

Formalisation des interpolations Lagrangiennes multivariées

Yvann Le Fay

Septembre 2016

Préambule. Dans ce court papier, on généralise les interpolations de Lagrange afin de créer une fonction polynomiale multivariable f interpolant un ensemble de $(d + 1)$ points dans \mathbb{R}^{N+1} . On propose aussi quelques exemples à la fin du papier.

1 Interpolation Lagrangienne dans \mathbb{R}^2

Etant donnés $(d + 1)$ points distincts $(x_i, y_i)_{i=0}^d$ avec $x_j \neq x_{i \neq j}$, le polynôme,

$$P(x) = \sum_{i=0}^d y_i \prod_{j=0, j \neq i}^d \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (1)$$

est appelé interpolation Lagrangienne de l'ensemble de ces points.

Notre but est de proposer une généralisation de cette interpolation à un ensemble de points appartenant à \mathbb{R}^{N+1} .

2 Interpolation Lagrangienne dans \mathbb{R}^{N+1}

Soit $X_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \dots \\ x_{kN} \end{pmatrix}$, un point dans \mathbb{R}^N . Les x_{k1}, \dots, x_{kN} sont les coordonnées antécédentes à

une valeur associée y_k . On a ainsi une collection de $(d + 1)$ points dans \mathbb{R}^N , $\{X_0, \dots, X_d\}$ et une collection de $(d + 1)$ images associées $\{y_0, \dots, y_d\}$.

On essaye de créer une fonction f qui à $(X_k)_{k=0}^d$, associe les images correspondantes $(y_k)_{k=0}^d$. Pour créer f en utilisant les interpolations de Lagrange, on décompose tous les $(y_k)_{k=0}^d$ en sommes de N images intermédiaires, notées $(\lambda_{kj})_{k=0, j=1}^{k=d, j=N}$. On décide alors de $(d + 1)$ ensembles de N images intermédiaires, notons ces ensembles $(\Lambda_k)_{k=0}^d$, ils sont tels que :

$$\Lambda_k = \left\{ \lambda_{k1}, \dots, \lambda_{kN} \mid \sum_{i=1}^N \lambda_{ki} = y_d \right\}. \quad (2)$$

Il est important de remarquer que pour certains ensembles de points, on ne peut créer de tels ensembles (voir le premier exemple). On introduit N ensembles, notons les $(D_n)_{n=1}^N$, qui chacun contient toutes les coordonnées $(x_{kn})_{k=0}^d$ présentes au moins en double dans les coordonnées des $(d + 1)$ points au rang n . On a la relation suivante (avec \sqcup , la somme disjointe) :

$$D_n = \bigcup_{\substack{k=0 \\ \text{Card}(\sqcup_{v=0}^d \{x_{vn}\} \setminus \{x_{kn}\}) \neq d}}^d \{x_{kn}\}. \quad (3)$$

On définit au départ, $S_{-1\,n} \triangleq \emptyset$, par interpolation, on a alors :

$$P_{k\,n}(x_n) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^d \frac{x_n - x_{i\,n}}{x_{k\,n} - x_{i\,n}}, \quad (4)$$

$$S_{i\,n} \triangleq S_{i-1\,n} \cup \{x_{i\,n}\}$$

$$x_{i\,n} \notin S_{i-1\,n}$$

le polynôme précédent (à noter que les conditions sous le produit sont primordiales, on ne doit faire le produit qu'une fois pour chaque $(x_{i\,n})_{i=0}^d$ remplit les conditions suivantes nécessaires à l'interpolation :

$$\begin{cases} P_{k\,n}(x_n = x_{k\,n}) = 1, \\ \forall j \in \llbracket 0; d \rrbracket \setminus \{k\}, P_{k\,n}(x_n = x_{j\,n}) = 0. \end{cases}$$

On peut remarquer que le choix des ensembles $(\Lambda_k)_{k=0}^d$ peut conduire à un polynôme $(P_{k\,n})_{k=0}^d$ libre de x_n , pour un certain n (la raison est que les ensembles peuvent très bien remplir la condition suivante : $\text{Card}(\bigcup_{k=0}^d \{\lambda_{k\,n}\}) = 1$). On pose $\mathcal{P}_{-1\,n} = \emptyset$, rappelons que pour tout $(x_{k\,n} \in D_n)_{n=1}^N$, on ne somme qu'une fois l'expression polynomiale le représentant.

