

FICHE?-01 : Somme des diviseurs et indicatrice d'Euler ALG?

K-12-1-14:18

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Calculer $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de $n \in \mathbb{N}$, majorer $\sigma(n)$. Démontrer que $\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Solution

Considérons $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, alors

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sum_{(\beta_j) \in \prod_{j=0}^k \llbracket 0; \alpha_j \rrbracket} \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i} \\ &= \prod_{i=1}^k \sum_{\beta_i \in \llbracket 0; \alpha_i \rrbracket} p_i^{\beta_i} \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}\end{aligned}$$

Il est clair que l'ensemble des diviseurs de n est compris dans $\{\frac{n}{k} : k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$, ainsi,

$$\sigma(n) \leq n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim n \ln n$$

On peut utiliser le caractère multiplicatif de φ ou le théorème des restes chinois, les deux mènent au résultat, on utilise le théorème des restes chinois.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \\ &= \left| \prod_{p|n} \left(\mathbb{Z}/p^{v_p(n)}\mathbb{Z} \right)^* \right| \\ &= \prod_{p|n} \left| \left(\mathbb{Z}/p^{v_p(n)}\mathbb{Z} \right)^* \right| \\ &= \prod_{p|n} \left| p^{v_p(n)} - p^{v_p(n)-1} \right| \\ &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p} \right)\end{aligned}$$