Colles du second semestre

YLF

2019

1 Semaine XVI : Polynomes

Enoncés

Exercice 1 (Pouchin).

On définit

$$\forall X \in \mathbb{C}, \binom{X}{p} = \frac{1}{p!} X(X-1)...(X-p+1).$$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, \binom{k}{p}$ est un entier. On définit

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \\ P \quad\; \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

.

2. Calculer $\Delta\left(\binom{X}{p}\right)$.
3. Quels sont les polynomes qui prennent que des valeurs entières sur les entiers ?

Exercice 2 (Mégarbané).

Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{4} \cos^2 \frac{2k\pi}{9}$$

Solutions

Exercice 1.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on remarque que $\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix}$ est un coefficient binomial au signe prêt pour k négatif. On justifie alors par récurrence que c'est effectivement un nombre entier par la formule de Pascal.

2. On a

$$\begin{aligned}\Delta\left(\begin{pmatrix} X \\ p \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{p!}\Big[(X+1)X(X-1)...(X-p+2) - X(X-1)...(X-p+1)\Big] \\ &= \frac{1}{p}\begin{pmatrix} X \\ p-1 \end{pmatrix}[(X+1)-(X-p+1)] = \begin{pmatrix} X \\ p-1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathbb{A}_n = \{P \in \mathbb{C}_n[X] : \forall k \in \mathbb{Z}, P(k) \in \mathbb{Z}\}$.
   Montrons par récurrence que

$$\mathbb{A}_n = \left\{ P = \sum_{p=0, a_p \in \mathbb{Z}}^{n} \begin{pmatrix} X \\ p \end{pmatrix} a_p \right\}$$

   Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $\mathbb{A}_0 = \{P = k \in \mathbb{Z}\} = \{a_0 \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} : a_0 \in \mathbb{Z}\}$.
   Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Soit $P \in \mathbb{A}_{n+1}$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{A}_n$ et par hypothèse, on peut écrire

$$\Delta(P) = \sum_{p=0, a_p \in \mathbb{Z}}^{n} \begin{pmatrix} X \\ p \end{pmatrix} a_p = \Delta\left(\sum_{p=0, a_p \in \mathbb{Z}}^{n} \begin{pmatrix} X \\ p+1 \end{pmatrix} a_p \right).$$

   Or $\Delta(P) = \Delta(Q) \iff P = Q + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, ainsi on a

$$P = \left(\sum_{p=0, a_p \in \mathbb{Z}}^{n} \begin{pmatrix} X \\ p+1 \end{pmatrix} a_p \right) + P(0).$$

   Cela permet de conclure que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Exercice 2.

Introduisons l'équation

$$\cos 5x = \cos 4x \Leftarrow x \in \{\frac{2k\pi}{9}, k \in \{0, ..., 4\}\}.$$

Antilinéarisons $\cos 5x$ et $\cos 4x$.

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$
$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

Posons $X = \cos x$, le polynome suivant permet de calculer la somme,

$$16X^5 - 8X^4 - 20X^3 + 8X^2 + 5X - 1$$

On a

$$S = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \frac{8^2}{16^2} + \frac{40}{16} = 2.75$$

2 Semaine XVII : Dérivations

Enoncés

Exercice 1 (Lemme de Sard) (Barboni).

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille d'intervalle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) \leq \varepsilon$.

1. Démontrer que toute union dénombrable de parties négligeables $\mathbb{R}$ est négligeable.

2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}_1$. Montrer que $f(C)$, où $C = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$ est négligeable.

Exercice 2 (Mines-Ponts '71).

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $f(x) \geq 0, f'(x) \geq 0, f''(x) \geq 0$ et f non constante. Montrer que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

Exercice 3

Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $f(0) = 0$.

1. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n^2}\right)$$

2. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{2n}} \prod_{k=1}^{n} (n^2 + k)$$

Exercice 4

1. Justifier l'existence de $l = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{} l f'(0).$$

3. Déterminer l.

Solutions

Exercice 1.

1. Soit $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une famille de parties négligeables. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons $\varepsilon_j = \varepsilon_0 / 2^j$.

