Sur le mouvement d'un hand-spinner simulé

Le Fay Yvann

Juin 2017

Préambule Si certains prennent du plaisir à utiliser un spinner normalement, d'autres préfèrent s'attacher à trouver des mathématiques partout où ils le peuvent (en tout cas c'est le cas de l'auteur).

Dans ce court papier, on va donc tenter de caractériser les possibles équations du mouvement du hand-spinner de l'application fidget-spinner.

A partir de données expérimentales, il est possible de faire certaines suppositions sur les expressions des différentes équations. Ci-dessous, un ensemble de vitesses relevées (ω_t) normalisées par la vitesse initiale (ω_0), d'un point à l'extremité du hand spinner.

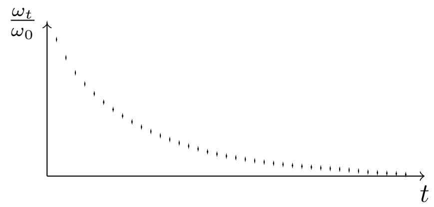


Figure 1: ω_t expérimentale normalisée par ω_0

Ainsi, par observation, il semblerait que :

$$\begin{aligned} \omega(t) &= re^{-\psi t} \\ \omega(0) = \omega_0 &\iff r = \omega_0 \\ \omega(t) &= \omega_0 e^{-\psi t}. \end{aligned}$$

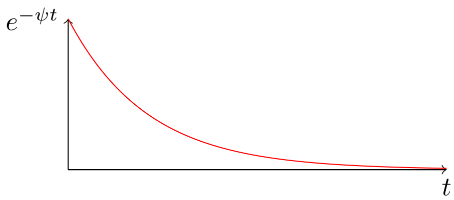


Figure 2: $\omega(t)$ normalisée par ω_0, $\psi = 0.119034$

Précisons que $\psi > 0$ et $\omega_0 \neq 0$. Par intégration et dérivation, le système suit :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t,\psi) = \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\psi\omega_0 e^{-\psi t} \\ \omega(t,\psi) = \omega_0 e^{-\psi t} \\ \theta(t,\psi) = \displaystyle\int \omega(t,\psi)\mathrm{d}t = -\dfrac{\omega_0}{\psi}e^{-\psi t} + C_\theta. \end{cases}$$

On souhaite $\theta(t,\psi)$ telle que :

$$\begin{aligned} \theta(t_\Omega,\psi) = \theta_{t_\Omega} \iff C_\theta &= \theta_{t_\Omega} + \frac{e^{-\psi t_\Omega}\omega_0}{\psi} \\ &\approx \theta_{t_\Omega}. \end{aligned}$$

De ce fait, C_θ dépend principalement de la valeur expérimentale de position de fin du hand-spinner θ_{t_Ω} mais aussi de ψ ($\frac{1}{\psi} = \tau$, est appelée constante de temps ou temps de relaxation du système, à remarquer que le même modèle mathématique se retrouve dans beaucoup de phénomènes physiques tels que la cinétique chimique ou encore la modélisation de circuits électriques du premier ordre). Dans la suite du document, on s'attardera sur les différentes manières de calculer ψ.

Une première manière de calculer une approximation de ψ est de considérer que $C_\theta = \theta_{t_\Omega}$ ainsi qu'une égalité entre une position expérimentale à un instant t_j, θ_{t_j} et une position théorique à ce même instant $\theta(t_j, \psi_{(1)})$. Posons donc la proposition suivante :

$$(C_\theta = \theta_{t_j} \wedge \theta(t_j, \psi_{(1)}) = \theta_{t_j}). \tag{1}$$

On note $\psi_{(1)}$, le coefficient ψ tel que (1) soit vraie.

