

Sur les racines imbriquées

Yvann Le Fay

Lycée Henri IV, 75005

Mai 2018, modifié en mars 2019

1 Définitions

Soient $(u_n) \in [1, +\infty]^{\mathbb{N}}$, la suite d'exposants des radicaux, C une constante positive et $(f_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$A(n, m) = \begin{cases} f_n \sqrt[n]{C + A(n+1, m)}, & n \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Aussi cette forme est équivalente à toutes les autres formes de radicaux imbriquées.

2 Inégalités, équivalents de $A(n, m)$

Proposition 1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$, alors

$$A(n, m) \leq \sum_{j=n}^m \left(\prod_{k=0}^{j-n} u_{k+n} \right)^{-1} (C + (u_j - 1) f_j^{u_j/(u_j-1)})$$

Démonstration. Par récurrence, l'inégalité est vérifiée en $n = m$ par l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$A(m, m) = f_m \sqrt[m]{C} \leq (C + (u_m - 1) f_m^{u_m/(u_m-1)}) / u_m$$

Supposons qu'elle soit vérifiée pour $n + 1$, i.e

$$A(n+1, m) \leq \sum_{j=n+1}^m \left(\prod_{k=0}^{j-n-1} u_{k+n+1} \right)^{-1} (C + (u_j - 1) f_j^{u_j/(u_j-1)})$$

Alors

$$\begin{aligned}
A(n, m) &= \sqrt[n]{f_n^{u_n}(C + A(n+1, m))} \\
&\leq \frac{1}{u_n} ((u_n - 1)f_n^{u_n/(u_n-1)} + C + A(n+1, m)) \\
&\leq \frac{1}{u_n} \left((u_n - 1)f_n^{u_n/(u_n-1)} + C + \sum_{j=n+1}^m \left(\prod_{k=0}^{j-n-1} u_{k+n+1} \right)^{-1} (C + (u_j - 1)f_j^{u_j/(u_j-1)}) \right) \\
&= \sum_{j=n}^m \left(\prod_{k=0}^{j-n} u_{k+n} \right)^{-1} (C + (u_j - 1)f_j^{u_j/(u_j-1)})
\end{aligned}$$

□

Remarque. En particulier pour (u_n) de terme constant égal à 2, $A(n, m) \leq \sum_{j=n}^m 2^{n-1-j} (C + f_j^2)$

Proposition 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, si (u_n) est de terme constant égal à 2 et f admet un prolongement dérivable et concave, alors

$$A(n, \infty) \leq C + A^2 + 2AB + 3B^2$$

où $A = f(n)$, $B = f'(n)$.

Démonstration. D'après la proposition 1., on a pour $n \leq m$,

$$A(n, m) \leq \sum_{j=1}^{m-n+1} r^{-j} (C + (r-1)f_{n+j-1}^{r/(r-1)}) = \underbrace{\frac{C}{R-1}(1 - r^{n-m-1})}_{=V} + \sum_{j=1}^{m-n+1} r^{-j} (r-1)f_{n+j-1}^{r/(r-1)}$$

Or f est concave, ainsi $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$f(n+j-1) \leq A + B(j-1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
A(n, m) &\leq V + \sum_{j=1}^{m-n+1} r^{-j} (r-1)(A + B(j-1))^{r/(r-1)} \\
&= V + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-n} \frac{1}{2^j} (A^2 + 2jAB + j^2B^2), \quad r = 2 \\
&= C + A^2 + 2AB + 3B^2, \quad m \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

Où la dernière ligne se justifie plus en détail en utilisant la fonction transcendante de Lerch notée Φ , en particulier on pourra calculer l'expression exacte pour m fini grâce à

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-n} \frac{j^s}{r^j} &= \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^s}{r^j}}_{=\Phi(r^{-1}, -s, 0)} - \underbrace{\sum_{j=m-n+1}^{+\infty} \frac{j^s}{r^j}}_{=r^{n-m-1}\Phi(r^{-1}, -s, m-n+1)}
\end{aligned}$$

□

Remarque. Il est facile de remarquer que pour f affine, la majoration est très bonne.

Proposition 3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$, si on dispose de deux suites $((\lambda_k), (\mu_k))_{k \in \llbracket n+1; m \rrbracket}$ tels que $\lambda_k A(k, m) \leq C + A(k, m) \leq \mu_k A(k, m)$ alors on a

$$f_n \prod_{j=1}^{m-n} (f_{n+j} \lambda_{n+j})^{P_{j,n}} \leq A(n, m) \leq f_n \prod_{j=1}^{m-n} (f_{n+j} \mu_{n+j})^{P_{j,n}}$$

où

$$P_{j,n} = \left(\prod_{i=0}^{j-1} u_{i+n} \right)^{-1}$$

Démonstration. On traite par récurrence l'inégalité de droite, *mutatis mutandis* pour celle de gauche. L'inégalité est vérifiée en $n = m - 1$, on a

$$A(m-1, m) = f_{m-1} \sqrt[m]{C + f_m \sqrt[m]{C}} \leq f_{m-1} \sqrt[m]{\mu_m f_m}$$

