

# FICHE 01-02 : Inégalité sur une relation d'équivalence : ALG1-02 1.1

Yvann Le Fay

Juin 2019

## Enoncé

Soit  $A$  un ensemble de cardinal  $n$ ,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $A$  avec  $k$  classes,  $m$  le cardinal du graphe de  $\mathcal{R}$ . Montrer que  $n^2 \leq km$

## Solution

On sait que les  $k$  classes d'équivalence forment une partition de  $A$ , notons ces classes,  $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$

$$n = \sum_{j=1}^k |A_j|$$

Aussi,

$$\begin{aligned} m &= |\{(x, y) \in A^2 : x \mathcal{R} y\}| \\ &= \sum_{x \in A} |\bar{x}| \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{x \in A_j} 1 \\ &= \sum_{j=1}^k |A_j| \end{aligned}$$

Puis par Cauchy-Schwarz,

$$n^2 = \left( \sum_{j=1}^k |A_j| \right)^2 \leq k \sum_{j=1}^k |A_j|^2 = km$$