$$\begin{aligned} \psi_{(1)}|(1) &\iff \frac{1}{\omega_0}(\theta_{t_j} - \theta_{t_\Omega}) = -\frac{1}{\psi_{(1)}}e^{-\psi_{(1)}t_j} \\ &\iff \begin{cases} \psi_{(1),0} = \frac{\omega_0}{\theta_{t_\Omega}}, & t_j = 0 \\ \psi_{(1),t_j} = \frac{1}{t_j}\Re\left(W\left(\frac{t_j\omega_0}{\theta_{t_\Omega} - \theta_{t_j}}\right)\right), & t_j \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fois-ci, en supposant une égalité entre la position expérimentale à l'instant $t_j \neq 0$ et l'intégrale de la vitesse sur $[0; t_j]$, on a $\psi_{(2)}$:

$$\psi_{(2)}\Big| \int_0^{t_j} \omega(t, \psi_{(2)})\mathrm{d}t = \theta_{t_j}. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_j} \omega(t,\psi_{(2)})\mathrm{d}t = \theta_{t_j} & \\ &= \theta(t_j, \psi_{(2)}) - \theta(0, \psi_{(2)}) = \theta_{t_j} \\ &= -\frac{\omega_0}{\psi_{(2)}}(e^{-\psi_{(2)}t_j} - 1) = \theta_{t_j} \\ &\iff \psi_{(2),t_j} = \frac{1}{t_j\theta_{t_j}}\left(t_j\omega_0 + \theta_{t_j}\Re\Big(W\Big(\frac{-t_j\omega_0 e^{-\frac{t_j\omega_0}{\theta_{t_j}}}}{\theta_{t_j}}\Big)\Big)\right) \\ &\implies \theta(0, \psi_{(2),t_\Omega}) = \frac{-\omega_0}{\psi_{(2),t_\Omega}} + \theta_{t_\Omega} + e^{-\psi_{\mathcal{B},t_\Omega}t_\Omega}\frac{\omega_0}{\psi_{(2),t_\Omega}} = 0 \\ &\approx e^{-\psi_{(2),t_\Omega}t_\Omega}\frac{\omega_0}{\psi_{(2),t_\Omega}}, \text{ car } \psi_{(1),0} \approx \psi_{(2),t_\Omega}. \end{aligned}$$

En supposant l'égalité entre une vitesse théorique à l'instant t_j, $v(t_j, \psi_{(3)})$ et une vitesse expérimentale à cet instant v_{t_j} :

$$\omega_{t_j} = \omega(t_j, \psi_{(3)}) \Longleftrightarrow \psi_{(3),t_j} = \frac{1}{t_j} \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega_{t_j}}\right). \tag{3}$$

La précision de la vitesse affichée par l'application (1 tour par minute) est la valeur minimale avant qu'on considère le mouvement comme arrêté, on a :

$$\begin{aligned} \omega(t_\Omega - \epsilon, \psi) &\geq \frac{\pi}{30} \\ \Longleftrightarrow \psi &\in \left]0; \frac{1}{t_\Omega} \ln\left(\frac{30\omega_0}{\pi}\right)\right]. \end{aligned}$$

A remarquer que cette relation permet d'exprimer une valeur minimale de t_Ω sans usage de variable de temps, en utilisant $\psi_{(1),0}$, $t_\Omega \geq \frac{\ln(\frac{30\omega_0}{\pi})}{\psi_{(1),0}}$.

D'autres valeurs de ψ peuvent être obtenues en considérant $\theta_{t_j} = -\frac{\omega_0}{\psi^*} e^{-\psi^* t_j} + \theta_{t_\Omega} + \frac{e^{-\psi^{**} t_\Omega} \omega_0}{\psi^{**}}$. Injectant dans ψ^{**} ou ψ^* une valeur proche de ψ, pouvant avoir été obtenue par les équations jusque-là présentées.

De cette manière, on obtient par exemple :

$$\begin{aligned} \psi^*_{(1),0} &= \frac{\omega_0 \psi_{(1),0}}{\omega_0 e^{-\psi_{(1),0} t_\Omega} + \theta_{t_\Omega} \psi_{(1),0}} \\ \psi^*_{(1),t_j} &= \frac{1}{t_j} \Re\left(W\left(\frac{\omega_0 t_j \psi_{(1),t_j}}{\omega_0 e^{-\psi_{(1),t_j} t_\Omega} - (\theta_{t_j} - \theta_{t_\Omega})\psi_{(1),t_j}}\right)\right) \\ \psi^*_{(1),\{t_j,0\}} &= \frac{\omega_0 \psi_{(1),t_j}}{\omega_0 e^{-\psi_{\theta,t_j} t_\Omega} + \theta_{t_\Omega} \psi_{(1),t_j}} \\ \psi^*_{(1),\{0,t_j\}} &= \frac{1}{t_j} \Re\left(W\left(\frac{\omega_0 t_j \psi_{(1),0}}{\omega_0 e^{-\psi_{(1),0} t_\Omega} - \psi_{(1),0}(\theta_{t_j} - \theta_{t_\Omega})}\right)\right). \end{aligned}$$

