

## FICHE 02-06 : $|G| = |\operatorname{im} f| |\ker f|$ : ALG1-01-2.4

Yvann Le Fay

Juin 2019

### Enoncé

Soit  $G, G'$  deux groupes et  $f$  un morphisme de  $G$  vers  $G'$ . Montrer que  $|G| = |\operatorname{im} f| |\ker f|$ .

### Solution

Introduisons la relation d'équivalence  $\sim$  définie par

$$\forall x, y \in G, \quad x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

On a  $x \sim y \iff f(x^{-1}y) = 1 \iff y \in x \ker f$ . Ainsi les classes d'équivalences sont de la forme  $x \ker f$ , toutes de cardinal  $|\ker f|$ . Aussi,  $G/\sim \cong \operatorname{im} f$  ainsi puisqu'elles forment une partition, on a

$$|G| = |\operatorname{im} f| |\ker f|$$

■