

FICHE 02-06 : $|G| = |\operatorname{im} f| |\ker f|$: ALG1-01-2.4

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit G, G' deux groupes et f un morphisme de G vers G' . Montrer que $|G| = |\operatorname{im} f| |\ker f|$.

Solution

Introduisons la relation d'équivalence \sim définie par

$$\forall x, y \in G, \quad x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

On a $x \sim y \iff f(x^{-1}y) = 1 \iff y \in x \ker f$. Ainsi les classes d'équivalences sont de la forme $x \ker f$, toutes de cardinal $|\ker f|$. Aussi, $G/\sim \cong \operatorname{im} f$ ainsi puisqu'elles forment une partition, on a

$$|G| = |\operatorname{im} f| |\ker f|$$

■