# Le modèle des tas de sables abéliens et effondrements dirigés

Yvann Le Fay

Octobre-Février 2019

# Introduction

Il s'agit dans ce papier, d'étudier le modèle ASP sur une large classe de graphes de manière probabiliste.

# Approche probabiliste

L'objet de cette partie est la généralisation du papier [DD16] et il est conseillé de le lire. Par souci de compréhension, on fait le choix dans toute la suite de représenter les sommets d'un graphe par une coordonnée $(x, t) \in \mathbb{Z}^2$. Le graphe de cette partie admet un nombre infini de sommets.

**Définition 1.** *Soit $E \subset \mathbb{Z}$ un ensemble fini et $\varphi : E \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une application servant de pondération, on définit $\mathcal{G}(E, \varphi) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \{((x,t),(x+\delta,t+1))_{\varphi(\delta,t)} : (x,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \delta \in E\})$. Le seuil d'un site de la ligne $t$ est donc $S(t) = \sum_{\delta \in E} \varphi(\delta, t)$. On se donne $E_0$, l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ tels que le site $(x, 0)$ est susceptible de s'effondrer initialement et pour tout $t > 0$, $E_t = \{x \in \mathbb{Z} : x + \delta \in E_{t-1}, \delta \in E\}$. Alors $E_t$ représente l'ensemble des sites de la ligne $t$ pouvant être perturbés lors d'un effondrement en $t = 0$.*

**Exemple 1.** *$\mathcal{G}(\{-1, 0, 1\}, \tilde{1})$ est le graphe présenté dans [DD16], chaque sommet $(x, t)$ communique, lors de son effondrement, 3 grains de sable à la ligne suivante, 1 à $(x-1, t+1)$, 1 à $(x, t+1)$ et 1 à $(x+1, t+1)$.*

**Exemple 2.** *$\mathcal{G}(\{-1, 0, 1\}, (\delta, t) \mapsto |\delta|(t+1))$ est telle que chaque sommet $(x, t)$ communique encore à $(x-1, t+1)$, $(x, t+1)$ et $(x+1, t+1)$, selon la quantité $|\delta|(t+1)$. Il n'y a ici pas conservation de la quantité de grains qui passent d'une ligne à une autre car la capacité d'absorption des lignes augmente linéairement en fonction de la ligne à laquelle on est. Aussi, un site communique moins de grains en dessous de lui qu'à gauche en dessous de lui et à droite en dessous de lui.*

**Théorème 1.** *Après effondrement selon une distribution $\mathbb{P}(x, 0)$, la probabilité qu'un site $(x, t)$ pour $t > 0$ topple, $\mathbb{P}(x, t)$, vérifie*

$$\mathbb{P}(x,t) = \frac{1}{S(t)} \sum_{\delta \in E} \varphi(\delta, t-1) \mathbb{P}(x - \delta, t-1)$$

*et*

$$\tilde{\mathbb{P}}(X,t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(i,t) X^i = \tilde{\mathbb{P}}(X,0) \prod_{t'=1}^{t} \frac{1}{S(t')} \sum_{\delta \in E} X^\delta \varphi(\delta, t'-1)$$

*Démonstration.* Soit $\eta \in \Omega_{\mathcal{G}_E}$, initialement, la ligne 0 s'effondre selon une distribution au choix $\mathbb{P}(x, 0)$. La stabilisation d'une ligne $t$ est $\mathcal{S}_t = \prod_{x \in E_t} T_{(x,t)}$ et $\mathcal{S} = \prod_{t=0}^{\infty} \mathcal{S}_t$, où $T$ est l'opérateur de toppling classique.

Soit $\eta^{(t-2)}$ la configuration obtenue après *topple* des sites sur les $(t-2)$ premières lignes, remarquons que la ligne $t-1$ est encore stable et ses hauteurs sont donc distribuées uniformément. Posons pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $A_i$ : $(i, t-1)$ *topple* de probabilité $\mathbb{P}(i, t-1)$, pour tout $k \in E^{t-1}$, $B_k$ : $T_{(k,t-1)}$ *rend instable* $(x, t)$. Ici, $E^{-1}(x) = \{x - \delta : \delta \in E\}$ représente l'ensemble des sites pouvant communiquer avec $(x, t)$. On décompose la stabilisation de la ligne $t-1$ par les états intermédiaires suivants correspondant à l'exécution des séquences de *toppling* de gauche à droite sur la ligne $t-1$ pour tous les sites pouvant être perturbés, pour tout $k \in E_{t-1}$, $\eta^{(t-2)}_{i_k} = T_{(k,t-1)} \eta^{(t-2)}_{i_k - 1}$ avec $\eta^{(t-2)}_0 = \eta^{(t-2)}$ et $(i_k)$ une énumération de $E_{t-1}$ par ordre croissant, i.e $i_{\min E_{t-1}} = 1$, etc.

