

FICHE 02-01 : Calcul d'un inverse : ALG1-02 2.2 K-9-1-12

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit G , un groupe, $a, b \in A$, tels que $1 - ab$ soit inversible, calculer $(1 - ba)^{-1}$.

Solution

L'idée est que si a est un élément nilpotent, alors l'inverse de $1 - ab$ s'écrit par Bernoulli,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ab)^k$$

On en déduit que ba est nilpotent puis que l'inverse de $1 - ba$ est

$$\begin{aligned} 1 + ba + (ba)^2 + \dots &= 1 + b(1 + ab + \dots)a \\ &= 1 + b(1 - ab)^{-1}a \end{aligned}$$

En général, on vérifie sans mal que $(1 - ba)(1 + b(1 - ab)^{-1}a) = 1$

■