FICHE 04-07 : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ intersecte $\mathcal{GL}_n(K)$: MET ?

Yvann Le Fay

Août 2019

Enoncé

Soit $n \geq 2$, montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ intersecte $\mathcal{GL}_n(K)$.

Solution

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$. L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)^* \\ A \mapsto (X \mapsto \operatorname{Tr} AX) \end{cases}$$

est un isomorphisme, en effet, les dimensions des deux espaces étant égales, il suffit de prouver l'injectivité de φ.

Soit $A \in \ker \varphi$, alors pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$, $\operatorname{Tr} AE_{i,j} = a_{i,j} = 0$, donc $A = 0$.

Ce résultat prouvé, on peut maintenant affirmer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que

$$H = \ker\{X \mapsto \operatorname{Tr} AX\}$$

Notons r le rang de A, alors il existe $P, Q \in \mathcal{GL}_n(K)$ telles que $A = PJ_rQ$.

Aussi, $\operatorname{Tr} AX = \operatorname{Tr} PJ_rQX = \operatorname{Tr} J_rQXP$.

Il suffit donc de trouver $G \in \mathcal{GL}_n(K)$ telle que $\operatorname{Tr} J_rG = 0$, car alors

$$X = Q^{-1}GP^{-1} \in H \cap \mathcal{GL}_n(K)$$

conviendra.

Posons,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Celle-ci convient.

■