FICHE 03-02 : Théorème d'Alembert Gauss

Yvann Le Fay

Août 2019

Enoncé

Soit P un polynome complexe de degré $d \geq 1$. Montrer que P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Solution

Posons $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $m = \inf\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}\}$. Par l'inégalité triangulaire renversée,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |a_d z^d| - \sum_{i=0}^{d-1} |a_i z^i|$$

On en déduit que $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$. On peut écrire m comme la limite d'une certaine suite $|P((z_i)_{i \in \mathbb{N}})|$ avec (z_i) une suite de complexe. Par contraposée de ce qui précède, il existe $R \geq 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R, |P(z)| > m + 1$. Ainsi la suite (z_i) est à partir d'un certain rang dans le cercle de rayon R de centre l'origine, c'est donc une suite bornée et par le théorème de Bolzano-Weirstrass, on peut en extraire une suite qui converge. Notons α sa limite. Alors par continuité de P, on a $P(\alpha) = m$.

Supposons par l'absurde que $m \neq 0$, on peut alors supposer que $\alpha = 0$ et $m = 1$, quitte à remplacer $P(X)$ par $P(X + \alpha)/P(X)$. On peut donc écrire $P(z) = 1 + a_q z^q + \ldots + a^d z^d$. Posons $a_q = \rho e^{i\theta}$. Posons $z = re^{i(\pi - \theta)/q}$. Alors par l'inégalité triangulaire,

$$P(z) \leq |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^{d} |a_k| r^k$$

Or pour $|r|$ assez petit (par exemple, $|r| \leq \sqrt[q]{1/\rho}$), le premier terme de droite est positif. Aussi, on voisinage de 0, le second terme à droite s'approche de 0. Ainsi, au voisinage de 0 pour r,

$$P(z) - m = P(z) - 1 < -\rho r < 0$$

Cela contredit la définition de m. Ainsi $m = 0$ ■