Une fonction sur des tableaux binaires

Le Fay Yvann

Juin 2018, Juin 2019

Résumé

On introduit une structure de tableaux à m-dimensions sur un monoïde $(A,+)$ puis une fonction sur les tableaux binaires. On étudie quelques propriétés de cette fonction.

1 Définitions

1.1 Tableaux et structures

Un tableau $\mathbf{t}$ de dimension $m, n \in \mathbb{N}^*$, de structure C isomorphe à une structure normalisée, $C' \subset [\![1; n]\!]^m$ (c'est-à-dire, à un décalage prêt) est une suite $(a_c)_{c \in C}$, autrement dit, c'est l'application

$$\mathbf{t} : \begin{cases} C \to A \\ c \ \mapsto a_c \end{cases}$$

On note la structure, aussi appelée, les coordonnées, C de $\mathbf{t}$, $\mathfrak{C}(\mathbf{t})$.

Pour $m = 1$, on représente le tableau par $[a_1, \ldots, a_n]$, pour $m = 2$, $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$.

La structure n'étant pas forcément complète, c'est-à-dire pas forcément égale, $[\![1; n]\!]^m$, on représente les coefficients n'existant pas par $\square$ ou par des   .

On définit l'application $\mathfrak{z}$ de mise à zéros des coefficients non définis, plus précisément,

$$\forall \mathbf{t} \in T_{n,m}, \quad \mathfrak{z}(\mathbf{t}) = (a_c \mathbb{1}_{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t})})_{c \in \mathfrak{K}(\mathfrak{C}(t))}$$

où l'application $\mathfrak{K}$ est définie

$$\mathfrak{K} : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{Z}^m) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}^m) \\ S = \{x_1, \ldots, x_k\} \mapsto [\![\min_{1 \leq j \leq m, x \in S} x(j); \max_{1 \leq j \leq m, x \in S} x(j)]\!]^m \end{cases}$$

Avec $x(j)$, la j-ème composante de la cordonnée x. Autrement dit, c'est une application qui renvoie la plus petite structure de la forme d'un hypercube, contenant entièrement la structure d'entrée. On comprend bien ici le rôle de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{z}$, cela permet de mettre à 0 toutes les cases dans la plus petite structure de la forme d'un hypercube contenant le tableau d'entrée.

L'ensemble des tableaux de dimension n, m est noté $T_{n,m}$. L'ensemble des tableaux est noté T. On peut munir $T_{n,m}$ d'une operation $\oplus$ définie par

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{n,m}, \quad \mathbf{t}_1 \oplus \mathbf{t}_2 = \begin{cases} \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1) \cup C(\mathbf{t}_2) \to A \\ c \ \mapsto (\mathfrak{z}(\mathbf{t}_1) + \mathfrak{z}(\mathbf{t}_2))(c) \end{cases}$$

.

Cette opération assure dans le cas où A est un groupe additif, la structure de groupe additif à $(T_{n,m}, \oplus)$. Si on s'est donné une multiplication $\cdot$, on peut aussi munir $(A, \oplus)$ du produit d'Hadamard associé, noté $\otimes$, défini par

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{n,m}, \quad \mathbf{t}_1 \oplus \mathbf{t}_2 = \begin{cases} \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1) \cup C(\mathbf{t}_2) \to A \\ c \ \mapsto (\mathfrak{z}(\mathbf{t}_1) \cdot \mathfrak{z}(\mathbf{t}_2))(c) \end{cases}$$

1.2 Fonction de masquage

La fonction de masquage noté $\cap^*$ est définie par

$$\cap^* : \begin{cases} T_{n,m} \times \mathcal{P}([\![1;n]\!]^m) \to T_{n,m} \\ (\mathbf{t},S) \mapsto \mathbf{t}|_S \end{cases}$$

Cela correspond à restreindre le tableau à une sous structure S.

