

# FICHE 02-05 : Groupe abélien d'ordre $pq$ : ALG1-01-2.6

Yvann Le Fay

Juin 2019

## Enoncé

Soit  $G$  un groupe abélien d'ordre  $pq$  avec  $p$  et  $q$  premiers distincts. Montrer que  $G$  est cyclique.

## Solution

Par le Lemme de Cauchy, il existe un élément  $x$  d'ordre  $p$  et un élément  $y$  d'ordre  $q$ , les deux sont premiers entre-eux et commutent, ainsi  $xy$  est d'ordre  $pq$ . On peut préciser la démonstration que  $xy$  est d'ordre  $pq$ , en effet,  $(xy)^p = y^p \neq e$  car  $q \nmid p$ , de même pour  $q$ , et  $xy \neq e$  car sinon  $p = q$ , ainsi par le théorème de Lagrange, l'ordre de  $xy$  ne peut qu'être  $pq$ . ■