Le modèle des piles abéliennes et marches aléatoires

Yvann Le Fay

Juillet 2020

Resumé

L'étude numérique proposée dans [JAA14] de la taille des blocs de glaces qui se détâchent lors d'un vêlage, montre que cette grandeur suit une loi de puissance similaire à celles retrouvées dans l'étude des grandeurs moyennes associées au modèle des piles abéliennes. Dans ce cadre, les piles abéliennes modélisent un effondrement de particules qui à l'échelle locale suivent un processus de diffusion probabiliste caractérisé par un graphe. L'objet de ce papier est de calculer certaines grandeurs moyennes (Φ le flux carré moyen, σ le coefficient de diffusion) ainsi que des profils asymptotiques pour le modèle des piles abéliennes sur une certaine classe de graphes donnés par l'ensemble $\mathcal{E}$ qui leur est associé.

Dhar dans [DD16] calcule grâce à de l'analyse complexe, de l'analyse numérique et avec l'aide de propriétés de symétrie, le flux carré moyen Φ associé à $\mathcal{E} = \{-1, 0, 1\}$.

L'objectif de ce papier est de généraliser et approfondir les travaux de Dhar dans [DD16]. Nous démontrons d'abord que l'équation qui régit la probabilité $p : (x, t) \mapsto p(x, t)$ qu'un site x s'effondre à l'instant t est identique à celle qui régit une marche aléatoire dont les pas dépendent du graphe que l'on s'est donné (théorème 1.1). En particulier, on montre que le calcul qu'un site (x, t) est une somme réalisée sur l'ensemble des solutions d'une équation diophantienne linéaire dépendant de $\mathcal{E}$, x et t (lemme 1.2). Que dans le cas particulier où l'effondrement est isotropique (en ce sens, chaque arête du graphe a autant de probabilité d'être empruntée), ce calcul revient à dénombrer le nombre de solutions à cette équation diophantienne. Nous donnons l'expression exacte de la probabilité qu'un site s'effondre lorsque $\mathcal{E} = [\![-n, n]\!]$ (théorème 1.10) en exploitant le théorème 1.6 et les calculs menés dans [CCSC00]. Nous montrons toujours dans ce cas que la taille d'un effondrement évolue en $n\sqrt{t}$ (théorème 1.7), (théorème 1.9), mieux encore, on montre que la loi de probabilité $(p(x, t))_{x\in\mathbb{Z}}$ est bien approchée par une loi normale centrée d'écart-type $\sqrt{n(n+1)t/3}$. Nous proposons une généralisation du calcul du flux carré Φ défini par Dhar dans [DD16] (théorème 2.1). Toujours dans ce cas général, nous confirmons par le calcul que le flux carré Φ évolue en $\sqrt{t}$ pour t grand, en fait, nous obtenons un équivalent de Φ (théorème 2.1).

Les résultats réconfortent les résultats empiriques de [JAA14].

Mots clés — équation de diffusion, équation de Chapman-Kolmogorov, chaînes de Markov, équations diophantiennes, théorème centrale-limite

1 Modèle sur $\mathbb{Z}^d$: définitions et résultats préliminaires

Soit un entier $d \geq 1$, $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}^d$ de cardinal fini c, appelé ensemble des déplacements admissibles, $\varphi : \mathcal{E} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ appelée application de pondération. Considérons le graphe associé

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}, \varphi) = (\mathcal{S} = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}, \{(s, s + (\delta, 1))_{\text{de poids } \varphi(\delta,t)} : \delta \in \mathcal{E}, s = (x,t) \in \mathcal{S}\})$$

Une configuration sur $\mathcal{G}$ est une application $\omega : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, celle-ci est dîtes stable à l'instant t si

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \omega(x,t) < s(t) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} \varphi(\delta, t)$$

Etant donné une configuration ω quelconque, on pose pour tout $t \geq 1$, $\omega_t = \omega(.,t)$, $\tau(\omega_t) = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} T_{(x,t-1)}(\omega_t)$, où T_s l'opérateur de *toppling* classique du site s, c'est-à-dire, celui qui fait effondrer s sur ses voisins, $\{s + (\delta, 1)\}_\delta$ selon les quantités $\varphi(\delta, t)$,

$$\forall s = (x,t) \in \mathcal{S}, A(s) = \mathbb{1}\{x \text{ s'effondre à l'instant } t\}$$

