

FICHE 04-04: CNS sur $uv = 0$ et $u + v \in \mathcal{GL}_n(E)$: ALG1-01 6.13

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E un K -ev de dimension finie, n . Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathcal{GL}_n(E)$ telle que $u + v \in \mathcal{GL}_n(E)$ et $uv = 0$.

Solution

Nécessairement, $\text{im } v \subset \ker u$, d'où $\text{rg } v \leq n - \text{rg } u$. De plus, $\text{rg}(u + v) = n \leq \text{rg } u + \text{rg } v$. On en déduit que $\text{rg } u + \text{rg } v = n$. Par l'inclusion et l'égalité des dimensions, on obtient que $\text{rg } v = \ker u$, aussi, la somme $\text{im } u + \ker u$ est directe (car $\text{rg}(u + v) = \text{rg } u + \text{rg } v$). On en déduit finalement que

$$\ker u \oplus \text{im } u = E$$

Supposons que $E = \ker u \oplus \text{im } u$, introduisons p le projecteur dans la direction de $\ker u$ parallèlement à $\text{im } u$, alors p convient. ■