Formalisation des interpolations Lagrangiennes multivariables

Yvann Le Fay

Septembre 2016

Préambule. Dans ce court papier, on généralise les interpolations de Lagrange afin de créer une fonction polynomiale multivariable f interpolant un ensemble de $(d+1)$ points dans $\mathbb{R}^{N+1}$. On propose aussi quelques exemples à la fin du papier.

1 Interpolation Lagrangienne dans $\mathbb{R}^2$

Etant donnés $(d+1)$ points distincts $(x_i, y_i)_{i=0}^{d}$ avec $x_j \neq x_{i \neq j}$, le polynôme,

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{d} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{1}$$

est appelé interpolation Lagrangienne de l'ensemble de ces points.

Notre but est de proposer une généralisation de cette interpolation à un ensemble de points appartenant à $\mathbb{R}^{N+1}$.

2 Interpolation Lagrangienne dans $\mathbb{R}^{N+1}$

Soit $X_k = \begin{pmatrix} x_{k\,1} \\ ... \\ x_{k\,N} \end{pmatrix}$, un point dans $\mathbb{R}^N$. Les $x_{k\,1}, ..., x_{k\,N}$ sont les coordonnées antécédentes à une valeur associée y_k. On a ainsi une collection de $(d+1)$ points dans $\mathbb{R}^N$, $\{X_0, ..., X_d\}$ et une collection de $(d+1)$ images associées $\{y_0, ..., y_d\}$.

On essaye de créer une fonction f qui à $(X_k)_{k=0}^{d}$, associe les images correspondantes $(y_k)_{k=0}^{d}$. Pour créer f en utilisant les interpolations de Lagrange, on décompose tous les $(y_k)_{k=0}^{d}$ en sommes de N images intermédiaires, notées $(\lambda_{k\,j})_{k=0,j=1}^{k=d,j=N}$. On décide alors de $(d+1)$ ensembles de N images intermédiaires, notons ces ensembles $(\Lambda_k)_{k=0}^{d}$, ils sont tels que pour tout $k \in [\![0; d]\!]$,

$$\Lambda_k = \left\{ \lambda_{k\,1}, ..., \lambda_{k\,N} | \sum_{i=1}^{N} \lambda_{k\,i} = y_k \right\}. \tag{2}$$

Il est important de remarquer que pour certains ensembles de points, on ne peut créer de tels ensembles (voir le premier exemple). On introduit N ensembles, notons les $(D_n)_{n=1}^{N}$, qui chacun contient toutes les coordonnées $(x_{k\,n})_{k=0}^{d}$ présentes au moins en double dans les coordonnées des $(d+1)$ points au rang n. On a la relation suivante (avec $\sqcup$, la somme disjointe) :

$$D_n = \bigcup_{\substack{k=0 \\ \mathrm{Card}(\sqcup_{v=0}^{d}\{x_{v\,n}\} \backslash \{x_{k\,n}\}) \neq d}}^{d} \{x_{k\,n}\}. \tag{3}$$

On définit au départ, $S_{-1\,n} \triangleq \varnothing$, par interpolation, on a alors :

$$P_{k\,n}(x_n) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k \\ S_{i\,n}\triangleq S_{i-1\,n}\cup\{x_{i\,n}\} \\ x_{i\,n}\notin S_{i-1\,n}}}^{d} \frac{x_n - x_{i\,n}}{x_{k\,n} - x_{i\,n}}, \tag{4}$$

le polynôme précédent (à noter que les conditions sous le produit sont primordiales, on ne doit faire le produit qu'une fois pour chaque $(x_{i\,n})_{i=0}^{d}$) remplit les conditions suivantes nécessaires à l'interpolation :

$$\begin{cases} P_{k\,n}(x_n = x_{k\,n}) = 1, \\ \forall j \in [\![0;d]\!]\setminus\{k\}\,, P_{k\,n}(x_n = x_{j\,n}) = 0. \end{cases}$$

On peut remarquer que le choix des ensembles $(\Lambda_k)_{k=0}^{d}$ peut conduire à un polynôme $(P_{k\,n})_{k=0}^{d}$ libre de x_n, pour un certain n (la raison est que les ensembles peuvent très bien remplir la condition suivante : $\mathrm{Card}(\bigcup_{k=0}^{d}\{\lambda_{k\,n}\}) = 1$). On pose $\mathcal{P}_{-1\,n} = \varnothing$, rappelons que pour tout $(x_{k\,n} \in D_n)_{n=1}^{N}$, on ne somme qu'une fois l'expression polynomiale le représentant.

