FICHE 04-05 : Simplicité de $\mathcal{L}(E)$: Troesch 24.15, misc

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Montrer que les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{L}(E)$.

Solution

Premièrement, on vérifie aisément que les deux propositions sont bien des idéaux bilatères de $\mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$. Supposons que $\mathcal{I} \neq \{0\}$, alors il existe $u \in \mathcal{I}$ telle que $u \neq 0$. Introduisons une base de E et la base canonique de $\mathcal{L}(E)$, $(e^*_{i,j})_{(1 \leq i,j \leq n)}$ définie par

$$\forall i,j \in [\![1;n]\!], e^*_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} e_j$$

Pour tout $i,j,k,l,r \in [\![1;n]\!]$, $e^*_{i,j} e^*_{k,l}(e_r) = e^*_{i,j}(\delta_{r,k} e_l) = \delta_{r,k}\delta_{l,i} e_j = \delta_{l,i} e^*_{k,j}(e_r)$

On décompose u sur cette base,

$$u = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e^*_{i,j}$$

Or u étant non nulle, il existe $i_0,j_0 \in [\![1;n]\!]$ tels que $\lambda_{i_0,j_0} \neq 0$. Ainsi,

$$e^*_{j_0,j} u e^*_{i,i_0} = \lambda_{i_0,j_0} e_{i,j}$$

On en déduit que $\mathcal{L}(E) \subset \mathcal{I}$ puis $I = \mathcal{L}(E)$. ■