

FICHE 02-10 : Groupe dont l'ensemble des sous-groupes est fini: ALG1-01 2.2

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Caractériser les groupes dont l'ensemble des sous-groupes est fini.

Solution

Soit G un groupe dont l'ensemble E des sous-groupes est fini. Soit $g \in G$, alors $\langle g \rangle$ est d'ordre fini car sinon $\langle g \rangle$ est isomorphe à \mathbb{Z} qui admet une infinité de sous-groupes. De plus si E' dénote le sous ensemble de E composé des groupes monogènes de G alors $G = \bigcup_{H \in E'} H$, or E' est fini. G est donc fini en tant qu'union finie de groupes finis. Le résultat réciproque est évident. ■