On a la relation de récurrence suivante,

$$\forall s \in \mathcal{S}^* = \mathcal{S} \backslash \{(x,0) : x \in \mathbb{Z}^d\}, A(s) = \mathbb{1}\{\omega_t(x) + \sum_{\delta \in \mathcal{E}} A(s - (\delta,1))\varphi(\delta, t-1) \geq s(t)\}$$

Etant donné une configuration ω tirée uniformément parmi l'ensemble des configurations instables qu'en $s = (0,0) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$, i.e, $\Omega_0 = \{\omega : \forall s \in (\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}) \backslash \{(0,0)\}, \omega(s) < s(t), \omega(0,0) = s(0)\}$, on considère la variable aléatoire A et en particulier $p : s \in \mathcal{S} \mapsto \mathbb{E}(A(s))$, c'est-à-dire, la probabilité que s s'effondre sachant qu'il y a initialement ($t = 0$) effondrement qu'en $0 \in \mathbb{Z}^d$. Posons,

$$\forall \delta \in \mathcal{E}, t \in \mathbb{N}, \varphi^*_{\delta,t} = \frac{\varphi(\delta,t)}{s(t+1)}$$

De la relation de récurrence précédente, on obtient une relation identique à celle d'une marche aléatoire pour des pas de déplacement $\delta \in \mathcal{E}$ de probabilité $\varphi_{\delta,t}$.

Théorème 1.1.

$$\forall s \in \mathcal{S}^*, \;\; p(s) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} p(s - (\delta,1))\varphi^*_{\delta,t-1}$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega_0$, notons

$$\mathcal{A}_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \text{ accessibles depuis 0 en un temps } t \text{ avec des déplacements admissibles}\}$$

Notons, $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\;\mathcal{E}^{-1}(x) = \{x - \delta : \delta \in \mathcal{E}\}$.
On se donne une bijection $i : \mathcal{A}_{t-1} \to [\![1; |\mathcal{A}_{t-1}|]\!]$ pour énumérer $\mathcal{A}_{t-1}$ et on définit

$$\forall j \in [\![0; |\mathcal{A}_{t-1}|]\!], \omega_{j,t} = \begin{cases} \omega_t \;\text{ si } j = 0 \\ T_{(i^{-1}(j),t-1)}(\omega_{j-1,t}) \;\text{ si } j \geq 1 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{Z}^d$, on décompose l'application de l'opérateur τ sur ω_t par les états successifs $(\omega_{j,t})_j$, ainsi l'ordre d'un produit de topplings est selon l'énumération i, posons $A_0 = \varnothing$ et $A_k = \{\omega : (\prod_{y \in \mathcal{A}_{t-1} \cap \mathcal{E}^{-1}(x) : i(y) \leq k}) T_{(y,t-1)}(\omega_t)(x) \geq s(t)\}$, alors A_k est l'ensemble des configurations dont l'effondrement des k premiers-sites y sur x fait de x un site instable en t. Nous avons

$$\begin{aligned}
\{\omega : \omega_t(x) \geq s(t)\} &= \{\omega : (\prod_{y \in \mathcal{A}_{t-1}} T_{(y,t-1)})(\omega_t)(x) \geq s(t)\} \\
&= \{\omega : (\prod_{y \in \mathcal{A}_{t-1} \cap \mathcal{E}^{-1}(x)} T_{(y,t-1)})(\omega_t)(x) \geq s(t)\} \\
&= \bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{A}_{t-1}|} A_k \backslash A_{k-1} = \bigsqcup_{k=1, k \in i(\mathcal{E}^{-1}(x))}^{|\mathcal{A}_{t-1}|} A_k \backslash A_{k-1}
\end{aligned}$$

Et $A_k \backslash A_{k-1} = \{\omega : \omega_t(x) + \sum_{j<k} \varphi(x - i^{-1}(j), t-1) < s(t), \omega_t(x) + \sum_{j \leq k} \varphi(x - i^{-1}(j), t-1) \geq s(t)\}$. Les quantités $\omega_t(x)$ étant distribuées uniformément, on a pour tout $k \in i(\mathcal{E}^{-1}(x))$,

$$\mathbb{P}(A_k \backslash A_{k-1}) = p(i^{-1}(k), t-1)\varphi(x - i^{-1}(k))/s(t)$$

