Sur une mesure $\mathfrak{f}$ de réseaux

Le Fay Yvann

Juin 2018

L'objet de ce document est d'étudier les propriétés d'une fonction mesurant en quelque sorte la connectivité d'un tableau multidimensionnel (en premier lieu, une matrice).

1 Outils préalables

1.1 Fonction de padding $\mathfrak{p}$

Il nous sera nécessaire d'introduire une notation correspondant à un processus de padding d'une matrice carrée $\mathbf{A}$ d'ordre n.

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &: \mathcal{M}_{n^2} \to \mathcal{M}_{(n+2)^2} \\ &: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n\times n} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+2)\times(n+2)} . \end{aligned}$$

Une autre manière d'écrire $\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{p}((a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}) = ((\mathbb{1}_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} a_{ij})_{(i,j)\in[\![0;n+1]\!]^2})$, ou plus généralement dans le cas de tableaux hypercubiques d'ordre m, $\mathfrak{p}((a_{\mathbf{c}})_{\mathbf{c}\in[\![1;n]\!]^m}) = ((\mathbb{1}_{\mathbf{c}\in[\![1;n]\!]^m} a_{\mathbf{c}})_{\mathbf{c}\in[\![0;n+1]\!]^m})$

1.2 Fonction des voisins d'ordre K, $\mathfrak{v}$

On définit la fonction de voisinage $\mathfrak{v}$ d'ordre K de (i,j) d'une matrice carrée $\mathbf{A}$ de la manière suivante

$$\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, K) = (a_{i+nj+m})_{(n,m)\in[\![-K;K]\!]^2} \in \mathcal{M}_{(2K+1)^2}.$$

La matrice créée a alors pour taille (à noter que les coefficients ne sont pas alors forcément définis sur toute la matrice), $(2K+1)^2$. Si l'on ne renseigne aucune coordonnées alors on prend par défaut le centre de la matrice carrée comme étant les coordonnées de départ, noté $c = (n/2, n/2) = ((n-1)/2, (n-1)/2)$, selon la parité de n, le centre de la matrice créée est (i,j). Cette notion sera remplacée par la notion de boule de rayon K (1 privilégié en fait).

1.3 Coordonnées d'une matrice

On déclare la fonction $\mathfrak{C}$ qui à une matrice $(a_{ij})_{(i,j)\in C}$ renvoit C.

1.4 Notion de sous-matrice

On appelle une sous-matrice $\mathbf{A}^*$ de $\mathbf{A}$, une matrice qui a pour éléments de l'ensemble de coefficients des coefficients de $\mathbf{A}$ à coordonnées incluses dans $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$, ainsi

$$\mathbf{A}^* \subset (\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})}) \Longleftrightarrow \mathbf{A}^* = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)\subset\mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Ainsi on a par exemple $\mathbf{A} \subset \mathfrak{p}(\mathbf{A})$, une notion assez naturelle.

1.5 Fonction OU inclusive et comptant σ d'une matrice

La fonction OU inclusive (comptant car de $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})}$ n'est rien d'autre que la somme des coefficients a_{ij},

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})} a_{ij}.$$

1.6 Fonction de concaténation $\mathfrak{k}$ de matrices

On définit la fonction $\mathfrak{k}$ de concaténation de j^2 fois la matrice carrée d'ordre n, $\mathbf{A}$ comme étant

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &: \mathcal{M}_{n^2} \to \mathcal{M}_{(nj)^2} \\ &: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n\times n} \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(nj)\times(nj)} . \end{aligned}$$

1.7 Fonction $\mathfrak{z}$ de mise à zéro d'une sous-matrice

On définit la fonction $\mathfrak{z}$ comme la fonction qui à une sous-matrice $\mathbf{A}^*$ de $\mathbf{A}$ renvoie la matrice dont les coefficients sont définis sur $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$, en particulier, sur $\mathfrak{C}(\mathbf{A})\backslash\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)$, les coefficients sont à zéro, sinon, ils restent inchangés, voir proposition 7.