Supposons qu'elle soit vérifiée pour $n+1$, i.e

$$A(n+1, m) \leq f_{n+1} \prod_{j=1}^{m-n-1} (f_{n+1+j} \mu_{n+1+j})^{P_{j,n+1}}$$

Alors

$$\begin{aligned} A(n, m) &= f_n \sqrt[n]{C + A(n+1, m)} \leq f_n \sqrt[n]{\mu_{n+1} A(n+1, m)} \\ &\leq f_n \sqrt[n]{\mu_{n+1} f_{n+1} \prod_{j=2}^{m-n} (f_{n+j} \mu_{n+j})^{P_{j-1, n+1}}} \\ &= f_n \prod_{j=1}^{m-n} (f_{n+j} \mu_{n+j})^{P_{j,n}} \quad \text{car } u_n^{-1} P_{j-1, n+1} = P_{j,n} \end{aligned}$$

Remarque. On a égalité si et seulement si $\lambda_k = 1 + \frac{C}{A(k, m)}$. □

Proposition 4. Si f est une fonction croissante et (u_n) de terme constant égal à u , λ tel que quelque soit $k \geq n$, $\lambda A(k, \infty) \leq C + A(k, \infty)$ alors

$$f_n (\lambda f_n)^{\frac{1}{u-1}} \leq A(n, \infty)$$

Aussi, si f est décroissante, (u_n) de terme constant égal à u et μ tel que quelque soit $k \geq n$, $\mu A(k, \infty) \geq C + A(k, \infty)$ alors

$$f_n (\lambda f_n)^{\frac{1}{u-1}} \geq A(n, \infty)$$

Démonstration. D'après la proposition 3, on a pour la majoration (mutatis mutandis pour la minoration)

$$f_n(\lambda f_n)^{\frac{1}{u-1}} = f_n \prod_{j=1}^{\infty} (\lambda f_n)^{u^{-j}} \leq f_n \prod_{j=1}^{\infty} (\lambda f(n+j))^{u^{-j}} \leq A(n, \infty)$$

□

Proposition 5. *Si u_n est de terme constant égal à u , $f_n \sim f_{n+j}$ et que $A(n, \infty)$ tend vers $+\infty$ alors*

$$f_n^{\frac{u}{u-1}} \sim A(n, \infty)$$

Démonstration. Posons pour tout $k \geq n$ $\lambda_k = 1 + \frac{C}{A(k, m)}$, soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{C}{A(n, \infty)} \right| < \varepsilon \text{ et } \left| \frac{f_n}{f_N} - 1 \right| < \varepsilon$$

Aussi d'après la proposition 3,

$$f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_{n+j} \left(1 + \frac{C}{A(n+j, m)} \right) \right)^{u^{-j}} = A(n, m)$$

Ainsi pour $n \geq N$, $j \geq 1$, on a $f_N(1 - \varepsilon) < f_{n+j} < f_N(1 + \varepsilon)$

$$f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_N(1 - \varepsilon)^2 \right)^{u^{-j}} < A(n, m) < f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_N(1 + \varepsilon)^2 \right)^{u^{-j}}$$

Puis pour $m \rightarrow +\infty$,

$$f_n(f_N(1 - \varepsilon)^2)^{1/(u-1)} \leq A(n, \infty) \leq f_n(f_N(1 + \varepsilon)^2)^{1/(u-1)}$$

Or $N \rightarrow n$ convient, ce qui implique $\varepsilon \rightarrow 0$, d'où le résultat. □

Remarque. *Il peut être utile de suivre le même raisonnement avec (u_n) non constante.*

Proposition 6. *Si u_n est de terme constant égal à u et $f_{n+j} \sim f_n K^j$ avec $K > 1$, alors*

$$f_n^{\frac{u}{1-u}} K^{\frac{u}{(1-u)^2}} \sim A(n, \infty)$$

Démonstration. Adaptons la preuve de la proposition précédente, nécessairement $A(n, \infty)$ tend vers $+\infty$, soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{C}{A(n, \infty)} \right| < \varepsilon \text{ et } \left| \frac{f_{n+j}}{K^j f_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

On a pour $n \geq N$, $j \geq 1$, $f_n(1 - \varepsilon)K^j < f_{n+j} < f_n(1 + \varepsilon)K^j$ puis d'après la proposition 3,

$$f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_n(1 - \varepsilon)^2 K^j \right)^{u^{-j}} < A(n, m) < f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_n(1 + \varepsilon)^2 K^j \right)^{u^{-j}}$$

Puis pour $m \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient le résultat. \square

Remarque. Si $K < 1$ alors $A(n, \infty) \rightarrow 0$.

