FICHE 02-07 : Un théorème de Sylow : MET-1 1.4.7

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

1. Soit G un groupe abélien fini. Soit p un nombre premier divisant l'ordre de G. Montrer qu'il existe un sous groupe de G d'ordre p.
2. Soit G un groupe fini d'ordre h, non supposé abélien. Démontrer le théorème de Sylow : Si $p^\alpha \mid h$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$, alors il existe un sous groupe de G d'ordre p^α. Indication : on pourra procéder par récurrence sur le cardinal de G.

Solution

1. Soit G un groupe abélien fini, p un nombre premier divisant l'ordre de G. G étant fini, on peut introduire $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de générateurs de G. On note $r_1, \ldots r_n$ les ordres des éléments du générateur. Posons
$$\varphi : \begin{cases} \langle x_1 \rangle \times \ldots \times \langle x_n \rangle \to G \\ (y_1, \ldots, y_n) \qquad\quad \mapsto y_1 \ldots y_n \end{cases}$$
Par définition du système générateur, φ est surjective. D'après un théorème d'isomorphie,
$$G \cong \prod_{1 \leq i \leq n} \langle x_i \rangle / \ker \varphi$$
Ainsi,
$$|G||\ker \varphi| = \prod_{1 \leq i \leq n} r_i$$
On en déduit que $p \mid \prod_{1 \leq i \leq n} r_i$ puis il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $p \mid r_i$. S'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_i = pq$ alors x_i^q est d'ordre p puis $\langle x_i^q \rangle$ est un sous groupe de G d'ordre p.
2. Procédons par récurrence sur $h = |G|$, pour $h = 1$ le résultat est vérifié. Supposons vraie la propriété pour les rangs strictement inférieurs à h, on sait qu'il existe une famille finie $(H_i)_{i \in I}$ de sous groupes stricts de G telle que
$$h = |G| = |Z(G)| + \sum_{i \in I} \frac{h}{|H_i|}$$
Deux cas se présentent : il existe $i \in I : p^\alpha \mid |H_i|$, alors par le théorème de Lagrange, il existe un sous groupe H de H_i et donc de G d'ordre p^α.
Dans le cas contraire, pour tout $i \in I$, $p^\alpha \nmid |H_i|$, mais $p^\alpha \mid h$, d'où $p \mid h/|H_i|$. Ainsi $p \mid |Z(G)|$ puis d'après la question précédente, il existe un groupe d'ordre p, noté H de $Z(G)$. Considérons la surjection canonique π de G dans G/H. L'ordre du groupe G/H est h/p, d'où $p^{\alpha-1} \mid |G/H|$ puis par récurrence, il existe un sous groupe H' de G/H d'ordre $p^{\alpha-1}$. Enfin, $\pi^{-1}(H')$ est un sous groupe de G d'ordre p^α.

■