   Il existe donc une suite $((I_{n,j})_{n \in \mathbb{N}})_{j \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{n,j}$$

   et

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(I_{n,j}) \leq \varepsilon_0.$$

2. Remarquons que C est un fermé, en effet $\mathbb{R} \backslash C$ est un ouvert puisque f' est continue (il existe un voisinage W autour de tout point de $\mathbb{R} \backslash C$ tel que $\{0\} \notin f'(W)$).

   Or les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des unions dénombrables d'ouverts disjoints. Ainsi C est une union dénombrable de fermés disjoints, $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$, sur lesquels f est constante, d'où $f(F_j) = \{y_j\}$.

   Ainsi

$$f(C) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f(F_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{y_j\}.$$

   Ce qui d'après la première question est négligeable.

Exercice 2.

La première assertion est immédiate, f est minorée par 0 et de dérivée positive, ainsi par le théorème de la limite monotone ($f(-x)$ ayant une dérivée négative), f admet une limite positive l en $-\infty$.

La seconde aussi, f'' étant positive et f' minorée par 0, on a de même par le théorème de la limite monotone, que f' converge vers une limite finie l' positive en $-\infty$. Supposons que $l' \neq 0$, alors f ne tend pas vers une limite finie en $-\infty$. Absurde.

Supposons que f soit bornée en $+\infty$, alors f étant croissante, f converge vers une limite finie. Or f' est croissante, elle ne tend donc pas vers 0 et f ne converge donc pas. Absurde.

Exercice 3.

1. On a $f(\frac{p}{n^2}) = f'(0)\frac{p}{n^2} + o_0(\frac{p}{n^2})$. Ainsi,

$$\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n^2}\right) = f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2} + o_0(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(0)/2$$

2. On passe par le logarithme en distribuant le facteur $1/n^{2n}$, et on applique le résultat de la question précédente pour $f(x) = \log(1+x)$, $f'(0) = 1$.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{e}$$

Exercice 4.

1. La somme est une somme de termes strictement positif et est majorée par $\frac{n}{1+n}$. Par le TLM, la série converge vers $l < 1$.

2. Par un développement limité d'ordre 1, $f(\frac{1}{n+k}) = \frac{1}{n+k}f'(0)$, en sommant et en passant à la limite, on a le résultat escompté.

3. En prenant $f(x) = \log(1+x)$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \log\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+k+1}{n+k}\right) = \log\frac{2n+1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log 2$$

3 Semaine XVIII : Variables aléatoires

Enoncés

Exercice 1 (Jammes).

On tire avec remise dans une urne de n-boules numérotées de 1 à n. On note b_k le nombre de la boule tirée au k-ème tirage. Le tirage s'arrête lorsque $b_k \geq b_{k-1}$. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages.

1. Etablir la loi de X_n.
2. Calculer $E(X_n)$ et sa limite.

Solutions

Exercice 1.

1. L'univers est $[\![2; n+1]\!]$. L'événement $(X > k)$ est équivalent à construire une application $b : [\![1; k]\!] \mapsto [\![1; n]\!]$ et qui est telle que $b_k < b_{k-1} < ... < b_1$. Il existe $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ de telles applications, on a donc

$$P(X > k) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{n^k}.$$

Ainsi

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}}{n^{k-1}} - \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{n^k}$$

2. Décalage d'indice (ou Binet), télescopage puis un binome de Newton,

$$\sum_{k=2}^{n+1} k \left(\frac{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}}{n^{k-1}} - \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{n^k} \right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

4 Semaine XX : Espaces vectoriels

Enoncés

Exercice 1 (Renaud).

Soit E un L-ev et $(V_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une suite de sev de E tels que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \quad \forall j \in [\![1;n]\!], i \neq j, V_j \not\subset \bigcup_{i\neq j} V_i.$$

1. Montrer que $\bigcup_{j=2}^{n} V_j \cap \overline{V_1} \neq \varnothing$. On note y un élément de cet ensemble.

2. Montrer qu'il existe $x \in V_1 \cap \overline{\bigcup_{j=2}^{n} V_j}$ tel que

$$\forall \lambda \in L, \exists i_\lambda \in [\![2;n]\!], x + \lambda y \in V_{i_\lambda}.$$

3. Montrer que $|L| \leq n - 1$.

Solutions

Exercice 1.