1.3 Fonction de padding

On définit la fonction de padding $\mathfrak{p}$ par

$$\mathfrak{p} : \begin{cases} T_{n,m} \to T_{n+2,m} \\ t \mapsto \begin{cases} [\![0;n+1]\!]^m \to A \\ c \mapsto \begin{cases} \mathfrak{z}(t)(c) \text{ si } c \in [\![1;n]\!]^m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On peut par exemple voir que dans le cas où $\mathbf{t} \in T_{n,2}$, on a

$$\mathfrak{p}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{t} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+2)\times(n+2)} .$$

On pourrait par ailleurs effectuer un réindicage afin de se ramener à la structure canonique dans $[\![1;n+2]\!]$, mais celui-ci n'a que peu d'intérêt en plus de coûter cher en terme d'efficacité rédactionnelle. C'est pour cela qu'on privilégera la représentation en tableau lorsqu'elle est possible, les problèmes d'indicage n'ayant aucun effet.

1.4 Boules

On appelle boule de rayon $R \in \mathbb{N}$, de $T_{n,m}$, de centre $c_0 \in [\![1;n]\!]^m$, l'ensemble

$$\mathfrak{B}(c_0,R) = \{c \in [\![c_0 - R; c_0 + R]\!]^m : ||cc_0|| \leq R\}$$

où $||\cdot||$ est une norme sur $\mathbb{Z}^m$. On notera $||\cdot||$ la norme 1 si rien d'autre n'est précisé.

1.5 Voisinage

On définit la fonction de voisinage d'un tableau $\mathbf{t} \in T_{n,m}$ au centre $c \in \mathbb{Z}^m$ (on préférera $c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t})$ afin que le voisinage ne soit pas vide) de rayon R, par

$$\mathfrak{v}(c,\mathbf{t},R) = \cap^*(\mathbf{t},\mathfrak{B}(c,R))$$

Bien que formellement, le résultat soit encore un élément de $T_{n,m}$, on comprend vite qu'il est isomorphe à un tableau de taille $T_{2R+1,m}$ après restriction et réindicage dont on se taira bien de les formaliser. Ainsi, on a par exemple

$$\mathfrak{v}((n,n),(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;2n-1]\!]}),1) = \begin{bmatrix} & a_{n-1,n} & \\ a_{n,n-1} & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ & a_{n+1,n} & \end{bmatrix}$$

Ou encore, si on se place au bord,

$$\mathfrak{v}((1,1),(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;2n-1]\!]}),1) = \begin{bmatrix} & & \\ & a_{1,1} & a_{1,2} \\ & a_{2,1} & \end{bmatrix}$$

1.6 Sous tableaux

On peut définir une relation d'ordre (démonstration immédiate) sur $T_{n,m}$, qu'on note abusivement $\subset$, elle est définie par

$$\forall \mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1 \Longleftrightarrow \cap^*(\mathbf{t}_1,\mathfrak{C}(\mathbf{t}_2)) = \mathbf{t}_2$$

1.7 Fonction OU

On définit la fonction OU, σ par

$$\mathfrak{p} : \begin{cases} T_{n,m} \to A \\ \mathbf{t} = (a_c)_{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t})} \mapsto \sum_{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t})} a_c \end{cases}$$

2 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{R}$ dans le cas $m = 2$

Dans toute la suite, $A = \{0,1\}$, muni de l'opération $+$ suivante

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0 \\ 0+1 = 1+0 &= 1 \\ 1+1 &= 1 \end{aligned}$$

et du produit classique. On aurait pu se placer dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.1 Une relation d'équivalence sur $T_{3,2}$

Posons $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Remarquons une chose, la seule boule qui contient plus d'éléments que les autres est celle pour la norme infinie. Selon qu'on soit dans le cas fini ou infini, on utilise $\mathbf{C}$, respectivement $\mathbf{Id}$. Plaçons-nous sans perte de généralité dans le cas où l'on considère la norme finie pour nos boules, la relation d'équivalence (démonstration immédiate) $\sim$ est définie par

$$\forall \mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2 \in T_{3,2}, \quad \mathbf{t}_1 \sim \mathbf{t}_2 \Longleftrightarrow a_{2,2}\sigma(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{C}) = a_{2,2}\sigma(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{C})$$

Remarquons qu'on aurait pu se passer de l'utilisation du produit en profitant de $\cap^*$ et de $\mathfrak{B}$. On note $\mathfrak{o}(\mathbf{t}) = a_{2,2}\sigma(\mathbf{t} \otimes C)$, l'ordre de $\mathbf{t}$.