Soit $k \in E^{-1}(x)$, $T_{(k,t-1)}$ rend instable $(x, t)$ si et seulement si $(k, t-1)$ s'est effondré et que la somme de la contribution de l'effondrement de $(k, t-1)$, $\varphi(x - k, t-1)$, à la hauteur de $(x, t)$ de la configuration après les effondrements des sites précédents $(k, t-1)$, c'est-à-dire $\eta^{(t-2)}_{i_k - 1}$ est plus grande que $S(t)$. Ainsi,

$$\forall k \in E^{-1}(x),\ \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(\eta^{(t-2)}_{i_{k-1}}(x,t) \in [\![ S(t) - \varphi(x-k, t-1); S(t) - 1 ]\!] \cap A_k)$$

En décomposant l'événement, pour tout $k \in E^{-1}(x)$,

$$\mathbb{P}(B_k) = \sum_{I \subset E^{-1}(x)} \underbrace{\mathbb{P}\left( \eta_{i_{k-1}}^{(t-2)}(x,t) \in [\![S(t) - \varphi(x-k,t-1); S(t)-1]\!] \middle| \bigcap_{i \in I} A_i \bigcap_{i \in E^{-1}(x) \setminus I} \bar{A}_i \cap A_k \right)}_{=X_I}$$
$$\times \mathbb{P}\left( \bigcap_{i \in I} A_i \bigcap_{i \in E^{-1}(x) \setminus I} \bar{A}_i \cap A_k \right)$$

Les hauteurs entre $S(t) - \overbrace{\sum_{i \in I \cap \{j \in E^{-1}(x) : i_j < i_k\}} \varphi(x-i,t-1)}^{S^*} - \varphi(x-k,t-1)$ et $S(t) - S^* - 1$ sont exactement celles qui conviennent à ce que $B_k$ soit réalisé. Les hauteurs étant distribuées uniformément, on a

$$\mathbb{P}(X_I) = \frac{\varphi(x-k,t-1)}{S(t)}$$

On en déduit que

$$\forall k \in E^{-1}(x), \mathbb{P}(B_k) = \frac{\varphi(x-k,t-1)}{S(t)} \mathbb{P}(k,t-1)$$

Ceux qui ne communiquent pas avec $(x,t)$ ne peuvent entraîner un topple sur $(x,t)$,

$$\forall k \in E^{t-1} \setminus E^{-1}(x), \mathbb{P}(B_k) = 0$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(x,t) = \sum_{k \in E^{-1}(x)} \mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{S(t)} \sum_{\delta \in E} \varphi(\delta, t-1) \mathbb{P}(x-\delta, t-1) \tag{1}$$

On introduit alors la série génératrice associée, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}(X,t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(i,t) X^i \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{X^i}{S(t)} \sum_{\delta \in E} \varphi(\delta,t-1) \mathbb{P}(x-\delta,t-1) \\
&= \frac{1}{S(t)} \sum_{\delta \in E} X^\delta \varphi(\delta,t-1) \sum_{i \in \mathbb{Z}} X^{i-\delta} \mathbb{P}(x-\delta,t-1) \\
&= \frac{1}{S(t)} \sum_{\delta \in E} X^\delta \varphi(\delta,t-1) \tilde{\mathbb{P}}(X,t-1) \\
&= \left( \prod_{t'=1}^{t} \frac{1}{S(t')} \sum_{\delta \in E} X^\delta \varphi(\delta,t'-1) \right) \tilde{\mathbb{P}}(X,0)
\end{aligned}$$

On aurait pu, comme Dhar, utiliser une transformée de Fourier discrète, et on a,

$$\tilde{\mathbb{P}}(\theta,t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(x,t) e^{i\theta x} \qquad \mathbb{P}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix\theta} \left( \prod_{t'=1}^{t} \frac{1}{S(t')} \sum_{\delta \in E} e^{i\delta\theta} \varphi(\delta,t'-1) \right) \tilde{\mathbb{P}}(\theta,0) \mathrm{d}\theta$$

Et plus généralement, pour tout $(x,t)$, $(y,t')$, avec $t' \geq t$, notons $\mathbb{P}(x,t|y,t')$ la probabilité que $(x,t)$ s'effondre sachant la distribution initiale et que $(y,t')$ s'est effondré, posons

$$\tilde{\mathbb{P}}(\theta,t|x,t) = e^{i\theta x} + \sum_{x' \in \mathbb{Z} \setminus \{x\}} \mathbb{P}(x',t|x,t) e^{ix'\theta}$$

On a alors

$$\mathbb{P}(y,t'|x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iy\theta}\Big(\prod_{\tau=t+1}^{t'}\frac{1}{S(\tau)}\sum_{\delta\in E}e^{i\delta\theta}\varphi(\delta,\tau-1)\Big)\tilde{\mathbb{P}}(\theta,t|x,t)\mathrm{d}\theta$$

