

Sur une mesure \mathfrak{f} des matrices binaires

Le Fay Yvann

Juin 2018

L'objet de ce document est d'étudier les propriétés d'une fonction mesurant en quelque sorte une difficulté (on détaillera à la suite ce que l'on entend par là) d'une matrice binaire.

1 Outils préalables

1.1 Fonction de padding \mathfrak{p}

Il nous sera nécessaire d'introduire une notation correspondant à un processus de padding d'une matrice carrée \mathbf{A} d'ordre n .

$$\mathfrak{p} : \mathcal{M}_{n^2} \rightarrow \mathcal{M}_{(n+2)^2}$$
$$: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n \times n} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+2)}.$$

Une autre manière d'écrire \mathfrak{p} est $\mathfrak{p}((a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}) = ((\mathbb{1}_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 0;n+1 \rrbracket^2})$.

1.2 Fonction des voisins d'ordre K , \mathfrak{v}

On définit la fonction de voisinage \mathfrak{v} d'ordre K de (i, j) d'une matrice carrée \mathbf{A} de la manière suivante

$$\mathfrak{v}((i, j), \mathbf{A}, K) = (a_{i+n, j+m})_{(n,m) \in \llbracket -K;K \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_{(2K+1)^2}.$$

La matrice créée a alors pour taille de structure (c'est-à-dire que ces coefficients peuvent ne pas être définis ces dimensions), $(2K+1)^2$. Si l'on ne renseigne aucune coordonnées alors on prend par défaut le centre de la matrice carrée comme étant les coordonnées de départ, noté $c = (n/2, n/2)$, le centre de la matrice créée est (i, j) .

1.3 Notion de sous-matrice

On appelle une sous-matrice \mathbf{A}^* de \mathbf{A} , une matrice qui a pour éléments de l'ensemble de coefficients des coefficients de \mathbf{A} à coordonnées incluses dans $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$, ainsi

$$\mathbf{A}^* \subset (\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}) \iff \mathbf{A}^* = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \subset \mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Ainsi on a par exemple $\mathbf{A} \subset \mathfrak{p}(\mathbf{A})$, une notion assez naturelle.

1.4 Coordonnées d'une matrice

On déclare la fonction \mathfrak{C} qui à une matrice $(a_{ij})_{(i,j) \in C}$ renvoie C .

1.5 Fonction OU σ d'une matrice

La fonction OU de $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(ij) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}$ n'est rien d'autre que la somme des coefficients a_{ij} ,

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{A}) &= \sum_{(ij) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})} a_{ij} \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}), \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}\{0, 1\}.\end{aligned}$$

1.6 Fonction ET π d'une matrice

La fonction ET de \mathbf{A} n'est rien d'autre que le produit des coefficients de \mathbf{A} ,

$$\pi(\mathbf{A}) = \prod_{a_{ij} \in \mathbf{A}} a_{ij}.$$

1.7 Fonction de concaténation \mathfrak{k} de matrices

On définit la fonction \mathfrak{k} de concaténation de j^2 fois la matrice carrée d'ordre n , \mathbf{A} comme étant

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} : \mathcal{M}_{n^2} &\rightarrow \mathcal{M}_{(nj)^2} \\ : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n \times n} &\mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(nj) \times (nj)}.\end{aligned}$$

2 \mathfrak{g} et \mathfrak{R}

2.1 L'ensemble \mathfrak{R} des matrices binaires \mathfrak{g} -équivalentes de degré n

2.1.1 Définitions

On introduit ici un ensemble de matrices binaires très intéressant dans le cadre de l'étude de \mathfrak{g} . On note $\mathfrak{R}(n)$, l'ensemble des matrices binaires \mathfrak{g} -équivalentes de degré n , il est défini par

$$\mathfrak{R}(n) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} : a_{ij}\sigma(\mathbf{A} \circ \mathbf{C}_+) = n\}, \quad \text{où } \mathbf{C}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Les ensembles

Ici \star dénote un nombre dans $\{0, 1\}$, à chaque apparition, elle est indépendante par rapport aux autres apparitions (i.e ce n'est pas la même \star).

