FICHE 01-01 : Nombre de dérangements : ALG1-02 1.2

Yvann Le Fay

Juin 2019

1 Première démonstration

On note D_k le nombre de dérangements à k-éléments. Soit $p \in [\![0;n]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \underbrace{\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}}_{=\binom{n}{p}} = \begin{cases} 1 \text{ si } p=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a la partition suivante

$$\mathfrak{S}_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : |\mathrm{supp}(\sigma)| = k\}$$

D'où (le k devient $n-k$ par la symétrie du coefficient binomial)

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

On calcule

$$\begin{aligned} n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{n-k}\binom{n-k}{p}D_p \\ &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p}D_p = D_n \end{aligned}$$

$\blacksquare$

2 Seconde démonstration, préférée

Posons pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, l'ensemble

$$U_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = i\}$$

Alors

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right| \\ &= n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left|\bigcap_{j=1}^{k} U_{i_j}\right| \\ &= n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(n-k)!\binom{n}{k} \\ &= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

$\blacksquare$