2 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{R}$ dans le cas des matrices (et en norme finie)

2.1 L'ensemble $\mathfrak{R}(n)$ des matrices binaires $\mathfrak{g}$-n-équivalentes

2.1.1 Définition

On introduit ici un ensemble de matrices binaires très intéressant dans le cadre de l'étude de $\mathfrak{g}$. On note $\circ$ le produit coefficient par coefficient (produit d'Hadamard) et $\mathfrak{R}(n)$, l'ensemble des matrices binaires $\mathfrak{g}$-n-équivalentes, il est défini par

$$\mathfrak{R}(n) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3\times 3}\{0,1\} : a_{ij}\sigma(\mathbf{A} \circ \mathbf{C}_+) = n\}, \qquad \text{où } \mathbf{C}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Les ensembles

Ici $\star$ dénote un nombre dans $\{0,1\}$, à chaque apparition, elle est indépendante par rapport aux autres apparitions (i.e ce n'est pas la même $\star$).

$$\mathfrak{R}(0) = \{\begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix}\}, \mathfrak{R}(1) = \{\begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}\},$$

$$\mathfrak{R}(2) = \{\begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}\},$$

$$\mathfrak{R}(3) = \{\begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}\},$$

$$\mathfrak{R}(4) = \{\begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}\},$$

$$\mathfrak{R}(5) = \{\begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}\}, \forall n \geq 6, \mathfrak{R}(n) = \{\}.$$

2.1.3 Quelques propriétés

Proposition 1.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), a_{ij}\sigma(\mathbf{AC}_+) = b_{ij}\sigma(\mathbf{BC}_+) = n.$$

Preuve. D'après la définition de $\mathfrak{R}(n)$. □

Remarque. *Si l'on se place dans le cas $n \leq 0$, on peut se débarasser du coefficient du centre de la matrice devant σ.*

Proposition 2.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n \leq \sigma(\mathbf{A}) \leq n + 4.$$

Preuve.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n = a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 0 & a_{i+1j} & 0 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 0 & a_{i-1j} & 0 \end{bmatrix} \leq a_{ij}\sigma(\mathbf{A}) \leq a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 1 & a_{i+1j} & 1 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 1 & a_{i-1j} & 1 \end{bmatrix} = n + 4.$$

□

Proposition 3.

$$\mathcal{M}_{3\times3}\{0,1\} = \bigsqcup_{i=0}^{5} \mathfrak{R}(i).$$

Preuve. Il suffit de raisonner sur les cardinalités en remarquant que par définition, les $\mathfrak{R}(i)$ sont disjoints et inclus dans $\mathcal{M}_{3\times3}\{0,1\}$, $\forall 0 \leq n \neq m \leq 5, \mathfrak{R}(n) \cap \mathfrak{R}(m) = \{\}$.

$$\begin{aligned} |\bigsqcup_{i=0}^{5} \mathfrak{R}(i)| = \sum_{i=0}^{5} |\mathfrak{R}(i)| = 2^8 + 2^4 + 4\times 2^4 + 6 \times 2^4 + 4 \times 2^4 + 2^4 = 2^9 \\ = |\mathcal{M}_{3\times3}\{0,1\}|. \end{aligned}$$

□

2.2 Fonction de comptage μ de sous-matrices $\mathfrak{g}$-n-équivalentes

2.2.1 Définition

Soit $\mathbf{A}$, une matrice quelconque de coefficients binaires ou non définis, les coefficients non définis sont considérés comme nuls. La fonction de comptage de sous-matrices de $\mathbf{A}^*$ elle-même, sous matrice de $\mathbf{A}$ est défini par

$$\mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n) = |\{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) : \mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1) \in \mathfrak{R}(n)\}|.$$

On acceptera de noter $\mu(\mathbf{A}^*, n)$, dans le cas où $\mathbf{A} = \mathfrak{p}(\mathbf{A}^*)$.

2.3 Mesure microscopique $\mathfrak{g}$ d'une matrice binaire carrée d'ordre 3

2.3.1 Définition

On définit une première mesure $\mathfrak{g}$, appelée mesure microscopique, puisqu'intervenant que sur des matrices carrée binaire d'ordre 3 (i.e, image de $\mathfrak{v}$ d'ordre 1), qui nous permettra ensuite de définir la mesure $\mathfrak{f}$ pour une matrice binaire carrée d'ordre n. On décide de 5 coefficients positifs α_i (on pourrait travailler sur les négatifs, mais ça rendrait impossible la formulation certaines inégalités).

