Sur une mesure $\mathfrak{f}$ des matrices binaires

Le Fay Yvann

Juin 2018

L'objet de ce document est d'étudier les propriétés d'une fonction mesurant en quelque sorte une difficulté (on détaillera à la suite ce que l'on entend par là) d'une matrice binaire.

1 Outils préalables

1.1 Fonction de padding $\mathfrak{p}$

Il nous sera nécessaire d'introduire une notation correspondant à un processus de padding d'une matrice carrée $\mathbf{A}$ d'ordre n.

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} : \mathcal{M}_{n^2} &\to \mathcal{M}_{(n+2)^2} \\ : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n\times n} &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+2)\times(n+2)}.\end{aligned}$$

Une autre manière d'écrire $\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{p}((a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}) = ((\mathbb{1}_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} a_{ij})_{(i,j)\in[\![0;n+1]\!]^2})$.

1.2 Fonction des vosins d'ordre K, $\mathfrak{v}$

On définit la fonction de voisinage $\mathfrak{v}$ d'ordre K de (i,j) d'une matrice carrée $\mathbf{A}$ de la manière suivante

$$\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, K) = (a_{i+nj+m})_{(n,m)\in[\![-K;K]\!]^2} \in \mathcal{M}_{(2K+1)^2}.$$

La matrice créee a alors pour taille de structure (c'est-à-dire que ces coefficients peuvent ne pas être définis ces dimensions), $(2K+1)^2$. Si l'on ne renseigne aucune coordonnées alors on prend par défaut le centre de la matrice carrée comme étant les coordonnées de départ, noté $c = (n/2, n/2)$, le centre de la matrice créée est (i,j).

1.3 Notion de sous-matrice

On appelle une sous-matrice $\mathbf{A}^*$ de $\mathbf{A}$, une matrice qui a pour éléments de l'ensemble de coefficients des coefficients de $\mathbf{A}$ à coordonnées incluses dans $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$, ainsi

$$\mathbf{A}^* \subset (\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})}) \Longleftrightarrow \mathbf{A}^* = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)\subset\mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Ainsi on a par exemple $\mathbf{A} \subset \mathfrak{p}(\mathbf{A})$, une notion assez naturelle.

1.4 Coordonnées d'une matrice

On déclare la fonction $\mathfrak{C}$ qui à une matrice $(a_{ij})_{(i,j)\in C}$ renvoit C.

1.5 Fonction OU σ d'une matrice

La fonction OU de $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})}$ n'est rien d'autre que la somme des coefficients a_{ij},

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{A}) &= \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})} a_{ij} \\ &= \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}), \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}\{0,1\}.\end{aligned}$$

1.6 Fonction ET π d'une matrice

La fonction ET de $\mathbf{A}$ n'est rien d'autre que le produit des coefficients de $\mathbf{A}$,

$$\pi(\mathbf{A}) = \prod_{a_{ij}\in\mathbf{A}} a_{ij}.$$

1.7 Fonction de concaténation $\mathfrak{k}$ de matrices

On définit la fonction $\mathfrak{k}$ de concaténation de j^2 fois la matrice carrée d'ordre n, $\mathbf{A}$ comme étant

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} &: \mathcal{M}_{n^2} \to \mathcal{M}_{(nj)^2} \\ &: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n\times n} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(nj)\times(nj)}.\end{aligned}$$

1.8 Fonction $\mathfrak{z}$ de mise à zéro d'une sous-matrice

On définit la fonction $\mathfrak{z}$ comme la fonction qui à une sous-matrice $\mathbf{A}^*$ de $\mathbf{A}$ renvoie la matrice dont les coefficients sont définis sur $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$, en particulier, sur $\mathfrak{C}(\mathbf{A})\backslash\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)$, les coefficients sont à zéro, sinon, ils restent inchangés, voir proposition 7.

2 $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{R}$

2.1 L'ensemble $\mathfrak{R}(n)$ des matrices binaires $\mathfrak{g} - n-$équivalentes de degré n

2.1.1 Définitions

On introduit ici un ensemble de matrices binaires très intéressant dans le cadre de l'étude de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{R}(n)$, l'ensemble des matrices binaires $\mathfrak{g}$-n-équivalentes de degré n, il est défini par

$$\mathfrak{R}(n) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3\times 3}\{0,1\} : a_{ij}\sigma(\mathbf{A}\circ\mathbf{C}_+) = n\}, \qquad \text{où } \mathbf{C}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Les ensembles

Ici $\star$ dénote un nombre dans $\{0,1\}$, à chaque apparition, elle est indépendante par rapport aux autres apparitions (i.e ce n'est pas la même $\star$).

$\mathfrak{R}(0) = \{ \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \}$, $\mathfrak{R}(1) = \{ \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix} \}$,

$\mathfrak{R}(2) = \{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \}$,

$\mathfrak{R}(3) = \{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \}$,

$\mathfrak{R}(4) = \{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \}$,

$\mathfrak{R}(5) = \{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \}$, $\forall n \geq 6, \mathfrak{R}(n) = \{\}$.