1. Supposons par l'absurde que $\bigcup_{j=2}^{n} V_j \subset V_1$. D'après l'hypothèse, on a

$$\forall i \in [\![2;n]\!], V_i \not\subset \bigcup_{i\neq j} V_j = V_1$$

   Or $\bigcup_{j=2}^{n} V_j \subset V_1$, absurde. Ainsi il existe $y \in \bigcup_{j=2}^{n} V_j$ et $y \notin V_1$.

2. Supposons par l'absurde que pour tout $x \in V_1 \cap \overline{\bigcup_{j=2}^{n} V_j}$, il existe $\lambda \in L$ tel que pour tout $i_\lambda \in [\![2;n]\!]$, $x + \lambda y \notin V_{i_\lambda}$. Si l'on prend un tel x, alors $x + \lambda y \notin \bigcup_{j=2}^{n} V_j$, c'est-à-dire que $x + \lambda y \in V_1$. On a alors

$$(\underbrace{x}_{\in V_1} + \underbrace{\lambda y}_{\notin V_1}) \in V_1$$

   Ce qui est absurde.

3. Posons l'application

$$\varphi : \begin{cases} L \to [\![2;n]\!] \\ \lambda \mapsto i_\lambda \end{cases}$$

   Montrons que φ est injective. Soient $\mu, \lambda \in L$ tels que $i_\lambda = i_\mu$, i.e, $V_{i_\lambda} = V_{i_\mu}$. On a $\omega(\lambda) = x + \lambda y \in V_{i_\lambda}$, de même $\omega(\mu) = x + \mu y \in V_{i_\lambda}$.

Alors $\mu\omega(\lambda)-\lambda\omega(\mu)=x(\mu-\lambda)\in V_{i_\lambda}$. Pour autant, on a $x\in V_1\cap\overline{V}_{i_\lambda}$. Si $\lambda\neq\mu$, alors $x=\underbrace{\frac{\mu\omega(\lambda)-\lambda\omega(\mu)}{\mu-\lambda}}_{\in V_{i_\lambda}}\in V_1\cap\overline{V_{i_\lambda}}$. Ainsi $\lambda=\mu$ et φ est injective.

Ainsi, on en déduit bien que $|L|\leq n-1$.

5 Semaine XXI : Equations différentielles

Enoncés

Exercice 1 (remplaçant de Narmanli, à Ulm)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ dérivable, telle qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}^+, f(x)-xf'(x)\leq M,\qquad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=0.$$

Montrer que f est majorée

Solutions

Exercice 1

Posons h une fonction telle que $f(x)-xf'(x)=h(x)$, i.e $\frac{-h(x)}{x}=f'(x)-\frac{f(x)}{x}$. Par la méthode de la variation de la constante, f est de la forme

$$f(x)=\lambda x+x\int_A^x\frac{-h\mathrm{d}u}{u^2},\qquad \lambda,A\in\mathbb{R},\mathbb{R}^+.$$

On en déduit que

$$f'(x)=\lambda+\int_A^x\frac{-h\mathrm{d}u}{u^2}-\frac{h}{x}\leq\lambda+\int_A^x\frac{-M\mathrm{d}u}{u^2}-\frac{M}{x}=\lambda-\frac{M}{A}$$

En l'infini, on aura nécessairement $\lambda-\frac{M}{A}\geq|f'(x)|\geq 0$. On peut ainsi choisir $\lambda\geq\frac{M}{A}$.