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &: \mathcal{M}_{3\times3}\{0,1\} \to \mathbb{R} \\ &: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} \end{bmatrix} \mapsto \mathfrak{g}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(\mathbf{A})$ peut s'écrire de plein de manières différentes et les fonctions que nous avons introduites vont nous permettre de mieux apercevoir les propriétés de $\mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = a_{ij}(\alpha_1 + \alpha_2(a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{i-1j}) + \\ \alpha_3(a_{i-1j}(a_{i+1j} + a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{i+1j}(a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{ij+1}a_{ij-1}) + \\ \alpha_4(a_{i-1j}(a_{ij+1}(a_{ij-1} + a_{i+1j}) + a_{i+1j}a_{ij-1}) + a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) + \\ \alpha_5 a_{i-1j}a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) \end{aligned}$$

2.3.2 Propriétés

Proposition 4.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B})$$

Preuve. L'un remarquera premièrement que $\mathfrak{g}$ ne dépend pas des termes aux sommets, ainsi il suffit d'étudier respectivement, pour $n = 0,1,2,3,4,5$, les $1,1,4,6,4,1$ cas. On vérifiera que pour chaque n, l'expression de $\mathfrak{g}$ pour chacun des cas correspondant, reste inchangée. L'expression de $\mathfrak{g}$ a en fait été construite pour respecter cette propriété, en effet, les termes des a_{ij} permutent autour du centre sans passer par les sommets. □

Proposition 5.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n \geq 1), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \binom{n-1}{i-1}.$$

Preuve. Par la proposition 4, il suffit de calculer $\mathfrak{g}$ pour une matrice $\mathbf{A}$ dans chacun des $\mathfrak{R}(i)$· □

Proposition 6. $\mathfrak{g}$ *est une fonction croissante de* n.

Preuve. Proposition 5. □

Preuve. Remarquons que puisque les $a_{ij} \geq 0$ et que $n = a_{ij}(a_{i+1j} + a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i-1j})$, n est une fonction croissante des a_{ij} (i.e de tous les a_{ij}, et inversement, les a_{ij} croient quand n croit), et plus particulièrement de ceux n'étant pas sur les sommets, or $\mathfrak{g}$ est croissante de ces mêmes a_{ij}, donc $\mathfrak{g}$ est croissante de n. □

Remarque. *Cette propriété se généralise au cas à* m*-dimensions.*

Proposition 7.

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathfrak{g}(\mathbf{A}^*) \leq \mathfrak{g}(\mathbf{A}).$$

Preuve. Il suffit de définir, artificiellement $a^*_{ij} = 0$ si $(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \backslash \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)$, afin de pouvoir poser $\mathfrak{g}$ même si $\mathbf{A}^*$ n'est pas remplie,

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathfrak{z}(\mathbf{A}^* = (a^*_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)}, \mathbf{A}) = \left(\left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} & \text{si } (i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right. \right)_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Finalement, on a $\forall (i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \backslash \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*), a^*_{ij} = 0 \leq a_{ij} \leq 1$, or $\mathfrak{g}$ est une fonction croissante des a_{ij} (et a^*_{ij}), d'où l'inégalité voulue. □

Remarque. *L'égalité a lieu si et seulement si les coefficients dont a été privée* $\mathbf{A}^*$ *sont sur les sommets ou si* $\mathbf{A}^*, \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$. *La propriété se généralise au cas à* m*-dimensions.*

2.4 Mesure globale $\mathfrak{f}$ d'une sous matrice d'une matrice binaire carrée d'ordre n selon $\mathfrak{g}$ d'ordre 3

2.4.1 Définition

On définit $\mathfrak{f}$ de $\mathbf{A}^*$ dans l'environnement $\mathbf{A}$ comme étant la somme des mesures microscopiques $\mathfrak{g}$ des matrices voisines d'ordre 1 aux coordonnées de $\mathbf{A}^*$.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1)).$$

Par soucis d'écriture, quand on notera $\mathfrak{f}(\mathbf{A})$, on entendra $\mathfrak{f}(\mathbf{A}, \mathfrak{p}(\mathbf{A}))$.