On peut aussi formuler ce problème sous forme de problème d'optimisation, dont l'énoncé général est :

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{D},\mathcal{F},\mathcal{T}_\mathrm{D}} &= \arg \min_{\psi \in [\psi_s;\psi_s+\epsilon]} \left| \sum_{\substack{f_i = \mathcal{P}_{1,i}\ddot{\theta} + \mathcal{P}_{2,i}\omega + \mathcal{P}_{3,i}\theta \\ t_i \in \mathcal{T}_\mathrm{D} \subseteq [0;t_\Omega]}} f_i(t_i,\psi) - f_{i,t_i} \right| \\
&= \arg_\psi \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left| \sum_{\substack{f_i \\ t_i \in \mathcal{T}_\mathrm{D}}} f_i(t_i,\psi) - f_{i,t_i} \right| = 0 \right) \\
&= \arg_\psi \left(\mathrm{sgn}\left(\sum_{\substack{f_i \\ t_i \in \mathcal{T}_\mathrm{D}}} f_{i,t_i} - f_i(t_i,\psi) \right) \frac{\partial}{\partial \psi} \sum_{\substack{f_i \\ t_i \in \mathcal{T}_\mathrm{D}}} f_i(t_i,\psi) = 0 \right)
\end{aligned}$$

Dans la pratique, les formes finies les plus simples fournissent une précision plus importante que les formes les plus complexes. Se poser le problème sous forme de problème d'optimisation, plus que pour le raisonnement mathématique, peut être utile pour obtenir des situations bien particulières, notamment lorsqu'on souhaite que la différence moyenne entre la théorie en certains instants choisis et la pratique en ces instants soit la plus petite possible.

En application, si on souhaite un accord entre les positions de départ et de fin, on a :

$$\psi_{\mathrm{D},\{\theta(0,\psi);\theta(t_\Omega,\psi)\},\{0;t_\Omega\},1} \Big|\Big| - \frac{\omega_0}{\psi}\left(1 + e^{-\psi t_\Omega}\right) + \theta_{t_\Omega}\Big| = 0$$

$$\Longrightarrow \psi_{\mathrm{D},\{\theta(0,\psi);\theta(t_\Omega,\psi)\},\{0;t_\Omega\},2} = \frac{1}{t_\Omega \theta_{t_\Omega}} \left(t_\Omega \omega_0 + \theta_{t_\Omega} \Re\left(W\left(\frac{t_\Omega \omega_0 e^{-\frac{t_\Omega \omega_0}{\theta_{t_\Omega}}}}{\theta_{t_\Omega}} \right)\right)\right).$$

La première solution, $\psi_{\mathrm{D},\mathcal{F},\mathcal{T}_\mathrm{D},1} | \sum_{\substack{f_i \\ t_i \in \mathcal{T}_\mathrm{D}}} f_{i,t_i} - f_i(t_i,\psi) = 0$, est une valeur qui permet un compromis moyen entre l'observation, sommant une constante et la théorie, sommant une constante et des exponentielles en fonction de ψ.

En supposant une cohérence totale entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales obtenues, on devrait obtenir $\forall t_i, \theta(t_i,\psi) = \theta_{t_i}, \omega(t_i,\psi) = \omega_{t_i}, \ddot{\theta}(t_i,\psi) = \ddot{\theta}_{t_i}$.

