

# Des racines imbriquées faisant intervenir des nombres premiers

Le Fay Yvann, Régus François

Mai 2018

## Préface

L'objectif de ce papier est d'étudier certaines expressions de racines imbriquées faisant intervenir des nombres premiers.

## 1 Définition

Soit  $\mathcal{P}(n)$ , le  $n$ -ème nombre premier, on note ici  $\chi_F$ , la fonction indicatrice de  $F$ . On étudie la fonction suivante définie par

$$\begin{aligned}\forall n, b \in \mathbb{N}^*, b \geq n, \Psi(n, b) &= \mathcal{P}(n) \sqrt{1 + \Psi((n+1)\mathbb{1}_{[0; b-1]}(n), b)} \\ &= \sqrt{\mathcal{P}(n)^2 (1 + \Psi((n+1)\mathbb{1}_{[0; b-1]}(n), b))} \\ \Psi(0, b) &= 0 \\ &= \Psi(n, 0)\end{aligned}$$

## 2 Résultats

**Proposition 1.** *Des conditions simples sur  $\mu$  et  $\gamma$ , deux suites dans les réels, permettent d'écrire*

$$\mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{b-n} (\mu_{j+n} \mathcal{P}(n+j))^{2^{-j}} \leq \Psi(n, b) \leq \mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{b-n} (\gamma_{j+n} \mathcal{P}(n+j))^{2^{-j}}.$$

*Preuve.* Pour le terme à gauche,

$$\begin{aligned}\mu_{n+1} \Psi(n+1, b) &\leq 1 + \Psi(n+1, b) \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}(n) \sqrt{\mu_{n+1} \mathcal{P}(n+1) \sqrt{\dots \sqrt{\mu_b \mathcal{P}(b)}}} &\leq \dots \leq \mathcal{P}(n) \sqrt{\mu_{n+1} \mathcal{P}(n+1) \sqrt{\mu_{n+2} \Psi(n+2, b)}} \leq \mathcal{P}(n) \sqrt{\mu_{n+1} \Psi(n+1, b)} \leq \Psi(n, b).\end{aligned}$$

Pour celui à droite,

$$\begin{aligned}1 + \Psi(n+1, b) &\leq \gamma_{n+1} \Psi(n+1, b) \\ \Leftrightarrow \Psi(n, b) &\leq \mathcal{P}(n) \sqrt{\gamma_n \Psi(n, b)} \leq \mathcal{P}(n) \sqrt{\gamma_{n+1} \mathcal{P}(n+1) \sqrt{\gamma_{n+2} \Psi(n+2, b)}} \leq \dots \leq \mathcal{P}(n) \sqrt{\gamma_{n+1} \mathcal{P}(n+1) \sqrt{\dots \sqrt{\gamma_b \mathcal{P}(b)}}}.\end{aligned}$$

□

**Remarque.** On a ainsi l'égalité seulement quand  $\mu_n = \gamma_n = 1 + \frac{1}{\Psi(n, b)}$ .

**Remarque.** On peut choisir  $\mu_n = 1$  et  $\gamma_n = \frac{3}{2}$ .

**Proposition 2.**

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \Psi(n, b) \leq \tilde{\Psi}(n, b, k) &= \frac{\Psi((n+k+1)\chi_{[0;b]}(n+k+1), b)}{2^{k+1}} \\ &+ \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\chi_{[0;b]}(n+j-1)}{2^j} (\mathcal{P}(n+j-1)^2 + 1) \leq \tilde{\Psi}(n, b, k+1). \end{aligned}$$

*Preuve.* Par l'inégalité arithmético-géométrique appliquée deux fois successivement à (1)

$$\begin{aligned} \Psi(n, b) &\leq \frac{\mathcal{P}(n)^2 + 1 + \Psi((n+1)\chi_{[0;b-1]}(n), b)}{2} = \tilde{\Psi}(n, b, 0) \\ \tilde{\Psi}(n, b, 0) &\leq \frac{1}{2}(\mathcal{P}(n)^2 + 1 + \frac{1}{2}(\mathcal{P}(n+1)^2 + 1 + \Psi((n+2)\chi_{[0;b-2]}(n), b))) \\ &= \tilde{\Psi}(n, b, 1) \end{aligned}$$