2.4.2 Propriétés

Proposition 8.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1)\mathbf{C}_+).$$

Preuve. L'opération $\mathbf{AC}_+$ consiste à mettre à 0 les coefficients des sommets, or $\mathfrak{g}$ ne dépend pas des sommets, d'où l'égalité. $\square$

Remarque. *On peut absolument remplacer* $\mathbf{C}_+$ *par toute matrice carrée d'ordre* 3 *telle que* $\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$ *soit incluse dans cette matrice.*

Proposition 9. *On note par abus,* $\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{g}(\mathbf{A})$ *où* $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{5} \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, j)\mathfrak{g}(n).$$

Preuve. Pour toute sous-matrice $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}\{0,1\}$, sachant qu'on calcule $\mathfrak{f}$ selon l'environnement $\mathbf{A}$,

$$\mathfrak{z}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{z}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A}).$$

Or $\forall (i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*), \exists n \in [\![0;5]\!] : \mathfrak{f}(\mathfrak{z}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A})) = \mathfrak{g}(n)$, pour $n = 0$, le terme qu'on somme est nul, notons le n correspondant pour la coordonnée (i,j), $n((i,j))$, alors

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) &= \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{f}(\mathfrak{z}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A})) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{f}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A}) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1)) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(n((i,j))) \\
&= \sum_{n=1}^{5} \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n)\mathfrak{g}(n).
\end{aligned}$$

$\square$

Preuve. Cela suit de la proposition 3, 4 et de la définition de μ. $\square$

Proposition 10. *Pour toute matrice carrée* $\mathbf{A}$ *d'ordre* n,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{f}(\mathbf{A}) \leq \mathfrak{f}((1)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}) \\
&\quad = (n-2)^2(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5) + 4(n-2)(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4) + 4(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3).
\end{aligned}$$

Preuve. Le choix de cette matrice comme argument maximum de $\mathfrak{f}$ est trivial (croissance de $\mathfrak{f}$ pour tous les coefficients de la matrice d'entrée), l'un remarquera enfin que pour $\mathbf{M} = (1)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$,

$$\mu(\mathbf{M}, 5) = (n-2)^2, \quad \mu(\mathbf{M}, 4) = 4(n-2), \quad \mu(\mathbf{M}, 3) = 4.$$

$\square$

Proposition 11.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) + \mathfrak{f}(\mathbf{A} \backslash \mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \mathfrak{f}(\mathbf{A}).$$

Preuve. Par la définition de $\mathfrak{f}$ en remarquant que $\mathfrak{C}(\mathbf{A}) = \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \sqcup \mathfrak{C}(\mathbf{A} \backslash \mathbf{A}^*)$. □

Proposition 12.

$$n\mathfrak{f}(\mathbf{A}) \leq \mathfrak{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}, n))$$

Preuve. Notons $\mathbf{A}^\star$, la matrice ayant pour coefficients intérieurs, ceux de $\mathbf{A}$, et sur les contours, 0, ainsi $\mathbf{A}^\star$ est paddée. Par l'isolement de celle-ci, il est clair qu'on a l'égalité, or $\mathfrak{f}$ est une fonction croissante des produits des $a_{ij} > 0$ voisins, ainsi lorsqu'elle n'est pas isolée (i.e $\mathbf{A}$), on a $\mathfrak{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}, n)) \geq \mathfrak{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}^\star, n))$. □

Remarque. *Il y a égalité lorsque* $\mathbf{A}$ *a été paddée,* $\mathbf{A} = \mathfrak{p}(\mathbf{B})$.

