Effondrements selon le modèle des piles abéliennes

Yvann Le Fay

Juillet 2020

Abstract

Il s'agit d'étudier les distributions des avalanches dans le modèle des piles abéliennes. Nous y établissons l'expression de la distribution et l'expression asymptotique du flux carré moyen. Ce papier est une généralisation des travaux de Dhar [DD16].

1 Modèle discret sur $\mathbb{Z}^d$: définitions et résultats préliminaires

Soit un entier $d \geq 1$, $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}^d$ de cardinal fini appelé ensemble des déplacements admissibles, $\varphi : \mathcal{E} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ appelée application de pondération. Considérons le graphe associé

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}, \varphi) = (\mathcal{S} = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}, \{(s, s + (\delta, 1))_{\text{de poids } \varphi(\delta,t)} : \delta \in \mathcal{E}, s \in \mathcal{S}\})$$

Une configuration sur $\mathcal{G}$ est une application $\omega : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}_+^*$, celle-ci est dîtes stable à l'instant t si

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \omega(x) < s(t) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} \varphi(\delta, t)$$

Soit ω une configuration stable initialement, c'est-à-dire en $t = 0$, on pose $\omega_0 = \omega$, $\tau = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} T_x$, où T_x l'opérateur de *toppling* classique du site x, pour tout $t \geq 1$, on définit $\omega_t = \tau \circ w_{t-1}$ et

$$\forall s = (x, t) \in \mathcal{S}, A(s) = \mathbb{1}\{x \text{ s'effondre à l'instant } t\}$$

On a la relation de récurrence suivante,

$$\forall s \in \mathcal{S}^* = \mathcal{S} \backslash \{(x, 0) : x \in \mathbb{Z}^d\}, A(s) = \mathbb{1}\{\omega_{t-1}(x) + \sum_{\delta \in \mathcal{E}} A(s - (\delta, 1))\varphi(\delta, t - 1) \geq s(t)\}$$

Etant donné une configuration ω_0 tirée uniformément parmi l'ensemble des configurations instables qu'en $x = 0 \in \mathbb{Z}^d$, i.e, $\Omega_0 = \{\omega : \forall s \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}, \omega(s) < s(0), w(0) = s(0)\}$, on considère la variable aléatoire A et en particulier $p : s \in \mathcal{S} \mapsto \mathbb{E}(A(s))$, c'est-à-dire, la probabilité que s s'effondre sachant qu'il y a initialement ($t = 0$) effondrement qu'en $0 \in \mathbb{Z}^d$. Posons,

$$\forall \delta \in \mathcal{E}, t \in \mathbb{N}, \varphi^*_{\delta,t} = \frac{\varphi(\delta, t)}{s(t + 1)}$$

De la relation de récurrence précédente, on obtient

Lemme 1.1.

$$\forall s \in \mathcal{S}^*,\ \ p(s) = \sum_{\delta\in\mathcal{E}} p(s-(\delta,1))\varphi^*_{\delta,t-1}$$

Démonstration. Soit $\omega_0 \in \Omega_0$, décomposons l'opérateur de *toppling*, notons

$$\mathcal{A}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d :\ \text{accessibles depuis 0 en un temps } t \text{ avec des déplacements admissibles}\}$$

On a $\tau(\omega_t) = (\prod_{x\in\mathcal{A}_t} T_x)(\omega_t)$. Notons, $\forall x \in \mathbb{Z}^d,\ \ \mathcal{E}^{-1}(x) = \{x-\delta : \delta \in \mathcal{E}\}$.
On se donne une bijection $i : \mathcal{A}_{t-1} \to [\![1; |\mathcal{A}_{t-1}|]\!]$ pour énumérer $\mathcal{A}_{t-1}$ et on définit

$$\forall j \in [\![0; |\mathcal{A}_{t-1}|]\!], \omega_{j,t-1} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{t-1} & j=0 \\ T_{i^{-1}(j)}(\omega_{j-1,t-1}) & j \geq 1 \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$, on décompose l'application de l'opérateur τ sur ω_{t-1} par les états successifs $(\omega_{t-1,j})_j$, ainsi l'ordre d'un produit de topplings est selon l'énumération i, posons $A_0 = \varnothing$ et $A_k = \{\omega : (\prod_{y\in\mathcal{A}_{t-1}\cap\mathcal{E}^{-1}(x):i(y)\leq k}(\omega_{t-1})(x) \geq s(t)\}$, alors

$$\begin{aligned}
\{\omega : \omega_t(x) \geq s(t)\} &= \{\omega : (\prod_{y\in\mathcal{A}_{t-1}} T_y)(\omega_{t-1})(x) \geq s(t)\} \\
&= \{\omega : (\prod_{y\in\mathcal{A}_{t-1}\cap\mathcal{E}^{-1}(x)} T_y)(\omega_{t-1})(x) \geq s(t)\} \\
&= \bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{A}_{t-1}|} A_k\backslash A_{k-1} = \bigsqcup_{k=1,k\in i(\mathcal{E}^{-1}(x))}^{|\mathcal{A}_{t-1}|} A_k\backslash A_{k-1}
\end{aligned}$$