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(0) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \right\}, \mathfrak{R}(1) = \left\{ \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(2) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(3) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(4) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(5) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \forall n \geq 6, \mathfrak{R}(n) = \{\}.\end{aligned}$$

2.1.3 Quelques propriétés

Proposition 1.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), a_{ij}\sigma(\mathbf{AC}_+) = b_{ij}\sigma(\mathbf{BC}_+) = n.$$

Preuve. D'après la définition de $\mathfrak{R}(n)$. □

Remarque. Si l'on se place dans le cas $n \leq 0$, on peut se débarasser du coefficient du centre de la matrice devant sigma.

Proposition 2.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n \leq \sigma(\mathbf{A}) \leq n + 4.$$

Preuve.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n = a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 0 & a_{i+1j} & 0 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 0 & a_{i-1j} & 0 \end{bmatrix} \leq a_{ij}\sigma(\mathbf{A}) \leq a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 1 & a_{i+1j} & 1 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 1 & a_{i-1j} & 1 \end{bmatrix} = n + 4.$$

□

Proposition 3.

$$\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} = \bigcup_{i=0}^5 \mathfrak{R}(i).$$

Preuve. Il suffit de raisonner sur les cardinalités en remarquant que par définition, les $\mathfrak{R}(i)$ sont disjoints et inclus dans $\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\}$, $\forall 0 \leq n \neq m \leq 5, \mathfrak{R}(n) \cap \mathfrak{R}(m) = \{\}$.

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=0}^5 \mathfrak{R}(i) \right| &= \sum_{i=0}^5 |\mathfrak{R}(i)| = 2^8 + 2^4 + 4 \times 2^4 + 6 \times 2^4 + 4 \times 2^4 + 2^4 = 2^9 \\ &= |\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\}|. \end{aligned}$$

□

2.2 Mesure macroscopique \mathbf{g} d'une matrice binaire carrée d'ordre 3

2.2.1 Définition

On définit une première mesure \mathbf{g} , appelée mesure macroscopique, puisqu'intervenant que sur des matrices carrée binaire d'ordre 3 (i.e, image de \mathbf{v} d'ordre 1), qui nous permettra ensuite de définir la mesure \mathbf{f} pour une matrice binaire carrée d'ordre n . On décide de 5 coefficients positifs α_i (on pourrait travailler sur les négatifs, mais ça rendrait impossible la formulation certaines inégalités).

$$\mathbf{g} : \mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{A}).$$

$\mathbf{g}(\mathbf{A})$ peut s'écrire de plein de manières différentes et les fonctions que nous avons introduites vont nous permettre de mieux apercevoir les propriétés de \mathbf{g} .

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{A}) = & a_{ij}(\alpha_1 + \alpha_2(a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{i-1j}) + \\ & \alpha_3(a_{i-1j}(a_{i+1j} + a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{i+1j}(a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{ij+1}a_{ij-1}) + \\ & \alpha_4(a_{i-1j}(a_{ij+1}(a_{ij-1} + a_{i+1j}) + a_{i+1j}a_{ij-1}) + a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) + \\ & \alpha_5a_{i-1j}a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}). \end{aligned}$$

2.2.2 Propriétés

Proposition 4.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), \mathbf{g}(\mathbf{A}) = \mathbf{g}(\mathbf{B}).$$

Preuve. L'un remarquera premièrement que \mathbf{g} ne dépend pas des termes aux sommets, ainsi il suffit d'étudier respectivement, pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, les 1, 1, 4, 6, 4, 1 cas. On vérifiera que pour chaque n , l'expression de \mathbf{g} pour chacun des cas correspondant, reste inchangée. L'expression de \mathbf{g} a en fait été construite pour respecter cette propriété, en effet, les termes des a_{ij} permutent autour du centre sans passer par les sommets. \square

Proposition 5.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), \mathbf{g}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \binom{n-1}{i-1}.$$

Preuve. Par la proposition 4, il suffit de calculer \mathbf{g} pour une matrice \mathbf{A} dans chacun des $\mathfrak{R}(i)$. \square

Proposition 6. \mathbf{g} est une fonction croissante de n .

