FICHE 01-07 : Dénombrement du nombre d'involutions : ALG?

Yvann Le Fay

Juin 2019

Enoncé

Soit $\mathfrak{I}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma^2 = \mathrm{Id}_n\}$, calculer $|\mathfrak{I}_n|$. Généraliser à $\mathfrak{I}_n^m = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma^m = \mathrm{Id}_n\}$. Calculer le nombre d'éléments d'ordre p dans $\mathfrak{S}_{2p}$ avec p premier.

Solution

Soit $\sigma \in \mathfrak{I}_n$, notons $k = |\mathrm{supp}\ \sigma|$, k est clairement pair, de plus, on a nécessairement

$$\sigma = \prod_{i \in \mathrm{supp}\ \sigma} (i,\sigma(i))$$

avec les supports des transpositions disjoints entre-eux. Pour construire σ, il suffit donc de choisir les $k/2$-couples complètement disjoints, sans oublier que les produits vont permuter

$$\frac{1}{(k/2)!} \prod_{j=0}^{k/2-1} \binom{n-2j}{2}$$

On trouve donc au final,

$$|\mathfrak{I}_n| = \sum_{k=2,\, k \in 2\mathbb{N}} \frac{1}{(k/2)!} \prod_{j=0}^{k/2-1} \binom{n-2j}{2}$$

De même, on trouve facilement qu'un élément σ de $\mathfrak{I}_n^m$ s'écrit

$$\sigma = \prod_{i \in \mathrm{supp}\ \sigma} (i,\sigma(i),\sigma^2(i),\ldots,\sigma^{m-1}(i))$$

puis

$$|\mathfrak{I}_n^m| = \sum_{k=0,\, k \in m\mathbb{N}} \frac{1}{(k/m)!} \prod_{j=0}^{k/m-1} \binom{n-mj}{m}$$

Non ! La généralisation précédente est totalement fausse, et pour cause, on peut essayer pour $m = n$, on devrait trouver $|\mathfrak{I}_n^n| = n!$, mais on trouve 2 à la place. La première expression qu'on donne pour les involutions ne se généralise pas aussi facilement, il semble qu'aucune formule explicite pour $|\mathfrak{I}_n^m|$ n'ait été trouvée.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p}$, un élément d'ordre p, alors on sait que σ se décompose de manière unique à l'ordre prêt, comme un produit de cycles, dont l'ordre est le produit des plus petits communs multiples. Cela ne laisse que deux possibilités, soit il est de taille p, soit il est le produit de deux cycles de taille p. Pour le premier choix, on a $\binom{2p}{p}(p-1)!$ choix, pour le second, on a $\binom{2p}{p}(p-1)!^2/2$, où la divison par 2 provient du fait que le produit commute. Ainsi,

$$|\{\sigma \in \mathfrak{S}_{2p} : o(\sigma) = p\}| = \binom{2p}{p}(p-1)!(1 + (p-1)!/2)$$

Plus généralement, le nombre d'éléments d'ordre p dans $\mathfrak{S}_{lp}$ est

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{(p-1)!^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \binom{p(l-j)}{p}$$

■