FICHE 02-09 : $p|H| = |G|$: MET-1 1.4.8

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Soit G un groupe fini et H un sous groupe tel que $p|H| = |G|$ où p est le plus petit diviseur premier de $|G|$, montrer que H est distingué dans G.

Solution

Posons la relation d'équivalence $\sim$,

$$\forall x, y \in G, \quad x \sim y \Longleftrightarrow x^{-1}y \in H$$

Les classes d'équivalences sont les classes à gauche, posons $X = G/\sim$, alors $|X| = p$ pour les mêmes raisons que dans la démonstration du théorème de Lagrange, et

$$\sigma_g : \begin{cases} X \to X \\ x \mapsto gx \end{cases} \qquad \varphi : \begin{cases} G \to \mathfrak{S}_X \\ g \mapsto \sigma_g \end{cases}$$

On peut vérifier que σ_g a pour réciproque $\sigma_{g^{-1}}$ et que c'est donc un élément de $\mathfrak{S}_X$. Par le premier théorème d'isomorphie, on a

$$\operatorname{im}\varphi \cong G/\ker\varphi < \mathfrak{S}_X$$

Puis le théorème de Lagrange et la condition sur p donnent $\frac{|G|}{|\ker\varphi|} \mid p!$ puis $\frac{|G|}{|\ker\varphi|} \mid p$, donc

$$|\ker\varphi| \geq |G|/p = |H|$$

De plus, on obtient que

$$\ker\varphi = \{g \in G : \forall x \in G xgx^{-1} \in H\} \subset H$$

Ce qui permet d'affirmer que $\ker\varphi = H$ et H est distingué dans G. ∎