Preuve. Proposition 5. \square

Preuve. Remarquons que puisque les $a_{ij} \geq 0$ et que $n = a_{ij}(a_{i+1j} + a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i-1j})$, n est une fonction croissante des a_{ij} (i.e de tous les a_{ij} , et inversement, les a_{ij} croient quand n croit), et plus particulièrement de ceux n'étant pas sur les sommets, or \mathbf{g} est croissante de ces mêmes a_{ij} , donc \mathbf{g} est croissante de n . \square

Proposition 7.

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathbf{g}(\mathbf{A}^*) \leq \mathbf{g}(\mathbf{A}).$$

Preuve. Il suffit de définir, artificiellement $a_{ij}^* = 0$ si $(ij) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) - \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)$, afin de pouvoir poser \mathbf{g} même si \mathbf{A}^* n'est pas remplie,

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathbf{A}^* = (a_{ij}^*)_{(ij) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} = \left(\begin{array}{cc} a_{ij} & \text{si } (ij) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right)_{(ij) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Finalement, on a $\forall (ij) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) - \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*), a_{ij}^* = 0 \leq a_{ij} \leq 1$, or \mathbf{g} est une fonction croissante des a_{ij} (et a_{ij}^*), d'où l'inégalité voulue. \square

Remarque. L'égalité a lieu si et seulement si les coefficients dont a été privée \mathbf{A}^* sont sur les sommets ou si $\mathbf{A}^*, \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$.

2.3 Mesure globale \mathfrak{f} d'une sous matrice d'une matrice binaire carrée d'ordre n selon \mathbf{g} d'ordre 3

2.3.1 Définitions

On définit \mathfrak{f} de \mathbf{A}^* dans l'environnement \mathbf{A} comme étant la somme des mesures macroscopiques \mathbf{g} des matrices voisines d'ordre 1 aux coordonnées de \mathbf{A}^* .

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathbf{g}(\mathbf{v}((i,j), \mathbf{A}, 1)).$$

Par soucis d'écriture, quand on notera $\mathfrak{f}(\mathbf{A})$, on entendra $\mathfrak{f}(\mathbf{A}, \mathbf{p}(\mathbf{A}))$.

2.3.2 Propriétés

Proposition 8.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathbf{g}(\mathbf{v}((i,j), \mathbf{A}\mathbf{C}_+, 1)).$$

Preuve. L'opération $\mathbf{A}\mathbf{C}_+$ consiste à mettre à 0 les coefficients des sommets, or \mathbf{g} ne dépend pas des sommets, d'où l'égalité. \square

Remarque. On peut absolument remplacer \mathbf{C}_+ par toute matrice carrée d'ordre 3 telle que $\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$ soit incluse dans cette matrice.

Proposition 9. Pour toute matrice carrée \mathbf{A} d'ordre n ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{A}) &\leq \mathfrak{f}((1)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}) \\ &= (n-2)^2(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5) + 4(n-2)(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4) + 4(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3). \end{aligned}$$

Proposition 10.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) + \mathfrak{f}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \mathfrak{f}(\mathbf{A}).$$

Preuve. Par la définition de \mathfrak{f} en remarquant que $\mathfrak{C}(\mathbf{A}) = \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \sqcup \mathfrak{C}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$. \square

Proposition 11.

$$n\mathfrak{f}(\mathbf{A}) \leq \mathfrak{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}, n))$$

Remarque. Il y a égalité lorsque \mathbf{A} a été paddée, $\mathbf{A} = \mathbf{p}(\mathbf{B})$.