Colles du premier trimestre

YLF

Oct et plus, 2019

1 Semaine I : Algèbre générale

Enoncés

Exercice 1 (Sander).

Démontrer que $(\mathbb{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$ est cyclique.

Solutions

Exercice 1.

On sait que $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, il faut donc montrer l'existence d'un élément d'ordre $(p-1)$. Ecrivons $p-1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, la décomposition en facteurs premiers de $p-1$. Montrons qu'il existe un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ et cela pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Le produit de ces éléments est alors d'ordre $n-1$. Le résultat exposé est en vérité plus général, pour tout corps K, son groupe multiplicatif est cyclique et la démonstration est similaire.

2 Semaine III : Analyse générale

Enoncés

Exercice 1 (Franklin).

Posons

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto x \mapsto f(x+1) - f(x) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in [x; x+p]$ tel que $\Delta^p(f)(y) = f(x)$.
2. Soit $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha \in \mathbb{N}$. Que dire de α ?

3 Semaine IV : Espaces vectoriels normés

Exercice 1 (Houkari).

Posons $E = \{f \in \mathcal{C}^3([0,2],\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = f(2)\}$ et $N : f \mapsto ||f^{(3)}||_{\infty,[0,2]}$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ est-t-elle continue ?

Solutions

Exercice 1

La première question ne pose aucune difficulté. L'application étudiée est linéaire, pour montrer qu'elle est continue, il suffit donc de montrer qu'elle est lipschitzienne en 0. Autrement dit, peut-t-on trouver une constante $K > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \quad \left| \int_0^2 f^{(3)}(t)\mathrm{d}t \right| \leq K||f^{(3)}||_{\infty,[0,2]}$$

Soit $f \in E$, l'intégration de l'inégalité de Taylor Lagrange assure que,

$$\left| \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^2 |f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^2 (t|f'(0)| + \frac{t^2}{2}|f''(0)| + \frac{t^3}{6}|f^{(3)}(0)|)\mathrm{d}t$$

Le théorème de Rolle appliqué deux fois assure l'existence de deux réels dans $[0,2]$, x_0, x_1 tels que $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_1) = 0$. Ainsi,

$$f''(0) = \int_{x_1}^0 f^{(3)}(t)\mathrm{d}t$$

$$f'(0) = \int_{x_0}^0 \int_{x_1}^x f^{(3)}(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

Ainsi, on peut écrire directement que $|f'(0)| \leq 4||f^{(3)}||_\infty$ et $|f''(0)| \leq 2||f^{(3)}||_\infty$. Après majoration, on trouve que $K = (8 + 8/6 \times 2 + 16/24)$ convient.

4 Semaine V : Espaces vectoriels normés

Enoncés

Exercice 1 (Mme Santoni).

Soit $B \in \mathbb{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $(B^k)_k$ est bornée. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^n B^k$ admet une valeur d'adhérence, notée A et que $A^2 = A$.

Solutions

Exercice 1.

Notons M un majoration de la suite $(B^k)_k$ pour une certaine norme (dim. finie), alors (A_n) est majorée par M. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, A_n admet une sous-suite, disons $(A_{\varphi(n)})$, convergeante vers A.

$BA = A$, en effet

$$BA_{\varphi(n)} = A_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)+1}(B^{\varphi(n)+1} - B) \to A$$

Puis $B^k A = A$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ par récurrence immédiate. Enfin, en revenant à l'expression de A_n et en la multipliant par A,

$$A_n A = A$$

Par passage à la limite, le résultat est obtenu.