Pour le voir, on peut poser pour tout $I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)$, $X_I = \bigcap_{i \in I}\{\omega : A(i, t-1) = 1\} \bigcap_{i \notin I}\{\omega : A(i, t-1) = 0\} \cap \{\omega : A(i^{-1}(k), t-1) = 1\}$. La formule des probabilités totales donne que $\mathbb{P}(A_k \backslash A_{k-1}) = \sum_{I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)} \mathbb{P}(A_k \backslash A_{k-1} | X_I)\mathbb{P}(X_I)$. Comme les quantités $\omega_t(x)$ sont distribuées uniformément, on a $\mathbb{P}(A_k \backslash A_{k-1} | X_I) = \varphi(x - i^{-1}(k), t-1)/s(t)$. De plus, $\sum_{I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)} \mathbb{P}(X_I) = p(\sqcup_{I \subset \mathcal{E}^{-1}(x)} X_I) = p(A(i^{-1}(k), t-1) = 1) = p(i^{-1}(k), t-1)$. Ainsi,

$$p(x,t) = \frac{1}{s(t)} \sum_{y \in \mathcal{E}^{-1}(x)} p(y, t-1)\varphi(x-y, t-1) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} p(s - (\delta, 1))\varphi^*_{\delta, t-1}$$

□

On définit la série génératrice $\tilde{p}(\Theta, t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} p(x,t)e^{ix.\Theta}$ et posons $\mathcal{L}(t, \Theta) = \sum_{\delta \in \mathcal{E}} e^{i\delta.\Theta}\varphi^*_{\delta, t-1}$. Nous obtenons

$$\tilde{p}(\Theta, t) = \tilde{p}(\Theta, t-1)\mathcal{L}(t, \Theta)$$

Lemme 1.2. *Si l'effondrement initial a lieu en* $(0,0)$ *alors*

$$\forall s \in S, p(s) = \sum_{\Delta : (E)} \Psi(\Delta)$$

où $\Delta = (\delta_i) : (E)$ *est la condition* $s(\Delta) = \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x$ *et* $\Psi(\Delta) = \prod_{i=0}^{t-1} \varphi^*_{\delta_i, i}$.

Démonstration. Par hypothèse, l'effonrdement initial a lieu en $(0,0)$ ainsi $\tilde{p}(\Theta, 0) = 1$. D'après le résultat qui précède,

$$\tilde{p}(\Theta, t) = \prod_{i=1}^{t} \mathcal{L}(i, \theta) = \sum_{\Delta \in \mathcal{E}^t} e^{i\Theta \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i}\Psi(\Delta)$$

et en appliquant la transformée de Fourier inverse,

$$p(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta \in [0,2\pi]^d} e^{-i\Theta.x} \tilde{p}(\Theta, t) \mathrm{d}\Theta = \sum_{\Delta \in \mathcal{E}^t} \mathbb{1}_{(E)}(\Delta) \Psi(\Delta)$$

□

Dans le cas particulier où la quantité $\varphi^* = C$ est constante (par exemple $C = 1/c$), le lemme précédent dit que $p(s) = C^t \mathrm{Card}\{(\delta_i) \in \mathcal{E}^t : \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x\}$.

Lemme 1.3. *Soit $X \subset \mathbb{Z}^d$, on a $\tilde{p}(\Theta, t|X) = \tilde{p}(\Theta, t) \sum_{x \in X} e^{i\Theta.x}$ i.e $p(s|X) = \sum_{x' \in X} p(x - x', t)$.*

Démonstration. Le résultat du lemme 1.1 étant valable pour $p(s|X)$, il suffit de poser comme condition initiale $\tilde{p}(x, 0) = \mathbb{1}_X(x)$ et alors $\tilde{p}(\Theta, t|X) = \tilde{p}(\Theta, t|x)\tilde{p}(\Theta, 0|X)$. □

Lemme 1.4. *La loi conjointe est à un instant t,*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{N}^*, x \neq y,$$
$$p(s_x \cap s_y) = \sum_{(\delta_1, \delta_2) \in \mathcal{E}^2} p(s_x - (\delta_1, 1) \cap s_y - (\delta_2, 1)) \varphi^*_{\delta_1, t-1} \varphi^*_{\delta_2, t-1} \tag{1}$$

Et initialement, $p((x, 0) \cap (y, 0)) = A(x, 0)A(y, 0)$.

Démonstration. La démonstration est semblable à celle du premier lemme et on obtient pour un effondrement initial en $(0, 0)$, $\tilde{p}(\Theta_1, \Theta_2, t) = \sum_{(\Delta_1, \Delta_2) \in \mathcal{E}^t \times \mathcal{E}^t} e^{i(\Theta_1.s(\Delta_1) + \Theta_2.s(\Delta_2))} \Psi(\Delta_1)\Psi(\Delta_2)$ où l'on note $s(\Delta) = \sum_{\delta \in \Delta} \delta$ et cela se généralise facilement. □

Lemme 1.5. *Le processus respecte l'équation de Chapman-Kolmogorov,*

$$\forall t_2 \leq t,\ p(s|s') = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p(s|(y, t_2)) p((y, t_2)|s')$$

Avec la condition initiale, $p((x, t')|(x', t')) = \delta_{x,x'}$.

