

# Interpolations multivariables sur l'hypercube

Yvann Le Fay

Novembre 2017

**Préambule.** Dans ce court papier dont l'écriture a été motivée par les contraintes posées par la généralisation des interpolations Lagrangiennes qu'on a proposé dans un autre papier, on s'attachera à présenter plusieurs méthodes d'interpolation polynomiale, sur des sommets de l'hypercube, sans contrainte supplémentaire.

## 1 Construction des interpolations simples sur l'hypercube

Soit  $H_i = \begin{pmatrix} h_{i1} \\ \dots \\ h_{iN} \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^N$ , un sommet du  $N$ -cube, noté  $\mathcal{H}^N$ . Les valeurs binaires intérieures de ce point sont les valeurs antécédentes à une valeur associée  $y_k$  dans  $\mathbb{R}$ . On a ainsi une collection de  $(d+1)$  sommets distincts de  $\mathcal{H}^N$ ,  $\{H_0, \dots, H_d\}$  et une collection de  $(d+1)$  images associées  $\{y_0, \dots, y_d\}$ .

On peut facilement expliciter au moins deux interpolations de nos deux ensembles.

Posons  $\mathfrak{F}_{\stackrel{\rightrightarrows}{\mathcal{H}}}$ , l'ensemble des fonctions qui renvoient à 0, 1 et à 1, 0 (voir 2.). Définissons un ensemble  $R_d$  de fonctions (pouvant être constantes) tel que

$$R_d = \{p_{i,j} | \forall (i, j) \in \llbracket 0; d \rrbracket \times \llbracket 1; N \rrbracket, p_{i,j}(h_{i,j}) \neq 0\}.$$

Une première interpolation est alors défini comme ci-suit

$$P : \mathbb{R}^{m \leq N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$X \mapsto \sum_{i=0}^d y_i \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ \bar{h}_{i,j} \in \mathfrak{F}_{\stackrel{\rightrightarrows}{\mathcal{H}}}}}^n (-1)^{1-h_{i,j}} (X_i - \bar{h}_{i,j})^{p_{i,j}(X_i)} \right]. \quad (1)$$

Une seconde est

$$Q : \mathbb{R}^{m \leq N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$X \mapsto \sum_{i=0}^d y_i \left[ \prod_{j=1}^n (1 - X_i - h_{i,j} + 2X_i h_{i,j})^{p_{i,j}(X_i)} \right]. \quad (2)$$

## 2 L'ensemble $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$

### 2.1 Définitions des ensembles fonctionnelles $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$ et $\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$ .

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons} = \{f : \mathcal{H} \cup A \rightarrow \mathcal{H} \cup B \mid \begin{smallmatrix} f(0)=1 \\ f(1)=0 \end{smallmatrix}\} \quad (3)$$

$$\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} = \{f : \mathcal{H} \cup A \rightarrow \mathcal{H} \cup B \mid \begin{smallmatrix} f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{smallmatrix}\} \quad (4)$$

### 2.2 Automorphisme involutif canonique entre $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$ et $\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$ .

Soit  $\mathcal{I}$  définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} &\leftrightarrow \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons} \\ f &\mapsto -f + 1. \end{aligned} \quad (5)$$

$\mathcal{I}$  est un automorphisme involutif entre  $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$  et  $\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$ .

### 2.3 Composition entre $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$ et $\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$ .

$$\forall f, g \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}, f \circ g \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} \quad (6)$$

$$\forall f \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}, i \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}, f \circ i \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} \quad (7)$$

$$i \circ f \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} \quad (8)$$

$$\forall i, j \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}, i \circ j \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} \quad (9)$$

En prenant  $n > 0$ ,  $i(x) = x^n \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$ ,  $\forall f \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$ , (7) et (8) permettent d'écrire que

$$f(x^n) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons} \text{ et } f(x)^n \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}. \quad (10)$$

### 2.4 Produit entre $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$ et $\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$ .

$$\forall f, g \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}, f \times g \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons} \quad (11)$$

$$\forall i, j \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}, i \times j \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} \quad (12)$$

La seconde affirmation de (10) peut aussi être obtenue à partir de (11) en posant  $f = g$ .

### 2.5 Somme de fonctions dans $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$ et $\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$ .

$$\forall \mathbb{F} \subset \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}, \#(\mathbb{F})^{-1} \sum_{f_i \in \mathbb{F}} f_i \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons} \quad (13)$$

$$\forall \mathbb{F} \subset \text{Id}_{\mathcal{H}}, \#(\mathbb{F})^{-1} \sum_{f_i \in \mathbb{F}} f_i \in \text{Id}_{\mathcal{H}} \quad (14)$$

## 2.6 Convexité de $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$ et $\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$ .

$\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$  est convexe, en effet on a bien :

$$\forall f, g \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}, \forall t \in \mathbb{R}, tf + (1-t)g \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}. \quad (15)$$

L'application  $\mathcal{I}$  étant linéaire,  $\mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}$  est aussi convexe.

## 2.7 Ensemble de fonctions constante sur $\mathbb{E}$ , $\mathfrak{F}_{\mathbb{E},e}$ .

Notons  $\mathfrak{F}_{\mathbb{E},e}$ , l'ensemble des fonctions qui évaluées sur  $E$  renvoient  $e$ .

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{E},e} = \left\{ f : E \cup A \rightarrow C \mid \forall g, \forall j \in \mathbb{E}, f(j) = e \right\} \quad (16)$$

$$\mathbb{E}' \subset \mathbb{E} \Leftrightarrow \mathfrak{F}_{\mathbb{E},e} \subset \mathfrak{F}_{\mathbb{E}',e}. \quad (17)$$

Ainsi on a en particulier pour les éléments neutres de  $+$ ,  $\times$  et  $\times^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}, \forall g \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}, \\ \forall j \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H},0}, j + f \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}, j + g \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\forall j \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H},1}, j \times f, j \times^{-1} f \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}, j \times g, j \times^{-1} g \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}. \quad (19)$$

## 2.8 Explicitation de certaines formes de $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons}$ .

$$\begin{aligned} \text{Soit } f \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} \cap \mathbb{R}[X] \\ \Leftrightarrow \exists! P \in \mathbb{R}[X] \mid (f(X) = XP(X) \text{ et } P(1) = 1) \\ \Leftrightarrow \exists! P \in \mathbb{R}[X] \mid (f(X) = XP(X) \text{ et } X-1 \text{ divise } P(X)-1) \\ \Leftrightarrow \exists! Q \in \mathbb{R}[X] \mid (f(X) = X(1 + (X-1)Q(X))). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } f \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H}}^{\rightleftharpoons} \cap \mathbb{R}[X] \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}(f) = -f + 1 \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}} \cap \mathbb{R}[X] \\ \Leftrightarrow \exists! Q \in \mathbb{R}[X] \mid (f(X) = -X(1 + (X-1)Q(X)) + 1). \end{aligned} \quad (21)$$

A remarquer à fortiori que :

$$\forall Q : \mathcal{H} \cup A \rightarrow \mathcal{H} \cup B, f(X) = X(1 + (X-1)Q(X)) \in \mathfrak{F}_{\text{Id}_{\mathcal{H}}}. \quad (22)$$