FICHE 01-07 : Dénombrement du nombre d'involutions : ALG?

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit $\mathfrak{I}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma^2 = \mathrm{Id}_n\}$, calculer $|\mathfrak{I}_n|$. Généraliser à $\mathfrak{I}_n^m = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma^m = \mathrm{Id}_n\}$.

Solution

Soit $\sigma \in \mathfrak{I}_n$, notons $k = |\mathrm{supp}\ \sigma|$, k est clairement pair, de plus, on a nécessairement

$$\sigma = \prod_{i \in \mathrm{supp}\ \sigma} (i,\sigma(i))$$

avec les supports des transpositions disjoints entre-eux. Pour construire σ, il suffit donc de choisir les $k/2$-couples complètement disjoints, sans oublier que les produits vont permuter

$$\frac{1}{(k/2)!} \prod_{j=0}^{k/2-1} \binom{n-2j}{2}$$

On trouve donc au final,

$$|\mathfrak{I}_n| = \sum_{k=0,\, k \in 2\mathbb{N}} \frac{1}{(k/2)!} \prod_{j=0}^{k/2-1} \binom{n-2j}{2}$$

De même, on trouve facilement qu'un élément σ de $\mathfrak{I}_n^m$ s'écrit

$$\sigma = \prod_{i \in \mathrm{supp}\ \sigma} (i,\sigma(i),\sigma^2(i),\ldots,\sigma^{m-1}(i))$$

puis

$$|\mathfrak{I}_n^m| = \sum_{k=0,\, k \in m\mathbb{N}} \frac{1}{(k/m)!} \prod_{j=0}^{k/m-1} \binom{n-mj}{m}$$

Non ! La généralisation précédente est totalement fausse, et pour cause, on peut essayer pour $m = n$, on devrait trouver $|\mathfrak{I}_n^n| = n!$, mais on trouve 2 à la place. La première expression qu'on donne pour les involutions ne se généralise pas aussi facilement, il semble qu'aucune formule explicite pour $|\mathfrak{I}_n^m|$ n'ait été trouvée. ■