Alors

$$f(x)\leq\frac{M}{A}x+x\int_A^x\frac{-M\mathrm{d}u}{u^2}\leq\frac{M}{A}x+M-\frac{M}{A}x=M$$

6 Semaine XXVI : Dimension finie (i) et convexité

Enoncés

Exercice 1 (Jammes)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $F_1, ..., F_k$, k sev de E. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} \dim F_i > n(k-1) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} F_i \neq \varnothing$$

Exercice 2 (Jammes)

Soit $a \in [0,1]$. Montrer que pour tous réels x et y positifs, on a

$$1 + x^a y^{1-a} \leq (1+x)^a (1+y)^{1-a}$$

Exercice 3

On note $(E_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$. En utilisant $F_{i,j} = E_{i,j} + I_n$, déterminer $\mathrm{Vect}(\mathcal{GL}_n(K))$.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $A^k = 0_n$, on pose $B = \sum_{i=0}^{k-1} A^i$. Soient u, v, les êndormophismes correspondant aux matrices dans la base canonique de K^n, A et B.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im} v$, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker} v$, $\mathrm{Ker} v \oplus \mathrm{Im} v = K^n$.
2. En déduire que $\mathrm{Tr} B = k \mathrm{rg} B$.

Solutions

Exercice 1 (Algebre 1)

Posons

$$\varphi : \begin{cases} F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_k \to E^{k-1} \\ (x_1, \ldots, x_k) \qquad \mapsto (x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_k - x_1) \end{cases}$$

Remarquons que

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_i = \ker \varphi$$

Le théorème du rang et l'énoncé nous dit alors que

$$\dim \bigcap_{i=1}^{k} F_i = \sum_{i=1}^{k} \dim F_i - \mathrm{rg}\varphi \geq \sum_{i=1}^{k} \dim F_i - n(k-1) > 0$$

Exercice 2

Torchons en posant $f(x) = \ln 1 + e^x$, on a $f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$, donc f est convexe. Puis,

$$f(a\ln x + (1-a)\ln y) \leq af(\ln x) + (1-a)f(\ln y) = a\ln(1+x) + (1-a)\ln(1+y)$$

D'où le résultat.

Exercice 3

Remarquons que rg $F_{i,j} = n$, dès lors les $(F_{i,j})$ sont inversibles. Montrons que $\mathrm{Vect}(\mathcal{GL}_n(K)) = \mathcal{M}_n(K)$. Soit $M = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(K)$, alors

$$M = \mathrm{Diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}F_{i,j} - \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}I_n$$

Ainsi $\mathcal{M}_n(K) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{GL}_n(K))$ ce qui permet de conclure. On peut en fait montrer plus fort, en effet, toute endormophisme de K^n est la somme de deux automorphismes. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une application de rang r, alors on sait qu'il existe $P, Q \in \mathcal{GL}_n(K)$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Ainsi, on a

$$A = P(\mathrm{Diag}(\underbrace{2, \dots, 2}_{r \text{ termes}}, 1, \dots, 1) - I_n)Q^{-1}$$

Toutes les matrices qui interviennent sont clairement inversibles, ce qui permet de conclure.

Exercice 4

1. à rédiger
   (a) Par double inclusion, un antécédent de X est X/k
   (b) par le théorème du rang en utilisant l'inégalité d'avant
   (c) immédiat
2. chaque terme de la somme pour B contribue de rg$B$

7 Semaine XXVII : Dimension finie (ii) et suite de fonctions

Enoncés

Exercice 1 (London, matrices d'Hadamard)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [1;n], |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{j,j}|$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x \text{ si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ 1/x \text{ sinon} \end{cases}$$

Solutions

Exercice 1

Supposons par l'absurde qu'il existe une telle matrice A composée de lignes L_j, qui ne soit pas inversible, il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j$$

Considérons i_0 l'indice réalisant $\max_{i\in[\![1;n]\!]} |\lambda_i|$. Ainsi

$$a_{i_0,i_0} = \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_{i_0}} a_{j,j}$$

On a alors

$$|a_{i_0,i_0}| \geq \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_{i_0}} a_{j,j} \right| \geq \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |a_{j,j}|$$

Absurde, ainsi A est inversible.

Exercice 2

La suite converge simplement vers $x \mapsto 1/x$ mais pas uniformément. En effet, on peut vérifier facilement que f_n est bornée mais sa limite ne l'est clairement.