On pose la proposition $A_{j\,n} = (x_{j\,n} \notin D_n) \vee (P_{j\,n} \notin \mathcal{P}_{j\,n})$ où $\mathcal{P}_{j\,n}$, ensemble de polynômes, est défini par une relation de récurrence : $\mathcal{P}_{j\,n} \triangleq \mathcal{P}_{j-1\,n} \cup \{P_{j\,n}\}$.

Si toutes les conditions sont respectées, alors en suivant (1), f est définie comme la somme des interpolations de Lagrange des ensembles $(\Lambda_k)_{k=0}^d$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{m \leq N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{j=0 \\ A_{j\,n}}}^d \lambda_{j\,n} P_{j\,n}(x_n). \end{aligned} \quad (5)$$

La fonction satisfait la condition $\forall (X = X_{k \in \llbracket 0; d \rrbracket}), f(X) = y_k$.

Plus généralement, si on décide d'un ensemble de $N(d+1)$ fonctions de x_z représentant des puissances, notons celui-ci R_d tel que

$$R_d = \{p_{0\,1}; p_{1\,1}; \dots; p_{d\,N} | \forall i \in \llbracket 0; d \rrbracket, \exists z \in \llbracket 1; N \rrbracket | p_{i\,z}(x_z) \neq 0\}, \quad (6)$$

alors pour toute fonction ψ définie sur $\{X_0, \dots, X_d\}$,

$$f(X) + \psi(X) \prod_{z=1}^N \prod_{i=0}^d \left(x_z - x_{i\,z} \right)^{p_{i\,z}}, \quad (7)$$

reste une interpolation de notre ensemble de $(d+1)$ points.

Exemples. Considérons les quatres points suivants, $(0, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 2), (1, 1, e)$ qui sont tous sur $(x - y)^2 + e^{xy}$. Afin de construire les ensembles formalisés dans (2), on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x(0) + y(0) = 1 \\ x(0) + y(1) = 2 \\ x(1) + y(0) = 2 \\ x(1) + y(1) = e \end{cases}$$

Aucune solution n'existe, on ne peut donc pas appliquer (2).

Maintenant considérons un autre ensemble de points, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 2, 9+e^2)$, $(1, 3, 16+e^3)$, on a :

$$\begin{cases} y(0) = 1 - x(0) \\ y(1) = 2 - x(0) \\ y(2) = 9 + e^2 - x(1) \\ y(3) = 16 + e^3 - x(1) \end{cases}.$$

On décide de choisir $x(0) = 1$, $x(1) = 2$, on a alors $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 7 + e^2$, $y(3) = 14 + e^3$. En utilisant (5), on doit maintenant calculer deux interpolations polynomiales. Le premier est une interpolation des points $(0, 1)$, $(1, 2)$, le second, lui, est une interpolation de $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 7 + e^2)$, $(3, 14 + e^3)$.

$$\begin{aligned} & \text{InterpolatingPolynomial}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, x\right] + \text{InterpolatingPolynomial}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 7 + e^2 \\ 3 & 14 + e^3 \end{pmatrix}, y\right] \\ &= x + \frac{1}{6}y(-4y^2 - 3e^2(y^2 - 4y + 3) + e^3(y^2 - 3y + 2) + 27y - 17) + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. On a formalisé une analogie des interpolations de Lagrange dans le cas multivariable. On a ainsi montré comment créer une interpolation polynomiale à N variables étant donné un ensemble de points dans \mathbb{R}^{N+1} . De plus, on a énoncé les conditions nécessaires à l'existence d'une telle construction.