Proposition 13. *Pour toute sous-matrice* $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}\{0,1\}$,

$$\sum_{j=0}^{5} \mu(\mathfrak{z}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}), \mathbf{A}, j) = |\mathfrak{C}(\mathbf{A})| = n^2.$$

Preuve. Résultat trivial d'après la proposition 3 et la définition de μ. □

3 Généralisation

3.1 L'ensemble $\mathfrak{R}(n)$ des matrices binaires m-multidimensionnelles $\mathfrak{g}$-n-équivalentes

On considère les notations et objets suivants, l'ensemble des tableaux d'ordre m ayant 3^m éléments binaires (i.e, des tableaux de taille $3 \times 3 \times ... \times 3$, m fois), noté $\mathcal{H}_3^m\{0,1\}$,

$$\mathcal{H}_3^m\{0,1\} = \{(a_\mathbf{c} \in \{0,1\})_{\mathbf{c}\in\{-1,0,1\}^m}\}.$$

De même pour l'ensemble des tableaux, plus généralement, d'ordre m ayant n^m éléments binaires, $\mathcal{H}_n^m\{0,1\}$,

$$\mathcal{H}_{2n+1}^m\{0,1\} = \{(a_\mathbf{c} \in \{0,1\})_{\mathbf{c}\in[\![-n,n]\!]}\}$$
$$\mathcal{H}_{2n}^m\{0,1\} = \{(a_\mathbf{c} \in \{0,1\})_{\mathbf{c}\in[\![-n+1,n]\!]}\}$$

Notons c, le m-plet coordonnées du centre d'un élément $\mathbf{A}$ de $\mathcal{H}_3^m\{0,1\}$, i est un nombre entier caractérisant la norme que l'on considère et enfin $B(||.||_i, 1, c)$, la boule discrète de norme $||.||_i$, de rayon 1 et de centre c,

$$B(||.||_i, 1, c) = \{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{Z}^m : ||c\mathbf{c}||_1 \leq 1\}.$$

On peut remarquer qu'en fait $B(||.||_i, 1, c) = B(||.||_1, 1, c)$ pour tout i dans $\mathbb{R}^*$, on fera la distinction de la boule en norme $||.||_\infty$ qui elle, par contre, englobe les 3^m voisins autour de c. Dans la suite du document, on s'intéresse principalement à la norme finie, on choisiera la plus stricte $||.||_1$. Toutes les notations étant introduites, on peut alors écrire

$$\mathfrak{R}^m(n) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{H}_3^m\{0,1\} : a_c \sum_{\mathbf{c}\in B(||.||_i,1,c,\mathbf{A})} a_\mathbf{c} = n\}.$$

Dans le cas où $m = 2$ (i.e $\mathcal{H}_3^m\{0,1\} = \mathcal{M}_{3\times3}\{0,1\}$), on obtient la définition vue en 2.1.2, même analogie pour $\mathfrak{g}$, ainsi $\mathfrak{R}(n)$ traité dans la partie précédente est en fait $\mathfrak{R}^2(n)$.

3.2 Généralisation de $\mathfrak{g}$ à des tableaux à m-dimensions

Avec les mêmes notations qu'en 3.1, en considérant des tableaux hypercubiques d'ordre 3

$$\mathfrak{g}(\mathbf{A}) = a_c \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B(||.||_1, 1, c, \mathbf{A}) \backslash \{c\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}} a_{\mathbf{c}}.$$

La définition de $\mathfrak{f}$ coincide avec celle donnée en 2.4.1. On remarque que le produit des $\mathbf{c} \in \{\} \subset B(||.||_1, 1, c, \mathbf{A}) \backslash \{c\}$ est ici posé comme étant égal à 1, de façon à ce qu'on ait

$$\mathfrak{g}(\mathbf{A}) = a_c \left[\alpha_1 + \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B(||.||_1, 1, c, \mathbf{A}) \backslash \{c\} \wedge \mathfrak{C} \neq \varnothing} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}} a_{\mathbf{c}} \right].$$

Proposition 14.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}^m(n), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B}).$$

Preuve. Premièrement ayons en tête le résultat suivant, soient A et B deux ensembles finis de même cardinal m,

$$\forall n \in [\![0; m]\!], |A' \subseteq A : |A'| = n| = |B' \subseteq B : |B'| = n| = \binom{m}{n}.$$

En effet, si l'on considère une bijection de A vers B, alors elle est encore une bijection de tout $A' \subseteq A$ vers un certain $B' \subseteq B$. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}^m(n)$, pour $n = 0$, l'égalité est immédiate.
Posons $n \geq 1$, ainsi $a_c, b_c = 1$, et pour alléger les notations, $B(||.||_i, 1, c, \mathbf{A}) = B_{\mathbf{A}}$.

