

FICHE 05-03: $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ msc

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Montrer que $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.

Solution

L'égalité provient de la partition suivante

$$\llbracket 1; n \rrbracket = \bigsqcup_{d|n} \{k \in \llbracket 1; d \rrbracket : (k, d) = 1\}.$$

Pour la justifier, considérons les fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$. Celles-ci sont après réduction, de la forme $\frac{a}{d}$ avec $d \mid n$, $a \wedge d = 1$ et $a \in \llbracket 1; d \rrbracket$, d'où la partition. On en déduit l'égalité sur les cardinaux. ■