

FICHE 02-04 : Sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_p : divers

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit $p \geq 5$, montrer que les sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_p sont $\{\text{Id}\}, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{S}_p$.

Solution

Soit H un sous-groupe distingué de \mathfrak{S}_p , posons $K = H \cap \mathfrak{A}_n$, alors K est un sous-groupe distingué de \mathfrak{A}_p , or \mathfrak{A}_p est simple, donc K est $\{\text{Id}\}$ ou \mathfrak{A}_n .

Plaçons-nous dans le premier cas, remarquons que $\ker \varepsilon|_H = K = \{\text{Id}\}$, donc ε est injectif et H est isomorphe à un sous-groupe de $\{-1, 1\}$. Si H n'est pas de cardinal 1 alors il est de cardinal 2 et $H = \{\text{Id}, \sigma\}$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_p \setminus \mathfrak{A}_n$. Or σ se décompose en des transpositions, notons en une (ab) , trouvons $g \in \mathfrak{S}_p$ tel que $g\sigma g^{-1} \neq \sigma$, ce qui contredira le caractère distingué de H . On pose $c \notin \{a, b\}$ alors en posant $g = (bc)$ on a $g\sigma g^{-1}(a) = c \neq \sigma(a)$.

Dans le second cas, cela implique que H contient \mathfrak{A}_p et donc $[H : \mathfrak{S}_p] \in \{1, 2\}$, les deux cas correspondent respectivement à $H = \mathfrak{S}_p$ et à $H = \mathfrak{A}_p$.

■