Où l'on a considéré les structures canoniques ($[\![1;3]\!]^2$ pour avoir noté $a_{2,2}$ le coefficient du milieu).

Proposition 1. *Les classes d'équivalence de $\sim$ sont pour la norme finie*

$$\mathfrak{R}(0) = \{ \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \}, \mathfrak{R}(1) = \{ \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix} \}, \mathfrak{R}(2) = \{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \}$$

$$\mathfrak{R}(3) = \{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \}$$

$$\mathfrak{R}(4) = \{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \}$$

$$\mathfrak{R}(5) = \{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \}$$

De plus,

$$|\mathfrak{R}(0)| = 2^8$$
$$\forall n \in [\![1;5]\!], \quad |\mathfrak{R}(n)| = 2^4 \binom{4}{n-1}$$

De même dans le cas de la norme infinie,

$$|\mathfrak{R}(0)| = 2^8$$
$$\forall n \in [\![1;9]\!], \quad |\mathfrak{R}(n)| = \binom{8}{n-1}$$

Remarque. *On obtiendrait non pas* 6 *classes d'équivalences mais* 10 *dans le cas de la norme infinie, elles sont évidentes.*

Démonstration. AQT □

Proposition 2. *En norme finie (en norme infinie, il y égalité)*

$$\forall \boldsymbol{t} \in \mathfrak{R}(n), \quad n \leq \sigma(\boldsymbol{t}) \leq n+4$$

Démonstration. AQT □

2.2 Fonction de comptage μ de sous tableaux dans $\mathfrak{R}(n)$

On définit la fonction qui compte le nombre de sous tableaux dans $\mathfrak{R}(n)$ d'un tableau dans un environnement donné par

$$\forall \mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2 \in T_{n,2} : \mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1, \quad \mu(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_1,n) = |\{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2) : \mathfrak{v}((i,j),\mathbf{t}_1,1) \in \mathfrak{R}(n)\}|$$

Proposition 3. *On a dans le cas où l'environnement n'a aucune conséquence* $(\mathfrak{p}(\boldsymbol{t}),\mathfrak{z}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t},\ldots)$,

$$\forall \boldsymbol{t} \in T_{n,2}, \quad \mu(\boldsymbol{t},n) = |\{\boldsymbol{t'} \in T_{3,2} : \boldsymbol{t'} \subset \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t'} \in \mathfrak{R}(n)\}$$

Démonstration. AQT □

2.3 Mesure locale $\mathfrak{g}$ pour la norme finie

On définit une première mesure $\mathfrak{g}$ (pour la norme finie), appelée mesure locale, puisqu'intervenant que sur des tableaux de $T_{3,2}$, (i.e, image de $\mathfrak{v}$ d'ordre 1, c'est-à-dire qu'on considère une boule de rayon 1, ce qui est un choix), qui nous permettra ensuite de définir la mesure $\mathfrak{f}$ sur $T_{n,2}$ puis par généralisation, sur $T_{n,m}$. On décide de 5 coefficients α_i (on pourrait travailler sur les négatifs, mais ça rendrait impossible la formulation certaines inégalités).

$\mathfrak{g}$ peut s'écrire de plusieurs manières, la plus rudimentaire bien qu'elle nous aide pas à comprendre ce qu'elle représente, est

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(\mathbf{t}) = a_{ij}(\alpha_1 + \alpha_2(a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{i-1j}) + \\ \alpha_3(a_{i-1j}(a_{i+1j} + a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{i+1j}(a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{ij+1}a_{ij-1}) + \\ \alpha_4(a_{i-1j}(a_{ij+1}(a_{ij-1} + a_{i+1j}) + a_{i+1j}a_{ij-1}) + a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) + \\ \alpha_5 a_{i-1j}a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1})\end{aligned}$$

Là où les coefficients ne sont pas définis, on les pose à 0 (application de $\mathfrak{z}$).