Et $A_k\backslash A_{k-1} = \{\omega : \omega_{t-1}(x) + \sum_{j<k}\varphi(x-i^{-1}(j), t-1) < s(t), \omega_{t-1}(x) + \sum_{j\leq k}\varphi(x-i^{-1}(j), t-1) \geq s(t)\}$. Les quantités $\omega_{t-1}(x)$ étant distribués uniformément, on a pour tout $k \in i(\mathcal{E}^{-1}(x))$,

$$\mathbb{P}(A_k\backslash A_{k-1}) = p(i^{-1}(k))\varphi(x-i^{-1}(k))/s(t)$$

Pour le voir, on peut poser pour tout $I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)$, $X_I = \bigcap_{i\in I}\{\omega : A(i,t-1) = 1\}\bigcap_{i\notin I}\{\omega : A(i,t-1) = 0\} \cap \{\omega : A(i^{-1}(k), t-1) = 1\}$, $\mathbb{P}(A_k\backslash A_{k-1}) = \sum_{I\subset\mathcal{E}^{-1}(x)}\mathbb{P}(A_k\backslash A_{k-1}|X_I)\mathbb{P}(X_I)$ et $\mathbb{P}(A_k\backslash A_{k-1}|X_I) = \varphi(x-i^{-1}(k), t-1)/s(t)$ et $\sum_{I\subset\mathcal{E}^{-1}(x)}\mathbb{P}(X_I) = p(i^{-1}(k), t-1)$.

$$\forall s = (x,t) \in \mathcal{S}, p(s) = \frac{1}{s(t)}\sum_{y\in\mathcal{E}^{-1}(x)} p(y,t-1)\varphi(x-y,t-1) = \sum_{\delta\in\mathcal{E}} p(s-(\delta,1))\varphi^*_{\delta,t-1}$$

Cette démonstration est quelque peu fastidieuse mais l'idée principale est celle qu'on retrouve dans la démonstration que les opérateurs de topplings commutent. □

On définit la série génératrice $\tilde{p}(\Theta,t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} p(x,t)e^{ix.\Theta}$, $\mathcal{L}(t,\Theta) = \sum_{\delta\in\mathcal{E}} e^{i\delta.\Theta}\varphi^*_{\delta,t-1}$, on obtient

$$\tilde{p}(\Theta,t) = \tilde{p}(\Theta,t-1)\mathcal{L}(t,\Theta)$$

Cette relation fait intervenir la quantité $\prod_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{\delta\in\mathcal{E}} e^{i\delta.\Theta}\varphi^*_{\delta,t}$ et l'application de la transformée de Fourier inverse revient à calculer le nombre de chemins de x' à x en un temps $t-t_0$ en utilisant des déplacements admissibles, $\delta\in\mathcal{E}$. La linéarité de l'équation précédente en $\tilde{p}(\Theta,0)$ permet d'affirmer que pour une distribution initiale donnée par $X\subset\mathbb{Z}^d$, on a $\tilde{p}(\Theta,t|X)=\sum_{x\in X}\tilde{p}(\Theta,t)e^{ix.\Theta}$, i.e $p(s|X)=\sum_{x'\in X}p(x-x',t)$.

De plus, la loi conjointe est à un instant t,

$$\forall x,y\in\mathbb{Z}^d, t\in\mathbb{N}^*, x\neq y,$$
$$p(s_x\cap s_y)=\sum_{(\delta_1,\delta_2)\in\mathcal{E}^2} p(s_x-(\delta_1,1)\cap s_y-(\delta_2,1))\varphi^*_{\delta_1,t-1}\varphi^*_{\delta_2,t-1} \tag{1}$$

Et initialement, $p((x,0)\cap(y,0))=A(x,0)A(y,0)$. Le processus respecte l'équation de Chapman-Kolmogorov,

$$\forall t_2\leq t,\ p(s|s')=\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}p(s|(y,t_2))p((y,t_2)|s')$$

Avec la condition initiale, $p((x,t')|(x',t'))=\delta_{x,x'}$.

