FICHE 02-08 : Les p-groupes: MET-1 1.2.10, ALG1-02 2.11

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Soit G un groupe d'ordre p^m, avec p premier, montrer que $|Z(G)| = p^k$ avec $1 \leq k \leq m$.
Soit G un groupe d'ordre p^2, démontrer que G est abélien.

Solution

D'après l'équation aux classes, il existe une famille finie de sous groupes stricts de G, $(H_i)_{i \in I}$ tels que

$$p^m = |Z(G)| + \sum_{i \in I} \frac{p^m}{|H_i|}$$

D'après le théorème de Lagrange, pour tout $i \in I$, $\frac{p^m}{|H_i|} \in \{1, \ldots, p^m\}$, le cas 1 est à exclure car H_i est un sous groupe strict, par l'équation aux classes, on en déduit que $p \mid |Z(G)|$, d'où le résultat. Dans le cas où $m = 2$, supposons par l'absurde que $|Z(G)| = p$, il existe $x \in G \backslash Z(G)$, alors $N_x = \{g \in G : gx = xg\}$ est un sous-groupe strict de G. Aussi $Z(G) \subset N_x$ donc nécessairement $|N_x| = p$ puis $Z(G) = N_x$, ce qui est absurde.

Une autre démonstration utilise le résultat suivant, soit G un groupe fini,

$$G/Z(G) \text{ cyclique } \Rightarrow G \text{ abélien}$$

Ainsi, si $|Z(G)| = p$ alors $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il est donc cylique d'où G est abélien puis $|Z(G)| = p^2$, absurde. $\blacksquare$