

FICHE 01-06 : Dénombrement du nombre de surjections : ALG?

K-08-D

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Dénombrer le nombre de surjections de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; m \rrbracket$.

Solution (par la formule du Crible)

Posons pour tout $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$,

$$A_k = \{f : \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; m \rrbracket : \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket f(i) \neq k\}$$

Alors il est clair que le nombre de surjections est égal à

$$\begin{aligned} \left| \overline{\bigcup_{k=1}^m A_k} \right| &= m^n - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right| \\ &= m^n + \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{n}{k} (m-k)^n \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} (m-k)^n \end{aligned}$$

■