FICHE 04-03 : Racine carrée de D : ALG1-01 6.34

Yvann Le Fay

Juillet 2019

Enoncé

Montrer qu'il n'existe pas d'opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $T^2 = D$, où D est l'opérateur de dérivation.

Solution d'Algèbre 01

Considérons la restriction, t, de T à $\ker D^2 = \mathbb{C}_1[X]$. Alors $t^4 = 0$, ainsi l'indice de nilpotence d'après la fiche 01 de ce chapitre, de t est majorée par 2, la dimension de l'espace de restriction. Ainsi $t^2 = d = 0$, ce qui est absurde.

Deuxième solution

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \ker u^k$. On obtient aisément que

$$N_0 \subset N_1 \subset \dots$$

De plus, s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$, alors la suite (N_k) est stationnaire à partir de ce rang (à démontrer). Maintenant que cela est dit, appliquons-le à T, on obtient

$$\{0\} \subset \ker T \subset \mathbb{C}_0[X] \subset \ker T^3 \subset \dots$$

Cela laisse deux possibilités, $\ker T = \{0\}$ et $\ker T = \mathbb{C}_0[X]$, dans les deux cas, on obtient que la suite des $(\mathbb{C}_k[X])$ est stationnaire, absurde. ∎