En l'appliquant ainsi  $k+1$  fois,

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \Psi(n, b) \leq \tilde{\Psi}(n, b, k) &= \frac{\Psi((n+k+1)\chi_{[0;b]}(n+k+1), b)}{2^{k+1}} \\ &+ \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\chi_{[0;b]}(n+j-1)}{2^j} (\mathcal{P}(n+j-1)^2 + 1) \leq \tilde{\Psi}(n, b, k+1). \end{aligned}$$

□

**Remarque.**

$$\begin{aligned} &= \frac{\Psi((n+k+1)\chi_{[0;b]}(n+k+1), b)}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} (\mathcal{P}(n+j-1)^2 + 1), \quad \text{si } n+k \leq b \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} (\mathcal{P}(n+j-1)^2 + 1) = \tilde{\Psi}(n, k), \quad \text{si } n+k \geq b \end{aligned}$$

**Proposition 3.**

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(n, k) &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} (\mathcal{P}(n+j-1)^2) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} ((n+j-1)(\ln(n+j-1) + \ln \ln(n+j-1) - 1))^2, \quad n \geq 2 \\ \tilde{\Psi}(n, k) &\leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} ((n+j-1)(\ln(n+j-1) + \ln \ln(n+j-1)))^2, \quad n \geq 6 \end{aligned}$$

*Preuve.* Voir [1].

□

**Proposition 4.** Pour  $n \geq 6$ , on connaît une majoration assez fine de  $\tilde{\Psi}(n, k)$ , qui est un polynome de  $n$ , on la note  $\Psi^*(n, k, n)$ .

*Preuve.* Majorons  $\ln x$  pour obtenir une majoration de la majoration en proposition 3,

$$\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \ln x \leq \frac{1}{a}(x - a) + \ln a.$$

Remplaçons les termes de la somme,

$$((n + j - 1)(\ln(n + j - 1) + \ln \ln(n + j - 1)))^2 \leq \left[ \left( 2 \ln a + \frac{\ln a}{a} - 2 - \frac{1}{a} \right) (n + j - 1) + (n + j - 1)^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} \right) \right]^2.$$

Il ne nous reste plus qu'à simplifier la somme suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(n, k) &\leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} (J(n + j - 1) + (n + j - 1)^2 L)^2, \quad L = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}, J = 2 \ln a + \frac{\ln a}{a} - 2 - \frac{1}{a} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} (J^2(n + j - 1)^2 + JL(n + j - 1)^3 + L^2(n + j - 1)^4) \end{aligned}$$

Pour cela, on introduit la fonction transcendante de Lerch, définie par  $\Phi(z, s, \alpha) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{(j+\alpha)^s}$ , et on écrit les trois termes de notre carré apparaissant dans la somme grâce à celle-ci

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j} (n + j - 1)^p &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} (n + j)^p - \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} (n + j)^p \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} (n + j)^p - \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} (n + k + 1 + j)^p \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \Phi\left[\frac{1}{2}, -p, n\right] - \frac{1}{2^{k+1}} \Phi\left[\frac{1}{2}, -p, n + k + 1\right] \right). \end{aligned}$$

Le  $a$  fournissant la majoration la plus fine est  $n$ . Les égalités suivantes permettent de conclure, (on écrira pas  $\Psi^*(n, k)$ , l'expression complète est bien trop indigeste),

$$\begin{aligned} \Phi\left[\frac{1}{2}, -2, n\right] &= 2n^2 + 4n + 6 \\ \Phi\left[\frac{1}{2}, -3, n\right] &= 2n^3 + 6n^2 + 18n + 26 \\ \Phi\left[\frac{1}{2}, -4, n\right] &= 2n^4 + 8n^3 + 36n^2 + 104n + 150. \end{aligned}$$