Proposition 7. Une autre forme de $A(n, m)$ est

$$A(n, m) = \sqrt[n]{a_{n,1} + \sqrt[n+1]{a_{n,2} + \dots + \sqrt[n]{a_{n,m-n+1}}}} \text{ avec } a_{n,i} = C \prod_{j=1}^i f_{j+n-1}^{Q_{j,i,n}} \text{ où } Q_{j,i,n} = \prod_{l=0}^{i-j} u_{n+l}$$

Démonstration. L'égalité est vérifiée pour $n = m$, on a

$$A(m, m) = f_m \sqrt[n]{C} = \sqrt[n]{f_m^{u_m} C}$$

Supposons qu'elle soit vérifiée pour $n + 1$, i.e

$$A(n + 1, m) = \sqrt[n+1]{a_{n+1,1} + \dots + \sqrt[n]{a_{n+1,m-n}}}$$

Alors

$$A(n, m) = \sqrt[n]{C f_n^{u_n} + \sqrt[n+1]{f_n^{u_n u_{n+1}} a_{n+1,1} + \dots + \sqrt[n]{f_n^{Q_{1,m-n+1,n}} a_{n+1,m-n}}}}$$

Ainsi, $a_{n,1} = C f_n^{u_n}$, de plus pour $2 \leq i \leq m - n + 1$, $a_{n,i} = a_{n+1,i-1} f_n^{Q_{1,i,n}}$, ce qui est attendu. \square

Remarque. Cette forme peut être utilisée pour appliquer le théorème de convergence de Herschfeld.

Proposition 8. Quitte à traduire les indices de (u_i) , (f_i) , notons $r = n - m + 1$ et considérons $A(n, m)$ égale à

$$\sqrt[n]{a_n + \sqrt[n+1]{a_{n+1} + \dots + \sqrt[n]{a_m}}}$$

On définit la fonction $g_i = g_{n,i}$

$$g_i(x) = \begin{cases} x & \text{si } i = 0 \\ g_{i-1}^{u_{n+i-1}}(x) - a_{n+i-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Delta_{n,m} = A(n, m+1) - A(n, m) &\leq \sqrt[n+m+1]{\left(\prod_{i=1}^r u_{n-1+i} g_{i-1}^{u_{n-1+i}-1}(A(n, m)) \right)^{-1}} \\ &= M_{n,m} \end{aligned}$$

Démonstration. Notons qu'on a pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $g_i(A(n, m)) = A(n, m+1)$, mais aussi,

$$g_i(x) - g_i(y) = g_{i-1}^{u_{n-1+i}}(x) - g_{i-1}^{u_{n-1+i}}(y) = (g_{i-1}(x) - g_{i-1}(y)) \sum_{j=0}^{u_{n-1+i}-1} g_{i-1}^j(x) g_{i-1}^{u_{n-1+i}-1-j}(y)$$

On a en déroulant l'identité précédente,

$$\begin{aligned} & (g_{n-1}(A(n, m+1)) - g_{n-1}(A(n, m))) \prod_{i=1}^r \sum_{j=0}^{u_{n-1+i}-1} g_{i-1}^j(A(n, m+1)) g_{i-1}^{u_{n-1+i}-1-j}(A(n, m)) \\ &= g_{m-1}^{u_m}(A(n, m+1)) - g_{m-1}^{u_m}(A(n, m)) = \sqrt[m]{a_{m+1}} \end{aligned}$$

Or $\Delta_{n, m} = g_{n-1}(A(n, m+1)) - g_{n-1}(A(n, m))$ d'où le résultat intermédiaire.

Enfin $g'_i(y) = u_i g_{i-1}^{u_{n+i-1}-1}(y) g'_{i-1}(y)$ puis $g_i(A(n, m+1)) \geq g_i(A(n, m))$ d'où

$$\sum_{j=0}^{u_{n+i-1}-1} g_{i-1}^j(A(n, m+1)) g_{i-1}^{u_{n+i-1}-1-j}(A(n, m)) \geq u_{n+i-1} g_{i-1}^{u_{n+i-1}-1}(A(n, m))$$

Aussi, on en déduit que

$$A(n, m+1) \leq A(n, n) + \sum_{k=n}^m M_{n, k}$$

Ce qui conclue cette démonstration. \square

Proposition 9. Si $f_n = an + b$ avec a, b quelconques et (u_n) est de terme constant égal à r , alors

$$A(1, \infty) \approx C^{1/r}(a+b) + 1/r((a+b)^r(2a+b)C^{1/r})((a+b)C^{1/r})^{1-r}$$

L'approximation est d'autant plus bonne (il y a égalité en limite pour r et a) que r est grand et a petit. Il est possible d'obtenir une approximation pour $A(l, \infty)$ en remplaçant b par $b+al$ et n par $n-l$.

Démonstration. Le terme de droite correspond à $A(1, 1) + M_{1, 1}$. IL RESTE A MAJORER $|A(1, \infty) - A(1, 1) - M_{1, 1}|$. \square