Convergence de racines imbriquées faisant intervenir des nombres premiers

Régus François, Le Fay Yvann

Mai 2018

1 Définition, encadrements et convergence

Soit $\mathcal{P}(n)$, le n-ème nombre premier, on note ici χ_F, la fonction indicatrice de F. On étudie la fonction suivante définie par

$$\begin{aligned}
\forall n, b \in \mathbb{N}^*, b \geq n, \Psi(n,b) &= \mathcal{P}(n)\sqrt{1+\Psi((n+1)\chi_{[\![0;b-1]\!]}(n),b)} \\
&= \sqrt{\mathcal{P}(n)^2(1+\Psi((n+1)\chi_{[\![0;b-1]\!]}(n),b))} \qquad (1)\\
\Psi(0,b) &= 0 \\
&= \Psi(n,0)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité arithmético-géométrique appliquée deux fois successivement à (1)

$$\begin{aligned}
\Psi(n,b) &\leq \frac{\mathcal{P}(n)^2 + 1 + \Psi((n+1)\chi_{[\![0;b-1]\!]}(n)),b)}{2} = \Psi^{\sim}(n,b,0) \\
\Psi^{\sim}(n,b,0) &\leq \frac{1}{2}(\mathcal{P}(n)^2 + 1 + \frac{1}{2}(\mathcal{P}(n+1)^2 + 1 + \Psi((n+2)\chi_{[\![0;b-2]\!]}(n),b))) \\
&= \Psi^{\sim}(n,b,1)
\end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \Psi(n,b) \leq \Psi^{\sim}(n,b,k) &= \frac{\Psi((n+k+1)\chi_{[\![0;b]\!]}(n+k+1),b)}{2^{k+1}} \\
&+ \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\chi_{[\![0;b]\!]}(n+j-1)}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2+1) \leq \Psi^{\sim}(n,b,k+1) \qquad (2)\\
&= \frac{\Psi((n+k+1)\chi_{[\![0;b]\!]}(n+k+1),b)}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2+1), \quad \text{si } n+k \leq b \qquad (3)\\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2+1) = \Psi^{\sim}(n,k), \quad \text{si } n+k \geq b \qquad (4)
\end{aligned}$$

On s'intéresse dès lors à $\Psi^{\sim}(n,k)$, d'après [1]

$$\begin{aligned}
\Psi^{\sim}(n,k) &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2) \qquad (5)\\
&\geq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}((n+j-1)(\ln(n+j-1) + \ln\ln(n+j-1) - 1))^2, \quad n \geq 2 \qquad (6)\\
\Psi^{\sim}(n,k) &\leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}((n+j-1)(\ln(n+j-1) + \ln\ln(n+j-1)))^2, \quad n \geq 6 \qquad (7)
\end{aligned}$$

Par la croissance de toutes les fonctions considérées ici, il suffit de montrer la convergence du terme à droite de (7) pour montrer la convergence de $\Psi^{\sim}(n,k)$, et donc $\Psi^{\sim}(n,b,k)$ et $\Psi(n,b)$. Si $\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(\frac{(A(\ln(A)+\ln\ln(A)))}{((A-1)(\ln(A-1)+\ln\ln(A-1)))})^2 < 1$ alors le terme de droite de (7) converge.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{(A(\ln(A)+\ln\ln(A)))}{((A-1)(\ln(A-1)+\ln\ln(A-1)))}\right)^2\\ =&\frac{1}{2}<1\end{aligned}$$

Finalement $\lim_{b\to+\infty}\Psi(n,b)$ existe (de même pour les autres fonctions considérées).

Il est possible de donner une majoration de (7) facilement calculable, de même pour (6) bien que moins utile. Pour cela, on majore $\ln x$, par la concavité de la courbe,

$$\forall a\in\mathbb{R}_*^+, \ln x \leq \frac{1}{a}(x-a)+\ln a.$$

On obtient alors,

$$((n+j-1)(\ln(n+j-1)+\ln\ln(n+j-1)))^2 \leq \left[\left(2\ln a+\frac{\ln a}{a}-2-\frac{1}{a}\right)(n+j-1)+(n+j-1)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)\right]^2$$

On réécrit (7),

$$\begin{aligned}\Psi^{\sim}(n,k) &\leq 1-\frac{1}{2^{k+1}}+\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{2^j}(L^2(n+j-1)^4+2JL(n+j-1)^3+J^2(n+j-1)^2)\\ &= 1-\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{4}\left(L^2\left(2\Phi[\frac{1}{2},-4,n]-2^{-k}\Phi[\frac{1}{2},-4,n+k+1]\right)+2JL\left(2\Phi[\frac{1}{2},-3,n]-2^{-k}\Phi[\frac{1}{2},-3,n+k+1]\right)\right.\\ &\left.+J^2\left(2\Phi[\frac{1}{2},-2,n]-2^{-k}\Phi[\frac{1}{2},-2,n+k+1]\right)\right)=\Psi^{\star}(n,k,a),\qquad L=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}, J=2\ln a+\frac{\ln a}{a}-2-\frac{1}{a}.\end{aligned}\tag{8}$$

Le a fournissant la majoration la plus proche de $\Psi^{\sim}(n,k)$ est n. Finalement, on utilise des expressions connues de la fonction transcendante de Lerch.

$$\begin{aligned}\Phi(\frac{1}{2},-1,n) &= 2n+2\\ \Phi(\frac{1}{2},-2,n) &= 2n^2+4n+6\\ \Phi(\frac{1}{2},-3,n) &= 2n^3+6n^2+18n+26\\ \Phi(\frac{1}{2},-4,n) &= 2n^4+8n^3+36n^2+104n+150\end{aligned}$$

2 Conjectures

Proposition 1

$$\forall k\in\mathbb{N}, k\geq n-b, \qquad \sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1))^2 \geq \Psi(n,b)$$

Proposition 2

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2, n+k\geq b \qquad \Psi(n,b)\geq 1-\frac{1}{2^{k+1}}+\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{2^j}((n+j-1)(\ln(n+j-1)+\ln\ln(n+j-1)-1))^2$$

3 En particulier $\Psi(1,+\infty)$

Par (7) et (6)

$$\Psi(1,+\infty)=2\sqrt{1+3\sqrt{1+5\sqrt{1+7\sqrt{1+11\sqrt{1+\Psi(6,+\infty)}}}}}=9.4050436124452175781...$$

$$\leq 2\sqrt{1+3\sqrt{1+5\sqrt{1+7\sqrt{1+11\sqrt{2+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j}((5+j)(\ln(5+j)+\ln\ln(5+j)))^2}}}}}$$

$$\approx 9.5115535478645464675$$

$$\Psi^{\sim}(1,+\infty)\geq 2\sqrt{1+3\sqrt{1+5\sqrt{1+7\sqrt{1+11\sqrt{2+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j}((5+j)(-1+\ln(5+j)+\ln\ln(5+j)))^2}}}}}$$

$$\approx 9.2701262054698438784$$

Par (8),

$$\Psi^{\sim}(1,+\infty)\leq 2\sqrt{1+3\sqrt{1+5\sqrt{1+7\sqrt{1+11\sqrt{1+\Psi^{\star}(6,+\infty,6)}}}}}\approx 9.57099$$

References

[1] PIERRE DUSART. *THE k-th PRIME IS GREATER THAN $k(\ln k+\ln\ln k)$ FOR $k\geq 2$.* MATHEMATICS OF COMPUTATION, 1999.