La seconde solution, $\psi_{\mathrm{D},\mathcal{F},\mathcal{T}_\mathrm{D},2} | \frac{\partial}{\partial \psi} \sum_{\substack{f_i \\ t_i \in \mathcal{T}_\mathrm{D}}} f_i(t_i,\psi) = 0$, ne dépend d'aucune valeur pratique si ce n'est l'ensemble $\mathcal{T}_\mathrm{D}$ qui est censé fournir une information sur la durée du mouvement (en théorie infini). Si certains ont du temps à consacrer à ce problème, une généralisation possible est la résolution de l'équation $\sum_{t \in \mathbb{T}_\mathrm{D}} \Psi(t) = 0$, où $\Psi(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \frac{\partial}{\partial \psi}\left[\sum_{j \in \mathbb{E}_\partial} \frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{A\psi t} + \sum_{j \in \mathbb{E}_\int} \int e^{A\psi t} \mathrm{d}^j t \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \psi}\left[e^{A\psi t}\left(\sum_{j \in \mathbb{E}_\partial} (A\psi)^j + \sum_{j \in \mathbb{E}_\int} \frac{1}{(A\psi)^j} \right) + \sum_{j \in \mathbb{E}_\int} C_j t^j \right] \\
&= \frac{e^{A\psi t}}{\psi}\left[\sum_{j \in \mathbb{E}_\partial} (A\psi)^j (A\psi t + j) + \sum_{j \in \mathbb{E}_\int} \frac{A\psi t - j}{(A\psi)^j} \right]
\end{aligned}$$

A la suite, le notebook Mathematica.

Fidget Hand Spinner

Equations du mouvement

Par Yvann Le Fay, 19/07

Conditions Initiales et finales

Vitesse initiale du hand spinner v_0 [rad/s] :

In[2]:= $v_0 = 150/3\,\pi;$

Durée totale du mouvement t_Ω [s] :

In[3]:= $t_\Omega = g = 39;$

Position finale x_Ω [rad] :

In[4]:= $x_\Omega = 416\,\pi;$

Instant t_j [s] XX :

In[5]:= $t_j = 16;$

Position à l'instant t_j, x_j [rad] XX :

In[6]:= $x_j = 348\,\pi;$

Vitesse à l'instant t_j du hand spinner v_j [rad/s] XX :

In[7]:= $v_j = 238/30\,\pi;$

Calcul des paramètres intermédiaires

Calcul de b_0*

In[8]:= $b_{0,e} = N\left[\frac{v_0}{x_\Omega}\right]$

Out[8]= 0.120192

Calcul de b_j*

In[9]:= $b_{j,e} = N\left[\frac{\mathrm{Re}\left(W\left(\frac{v_0\, t_j}{-x_j + x_\Omega}\right)\right)}{t_j}\right]$

Out[9]= 0.115622

Calcul de b_(pi/30)*

In[10]:= $b_{\frac{\pi}{30},e} = N\left[\frac{\log\left(\frac{30\, v_0}{\pi}\right)}{t_\Omega}\right]$

Out[10]= 0.187518

/

Calcul de b_0** XX

In[11]:= $$b_{0,e^2} = N\left[\frac{v_0\, b_{0,e}}{v_0\, e^{t_\Omega\,(-b_{0,e})} + x_\Omega\, b_{0,e}}\right]$$

Out[11]= 0.119095

Calcul de b_j** XX

In[12]:= $$b_{j,e^2} = N\left[\frac{\mathrm{Re}\left(W\left(\frac{v_0\, t_j\, b_{j,e}}{v_0\, e^{t_\Omega\,(-b_{j,e})} - (x_j - x_\Omega)\, b_{j,e}}\right)\right)}{t_j}\right]$$

Out[12]= 0.112888

Calcul de b_zj** XX

In[13]:= $$b_{j\,z,e^2} = N\left[\frac{\mathrm{Re}\left(W\left(\frac{v_0\, t_j\, b_{0,e}}{v_0\, e^{t_\Omega\,(-b_{0,e})} - b_{0,e}\,(x_j - x_\Omega)}\right)\right)}{t_j}\right]$$

Out[13]= 0.113406

Calcul de b_jz** XX

In[14]:= $$b_{j\,z,e^2} = N\left[\frac{v_0\, b_{j,e}}{v_0\, e^{t_\Omega\,(-b_{j,e})} + x_\Omega\, b_{j,e}}\right]$$

Out[14]= 0.118833

Calcul de b_jv*

In[15]:= $$b_{j\,v} = N\left[-\frac{\log\left(\frac{v_j}{v_0}\right)}{t_j}\right]$$