2 Le cas où $\mathcal{E} = [\![-n; n]\!]$

Théorème 2.1. *Si $\varphi^* = C$ est constante et $\mathcal{E} = [\![-n, n]\!]$ alors*

$$\frac{1}{C^t}\sum_{x\in\mathbb{Z}} p(x,t)X^{nt+x} = \left(\sum_{i=0}^{2n} X^i\right)^t$$

Démonstration. On a $C\mathcal{L}(\theta) = \sum_{\delta=-n}^{n} e^{i\delta\theta} = 1 + 2\sum_{\delta=1}^{n}\cos\delta t$. Posons $\theta = -i\ln X$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C^t}X^{nt}\tilde{p}(-i\ln X, t) &= \frac{1}{C^t}\sum_{x\in\mathbb{Z}} p(x,t)X^{nt+x}\\
&= \frac{1}{C^t}X^{nt}\mathcal{L}(-i\ln X)^t\\
&= X^{nt}\left(1 + 2\sum_{\delta=1}^{n}\cos\{i\ln X^\delta\}\right)^t\\
&= X^{nt}\left(1 + \sum_{\delta=1}^{n}\frac{1+X^{2\delta}}{X^\delta}\right)^t\\
&= X^{nt}\left(X^{-n}\frac{X^{2n+1}-1}{X-1}\right)^t = \left(\frac{X^{2n+1}-1}{X-1}\right)^t
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{E}'$ est à une translation prêt $\mathcal{E} = [\![-n, n]\!]$ alors le théorème reste valable au décalage prêt des exposants.

$\square$

Théorème 2.2. *Si $\varphi^* = C$ est constante et $\mathcal{E} = [\![-n, n]\!]$ alors*

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{3}n(1+n)t$$

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $C = 1/(2n+1)$. Notons $P(X) = \sum_{i=0}^{2n} X^i$ et $\binom{t}{j}_{2n+1}$ le coefficient en X^j dans $P(X)^t$, par le théorème qui précède, on a

$$(2n+1)^t p(j - nt, t) = \binom{t}{j}_{2n+1}$$

Par symétrie, $p(x,t) = p(-x,t)$ et donc $\mathbb{E}(x : (x,t) \text{ s'effondre}) = \sum_{x=-nt}^{nt} p(x,t)x = 0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sigma^2(t) = \mathrm{Var}(x : (x,t) \text{ s'effondre}) &= \sum_{x=-nt}^{nt} x^2 p(x,t) - \mathbb{E}(x : (x,t) \text{ s'effondre})^2\\
&= \frac{1}{(2n+1)^t}\sum_{j=0}^{2nt}(j-nt)^2\binom{t}{j}_{2n+1}
\end{aligned}$$

Aussi, les identités 4.2 et 4.3 de [CCSC00] sont

$$\sum_{j=0}^{2nt} j^2 \binom{t}{j}_{2n+1} = \frac{2nt(2n+1)^t}{12}(2n(3t+1)+2) \qquad \sum_{j=0}^{2nt} j \binom{t}{j}_{2n+1} = \frac{2nt(2n+1)^t}{2}$$

d'où le résultat. Un calcul similaire peut-être mené dans le cas où $\mathcal{E}' = [\![-n;n]\!] + \mu$, la variance est inchangée. $\square$

Théorème 2.3. *Si $\varphi^* = C$ et $\mathcal{E} = [\![-n,n]\!] + \mu$ alors*

$$A(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma(t)^2 = \frac{1}{3}tn(n+1))$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $\mathcal{E} = [\![-n,n]\!]$, le théorème précédent nous dit que si $A(t)$ suit une loi normale de variance $\sigma^2(t)$ alors nécessairement

$$\mu = C_1(t) = 0 \qquad C_2(t) = \sigma^2(t) = \frac{n(n+1)t}{3}$$

On va utiliser le théorème centrale-limite sur les (X_i) qui sont i.i.d suivant X une variable aléatoire discrète uniforme sur $[\![-n,n]\!]$. L'expression donnée de p dans le théorème 2.2, $(2n+1)^t p(j-nt,t) = \binom{t}{j}_{2n+1}$ ainsi que le théorème 2.1 de [CCSC00] montrent que

$$A(t) = \sum_{i=1}^{t} X_i - nt$$

Le théorème centrale-limite donne le résultat, la variance peut être obtenue en utilisant l'expression de la variance de X et l'équation précédente. $\square$