On pose la proposition $\mathrm{A}_{j\,n} = (x_{j\,n} \notin D_n) \vee (P_{j\,n} \notin \mathcal{P}_{j\,n})$ où $\mathcal{P}_{j\,n}$, ensemble de polynômes, est défini par une relation de récurrence : $\mathcal{P}_{j\,n} \triangleq \mathcal{P}_{j-1\,n} \cup \{P_{j\,n}\}$.

Si toutes les conditions sont respectées, alors en suivant (1), f est définie comme la somme des interpolations de Lagrange des ensembles $(\Lambda_k)_{k=0}^{d}$:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^{m\leq N} & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{j=0 \\ \mathrm{A}_{j\,n}}}^{d} \lambda_{j\,n} P_{j\,n}(x_n). \end{array} \tag{5}$$

La fonction satisfait la condition $\forall (X = X_{k\in[\![0;d]\!]})$, $f(X) = y_k$.

Plus généralement, si on décide d'un ensemble de $N(d+1)$ fonctions de x_z représentant des puissances, notons celui-ci R_d tel que

$$R_d = \{p_{0\,1}; p_{1\,1}; ...; p_{d\,N} | \forall i \in [\![0;d]\!], \exists z \in [\![1;N]\!] | p_{i\,z}(x_z) \neq 0\}\,, \tag{6}$$

alors pour toute fonction ψ définie sur $\{X_0, ..., X_d\}$,

$$f(X) + \psi(X) \prod_{z=1}^{N} \prod_{i=0}^{d} \left(x_z - x_{i\,z} \right)^{p_{i\,z}}, \tag{7}$$

reste une interpolation de notre ensemble de $(d+1)$ points.

Exemples. Considérons les quatres points suivants, $(0,0,1), (0,1,2), (1,0,2), (1,1,e)$ qui sont tous sur $(x-y)^2 + e^{xy}$. Afin de construire les ensembles formalisés dans (2), on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x(0) + y(0) = 1 \\ x(0) + y(1) = 2 \\ x(1) + y(0) = 2 \\ x(1) + y(1) = e \end{cases}$$

Aucune solution n'existe, on ne peut donc pas appliquer (2).

Maintenant considérons un autre ensemble de points, $(0,0,1)$, $(0,1,2)$, $(1,2,9+e^2)$, $(1,3,16+e^3)$, on a :

$$\begin{cases} y(0) = 1 - x(0) \\ y(1) = 2 - x(0) \\ y(2) = 9 + e^2 - x(1) \\ y(3) = 16 + e^3 - x(1) \end{cases}.$$

On décide de choisir $x(0) = 1$, $x(1) = 2$, on a alors $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 7 + e^2$, $y(3) = 14 + e^3$. En utilisant (5), on doit maintenant calculer deux interpolations polynomiales. Le premier est une interpolation des points $(0,1)$, $(1,2)$, le second, lui, est une interpolation de $(0,0)$, $(1,1)$, $(2, 7+e^2)$, $(3, 14+e^3)$.

$$\begin{aligned} &\text{InterpolatingPolynomial}\Big[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, x\Big] + \text{InterpolatingPolynomial}\Big[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 7+e^2 \\ 3 & 14+e^3 \end{pmatrix} y\Big] \\ &\qquad = x + \frac{1}{6} y(-4y^2 - 3e^2(y^2 - 4y + 3) + e^3(y^2 - 3y + 2) + 27y - 17) + 1. \end{aligned}$$

Conclusion. On a formalisé une analogie des interpolations de Lagrange dans le cas multivariable. On a ainsi montré comment créer une interpolation polynomiale à N variables étant donné un ensemble de points dans $\mathbb{R}^{N+1}$. De plus, on a énoncé les conditions nécessaires à l'existence d'une telle construction.