

FICHE 0X-01 : Majoration d'indice de nilpotence : ALG? K-29-1-14

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotente de rang p_0 . Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe $p_x \in \mathbb{N}^*$ telle que $f^{p_x}(x) = 0$

1. Majorer p_0 .
2. Montrer que g est nilpotente.

Solution

1. Il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $j \in \llbracket 0; p_0 - 1 \rrbracket$, $f^j(x_0) \neq 0$, cela par minimalité de p_0 . On montre par récurrence immédiate que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p_0-1}(x_0))$ est une famille libre. On obtient donc $p_0 \leq n$.
2. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . L'indice de nilpotence de g est alors $\max(p_{e_1}, \dots, p_{e_n})$.

■