

# FICHE 06-01 : Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$ ALG? K-11-1-6

Yvann Le Fay

Juin 2019

## Enoncé

Démontrer que tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}$  s'écrit comme l'union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints. Pour cela, on démontrera avant l'existence pour tout  $x \in \mathcal{U}$  d'un intervalle ouvert  $I_x$  maximale au sens de l'inclusion tel que  $x \in I_x \subset \mathcal{U}$ .

## Solution

Soit  $x \in \mathcal{U}$ , posons  $\mathcal{U}_x$  l'union de tous les intervalles ouverts contenus dans  $\mathcal{U}$  et qui contiennent  $x$ , c'est un intervalle ouvert non vide car  $x$  est chacun des intervalles qui composent  $\mathcal{U}_x$ .

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \mathcal{U}_x$$

Montrons que  $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$  ou  $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ . Pour cela, montrons que si  $z \in \mathcal{U}_x$  alors  $\mathcal{U}_z = \mathcal{U}_x$ .

Soit  $z \in \mathcal{U}_x$ , il existe un intervalle  $I$  ouvert tel que  $z, x \in I$ , soit  $x' \in \mathcal{U}_x$ , alors il existe un intervalle  $J$  ouvert tel que  $x', x \in J$ , alors  $I \cup J$  est un intervalle ouvert (intervalle car ils contiennent toutes les deux  $x$ ) qui contient  $x'$  et  $z$ , donc  $x' \in \mathcal{U}_z$ . De même, soit  $z' \in \mathcal{U}_z$ , alors il existe un intervalle  $J$  ouvert tel que  $z', z \in J$ , alors  $I \cup J$  est un intervalle ouvert qui contient  $z', x$ , donc  $z' \in \mathcal{U}_x$ . Ainsi s'il existe  $z \in \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y$ , alors  $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_z = \mathcal{U}_y$ .

Enfin, utilisons un argument de séparabilité de  $\mathbb{R}$ , en effet, il existe par la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  un rationnel  $q_x$  aussi proche de  $x$ , d'où  $\mathcal{U}_{q_x} = \mathcal{U}_x$ , l'inclusion suivante est bien évidemment dénombrable,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{q \in \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}} \mathcal{U}_q$$

■