + y) = (x - y)a = \pm a(x - y)$, on trouve alors dans le cas $+$, $ay = -ay = ya$, dans le cas $-$, $ax = -ax$, absurde dans les deux cas.

On vérifie facilement que $Z(A)$ et $Z^*(A)$ sont des groupes, un résultat classique nous dit que l'union de deux groupes est un groupe si et seulement si l'un est inclus dans l'autre. Si $Z^*(A) \subset Z(A)$ alors c'est gagné, si $Z(A) \subset Z^*(A)$ alors $1 \times 1 = -1 \times 1$, d'où,

$$\forall a,b \quad ab = -ba = ba$$

$\blacksquare$