Proposition 4.

$$\forall \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2 \in \mathfrak{R}(n), \quad \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}_1) = \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}_2)$$

Démonstration. Dans le cas de la norme finie, l'un remarquera premièrement que $\mathfrak{g}$ ne dépend pas des termes aux sommets, ainsi il suffit d'étudier respectivement, pour $n =$ 0,1,2,3,4,5, les 1,1,4,6,4,1 cas. On vérifiera que pour chaque n, l'expression de $\mathfrak{g}$ pour chacun des cas correspondant, reste inchangée. L'expression de $\mathfrak{g}$ a en fait été construite pour respecter cette propriété, en effet, les termes des a_{ij} permutent autour du centre sans passer par les sommets. Dans le cas de la norme infinie, le même raisonnement pourra être conduit lorsqu'on aura proposé l'expression généralisée. □

Proposition 5.

$$\forall n \geq 1, \boldsymbol{t} \in \mathfrak{R}(n), \quad \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \binom{n-1}{i-1}$$

Démonstration. Par la proposition 4, il suffit de calculer $\mathfrak{g}$ pour un tableau dans chacun des $\mathfrak{R}(n)\cdot$ □

Proposition 6. $\mathfrak{g}$ *est une fonction croissante de* n.

Démonstration. Vor proposition 5. □

Proposition 7.

$$\forall \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2 \in T_{3,2} : \boldsymbol{t}_2 \subset \boldsymbol{t}_1, \quad \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}_2) \leq \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}_1)$$

Démonstration. Il suffit de voir que $\mathfrak{g}(\mathbf{t}_2) = \mathfrak{g}(\mathfrak{z}(\mathbf{t}_2))$, d'où la comparaison,

$$\forall (i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1) \backslash \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2), \mathfrak{z}(\mathbf{t}_2)(i,j) = 0 \leq \mathbf{t}_1(i,j) \leq 1$$

or $\mathfrak{g}$ est une fonction croissante des coefficients du tableaux, d'où l'inégalité voulue. □

2.4 Mesure globale $\mathfrak{f}$ sur $T_{n,2}$

On définit $\mathfrak{f}$ de $\mathbf{t}_2$ dans l'environnement $\mathbf{t}_1$, avec $\mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1$ par

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_1) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i,j),\mathbf{t}_1,1))$$

Par souci d'écriture, on notera $\mathfrak{f}(\mathbf{t})$ quand l'environnement n'a aucun effet, i.e par exemple, $\mathfrak{p}(\mathbf{t})$, $\mathfrak{z}(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}$..

Proposition 8. *On note* $\mathfrak{g}(\mathfrak{R}(n)) = \mathfrak{g}(n)$, *alors*

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_1) = \sum_{j=1}^{5} \mu(\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_1,j)\mathfrak{g}(j)$$

Démonstration. On a directement par le partitionnement en classes d'équivalences,

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_1) = \sum_{k=1}^{5} \mathfrak{g}(k) \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2), \mathfrak{v}((i,j),\mathbf{t}_1,1)=j} 1$$

□

Proposition 9. *Pour tout tableau $\boldsymbol{t} \in T_{n,2}$,*

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}(\boldsymbol{t}) &\leq \mathfrak{f}((1)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}\\&= (n-2)^2(\alpha_1+4\alpha_2+6\alpha_3+4\alpha_4+\alpha_5)+4(n-2)(\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4)+4(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3).\end{aligned}$$

Démonstration. Le choix de ce tableau comme maximum est trivial. Enfin, on remarquera par jeux de découpages que pour $\mathbf{Id} = (1)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$,

$$\mu(\mathbf{Id},5) = (n-2)^2, \quad \mu(\mathbf{Id},4) = 4(n-2), \quad \mu(\mathbf{Id},3) = 4.$$

□

Proposition 10.