Out[15]= 0.115059

Calcul de b_t_Ω*

In[16]:= $$b_\Omega = N\left[1/(t_\Omega\, x_\Omega)\left(t_\Omega\, v_0 + x_\Omega\, \mathrm{Re}\left(W\left(\frac{-t_\Omega\, v_0\, e^{-t_\Omega\, v_0/x_\Omega}}{x_\Omega}\right)\right)\right)\right]$$

Out[16]= 0.119034

In[17]:= $$b_{\mathrm{opt}} = N\left[\frac{x_\Omega\, W\left(\frac{v_0\, t_\Omega\, e^{-\frac{v_0\, t_\Omega}{x_\Omega}}}{x_\Omega}\right) + v_0\, t_\Omega}{t_\Omega\, x_\Omega}, 20\right]$$

Out[17]= 0.12125432921088111115

Les équations du mouvement

Accélération [rad/s^2]

In[18]:= $a(\mathrm{t\_}, \mathrm{c\_}) := -c\, v_0\, e^{-c\, t};$

/

/

Vitesse [rad/s] et [deg/s]

In[19]:= $v(\text{t\_}, \text{c\_}) := v_0\, e^{-c\, t};$

$w(\text{t\_}, \text{c\_}) := \left\lfloor \left\lfloor -\left\lfloor \frac{v(t, c)\, 30}{\pi} \right\rfloor + \frac{30\, v(t, c)}{\pi} + 0.5 \right\rfloor + \frac{30\, v(t, c)}{\pi} \right\rfloor;$

Position [rad] et [deg]

In[21]:= $x(\text{t\_}, \text{c\_}) := x_\Omega - \frac{v_0\, (e^{-c\, t} - e^{-c\, g})}{c};$

$y(\text{t\_}, \text{c\_}) := \left\lfloor \left\lfloor -\left\lfloor \frac{x(t, c)}{2\, \pi} \right\rfloor + \frac{x(t, c)}{2\, \pi} + 0.5 \right\rfloor + \frac{x(t, c)}{2\, \pi} \right\rfloor;$

In[23]:= **FindMinimum[Abs[−Subscript[x, j] + x[0, k] + x[Subscript[t, j], k] − v_j + v[Subscript[t, j], k]], {k, $b_{0,e}$}]**

... FindMinimum: Working precision MachinePrecision is insufficient to achieve the requested accuracy or precision.

Out[23]= {0.000110289, {k → 0.117087}}

In[24]:= FindMinimum[Abs[x[0, b] + x[t_Ω, b] - x_Ω], {b, $b_{0,e}$}]

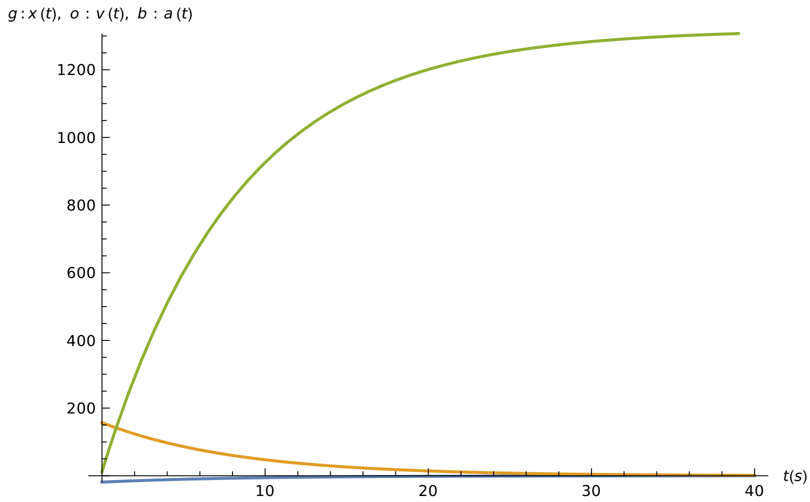
... FindMinimum: The line search decreased the step size to within the tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal but was unable to find a sufficient decrease in the function. You may need more than MachinePrecision digits of working precision to meet these tolerances.

