FICHE 05-01 : Somme des diviseurs et indicatrice d'Euler ALG? K-12-1-14:18

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Calculer $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de $n \in \mathbb{N}$, majorer $\sigma(n)$. Démontrer que $\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Solution

Considérons $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, alors

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= \sum_{(\beta_j) \in \prod_{j=0}^{k} [\![0;\alpha_j]\!]} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \sum_{\beta_i \in [\![0;\alpha_i]\!]} p_i^{\beta_i} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}
\end{aligned}$$

Il est clair que l'ensemble des diviseurs de n est compris dans $\{\frac{n}{k} : k \in [\![1;n]\!]\}$, ainsi,

$$\sigma(n) \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim n \ln n$$

On peut utiliser le caractère multiplicatif de φ ou le théorème des restes chinois, les deux mènent au résultat, on utilise le théorème des restes chinois.

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| \\
&= \left| \prod_{p|n} \left(\mathbb{Z}/p^{v_p(n)}\mathbb{Z}\right)^* \right| \\
&= \prod_{p|n} \left| \left(\mathbb{Z}/p^{v_p(n)}\mathbb{Z}\right)^* \right| \\
&= \prod_{p|n} p^{v_p(n)} - p^{v_p(n)-1} \\
&= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

On peut justifier que pour toute puissance première, p^a, on a $|\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}| = p^a - p^{a-1}$ par un argument de dénombrement. Les éléments qui ne sont pas inversibles dans $\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}$ sont ceux qui sont divisibles par p et qui sont compris entre 1 et p^a, autrement dit, l'ensemble des non inversibles est $\{kp : k \in [\![1;p^{a-1}]\!]\}$, un passage au complémentaire fournit le résultat. ■