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_1) + \mathfrak{f}(\boldsymbol{t}_1 \backslash \boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_1) = \mathfrak{f}(\boldsymbol{t}_1)$$

Démonstration. $\mathfrak{C}(\mathbf{t}_2) \sqcup \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1 \backslash \mathbf{t}_2) = \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1)$. □

Proposition 11. *Pour tout $\boldsymbol{t}_1 \in T_{n,2}$*

$$\sum_{j=0}^{5} \mu(\mathfrak{z}(\boldsymbol{t}_1),j) = |\mathfrak{K}(\mathfrak{C}(\boldsymbol{t}_1))| \leq n^2$$

Démonstration. AQT ($\mathfrak{z}$ non inutile !), l'égalité est très souvent vraie puisqu'il suffit qu'il y ait un coefficient défini sur une bordure (droite, bas). □

3 Généralisation pour $m \geq 3$, norme finie et infinie

3.1 Une relation d'équivalence sur $T_{3,m}$

En norme finie, on utilise $\mathbf{C} = \mathfrak{z}((1)_{c\in\mathfrak{B}((2)_m,1)})$, où l'on a utilisé la structure canonique pour noter le centre d'une telle boule par $(2,\ldots,2)$. On décrit par exemple $\mathbf{C}$ pour $m = 3$ en écrivant ses trois couches,

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

En norme infinie, c'est $\mathbf{Id}$ qui est utilisée. La relation d'équivalence est la même,

$$\forall \mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2 \in T_{3,m}, \quad \mathbf{t}_1 \sim \mathbf{t}_2 \iff a_{(2)_m}\sigma(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{C}) = a_{2,2}\sigma(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{C})$$

A voir qu'on notera plus tard le centre d'un tableau de $T_{3,m}$ par $\mathbf{c}$, ici c'est la structure canonique qui a été choisie. L'ordre est encore noté $\mathfrak{o}$.

Proposition 12. *On a clairement,*

$$\forall n,m \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{R}(n,m) = \{\boldsymbol{t} \in T_{3,m} : \mathfrak{o}(\boldsymbol{t}) = n\}$$

On ne représente pas les classes d'équivalences de $\sim$ pour des raisons évidentes. De plus pour la norme finie,

$$\begin{aligned}|\mathfrak{R}(0,m)| &= 2^{3^m-1}\\ \forall n \in [\![1;2m+1]\!], \quad |\mathfrak{R}(n,m)| &= 2^{3^m-2m-1}\binom{2m}{n-1}\\ \forall n > 2m+1, \quad |\mathfrak{R}(n,m)| &= 0\end{aligned}$$

Pour la norme infinie,

$$|\mathfrak{R}(0,m)| = 2^{3^m-1}$$
$$\forall n \in [\![1;3^m]\!], \quad |\mathfrak{R}(n,m)| = \binom{2^{3^m-1}}{n-1}$$
$$\forall n > 3^m, \quad |\mathfrak{R}(n,m)| = 0$$

Démonstration. Considérons un tableau $\mathbf{t} \in T_{3,m}$. On remarque que $\mathfrak{o}(\mathbf{t}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{z}(\mathbf{t}))$, ainsi pour déterminer $T_{3,m}/\sim$, il est possible de remplacer $\mathbf{t}$ par $\mathfrak{z}(\mathbf{t})$. Cela est équivalent à dire que tous les coefficients de $\mathbf{t}$ sont définis, i.e, sa structure est complète.

En norme finie, ou infinie, un élément de $T_{3,m}$ est un élément de $\mathfrak{R}(0,m)$ si et seulement si son coefficient au centre, $a_{(2)_m}$ est nul, il n'y aucune contrainte sur les autres coefficients. Ainsi, $\mathfrak{R}(0,m)$ est isomorphe à $\{0,1\}^{3^m-1}$.