2 Modèle discret : flux carré moyen et exposant critique

Faisons l'hypothèse que φ ne dépend pas de t. Le flux carré moyen Φ est défini par

$$\forall t, \Phi(t)=\mathbb{E}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}A(s_x)\right)^2=\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d}p(s_x\cap s_y)$$

Théorème 2.1. *Si $d=1$ alors $\Phi(t)\sim\frac{2}{\gamma}\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ où γ est défini dans la démonstration.*

Démonstration. L'équation linéaire que respecte la loi conjointe sur une même ligne t (1) a pour solution

$$p(s_x\cap s_y)=\sum_{Z\in S}f(Z)p(s_x|Z)p(s_y|Z)$$

Définissons $F(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}f(s_x)$. L'hypothèse d'indépendance de φ par rapport à t implique qu'il y a conservation du nombre moyen de grains qui se déplacent à chaque instant, donc de $\mathbb{E}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}A(s_x)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}p(s_x)$. On pose, sans perte de généralité par linéarité, $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}p(s_x)=1$.

Nous obtenons en utilisant ce qui précède,

$$\Phi(t)=\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d}\sum_{Z\in S}f(Z)p(s_x|Z)p(s_y|Z)=\sum_{t'=0}^{t}F(t')$$

Posons $K(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}p(s_x)^2$, $\tilde{F}$ et $\tilde{K}$ les séries génératrices associées. L'hypothèse d'indépendance de φ par rapport au temps implique $p(s|s')=p(s-s')$ puis

$$1=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}p(s_x)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^d,Z\in S}f(Z)p(s_x|Z)^2=\sum_{t'=0}^{t}F(t')K(t-t')$$

Cela se traduit par $\tilde{K}(z)\tilde{F}(z) = \frac{1}{1-z}$. Il ne reste plus qu'à calculer $K(t)$. Si la distribution admet une symétrie par rapport à 0_d, c'est-à-dire $\mathcal{E} = -\mathcal{E}$ et $\varphi(-\delta) = \varphi(\delta)$ alors l'équation de Chapman-Kolmogorov donne $p(0, 2t) = K(t)$. Mais en général, un produit de Cauchy et la formule de Cauchy donne

$$K(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} |\mathcal{L}(\Theta)|^{2t} \tilde{p}(\Theta, 0) \mathrm{d}\Theta$$

Ainsi,

$$\tilde{K}(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \frac{\mathrm{d}\Theta}{1 - z|\mathcal{L}(\Theta)|^2} \tilde{p}(\Theta, 0)$$

On prend $p(0,0) = 1$, un calcul donne

$$|\mathcal{L}(\Theta)|^2 = \sum_{\delta_1,\delta_2 \in \mathcal{E}^2} \varphi^*_{\delta_1} \varphi^*_{\delta_2} \cos(\delta_1 - \delta_2).\Theta$$

Toute la difficulté du problème réside maintenant dans l'évaluation asymptotique pour $z \mapsto 1^-$ de l'intégrale définissant $\tilde{K}$. Si $d \geq 2$, le problème reste ouvert.

Si $d = 1$,

$$L(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - z|\mathcal{L}(\theta)|^2} \sim 2 \int_0^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - z|\mathcal{L}(\theta)|^2}$$

Si $E = \{-n, n\}$, un calcul donne avec $a(z) = (\varphi^*_n - \varphi^*_{-n})^2 z - (\varphi^*_n + \varphi^*_{-n})^2 \sim -4\varphi^*_n \varphi^*_{-n}$

$$L(z) \sim \frac{\operatorname{arccot}((\varphi^*_n + \varphi^*_{-n})\sqrt{(z-1)/a(z)\varepsilon})}{n(\varphi^*_n + \varphi^*_{-n})\sqrt{a(z)(z-1)}} \sim \frac{\pi}{2n\sqrt{1-z}\sqrt{\varphi^*_n \varphi^*_{-n}}(\varphi^*_n + \varphi^*_{-n})}$$

Sinon, posons $c_1 = \sum_{\delta_1,\delta_2} \varphi^*_{\delta_1} \varphi^*_{\delta_2}$, $c_2 = \sum_{\varphi_1 > \varphi_2} \varphi^*_{\delta_1} \varphi^*_{\delta_2} (\delta_1 - \delta_2)^2$, un développement de l'expression précédente donne

$$L(z) \sim \frac{2}{c_2 z} \sqrt{\frac{c_2 z}{c_1(1-z)}} \arctan \sqrt{\frac{c_2 z}{c_1(1-z)}} \sim \frac{\pi}{\sqrt{c_2 c_1 (1-z)}}$$

On note γ la constante intervenant devant $(1-z)^{-1/2}$ dans $\tilde{K}(z)$ $(\times 1/(2\pi))$. Ainsi,

