

FICHE?-01 : Calcul de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ ALG? K-20-1-21

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ en utilisant $1 + X + \dots + X^{n-1}$.

Solution

On a directement par la factorisation du polynome et son évaluation en 1,

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} (e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}) \\ &= (-2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

■