□

**Proposition 5.**  $\Psi(n, b)$  converge quand  $b \rightarrow +\infty$ .

*Preuve.* Chacune des propositions précédentes peut-être utilisée pour démontrer ce résultat, en associant des équivalences  $\mathcal{P}(n)$ , pour exemple,  $\mathcal{P}(n) \sim n \ln n$ , et en utilisant le critère de d'Alembert (on trouvera un rapport de  $\frac{1}{2} \leq 1$ ). □

**Proposition 6.** *Pour tout  $(n, b) \in \mathbb{N}_*^2 \setminus \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ ,  $\Psi(n, b)$  est un nombre irrationnel.*

*Preuve.* Montrons tout d'abord l'irrationalité de  $\sqrt{1+p}$  où  $p \in \mathbb{P}$ . Déterminons  $p$  tel que  $\sqrt{1+p}$  est rationnel,

$$\begin{aligned} p \in \mathbb{P}, \sqrt{1+p} \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow p \in \mathbb{P}, 1+p = \frac{q^2}{k^2}, q \wedge k = 1 \\ \Leftrightarrow p \in \mathbb{P}, p = (q-1)(q+1), \quad \text{car } 1+p \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow p = 3. \end{aligned}$$

Excluons donc le cas particulier de  $p = 3$  et travaillons par récurrence. Premièrement l'initialisation en partant du  $b$ -ème terme

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\mathcal{P}(b)} \notin \mathbb{Q} \\ \Rightarrow \mathcal{P}(b-1)\sqrt{1+\mathcal{P}(b)} = \Psi(b-1, b) \notin \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Enfin, l'hérédité

$$\begin{aligned} \Psi(n, b) \notin \mathbb{Q} \\ \Rightarrow \sqrt{1+\Psi(n, b)} \notin \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}(n-1)\sqrt{1+\Psi(n, b)} = \Psi(n-1, b) \notin \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Finalement, à part pour  $\Psi(1, 1) = 2, \Psi(1, 2) = 4$  et  $\Psi(2, 2) = 3, \Psi(n, b) \notin \mathbb{Q}$ . □

**Proposition 7.** *Pour tout  $k$  entier naturel,*

$$\mathcal{P}(n+k) \sim \prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}}$$

*En particulier pour  $k = 0$  et  $k = 1$ .*

*Preuve.* En sachant que  $P(n+k) \sim P(n)$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{P}(n+k)}{\prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{P}(n+k)}{\prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+1)^{2^{-j}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(k+n) \mathcal{P}(n+1)^{-1+2^{-m}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

**Proposition 8.**

$$\mathcal{P}(n)^2 < \Psi(n, +\infty)$$

*Preuve.* Par la proposition 1. en posant  $\mu_j = 1$ ,

$$\mathcal{P}(n)^2 = \mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n)^{2^{-j}} < \mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}} < \Psi(n, +\infty)$$

□

**Proposition 9.**

$$\Psi(n, +\infty) \sim \mathcal{P}(n)^2$$

*Preuve.* Par la proposition 1., en posant l'égalité du côté gauche pour  $\mu_j = 1 + \frac{1}{\Psi(j, +\infty)}$

$$\frac{\mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}}}{\Psi(n, +\infty)} = \frac{\mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}}}{\mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{+\infty} ((1 + \frac{1}{\Psi(j, +\infty)}) \mathcal{P}(n+j))^{2^{-j}}}.$$

Par la proposition 7, pour le numérateur, et par passage à la limite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{P}(n)^2}{\Psi(n, +\infty)} = 1.$$

□

**References**

- [1] PIERRE DUSART. *THE  $k$ -th PRIME IS GREATER THAN  $k(\ln k + \ln \ln k)$  FOR  $k \geq 2$* . MATHEMATICS OF COMPUTATION, 1999.