FICHE 02-05 : Probabilité que k nombres soient premiers entre eux : ALG1-01 ?

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Calculer la probabilité que k nombres soient premiers entre-eux, en utilisant la fonction de Mobïus.

Solution

Introduisons $c_n^k = \{(a_1, \dots, a_k) \in [\![1;n]\!]^k : a_1 \wedge \dots \wedge a_k = 1\}$. Posons $n = p_1 \dots p_v$, puis pour tout $i \in [\![1;v]\!]$,

$$A_i = \{j \in [\![1;n]\!] : p_i | j\}.$$

Alors $c_n^k = \overline{\bigcup_{i=1}^{v} A_i^k}$, d'où

$$\begin{aligned}
|c_n^k| &= n^k - \sum_{\varnothing \neq I \subset [\![1;v]\!]} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i^k \right| \\
&= n^k + \sum_{\varnothing \neq I \subset [\![1;v]\!]} (-1)^{|I|} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor^k \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \lfloor n/d \rfloor^k
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|c_n^k|/n^k \longrightarrow & \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)/d^k \\
&= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \mu(p^j) p^{-jk} \right\} \\
&= \prod_{p \in \mathbb{P}} 1 - p^{-k} \\
&= \frac{1}{\zeta(s)}
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité du produit Eulérien (voir ?) puis $\mu(p) = -1$, $\mu(1) = 1$, $\mu(p^j) = 0$ pour $j \geq 2$. ■