

# FICHE 04-06 : Supplémentaire commun

Yvann Le Fay

Juillet 2019

## Enoncé

1. Soit  $K$  un corps infini,  $E$  un  $K$ -ev. Montrer qu'il n'existe pas  $V_1, \dots, V_n$  des sous-espaces stricts de  $E$  tels que

$$E = V_1 \cup \dots \cup V_n$$

2. Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces de  $E$  de même dimension finie. Montrer qu'il existe  $G$  un sous-espace de  $E$  qui soit supplémentaire de chacun des  $F_i$  pour  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ .

## Solution

S'il existe une telle suite de sous-espace vectoriel alors il en existe une qui soit de taille minimale et telle qu'aucun de ces sous-espaces ne soit inclu dans la réunion des  $n - 1$  autres. Supposons donc par l'absurde l'existence d'une telle famille minimale,  $V_1, \dots, V_n$

Il existe  $x \in V_n \setminus V_1 \cup \dots \cup V_{n-1}$  et  $y \in V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} \setminus V_n$ . Soit  $\lambda \in K$ , alors  $\lambda x + y \in V_n$  ou  $\lambda x + y \in V_1 \cup \dots \cup V_{n-1}$ . Le premier cas est à exclure car sinon  $y \in V_n$ . Ainsi il existe  $i_\lambda \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  tel que  $\lambda x + y \in V_{i_\lambda}$ , considérons l'application qui à  $\lambda \in K$  associe un des  $i_\lambda$ .

$$\begin{cases} K \rightarrow \llbracket 1; n-1 \rrbracket \\ \lambda \mapsto i_\lambda \end{cases}$$

Cette application est injective, en effet, soient  $\lambda, \mu \in K$  tels que  $i_\lambda = i_\mu = j$ , alors  $(\lambda - \mu)x \in V_j$ , d'où  $\lambda = \mu$  car  $x \notin V_j$ . Ainsi, on en déduit que

$$|K| \leq n - 1$$

Absurde car  $K$  est infini.

Notons  $r$  la position commune des  $F_i$ . Posons  $G$  un espace de taille maximale tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, G \cap F_i = \emptyset$$

Supposons par l'absurde que  $\dim G + \dim F_i < \dim E$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $G' = G \oplus Kx$  et

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, G' \cap F_i = \emptyset$$

Ce qui trahit la maximalité de  $G$ , ainsi

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, G \oplus F_i = E$$

■