# FICHE 02-04 : Groupe abélien d'ordre $pq$ : ALG1-01-2.6

Yvann Le Fay

Juin 2019

## Enoncé

Soit $G$ un groupe abélien d'ordre $pq$ avec $p$ et $q$ premiers distincts. Montrer que $G$ est cyclique.

## Solution

Par le Lemme de Cauchy, il existe un élément $x$ d'ordre $p$ et un élément $y$ d'ordre $q$, les deux sont premiers entre-eux et commutent, ainsi $xy$ est d'ordre $pq$. On peut préciser la démonstration que $xy$ est d'ordre $pq$, en effet, $(xy)^p = y^p \neq e$ car $q \nmid p$, de même pour $q$, et $xy \neq e$ car sinon $p = q$, ainsi par le théorème de Lagrange, l'ordre de $xy$ ne peut qu'être $pq$. ■