En norme finie, on trouve que $\mathfrak{B}((2)_m,1)$ est isomorphe à l'ensemble

$$\{(0)_m,(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1}),(-1,\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1}),\ldots,(\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1},1)\}$$

qui est de cardinal $2m+1$. Ainsi pour construire un élément de $\mathfrak{R}(n,m)$, on dispose des choix pour les coefficients n'intervenant pas dans la définition de $\mathfrak{g}$ (ou encore de $\mathfrak{o}$), c'est-à-dire, ceux qui sont en dehors de $\mathfrak{B}((2)_m,1)$, au nombre de 3^m-2m-1. Le premier est déjà placé au centre, il ne reste plus qu'à placer les $n-1$ autres 1 dans $\mathfrak{B}((2)_m,1)\backslash\{(0)_m\}$, soit $\binom{2m}{n-1}$. L'expression coïncide avec le cas $n > 2m+1$.

En norme infinie, la totalité du tableau est englobé dans $\mathfrak{B}((2)_m,1)$, d'où le résultat. Il est clair qu'il y a 3^m+1 classes d'équivalences. □

Proposition 13. *En norme finie (en norme infinie, il y a égalité),*

$$\forall \boldsymbol{t} \in \mathfrak{R}(n,m), \quad n \leq \sigma(\boldsymbol{t}) \leq n + 3^m - 2m - 1$$

Démonstration. AQT □

3.2 Fonction de comptage μ de sous tableaux dans $\mathfrak{R}(n,m)$

On définit de même la fonction μ sur $T_{3,m}$ par

$$\forall \mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2 \in T_{n,3} : \mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1, \quad \mu(\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_1,n) = |\{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2) : \mathfrak{v}(c,\mathbf{t}_1,1) \in \mathfrak{R}(n,m)\}|$$

Proposition 14. *On a dans le cas où l'environnement n'a aucune conséquence* $(\mathfrak{p}(\boldsymbol{t}),\mathfrak{z}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t},\ldots)$

$$\forall \boldsymbol{t} \in T_{n,m}, \quad \mu(\boldsymbol{t},n) = |\{\boldsymbol{t'} \in T_{3,m} : \boldsymbol{t'} \subset \boldsymbol{t},\boldsymbol{t'} \in \mathfrak{R}(n,m)\}|$$

Démonstration. AQT □

3.3 Mesure locale $\mathfrak{g}$ pour la norme finie et infinie

On définit une fonction semblable à celle en 2.3 mais généralisée pour m et la norme. On pourrait par ailleurs changer le rayon de la boule considérée.

$$\forall \mathbf{t} \in T_{3,m}, \quad \mathfrak{g}(\mathbf{t}) = a_{\mathbf{c}} \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}(\mathbf{c},\mathbf{t})\backslash\{\mathbf{c}\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{c \in \mathfrak{C}} a_c$$

Proposition 15.

$$\forall \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2 \in \mathfrak{R}(n,m), \quad \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}_1) = \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}_2)$$

Démonstration. On travaille sur des tableaux à structure complète pour des raisons évidentes (rien ne change si les coefficients ne sont pas définis, ils sont posés à 0). Soient $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathfrak{R}(n,m)$, de suites respectivement a et b, notons pour alléger les notations, $\mathfrak{B}(\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}, 1)$ par $\mathfrak{B}_1$, de même pour le deuxième tableau, $\mathfrak{B}_2$. On a $n = 0$ si et seulement si $a_{\mathbf{c}} = 0$ et la propriété est immédiate. Supposons $n \geq 1$, les deux tableaux étant équivalents, on a

$$n = \sum_{c \in \mathfrak{B}_1} a_c = \sum_{c \in \mathfrak{B}_2} b_c = |\mathfrak{B}_1 \backslash \{c : a_c = 0\}| = |\mathfrak{B}_2 \backslash \{c : a_c = 0\}|$$

Ces deux ensembles sont donc en bijection, leurs sous-parties le sont donc aussi, ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_1 \backslash \{\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}, c : a_c = 0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} &= \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_2 \backslash \{\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}, c : b_c = 0\}} \\ &= \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_1 \backslash \{\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{c \in \mathfrak{C}} a_c \\ &= \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_2 \backslash \{\mathbf{c}_{\mathbf{t}_2}\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{c \in \mathfrak{C}} b_c\end{aligned}$$