Out[24]= {0.0000538015, {b → 0.119034}}

Resultats

In[25]:=
```
Show[Plot[{a[t, b0,e], v[t, b0,e], x[t, b0,e]}, {t, 0, Subscript[t, Ω] + 1},
   PlotRange -> {a[0, b0,e], x[Subscript[t, Ω], b0,e]}],
  AxesLabel -> {HoldForm[t[s]], RawBoxes[
     RowBox[{RowBox[{"g", ":", RowBox[{"x", RowBox[{"(", "t", ")"}]}]}], ",", " ",
    RowBox[{"o", " ", ":", " ", RowBox[{"v", RowBox[{"(", "t", ")"}]}]}], ",", " ",
    RowBox[{"b", " ", ":", " ", RowBox[{"a", RowBox[{"(", "t", ")"}], " "}]}]}]]},
  PlotLabel -> None,
  LabelStyle -> {8, GrayLevel[0]}, ImageSize -> {428, 265}, AspectRatio -> Full]
```

Out[25]=



In[26]:=

$$\text{Subscript}[\Sigma, x] = \frac{\int_0^{t_\Omega} (x[t+1, b_{0,e}] - x[t, b_{0,e}])\, dt}{(2\pi)(t_\Omega + 1)}$$

$$\text{Subscript}[\Sigma, v] = \frac{30 \int_0^{t_\Omega} (v[t, b_{0,e}] - v[t+1, b_{0,e}])\, dt}{\pi (t_\Omega + 1)}$$

Out[26]= 4.85453

Out[27]= 35.0086

In[28]:= `TraditionalForm[Table[{t, y[t, b0,e], w[t, b0,e]}, {t, 0, Subscript[t, Ω] + 1}]]`

Out[28]//TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1500 \\ 1 & 25 & 1330 \\ 2 & 46 & 1179 \\ 3 & 65 & 1046 \\ 4 & 81 & 927 \\ 5 & 96 & 822 \\ 6 & 109 & 729 \\ 7 & 120 & 647 \\ 8 & 130 & 573 \\ 9 & 139 & 509 \\ 10 & 147 & 451 \\ 11 & 154 & 400 \\ 12 & 161 & 355 \\ 13 & 166 & 314 \\ 14 & 171 & 279 \\ 15 & 176 & 247 \\ 16 & 180 & 219 \\ 17 & 183 & 194 \\ 18 & 186 & 172 \\ 19 & 189 & 153 \\ 20 & 191 & 136 \\ 21 & 193 & 120 \\ 22 & 195 & 107 \\ 23 & 197 & 95 \\ 24 & 198 & 84 \\ 25 & 200 & 74 \\ 26 & 201 & 66 \\ 27 & 202 & 58 \\ 28 & 203 & 52 \\ 29 & 204 & 46 \\ 30 & 204 & 41 \\ 31 & 205 & 36 \\ 32 & 205 & 32 \\ 33 & 206 & 28 \\ 34 & 206 & 25 \\ 35 & 207 & 22 \\ 36 & 207 & 20 \\ 37 & 207 & 18 \\ 38 & 208 & 16 \\ 39 & 208 & 14 \\ 40 & 208 & 12 \end{pmatrix}$$

In[29]:= $\left(\int_0^{t_\Omega} v[t, b_\Omega] \, dt\right) == x_\Omega$

Out[29]= True

In[30]:= $\left(\int_0^{+\text{Infinity}} v[t, b_{0,e}] \, dt\right) == x_\Omega$

Out[30]= True

In[31]:= `TraditionalForm[Table[{t, y[t, bΩ], w[t, bΩ]}, {t, 0, Subscript[t, Ω] + 1}]]`

Out[31]//TraditionalForm=

0	0	1500
1	24	1332
2	44	1182
3	63	1050
4	80	932
5	94	827
6	107	734
7	119	652
8	129	579
9	138	514
10	146	456
11	153	405
12	160	360
13	165	319
14	170	283
15	175	252
16	179	223
17	182	198
18	185	176
19	188	156
20	191	139
21	193	123
22	195	109
23	196	97
24	198	86
25	199	77
26	201	68
27	202	60
28	203	54
29	203	48
30	204	42
31	205	37
32	205	33
33	206	30
34	206	26
35	207	23
36	207	21
37	207	18
38	208	16
39	208	14
40	208	13

In[32]:= $-v_0 / b_\Omega + x_\Omega + \dfrac{v_0 \left(e^{-b_\Omega g}\right)}{b_\Omega}$

Out[32]= 2.27374×10^{-13}