

# FICHE 05-02 : Majoration de la primorielle ALG? MET 2. SE 1. K-12-2-8

Yvann Le Fay

Juin 2019

## Enoncé

Soit  $k \geq 1$ , montrer que  $\binom{2k+1}{k} < 4^k$  et en déduire que  $P_n = \prod_{p \leq n} p < 4^n$ .

## Solution

On a directement,

$$2 \binom{2k+1}{k} = \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k} < \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} = 2 \times 4^k$$

Montrons par récurrence que  $P_n < 4^n$ . La propriété est initialisée en  $n = 2$ , supposons celle-ci vraie pour tout  $j \leq n - 1$ . On vérifie par Gauss que pour  $k + 2 \leq p \leq 2k + 1$ ,  $p \mid \binom{2k+1}{k}$ , donc  $p \leq 4^k$ . Si  $n$  est pair alors  $P_n = P_{n-1} < 4^{n-1} < 4^n$ . Si  $n = 2k + 1$  alors

$$P_n = \prod_{1 \leq p \leq k+1} p \prod_{k+2 \leq p \leq 2k+1} p < 4^{k+1} \times 4^k = 4^n$$

Ce qui conclut la récurrence. ■