FICHE 07-02 : Déterminant de Vandermonde lacunaire ALG2-01 1-11

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Soit $0 \leq k \leq n$, calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Solution

Introduisons le déterminant de Vandermonde associé, en rajoutant la colonne manquante et la ligne manquante, on a

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^k & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^k & \dots & x_n^n \\ 1 & X & \dots & X^k & \dots & X^n \end{vmatrix}$$

On a classiquement que,

$$\begin{aligned} V &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \Big(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n \Big) \end{aligned}$$

Avec σ_k, les fonctions élémentaires des x_k. De plus, D_k est le mineur de la colonne $k+1$, ligne, $n+1$, ainsi, $(-1)^{n+k} D_k$ est le coefficient de degré k de V, i.e,

$$D_k = \sigma_{n-k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

$\blacksquare$