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\gamma} \sum_{t'=0}^{t} \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}} \right)_{t'} \sim \frac{2}{\gamma\sqrt{\pi}} \frac{(1+t)\Gamma(1/2(3+2t))}{\Gamma(2+t)} \sim \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Une étude plus poussée de l'erreur montrerait que l'erreur entre l'équivalence et le flux est bornée. Ainsi, la probabilité qu'une avalanche s'effondre sur plus de t lignes évolue en $t^{-1/2}$. Dans le cas du graphe initialement traité par Dhar dans [DD16], on a $\mathcal{E} = \{-1, 0, 1\}$ (ou $\mathcal{E} = \{(-1,0), (0,0), (1,0)\}$), et on obtient $\Phi(t) \sim \sqrt{\frac{32t}{3\pi}}$. $\square$

3 Modèle continu en temps : équation de Chapman-Kolmogorov et équations aux dérivées partielles

On peut dériver l'équation de Chapman-Kolmogorov pour obtenir des équations aux dérivées partielles sur la fonction génératrice $\tilde{p}(\Theta, t|s) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{ix.\Theta} p((x,t)|s)$, voir [MFW17]. On suppose $t \mapsto \varphi^*_{\delta,t}$ continue sur $\mathbb{R}^+$ et qui représente la quantité normalisée de grains que fournit s à $s+\delta$ entre $t - \mathrm{d}t$ et t, avec donc $\sum_{\delta \in \mathcal{E}} \varphi^*_{\delta,\tau} = \lim_{\mathrm{d}\tau \to 0} S(\tau)/S(\tau - \mathrm{d}\tau) = 1$. La *master equation* du processus est avec $s_0 = (x_0, t_0)$,

$$\frac{\partial p(x,\tau|s_0)}{\partial \tau} = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} \varphi^*_{\delta,\tau}(p(x-\delta,\tau|s_0) - p(x,\tau|s_0))$$

cela pour tout $\tau \geq t_0$ et avec pour condition initiale, $p(x,t'|s_0) = \delta_{x,x_0}$. Cela donne pour $\tilde{p}$,

$$\frac{\partial \tilde{p}(\Theta,\tau)}{\partial \tau} = \tilde{p}(\Theta,\tau) \sum_{\delta \in \mathcal{E}} \varphi^*_{\delta,\tau}(e^{i\delta.\Theta} - 1)$$

avec pour condition initiale, $\tilde{p}(\Theta, t_0|s_0) = e^{ix_0.\Theta}$. Cette équation a pour solution

$$\tilde{p}(\Theta,t|s_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \sum_{\delta \in \mathcal{E}} (e^{i\delta.\Theta} - 1)\varphi^*_{\delta,\tau} \mathrm{d}\tau\right) e^{ix_0.\Theta} = e^{-(t-t_0)} e^{ix_0.\Theta} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \sum_{\delta \in \mathcal{E}} e^{i\delta.\Theta} \varphi^*_{\delta,\tau} \mathrm{d}\tau\right)$$

Effectuons un développement des exponentielles dans $\tilde{p}(\Theta,t|s_0)$,

$$\begin{aligned} e^{t-t_0}\tilde{p}(\Theta,t|s_0) &= e^{ix_0.\Theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\delta \in \mathcal{E}} \int_{t_0}^{t} e^{i\delta.\Theta} \varphi^*_{\delta,\tau} \mathrm{d}\tau\right)^k \\ &= e^{ix_0.\Theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_{|\mathcal{E}|}!} \exp(i\Theta. \sum_{\delta_i \in \mathcal{E}} \alpha_i \delta_i) \prod_{\delta_i \in \mathcal{E}} \left(\int_{t_0}^{t} \varphi^*_{\delta_i,\tau} \mathrm{d}\tau\right)^{\alpha_i} \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse,

$$e^{t-t_0} p(x,t|s_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{|\alpha|=k : x_0 - x + \sum \alpha_i \delta_i = 0} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_{|\mathcal{E}|}!} \prod_{\delta_i \in \mathcal{E}} \left(\int_{t_0}^{t} \varphi^*_{\delta_i,\tau} \mathrm{d}\tau\right)^{\alpha_i}$$

Comme prévu, la somme ne porte que sur l'ensemble des chemins composés de déplacements admissibles $\delta \in E$ partant de x_0 arrivant à x.

References

[DD16] Paul Expert Kim Christensen Nicky Zachariou Deepak Dhar, Gunnar Pruessner. Directed abelian sandpile with multiple downward neighbors. *Phys. Rev. E 93, 042107*, 2016.

[MFW17] Erwin Frey Markus F. Weber. Master equations and the theory of stochastic path integrals. *Rep. Prog. Phys., 80(4):046601, 2017.doi:10.1088/1361-6633/aa5ae2*, 2017.