

Colles du premier trimestre

YLF

Oct et plus, 2019

1 Semaine I : Algèbre générale

Enoncés

Exercice 1 (Sander).

Démontrer que $(\mathbb{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$ est cyclique.

Solutions

Exercice 1.

On sait que $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, il faut donc montrer l'existence d'un élément d'ordre $(p - 1)$. Ecrivons $p - 1 = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, la décomposition en facteurs premiers de $p - 1$. Il faut montrer qu'il existe un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ et cela pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

...

Le produit de ces éléments est alors d'ordre $n - 1$. Le résultat exposé est en vérité plus général, pour tout corps K , son groupe multiplicatif est cyclique et la démonstration est similaire.

2 Semaine III : Analyse générale

Enoncés

Exercice 1 (Franklin).

Posons

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto x \mapsto f(x + 1) - f(x) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in [x; x + p]$ tel que $\Delta^p(f)(y) = f(x)$.
2. Soit $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha \in \mathbb{N}$. Que dire de α ?

3 Semaine IV : Espaces vectoriels normés

Exercice 1 (Houkari).

Posons $E = \{f \in C^3([0, 2], \mathbb{R}) : f(0) = f(1) = f(2)\}$ et $N : f \mapsto \|f^{(3)}\|_{\infty, [0, 2]}$.

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. L'application $f \mapsto \int_0^2 f(t)dt$ est-elle continue ?

Solutions

Exercice 1

La première question ne pose aucune difficulté. L'application étudiée est linéaire, pour montrer qu'elle est continue, il suffit donc de montrer qu'elle est lipschitzienne en 0. Autrement dit, peut-on trouver une constante $K > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \left| \int_0^2 f^{(3)}(t)dt \right| \leq K \|f^{(3)}\|_{\infty, [0, 2]}$$

Soit $f \in E$, l'intégration de l'inégalité de Taylor Lagrange assure que,

$$\left| \int_0^2 f(t)dt \right| \leq \int_0^2 |f(t)|dt \leq \int_0^2 (t|f'(0)| + \frac{t^2}{2}|f''(0)| + \frac{t^3}{6}|f^{(3)}(0)|)dt$$

Le théorème de Rolle appliqué deux fois assure l'existence de deux réels dans $[0, 2]$, x_0, x_1 tels que $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_1) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(0) &= \int_{x_1}^0 f^{(3)}(t)dt \\ f'(0) &= \int_{x_0}^0 \int_{x_1}^x f^{(3)}(t)dt dx \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire directement que $|f'(0)| \leq 4\|f^{(3)}\|_{\infty}$ et $|f''(0)| \leq 2\|f^{(3)}\|_{\infty}$. Après majoration, on trouve que $K = (8 + 8/6 \times 2 + 16/24)$ convient.

4 Semaine V : Espaces vectoriels normés

Enoncés

Exercice 1 (Mme Santoni).

Soit $B \in \mathbb{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $(B^k)_k$ est bornée. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n B^k$ admet une valeur d'adhérence, notée A et que $A^2 = A$.

Solutions

Exercice 1.

Notons M une majoration de la suite $(B^k)_k$ pour une certaine norme (dim. finie), alors (A_n) est majorée par M . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, A_n admet une sous-suite, disons $(A_{\varphi(n)})$, convergente vers A .

$BA = A$, en effet

$$BA_{\varphi(n)} = A_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)+1}(B^{\varphi(n)+1} - A_{\varphi(n)}) \rightarrow A$$

Puis $B^k A = A$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ par récurrence immédiate. Enfin, en revenant à l'expression de A_n et en la multipliant par A ,

$$A_n A = A$$

Par passage à la limite, le résultat est obtenu.

5 Semaine VII : Séries et Algèbre linéaire

Enoncés

Exercice 1 (Antoine Le Calvez).

Nature de $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n}$?

Exercice 2 (Antoine Le Calvez).

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n , trouver une famille libre de projecteurs de E libre de cardinal maximum.

Exercice 3 (Antoine Le Calvez).

Equivalent de $\sum (-1)^{n-1} \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$.

Solutions

Exercice 1.

Une méthode, posons pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x}$ et calculons $\|f'\|_{\infty, [n; n+1]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient que $f'(x) = i \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x^{3/2}} = O(x^{-3/2})$. Ainsi, $\sum \|f'\|_{\infty}$ converge par Riemann. Utilisons donc la comparaison intégrale sur le reste

$$\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{n} \sim \int \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x} dx = 2 \int \frac{e^{iu}}{u} du$$

Aussi, $\frac{d}{du} \frac{e^{iu}}{u} = \frac{e^{iu}}{u}$ et $\sum \frac{e^{iu}}{u}$ converge par le critère d'Abel. Ainsi, la série converge.

