FICHE 08-01 : Une inégalité de Tchebychev : exercice 404 d'Alix

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Soient f, g deux fonctions continues de même monotonie et $a \leq b$, montrer que

$$\int_a^b f \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg$$

Solution

L'idée est d'utiliser les sommes de Riemann, l'inégalité est en effet impliquée par

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} f_k \sum_{k=0}^{n-1} g_k \leq \frac{(b-a)^2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_k \tag{1}$$

où pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $f_k = f(a + k\frac{b-a}{n})$, similairement pour g_k. Afin de la montrer, on remarque que l'hypothèse sur la monotonie implique que pour tout $k,j \in [\![0;n-1]\!]$

$$(f_k - f_j)(g_k - g_j) \geq 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{n} \sum_{k,j} (f_k - f_j)(g_k - g_j) = \frac{b-a}{n} \left(2n \sum_k f_k g_k - 2 \sum_{k,j} f_k g_j\right) \geq 0 \\
\iff & (b-a) \sum_k f_k g_k \geq \frac{b-a}{n} \sum_{k,j} f_k g_j \\
\iff & (1)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$