# FICHE 08-02 : Inégalité de réarrangement : ANAL01-1 1.15

Yvann Le Fay

Juillet 2019

## Enoncé

Soient $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ et $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ des réels. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ une permutation des $(y_1, \ldots, y_n)$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$$

## Solution

Notons pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $T(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}$, $\mathfrak{S}_n$ étant fini, il existe bien au moins une permutation qui maximise la somme. Parmi celles-ci considérons $\sigma$ une avec le plus de points fixes. Supposons par l'absurde que $\sigma \neq \mathrm{Id}$, il existe alors $j \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $\sigma(j) \neq j$ et tel que $\forall i \in [\![1; j-1]\!]$, $\sigma(i) = i$. Autrement dit $j$ est le point le plus petit qui ne soit pas un point fixe. Nécessairement $\sigma(j) > j$ par minimalité de $j$, aussi, il existe $k \in [\![j+1; n]\!]$ tel que $\sigma(k) = j$. On en déduit que

$$x_j \leq x_k \qquad j = \sigma(k) < \sigma(j) \Rightarrow y_j \leq y_{\sigma(j)}$$

Soit encore,

$$(x_k - x_j)(y_{\sigma(j)} - y_j) = x_k y_{\sigma(j)} - x_j y_{\sigma(j)} + x_j y_j - x_k y_j \geq 0$$

Ce qui est équivalent à

$$x_k y_{\sigma(j)} + x_j y_j \geq x_j y_{\sigma(j)} + x_k y_j \tag{1}$$

Posons

$$\tau(i) = \begin{cases} j \text{ si } i = j \\ \sigma(j) \text{ si } i = k \\ \sigma(i) \text{ sinon} \end{cases}$$

Mais l'inégalité (1) est équivalente à $T(\tau) \geq T(\sigma)$. La somme de droite étant maximale, on obtient que $\tau$ réalise aussi le maximum, or $\tau$ admet au moins un point fixe de moi que $\sigma$, ce qui est contradictoire par la minimalité du nombre de points fixes de $\sigma$, donc $\sigma = \mathrm{Id}$.

Remarquons que l'inégalité de Tchebychev de l'exercice précédent se déduit facilement de cette égalité, en effet, on a

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n &\leq x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \\ x_1 y_2 + \ldots + x_n y_1 &\leq x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \\ &\vdots \\ x_1 y_n + \ldots + x_n y_{n-1} &\leq x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \end{aligned}$$

D'où en sommant, $(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \leq n(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)$, puis en divisant par $n^2$, on obtient bien l'inégalité de Tchebychev. ■