FICHE 02-04 : Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_p$: divers

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit $p \geq 5$, montrer que les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_p$ sont $\{\mathrm{Id}\}, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{S}_p$.

Solution

Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_p$, posons $K = H \cap \mathfrak{A}_p$, alors K est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_p$, or $\mathfrak{A}_p$ est simple, donc K est $\{\mathrm{Id}\}$ ou $\mathfrak{A}_n$.

Plaçons-nous dans le premier cas, remarquons que $\ker \varepsilon|_H = K = \{\mathrm{Id}\}$, donc H est isomorphe à un sous-groupe de $\{-1,1\}$ par le premier théorème d'isomorphie. Si H n'est pas de cardinal 1 alors il est de cardinal 2 et $H = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_p \backslash \mathfrak{A}_p$. Or σ se décompose en des transpositions, notons en une $(a\, b)$, trouvons $g \in \mathfrak{S}_p$ tel que $g\sigma g^{-1} \neq \sigma$, ce qui contredira le caractère distingué de H. On pose $c \notin \{a, b\}$ alors en posant $g = (b\, c)$ on a $g\sigma g^{-1}(a) = c \neq \sigma(a)$. On en déduit donc que $H = \{\mathrm{Id}\}$.

Dans le second cas, cela implique que H contient $\mathfrak{A}_p$ et donc $[H : \mathfrak{S}_p] \in \{1; 2\}$, les deux cas correspondent respectivement à $H = \mathfrak{S}_p$ et à $H = \mathfrak{A}_p$.

■