8 Semaine XXVIII : Intégration et groupe symétrique

Enoncés

Exercice 1 (Jammes)

Soit $n \geq 2$,

1. Déterminer tous les morphismes $\varphi : \mathfrak{S}_n \mapsto \mathbb{Z}$
2. Montrer que toute transposition est de la forme $\sigma \circ (1,2) \circ \sigma^{-1}$, où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
3. Déterminer tous les morphismes $\varphi : \mathfrak{S}_n \mapsto \mathbb{C}^*$.

Exercice 2 (Jammes)

Calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) \mathrm{d}x$$

Solutions

Exercice 1

1. $\varphi(\mathfrak{S}_n)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, autrement dit, $\varphi(\mathfrak{S}_n) = n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$. On en déduit facilement que $\varphi = 1$.
2. On a clairement
$$(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & j \end{pmatrix} (1,2) \begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
3. On sait que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions, ainsi pour $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$, on a $\varphi(\sigma) = \varphi(1,2)^k$. Or, le nombre de transpositions utilisées dans la décomposition n'est pas forcément unique, par contre, sur deux décompositions, ce nombre ne peut différer que d'un multiple de deux. Ainsi $\varphi(1,2)^2 = 1$ et $\varphi = 1$ ou $\varphi = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$.

Exercice 2

On a directement

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \tan x)) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \end{aligned}$$

D'où $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

9 Semaine XXIX : Déterminants

Enoncés

Exercice 1 (Hugo Manet, remplaçant de Narmanli)

Soit $f : \mathcal{M}_n(K) \mapsto K$ telle que $f(MN) = f(M)f(N)$ et f non constante. Montrer qu'ilexiste g une fonction telle que $f = g \circ \det$.

Exercice 2 (*Sage)

Soit $n \geq 2$, trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(K)$, $\det(A + M) = \det A + \det M$.

Exercice 3 (*Yvann)

Notons $\mathfrak{D}_n$, l'ensemble des dérangements de $[\![1; n]\!]$, i.e,

$$\mathfrak{D}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \forall i \in [\![1; n]\!], \sigma(i) \neq i\}$$

Calculer

$$|\mathfrak{D}_n \cap \mathfrak{A}_n| - |\mathfrak{D}_n \cap \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{A}_n|$$

Solutions

Exercice 1 (solution de Yacine et Yvann)

Il est utile d'avoir un petit chemin de route pour ce problème difficile. Notre but est de montrer que deux matrices de même déterminant, ont une même image par f. Premièrement, on calcule deux valeurs particulières de f. On démontre que $\ker f = \mathcal{M}_n(K) \backslash \mathcal{GL}_n(K)$. On aura alors calculé f sur les matrices non inversibles. On montre alors que sur $\mathcal{SL}_n(K)$, f vaut 1, en utilisant le Pivot de Gauss et les matrices de transvections. Enfin, on pourra calculer f sur $\mathcal{GL}_n(K)$.

Premièrement, $f(0_n) = f(0_n^2) = f(0_n)^2$, d'où $f(0_n) \in \{0, 1\}$, si $f(0) = 1$ alors $f = 1$, or f n'est pas constante, donc $f(0) = 0$. De même, $f(I_n) = f(I_n)^2$, ainsi $f(I_n) = 1$. Aussi, $f(M^{-1}) = f(M)^{-1}$.

Supposons que $M \in \mathcal{GL}_n(K)$, alors $f(I_n) = 1 = f(M)f(M)^{-1}$, d'où $f(M) \neq 0$, par contraposée, $\ker f \subset \mathcal{M}_n(K) \backslash \mathcal{GL}_n(K)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K) \backslash \mathcal{GL}_n(K)$, alors M est d'un rang $r < n$ et est donc équivalente à

$$J_r^* = \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_{r,r} \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$$

Or J_r^* est r-nilpotente, d'où $f(J_r^{*r}) = f(J_r^*)^r = 0$, puis $f(M) = 0$. On en déduit que $\ker f = \mathcal{M}_n(K) \backslash \mathcal{GL}_n(K)$.