2.1.3 Quelques propriétés

Proposition 1.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), a_{ij}\sigma(\mathbf{AC}_+) = b_{ij}\sigma(\mathbf{BC}_+) = n.$$

Preuve. D'après la définition de $\mathfrak{R}(n)$. $\square$

Remarque. *Si l'on se place dans le cas $n \leq 0$, on peut se débarasser du coefficient du centre de la matrice devant σ.*

Proposition 2.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n \leq \sigma(\mathbf{A}) \leq n + 4.$$

Preuve.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n = a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 0 & a_{i+1j} & 0 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 0 & a_{i-1j} & 0 \end{bmatrix} \leq a_{ij}\sigma(\mathbf{A}) \leq a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 1 & a_{i+1j} & 1 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 1 & a_{i-1j} & 1 \end{bmatrix} = n + 4.$$

$\square$

Proposition 3.

$$\mathcal{M}_{3\times3}\{0,1\} = \bigcup_{i=0}^{5} \mathfrak{R}(i).$$

Preuve. Il suffit de raisonner sur les cardinalités en remarquant que par définition, les $\mathfrak{R}(i)$ sont disjoints et inclus dans $\mathcal{M}_{3\times3}\{0,1\}$, $\forall 0 \leq n \neq m \leq 5, \mathfrak{R}(n) \cap \mathfrak{R}(m) = \{\}$.

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=0}^{5} \mathfrak{R}(i)| = \sum_{i=0}^{5} |\mathfrak{R}(i)| = 2^8 + 2^4 + 4 \times 2^4 + 6 \times 2^4 + 4 \times 2^4 + 2^4 = 2^9 \\ = |\mathcal{M}_{3\times3}\{0,1\}|. \end{aligned}$$

$\square$

2.2 Fonction de comptage μ de sous-matrices $\mathfrak{g}-n-$équivalentes

2.2.1 Définition

Soit $\mathbf{A}$, une matrice quelconque de coefficients binaires ou non définis, les coefficients non définis sont considérés comme nuls. La fonction de comptage de sous-matrices de $\mathbf{A}^*$ elle-même, sous matrice de $\mathbf{A}$ est défini par

$$\mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n) = |\{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) : \mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1) \in \mathfrak{R}(n)\}|.$$

2.3 Mesure macroscopique $\mathfrak{g}$ d'une matrice binaire carrée d'ordre 3

2.3.1 Définition

On définit une première mesure $\mathfrak{g}$, appelée mesure macroscopique, puisqu'intervenant que sur des matrices carrée binaire d'ordre 3 (i.e, image de $\mathfrak{v}$ d'ordre 1), qui nous permettra ensuite de définir la mesure $\mathfrak{f}$ pour une matrice binaire carrée d'ordre n. On décide de 5 coefficients positifs α_i (on pourrait travailler sur les négatifs, mais ça rendrait impossible la formulation certaines inégalités).

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &: \mathcal{M}_{3\times 3}\{0,1\} \to \mathbb{R}\\ &: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} \end{bmatrix} \mapsto \mathfrak{g}(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(\mathbf{A})$ peut s'écrire de plein de manières différentes et les fonctions que nous avons introduites vont nous permettre de mieux apercevoir les propriétés de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{S}_k$ le groupe symétrique de $\{a_{i+i_1,j+j_1}, \dots, a_{i+i_k,j+j_k}\}$, pour $1 \leq k \leq 4$, les coordonnées des a_{ij} cités juste avant correspondant à celles des coefficients non nuls de $\mathbf{C}_+$. Ainsi, $i_1 = 0$, $j_1 = 1$, $i_2 = 0$, $j_2 = -1$, $i_3 = 1$, $j_3 = 0$, $i_4 = -1$, $j_4 = 0$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(\mathbf{A}) = a_{ij}(\alpha_1 + \alpha_2(a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{i-1j}) +\\ \alpha_3(a_{i-1j}(a_{i+1j} + a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{i+1j}(a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{ij+1}a_{ij-1}) +\\ \alpha_4(a_{i-1j}(a_{ij+1}(a_{ij-1} + a_{i+1j}) + a_{i+1j}a_{ij-1}) + a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) +\\ \alpha_5 a_{i-1j}a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1})\\ = a_{ij}\sum_{k=0}^{4}\alpha_{k+1}\sum_{\mathfrak{S}_k}^{\cdot} a_{i+i_1j+j_1}\dots a_{i+i_kj+j_k}.\end{aligned}$$

2.3.2 Propriétés

Proposition 4.

$$\begin{gathered}\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B})\\ \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B}) \iff \exists n \in \mathbb{N} : \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n).\end{gathered}$$

Preuve. L'un remarquera premièrement que $\mathfrak{g}$ ne dépend pas des termes aux sommets, ainsi il suffit d'étudier respectivement, pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, les $1, 1, 4, 6, 4, 1$ cas. On vérifiera que pour chaque n, l'expression de $\mathfrak{g}$ pour chacun des cas correspondant, reste inchangée. L'expression de $\mathfrak{g}$ a en fait été construite pour respecter cette propriété, en effet, les termes des a_{ij} permutent autour du centre sans passer par les sommets. □