Ce qui correspond bien après avoir rajouté le coefficient au centre, à la définition de $\mathfrak{g}$. □

Proposition 16.

$$\forall \boldsymbol{t} \in \mathfrak{R}(n,m), \quad \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \binom{n-1}{i-1}$$

Démonstration. En effet, pour $n = 0$, le résultat est évidemment vrai. Pour $n \geq 1$, on peut ne pas écrire le produit par $a_{\mathbf{c}}$, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B} \backslash \{\mathbf{c}, c : a_c = 0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\{S \subset \mathfrak{B} \backslash \{\mathbf{c}, c : a_c = 0\} : |S| = i-1\}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \binom{n-1}{i-1}\end{aligned}$$

□

Proposition 17.

$$\forall \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2 \in T_{3,m} : \boldsymbol{t}_2 \subset \boldsymbol{t}_1, \quad \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}_2) \leq \mathfrak{g}(\boldsymbol{t}_1)$$

Démonstration. AQT □

3.4 Mesure globale $\mathfrak{f}$ sur $T_{n,m}$

On définit de même qu'en 2.4, $\mathfrak{f}$ de $\mathbf{t}_2$ dans l'environnement $\mathbf{t}_1$ avec $\mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1$ par

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) = \sum_{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}(c, \mathbf{t}_1, 1))$$

Proposition 18. *On note* $\mathfrak{g}(\mathfrak{R}(n,m)) = \mathfrak{g}(n)$*, alors*

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_1,j)\mathfrak{g}(j)$$

A voir que la somme s'arrête à $2m+1$ *pour la norme finie,* 3^m *pour la norme infinie.*
Proposition 19. *De même, en utilisant le partitionnement par les classes d'équivalences.*

De même, on note $\mathfrak{f}(\mathbf{t})$ quand l'environnement n'a aucun effet.

Proposition 20. *Pour tout* $\boldsymbol{t} \in T_{3,m}$*, et toute partition de sa structure* $\mathfrak{C}(\boldsymbol{t}) = \bigsqcup_{i=1}^{r} \mathfrak{C}_i$*,*

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{t}) \geq \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\cap^*(\boldsymbol{t},\mathfrak{C}_i))$$

C'est une propriété de suradditivité. Il y a égalité si par exemple les sous tableaux sont isolés par des 0 *les uns des autres, d'une couche de largeur* 1 *pour des boules de rayon* 1*,* R *pour des boules de rayon* R*. Il y a plus généralement égalité quand* $\mathfrak{f}(\cap^*(\boldsymbol{t},\mathfrak{C}_i)) = \mathfrak{f}(\cap^*(\boldsymbol{t},\mathfrak{C}_i),\boldsymbol{t})$*.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 17. □

Proposition 21. *Pour tout* $\boldsymbol{t} \in T_{3,m}$ *et toute partition de sa structure,* $(\mathfrak{C}_i)$*, on a*

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{f}(\cap^*(\boldsymbol{t},\mathfrak{C}_i),\boldsymbol{t})$$

Le raisonnement est très proche de la proposition précédente mais la démonstration formelle se fait bien très bien par récurrence sur le nombre d'éléments dans la partition en utilisant la proposition 10, qui se généralise bien évidemment à $T_{n,m}$*.*
Proposition 22. *La proposition 11. se généralise aussi à* $T_{n,m}$*.*

Démonstration. AQT □

Proposition 23. *La proposition 9. se généralise, pour tout tableau* $\boldsymbol{t} \in T_{n,m}$*, en norme finie,*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}(\boldsymbol{t}) &\leq \mathfrak{f}((1)_m) \\
&= \sum_{k=0}^{m} 2^{m-k} \binom{m}{k} (n-2)^k \sum_{i=1}^{m+k+1} \alpha_i \binom{m+k}{i-1} \\
&= (4n-4)^m \quad \forall i \in [\![1; 2m+1]\!], \alpha_i = 1
\end{aligned}$$