Introduisons la matrice de transvection, $i, j \in [\![1; n]\!] : i \neq j$, $\lambda \in K$, $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$ et de lignes $L_1, \ldots, L_n$, on a

$$\begin{aligned} T_{i,j}(\lambda)A &\equiv L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \\ AT_{i,j}(\lambda) &\equiv C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i \end{aligned}$$

On remarque alors que

$$T_{i,j}(2\lambda) = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \ldots, 2}_{i}, 1, \ldots 1) T_{i,j}(\lambda) \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \ldots, 1/2}_{i}, 1, \ldots 1)$$

Ainsi, $T_{i,j}(\lambda)^2 = T_{i,j}(2\lambda) \sim T_{i,j}(\lambda)$ pour la relation de similitude. On en déduit que $f(T_{i,j}(\lambda))^2 = f(T_{i,j}(\lambda))$, d'où $f(T_{i,j}(\lambda)) = 1$.

L'idée principale est de montrer que $\mathcal{SL}_n(K)$ est engendré par ces matrices de transvections, ce qui est intéressant puisque les opérations élémentaires qu'elles nous accordent ne nous coûtent rien. Pour cela, raisonnons par récurrence sur la dimension de nos matrices.

Pour $n = 1$, c'est évidemment vrai puisque la seule matrice dans $\mathcal{SL}_n(K)$ est $[1]$.

Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$.

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{SL}_n(K)$. On note par $\to$ les étapes licites par des transvections qui nous permettent de passer d'une matrice à l'autre. Si les opérations ne sont pas indiquées, c'est qu'elles sont triviales.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Aucun des coefficients de la diagonale de la seconde matrice est nul sinon elle ne serait pas inversible Remarquez que la dernière écriture est ambigüe, on a éliminé les coefficients $(b_{1,2}, \ldots, b_{1,n}, b_{2,3}, \ldots, b_{2,n})$ seulement. Extrayons de cette dernière matrice, les matrices

$$S = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 \\ 0 & b_{2,2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & b_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Il est possible de travailler seulement sur S car sur les deux premières lignes, deux premières colonnes, les seuls coefficients non nuls sont ceux de S. Après avoir renommé $b_{1,1} = a$ et $b_{2,2} = b$, on a

$$S \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2/b} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - (a-1)C_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (1-a)b & b \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - b(1-a)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{ab}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$$

Ainsi, il existe une suite de transvections qui permettent

$$S \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \quad B \to \begin{pmatrix} ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & b_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

On a alors $\det A = \det B = 1$ par la formule de développement. On applique l'hypothèse de récurrence sur $B \in \mathcal{SL}_{n-1}(K)$ puis on obtient

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Puisque les transvections ne nous coûtent rien, $f(A) = f(I_n) = 1$.
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(K)$, on a $A = (\det A)^{1/n} I_n \underbrace{(\det A)^{-1/n} A}_{\in \mathcal{SL}_n(K)}$, d'où

$$f(A) = f((\det A)^{1/n} I_n) f((\det A)^{-1/n} A) = f((\det A)^{1/n} I_n)$$

Ce qui permet de conclure que f ne dépend que de det.

Exercice 2

Soit A une telle matrice, de rang r, alors on peut écrire $A = PJ_rQ$ où P, Q sont inversibles, paramétrisons $\mathcal{M}_n(K)$ par PNQ. Alors,

$$\det(P(J_r + N)Q) = \det PJ_rQ + \det PNQ \iff \det J_r + \det N$$

Posons, $N = I_n - J_r$, alors pour $r \neq 0, r \neq n$, on aboutit à la contradiction, $1 = 0$. Aussi, on a

$$\det 2A = 2^n \det A = 2 \det A$$

Or $n \geq 2$, donc $\det A = 0$, ce qui implique $r = 0$, d'où $A = 0$.

Exercice 3

On remarque que

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{D}_n \cap \mathfrak{A}_n| - |\mathfrak{D}_n \cap \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{A}_n| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_n} \varepsilon(\sigma) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma(k) = k \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (n-1)(-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

Les opérations effectuées sont $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geq 2$.