Proposition 5.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \binom{n-1}{i-1}.$$

Preuve. Par la proposition 4, il suffit de calculer $\mathfrak{g}$ pour une matrice $\mathbf{A}$ dans chacun des $\mathfrak{R}(i)$. □

Proposition 6. *$\mathfrak{g}$ est une fonction croissante de n.*

Preuve. Proposition 5. □

Preuve. Remarquons que puisque les $a_{ij} \geq 0$ et que $n = a_{ij}(a_{i+1j} + a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i-1j})$, n est une fonction croissante des a_{ij} (i.e de tous les a_{ij}, et inversement, les a_{ij} croient quand n croit), et plus particulièrement de ceux n'étant pas sur les sommets, or $\mathfrak{g}$ est croissante de ces mêmes a_{ij}, donc $\mathfrak{g}$ est croissante de n. □

Proposition 7.

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathfrak{g}(\mathbf{A}^*) \leq \mathfrak{g}(\mathbf{A}).$$

Preuve. Il suffit de définir, artificiellement $a^*_{ij} = 0$ si $(i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \backslash \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)$, afin de pouvoir poser $\mathfrak{g}$ même si $\mathbf{A}^*$ n'est pas remplie,

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathfrak{z}(\mathbf{A}^* = (a^*_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)}, \mathbf{A}) = \left(\left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} & \text{si } (i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \right)_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Finalement, on a $\forall (i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \backslash \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*), a^*_{ij} = 0 \leq a_{ij} \leq 1$, or $\mathfrak{g}$ est une fonction croissante des a_{ij} (et a^*_{ij}), d'où l'inégalité voulue. □

Remarque. *L'égalité a lieu si et seulement si les coefficients dont a été privée $\mathbf{A}^*$ sont sur les sommets ou si $\mathbf{A}^*, \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$.*

2.4 Mesure globale $\mathfrak{f}$ d'une sous matrice d'une matrice binaire carrée d'ordre n selon $\mathfrak{g}$ d'ordre 3

2.4.1 Définitions

On définit $\mathfrak{f}$ de $\mathbf{A}^*$ dans l'environnement $\mathbf{A}$ comme étant la somme des mesures macroscopiques $\mathfrak{g}$ des matrices voisines d'ordre 1 aux coordonnées de $\mathbf{A}^*$.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1)).$$

Par soucis d'écriture, quand on notera $\mathfrak{f}(\mathbf{A})$, on entendra $\mathfrak{f}(\mathbf{A}, \mathfrak{p}(\mathbf{A}))$.

2.4.2 Propriétés

Proposition 8.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1)\mathbf{C}_+).$$

Preuve. L'opération $\mathbf{AC}_+$ consiste à mettre à 0 les coefficients des sommets, or $\mathfrak{g}$ ne dépend pas des sommets, d'où l'égalité. □

Remarque. *On peut absolument remplacer* $\mathbf{C}_+$ *par toute matrice carrée d'ordre* 3 *telle que* $\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$ *soit incluse dans cette matrice.*

Proposition 9. *On note par abus,* $\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{g}(\mathbf{A})$ *où* $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$*.*

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{5} \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, j)\mathfrak{g}(n).$$

Preuve. Pour toute sous-matrice $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}\{0,1\}$, sachant qu'on calcule $\mathfrak{f}$ selon l'environnement $\mathbf{A}$,

$$\mathfrak{z}(\mathbf{A}^*) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{z}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A}).$$

Or $\forall (i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*), \exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{f}(\mathfrak{z}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A})) = \mathfrak{g}(n)$, notons le n correspondant pour la coordonnée (i,j), $n((i,j))$, alors

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) &= \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(n((i,j))) \\ &= \sum_{n=1}^{5} \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n)\mathfrak{g}(n).\end{aligned}$$

□

Proposition 10. *Pour toute matrice carrée* $\mathbf{A}$ *d'ordre* n*,*

$$\begin{aligned}&\mathfrak{f}(\mathbf{A}) \le \mathfrak{f}((1)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}) \\ &\quad = (n-2)^2(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5) + 4(n-2)(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4) + 4(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3).\end{aligned}$$

Proposition 11.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) + \mathfrak{f}(\mathbf{A}\backslash\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \mathfrak{f}(\mathbf{A}).$$

Preuve. Par la définition de $\mathfrak{f}$ en remarquant que $\mathfrak{C}(\mathbf{A}) = \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \sqcup \mathfrak{C}(\mathbf{A}\backslash\mathbf{A}^*)$. □

Proposition 12.

$$n\mathfrak{f}(\mathbf{A}) \le \mathfrak{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}, n))$$

Remarque. *Il y a égalité lorsque* $\mathbf{A}$ *a été paddée,* $\mathbf{A} = \mathfrak{p}(\mathbf{B})$*.*