$$\begin{aligned} n = \sum_{\mathbf{c} \in B_{\mathbf{A}}} a_{\mathbf{c}} &= \sum_{\mathbf{c} \in B_{\mathbf{B}}} b_{\mathbf{c}} \\ &= \sum_{\mathbf{c} \in B_{\mathbf{A}} \backslash \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\}} 1 = |B_{\mathbf{A}} \backslash \{\mathbf{c}^{'} : a_{\mathbf{c}'} = 0\}| = |B_{\mathbf{B}} \backslash \{\mathbf{c}^{'} : b_{\mathbf{c}'} = 0\}|. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut appliquer le résultat qu'on a rappelé juste avant, il existe une bijection pour toute sous-partie de $B_{\mathbf{A}} \backslash \{\mathbf{c}^{'} : a_{\mathbf{c}'} = 0\}$ vers une sous-partie de $B_{\mathbf{B}} \backslash \{\mathbf{c}^{'} : b_{\mathbf{c}'} = 0\}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{A}} \backslash \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} = \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{B}} \backslash \{\mathbf{c}' : b_{\mathbf{c}'} = 0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \\ \Rightarrow & \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{A}} \backslash \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\} \backslash \{c\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} = \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{B}} \backslash \{\mathbf{c}' : b_{\mathbf{c}'} = 0\} \backslash \{c\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \\ & = \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{A}} \backslash \{c\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}} a_{\mathbf{c}} = \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{B}} \backslash \{c\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|} \prod_{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}} b_{\mathbf{c}} \\ & = \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

□

Proposition 15. *La proposition 5 tient encore dans le cas général.*

Preuve. Conséquence immédiate de la propriété 14, notamment par la remarque

$$|\{B' \subseteq B : |B'| = n\}| = \binom{m}{n}.$$

En effet, sachant que pour $n \geq 1$, la coordonnée du centre n'est pas à compter,

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n \geq 1) : \mathfrak{g}(\mathbf{A}) &= \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{A}} \backslash \{\mathbf{c}' : a_{c'} = 0\} \backslash \{c\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\{B_{\mathbf{A}}^{'} \subseteq B_{\mathbf{A}} \backslash \{\mathbf{c}^{'} : a_{\mathbf{c}'=0}\} \backslash \{c\}| : |B'_{\mathbf{A}}| = i-1\}| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \binom{n-1}{i-1}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 16. *La propriété 13 se généralise, pour toute sous matrice* $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A} \in \mathcal{H}_n^m\{0,1\}$,

$$\sum_{j=0}^{3^m \text{ ou } 2m+1} \mu(\mathfrak{z}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}), \mathbf{A}, j) = n^m.$$

Remarque. 3^m *lorsqu'on se place dans le cas de la boule à la norme infinie, sinon* $2m+1$.

Preuve. Résultat trivial d'après la définition de μ, l'indice de fin de sommation vient du fait que

$$|B(||.||_i, 1, c, \mathbf{A})| = \begin{cases} 2m+1 = |c| + m|\{-1,1\}| & \text{si } i \in \mathbb{R}^* \\ 3^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} & \text{si } i = \infty \end{cases}$$

□

Proposition 17. *La proposition 9 se généralise,*

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{3^m \text{ ou } 2m+1} \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n) \mathfrak{g}(n).$$

Remarque. *Même remarque concernant les indices de fin de sommation.*

Preuve. Voir preuve de la proposition 9. □

Proposition 18. *Généralisation de la proposition 10, pour tout tableau m-hypercube* $\mathbf{A}$ *d'ordre n, en norme finie,*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(\mathbf{A}) &\leq \mathfrak{f}((1)_{\mathbf{c} \in [\![1;n]\!]^m}) \\
&= \sum_{k=0}^{m} 2^{m-k} \binom{m}{k} (n-2)^k \sum_{i=1}^{m+k+1} \alpha_i \binom{m+k}{i-1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} 2^{2m} \binom{m}{k} (n-2)^k, \qquad \forall i \in [\![1; 2m+1]\!], \alpha_i = 1 \\
&= (4n-4)^m.
\end{aligned}$$