FICHE 02-12 : Groupes quasi-cycliques de Prüfer : ALG1-01 2.18

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Soit $\mathbb{U}_p$ le groupe engendré par les $e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$ avec p premier. Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{U}_p$.

Solution

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, posons $G_\alpha = \langle e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}} \rangle$. C'est un sous-groupe de $\mathbb{U}_p$ par définition. Tout sous-groupe de G_α par le théorème de Lagrange doit diviser p^α, il est donc de la forme G_β avec $\beta \leq \alpha$. La suite des G_α est donc strictement croissante pour l'inclusion. D'où,

$$\mathbb{U}_p = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} G_\alpha$$

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{U}_p$. Supposons que G n'est pas de la forme G_β, alors il n'est contenu dans aucun G_α d'après la remarque faite sur les sous-groupes de G_α. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ et $x \in G \backslash G_\alpha$. Notons $n \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $x \in G_n$. Alors nécessairement, $\alpha < n$. Ecrivons x sous la forme

$$x = e^{\frac{2ik\pi}{p^n}}$$

Alors par minimalité de n, $x^{p^{n-1}} = e^{\frac{2ik\pi}{p}} \neq 1$, donc $p \nmid k$, donc p et k sont premiers entre-eux puisque p est premier. Cela suffit à ce que x soit un générateur de G_n, or $x \in G$ donc $G_n \subset G$ d'où $G_\alpha \subset G_n \subset G$ puisque $\alpha < n$. Le raisonnement mené est vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ puisque G n'est contenu dans aucun G_α, finalement on en déduit que $G = \mathbb{U}_p$. Ainsi, les sous-groupes de $\mathbb{U}_p$ sont $\mathbb{U}_p$ et les G_α pour $\alpha \in \mathbb{N}$. ■