FICHE 01-03 : Cardinal de $\mathcal{GL}_n(K)$ et $\mathcal{SL}_n(K)$: ALG1-02 1.8

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit K un corps commutatif de cardinal q. Calculer $|\mathcal{GL}_n(K)|$ et $|\mathcal{SL}_n(K)|$.

Solution

Pour construire une matrice de $\mathcal{GL}_n(K)$, il faut construire les n colonnes $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ de telles manières à que cette famille soit libre. Pour la première, il y a q^n-1 possibilités, en ayant retiré le vecteur nul. Pour la seconde, l'espace engendré ne doit pas être contenu dans la droite de celle précédente, de dimension 1, KC_1 de cardinal q, d'où q^n-q possibilités.

Par récurrence, la colonne k doit engendrer un espace vectoriel qui n'est pas inclu dans celui engendré par les $k-1$, autrement dit

$$KC_k \not\subset \bigoplus_{i=1}^{k-1} KC_i$$

L'espace a droite a une dimension q^{k-1}, ainsi il y a q^n-q^{k-1} possibilités, on trouve finalement

$$|\mathcal{GL}_n(K)| = \prod_{k=0}^{n-1} q^n - q^k$$

Or $\det : \mathcal{GL}_n(K) \mapsto K^*$ est surjective, de noyau $\mathcal{SL}_n(K)$, d'après 2.4 d'algèbre 1, on a

$$|\ker\det||\operatorname{im}\det| = |\mathcal{GL}_n(K)|$$

Ainsi,

$$|\mathcal{SL}_n(K)| = \frac{1}{q-1}\prod_{k=0}^{n-1} q^n - q^k$$

■