FICHE 04-02 : Générateurs de $\mathcal{O}(E)$ ALG?

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$, montrer que u s'écrit comme un produit de k réflexions avec $k \leq \operatorname{rg} u - \mathrm{Id}_E$.

Solution

Procédons par récurrence sur $\operatorname{rg} u - \mathrm{Id}_E$. Si $u = \mathrm{Id}_E$ alors u s'écrit comme le produit de 0 transposition.

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ telle que $r = \operatorname{rg} u - \mathrm{Id}_E > 0$, supposons le résultat vrai pour $0,1,\ldots r-1$. Il existe alors $e \in E$ tel que $u(e) \neq e$.

Posons $H = (u(e) - e)^{\perp}$, c'est un hyperplan. Soit $s \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$ la réflexion orthogonale par rapport à H.

Montrons que $\operatorname{rg} su - \mathrm{Id}_E < \operatorname{rg} u - \mathrm{Id}_E$, ou encore $\dim \ker u - \mathrm{Id}_E < \dim \ker su - \mathrm{Id}_E$.

Plus précisément $\ker u - \mathrm{Id}_E \subsetneq \ker su - \mathrm{Id}_E$. Si $u(x) = x$ alors $\langle u(x), u(e) - e \rangle = \langle u(x), u(e) \rangle - \langle x, e \rangle = 0$, donc $x \in H$ puis $su(x) = u(x) = x$. De plus, $||u(e)|| = e$ donc $\langle u(e) - e, u(e) + e \rangle = 0$, donc $s(u(e)+e) = u(e)+e$ et $s(u(e) - e) = e - u(e)$, d'où $su(e) = e$, ainsi $e \in \ker su - \mathrm{Id}_E \backslash \ker u - \mathrm{Id}_E$.

L'hypothèse de récurrence s'applique pour su, il existe $s_1, \ldots, s_k \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$ avec $k \leq \operatorname{rg} su - \mathrm{Id}_E < \operatorname{rg} u - \mathrm{Id}$ tels que

$$su = \prod_{j=1}^{k} s_j$$

Soit encore,

$$u = s \prod_{j=1}^{k} s_j$$

Ce qui permet de conclure. ■