

FICHE 01-02 : Inégalité sur une relation d'équivalence : ALG1-02 1.1

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit A un ensemble de cardinal n , \mathcal{R} une relation d'équivalence sur A avec k classes, m le cardinal du graphe de \mathcal{R} . Montrer que $n^2 \leq km$

Solution

On sait que les k classes d'équivalence forment une partition de A , notons ces classes, $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$

$$n = \sum_{j=1}^k |A_j|$$

Aussi,

$$\begin{aligned} m &= |\{(x, y) \in A^2 : x \mathcal{R} y\}| \\ &= \sum_{x \in A} |\bar{x}| \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{x \in A_j} 1 \\ &= \sum_{j=1}^k |A_j| \end{aligned}$$

Puis par Cauchy-Schwarz,

$$n^2 = \left(\sum_{j=1}^k |A_j| \right)^2 \leq k \sum_{j=1}^k |A_j|^2 = km$$

■