Théorème 2.4. *Si $\varphi^* = C$ et $\mathcal{E} = [\![-n,n]\!]$ alors*

$$p(x,t) = tC^t \sum_{p=0}^{\lfloor (x+nt)/(2n+1) \rfloor} \frac{(-1)^p \Gamma(t+x+nt-p(2n+1))}{\Gamma(p+1)\Gamma(t-p+1)\Gamma(x+nt-p(2n+1)+1)}$$

Démonstration. Pour l'expression de p, voir 2.8 de [CCSC00] donnant l'expression de $\binom{t}{j}_{2n+1}$. $\square$

Théorème 2.5. *Si $\varphi^* = C$ et $\mathcal{E} = k[\![-n,n]\!] + \mu$ pour un certain $k \geq 1$ alors*

$$p(x,t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{k^2\sigma(t)^2}} \mathbb{1}_{k\mathbb{Z}}(x-\mu t)$$

où $\sigma(t)^2 = 1/3n(n+1)t$.

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité que $\mu = 0$. D'après le lemme 1.2, on a pour tout $s \in \mathcal{S}$,

$$p(s) = C^t \mathrm{Card}\{\{\delta_i\} \in [\![-n,n]\!] : k\sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x\}$$

Si x n'est pas divise par k, alors $p(s) = 0$. Sinon, $p(s) = C^t \mathrm{Card}\{\{\delta_i\} \in [\![-n,n]\!] : \sum_{i=0}^{t-1} \delta_i = x/k\}$. D'après le théorème 2.3, on a le résultat. $\square$

3 Flux carré moyen pour $\mathcal{E}$ quelconque

Le flux carré moyen Φ est défini par

$$\forall t, \Phi(t) = \mathbb{E}\Big(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} A(s_x)\Big)^2 = \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d} p(s_x\cap s_y)$$

Théorème 3.1. *En dimension $d = 1$, supposons que*

1. *φ^* ne dépend pas de t*
2. *$c_1 = \sum_{\delta_1,\delta_2\in\mathcal{E}^2} \varphi_1^*\varphi_2^* = 1$*

alors

$$\Phi(t) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

où γ est défini dans la démonstration.

Démonstration. L'équation linéaire (1) que respecte la loi conjointe sur une même ligne t a pour solution, pour une certaine fonction f,

$$p(s_x\cap s_y) = \sum_{Z\in S} f(Z)p(s_x|Z)p(s_y|Z)$$

Définissons $F(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(s_x)$. L'hypothèse d'indépendance de φ par rapport à t implique qu'il y a conservation du nombre moyen de grains qui se déplacent à chaque instant, donc de $\mathbb{E}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} A(s_x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} p(s_x)$. On pose, sans perte de généralité par linéarité, $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} p(s_x) = 1$.

Nous obtenons en utilisant ce qui précède,

$$\Phi(t) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d}\sum_{Z\in S} f(Z)p(s_x|Z)p(s_y|Z) = \sum_{t'=0}^{t} F(t')$$

Posons $K(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} p(s_x)^2$, $\tilde{F}$ et $\tilde{K}$ les séries génératrices associées. L'hypothèse d'indépendance de φ par rapport au temps implique $p(s|s') = p(s-s')$ puis

$$1 = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} p(s_x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d, Z\in S} f(Z)p(s_x|Z)^2 = \sum_{t'=0}^{t} F(t')K(t-t')$$

Sur les fonctions génératrices,

$$\tilde{K}(z)\tilde{F}(z) = \frac{1}{1-z} \tag{2}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $K(t)$. Si la distribution admet une symétrie par rapport à 0_d, c'est-à-dire $\mathcal{E} = -\mathcal{E}$ et $\varphi(-\delta) = \varphi(\delta)$ alors l'équation de Chapman-Kolmogorov donne $p(0, 2t) = K(t)$.