Exercice 3.

On obtient facilement $n \ln 2$.

6 Semaine VIII : Algèbre linéaire**Enoncés****Exercice 1 (Sander).**

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour tout $B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\det A + B = \det A + \det B$.

Exercice 2 (Sander).

Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*, \exists ! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \varphi = (X \mapsto \text{Tr}(AX))$$

Puis montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ coupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 (Sander).

Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det A^2 + B^2$ est positif.

Solutions**Exercices 1, 2, 3**

En posant $B = A$, on constate qu'ou bien $n = 1$ ou bien $\det A = 0$. Si $\det A = 0$, alors on peut noter r son rang, et alors $A = (C_1 | \dots | C_r | C_{r+1}^* | \dots | C_n^*)$ où disons pour simplifier sans que cela change quoi que ce soit au problème, que les r premières colonnes sont libres. Complétons-les en une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, disons (C_1, \dots, C_n) , alors posons $B = (0 | \dots | 0 | C_{r+1} | \dots | C_n)$. Alors $\det A + B \neq 0$ et $\det B = 0$ si $r \geq 1$, si $r = 0$ alors $A = 0$ et la propriété est vraie. Finalement, seule $A = 0$ convient.

Exercice classique, on pose l'endomorphisme $\psi : A \mapsto (X \mapsto \text{Tr}(AX))$. On prouve que celle-ci est injective en utilisant les E_{ij} , en effet, $\text{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. Ainsi, ψ est un isomorphisme, ce qui répond au problème. On utilise la caractérisation précédente et on se ramène aux matrices J_r . Par une analyse, on obtient que $B = \text{Diag}(1, \dots, 1, -r+1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{GL}_n(K)$ est telle que $\text{Tr}(J_r B) = 0$.

On voit que $\det A^2 + B^2 = \det A - iB \det A + iB$, l'un est le conjugué de l'autre, c'est donc un nombre positif.

7 Semaine X : Réduction

Enoncés

Exercice 1 (Monier).

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans \mathbb{C} et $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ le sous ensemble de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices qui admettent n -valeurs propres distinctes. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$.

Solutions

Exercice 1

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans \mathbb{C} et $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ le sous ensemble de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices qui admettent n -valeurs propres distinctes. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$.

Solutions

Exercice 1

Montrons $\text{Adh } \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) = \text{Adh } \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors A est trigonalisable, d'où

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = A'$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{1}{k} & \star & \dots & \star \\ & \lambda_2 - \frac{2}{k} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n - \frac{n}{k} \end{pmatrix}$$

Alors $A_k \rightarrow A'$ et APCR, $A_k \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ car les éléments de sa diagonale finissent par tous être distincts, d'où $\text{Adh } \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, on a bien montré que $\text{Adh } \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) = \text{Adh } \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons que $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ est un ouvert, i.e, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ est fermé. Supposons par l'absurde qu'on dispose de $(A_k) \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ tel que $A_k \rightarrow A$ avec $A \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$, i.e, χ_A à racines simples. Pour tout k , on note $\chi_{A_k} = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_{i,k})$, par continuité de χ , $\chi_{A_k} \rightarrow \chi_A$. Nécessairement, les $(\lambda_{i,k})$ vont tendre vers les

n -racines distinctes de χ_A , c'est qu'APCR, les $(\lambda_{i,k})$ vont être distincts deux à deux, et donc qu'à partir de ce même rang, les A_k est diagonalisable. Absurde.

Montrons que $\text{Int } \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$. On a bien $\mathcal{D}_n^+ \subset \text{Int } \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ puisque $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ est un ouvert inclu dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Pour l'autre inclusion, montrons que $\text{Int } \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$, i.e, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) \subset \text{Adh}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}_n(\mathbb{C}))$, i.e $\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) \subset \text{Adh}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}_n(\mathbb{C}))$.

Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$, alors

$$A \sim \text{Diag}\{\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_p, \lambda_1, \dots, \lambda_r\}$$

avec $p \geq 2$. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$A_k = A + E_{1,2} \frac{1}{k}$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k n'est pas diagonalisable car $\dim E_\lambda(A_k) = p-1 < p$ alors que p est la multiplicité de λ dans χ_{A_k} . De plus, $A_k \rightarrow A$. Ainsi, on a prouvé que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) \subset \text{Adh}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}_n(\mathbb{C}))$.

Quelques précisions ont été faites par M. Monier que je n'ai pas précisé ici, les raisonnements peuvent être incomplets par moment.