Plus généralement, un produit de Cauchy et la formule de Cauchy donne

$$K(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} |\mathcal{L}(\Theta)|^{2t} \tilde{p}(\Theta, 0) \mathrm{d}\Theta$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(z) &= \sum_{t=0}^{+\infty} K(t) z^t \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \tilde{p}(\Theta, 0) \mathrm{d}\Theta \sum_{t=0}^{+\infty} (z|\mathcal{L}(\theta)|^2)^t \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} \frac{\mathrm{d}\Theta}{1 - z|\mathcal{L}(\Theta)|^2} \tilde{p}(\Theta, 0)
\end{aligned}$$

Supposons que $d = 1$, posons $c_2 = \sum_{\delta_1 < \delta_2} (\delta_1 - \delta_2)^2 \varphi^*_{\delta_1} \varphi^*_{\delta_2}$ alors

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(\theta)|^2 &= \sum_{(\delta_1, \delta_2) \in \mathcal{E}^2} \varphi^*_{\delta_1} \varphi^*_{\delta_2} e^{i\theta(\delta_1 - \delta_2)} \\
&= 2 \sum_{\delta_1 < \delta_2} \varphi^*_{\delta_1} \varphi^*_{\delta_2} \cos(\theta(\delta_2 - \delta_1)) + \sum_{\delta \in \mathcal{E}} (\varphi^*_\delta)^2 \\
&= 1 - c_2 \theta^2 + o(\theta^4)
\end{aligned}$$

Il s'agit d'obtenir un équivalent de $\tilde{K}$ lorsque $z \to 1^-$. Sans perte de généralité, prenons $\tilde{p}(\Theta, 0) = 1$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, pour z au voisinage de 1,

$$\tilde{K}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - z|\mathcal{L}(\theta)|^2} \sim \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - z|\mathcal{L}(\theta)|^2} \sim \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - z(1 - c_2\theta^2)}$$

La première égalité est justifiée par $|\mathcal{L}(\theta)|^2 = |\mathcal{L}(2\pi - \theta)|^2$. La première équivalence est justifiée car les deux seuls pôles de la fonction qu'on intègre quand $z \mapsto 1^-$ sont $\{0, 2\pi\}$. De plus,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}\theta}{1 - z(1 - c_2\theta^2)} = \frac{\arctan \varepsilon \sqrt{\frac{c_2 z}{1-z}}}{\sqrt{c_2 z(1 - z)}} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{c_2}} \frac{1}{\sqrt{1 - z}} = \frac{2\gamma}{\sqrt{1 - z}}$$

Ainsi,

$$\Phi(t) = \sum_{t'=0}^{t} \left(\frac{1}{(1 - z)\tilde{K}(z)} \right)_{t'} \sim \frac{1}{2\gamma} \sum_{t'=0}^{t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - z}} \right)_{t'}$$

En utilisant les deux identités suivantes

$$\frac{1}{\sqrt{1 - z}} = \sum_{t'=0}^{+\infty} z^t \binom{-1/2}{t'} (-1)^{t'} \qquad \sum_{t'=0}^{t} \binom{-1/2}{t'} (-1)^{t'} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(1 + t)\Gamma(1/2(3 + 2t))}{\Gamma(2 + t)} \sim 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

On obtient

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Si $\mathcal{E} = [\![-n, n]\!]$ et $\varphi^* = 1/c = 1/(2n+1)$, on a $c_1 = 1$ et $c_2 = 1/3n(n+1)$ puis

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n(1+n)}}$$

et pour t grand,

$$\Phi(t) \sim 4\sqrt{\frac{tn(n+1)}{3\pi}}$$

Dans le cas du graphe initialement traité par Dhar dans [DD16],

$$\mathcal{E} = \{-1, 0, 1\}, \varphi^* = 1/3, \Phi(t) \sim \sqrt{\frac{32t}{3\pi}}$$

De plus, par rapport au théorème 1.7, on remarque que $\sigma(t) = \sigma(x : (x,t) \text{ s'effondre})$ et $\Phi(t)$ sont proportionnels pour t grand et le facteur de proportionnalité est $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ i.e

$$\Phi(t) \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sigma(t)$$

□

References

[CCSC00] Pushpa N. Rathie Camila C. S Caiado. Polynomial coefficients and distribution of the sum of discrete uniform variables. 2000.

[DD16] Paul Expert Kim Christensen Nicky Zachariou Deepak Dhar, Gunnar Pruessner. Directed abelian sandpile with multiple downward neighbors. *Phys. Rev. E 93, 042107*, 2016.

[JAA14] M. Schäfer E.Z. Welty S. O'Neel T.C. Bartholomaus Yan Liu T. I. Riikilä T. Zwinger J. Timonen J. C. Moore J. A. Astrom, D. Vallot. Termini of calving glaciers as self-organized critical systems. *Nature geoscience*, 2014.