Si l'on suppose que $\varphi$ est indépendante du temps, celle-ci devient avec $\tilde{A}(\theta)=\sum_{\delta\in E}e^{i\delta\theta}\varphi(\delta)$,

$$\mathbb{P}(y,t'|x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-iy\theta}\tilde{A}(\theta)^{t'-t}\tilde{\mathbb{P}}(\theta,t|x,t)\mathrm{d}\theta$$

$\square$

**Exemple 3.** *Une application directe du théorème précédent pour $\mathcal{G}([\![-n,n]\!],\tilde{1})$ et $\mathbb{P}(0,0)=1$, donne*

$$(2n+1)^t\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}(x,t)X^{t+x}=\left(\sum_{i=0}^{2n}X^i\right)^t$$

*On peut remarquer que la fonction définie par $\alpha(x,t)=(2n+1)^t\mathbb{P}(x,t)$ représente le nombre de chemins possibles partant de $(0,0)$ arrivant à $(x,t)$ en s'autorisant des déplacements selon $(+k,+1)$ pour $k\in[\![-n,n]\!]$, et dans ce cas, cela correspond à développer le polynôme en $X$ écrit. Dans le cas particulier du graphe $\mathcal{G}(\{-1,0,1\},\tilde{1})$ et $\mathbb{P}(0,0)=1$, qui est étudié par Dhar dans [DD16], on obtient d'une part,*

$$\mathbb{P}(x,t)=\frac{3^{-t}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ix\theta}(1+2\cos(\theta))^t\mathrm{d}\theta$$

*et d'une autre part, $3^t\mathbb{P}(x,t)$ est le coefficient en $t+x$ de $(1+x+x^2)^t$ soit encore,*

$$\mathbb{P}(x,t)=\frac{(-1)^t}{3^t}\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}\binom{2k}{k+x}$$

**Théorème 2.** *Si le graphe $G=\mathcal{G}(E,\varphi)$ est centré, si $\varphi$ indépendante de $t$ et $\mathbb{P}(0,0)=1$, alors le flux carré moyen, $\Phi(t)$ est pour une constante $\gamma(G)$ précisée dans la démonstration, tel que*

$$\Phi(t)=\frac{4}{\gamma(G)}\sqrt{\frac{t}{\pi}}+O(1)$$

*Démonstration.* On définit la variable aléatoire qui compte le nombre de sites s'effondrant à la ligne $t$,

$$s(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{1}(x,t)$$

On souhaite calculer, comme Dhar dans son [DD16], le flux carré moyen noté $\Phi(t)$, on reconduit son raisonnement dans un cas plus général. Introduisons les mêmes notations, $X=(x,t)$ et $Y=(y,t')$ deux sites quelconques, $\mathbb{P}(X,Y)$ la probabilité que $X$ et $Y$ s'effondrent lors de l'avalanche, si $t'=t$, on notera $\mathbb{P}(X,Y)=\mathbb{P}(x,y,t)$. On a

$$\Phi(t)=\mathbb{E}s^2(t)=\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\mathbb{P}(x,y,t)=\sum_{(x,y)\in E_t^2}\mathbb{P}(x,y,t)\tag{2}$$

Si $x\neq y$, on a en conduisant un raisonnement semblable à celui mené pour le premier théorème,

$$\mathbb{P}(x,y,t)=\frac{1}{S(t)^2}\sum_{(\delta_1,\delta_2)\in E^2}\mathbb{P}(x-\delta_1,y-\delta_2,t-1)\varphi(\delta_1,t-1)\varphi(\delta_2,t-1)\tag{3}$$

et,

$$\mathbb{P}(x,x,t)=\mathbb{P}(x,t) \tag{4}$$

A partir de maintenant, on considère que la distribution initiale est $\mathbb{P}(0,0)=1$. La probabilité qu'un site $X=(x,t)$ s'effondre dans une avalanche déclenchée par $Y$ est notée $\mathbb{P}_2(X|Y)$. Comme $\varphi$ ne dépend pas de $t$ et qu'on a supposé qu'il y avait effondrement qu'en $(0,0)$, cette probabilité n'est autre que celle déjà calculée après translation de l'origine, plus précisément,

$$\mathbb{P}_2(X|Y)=\mathbb{P}(X-Y)$$

Soit $Z\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, la fonction $(x,y,t)\mapsto\mathbb{P}_2((x,t)|Z)\mathbb{P}_2((y,t)|Z)$ respecte l'équation linéaire (3), il existe donc $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, telle que

$$\mathbb{P}(x,y,t)=\sum_{Z\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} f(Z)\mathbb{P}_2((x,t)|Z)\mathbb{P}_2((y,t)|Z) \tag{5}$$

Alors (4) donne,

$$\mathbb{P}(x,t)=\sum_{Z\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} f(Z)\mathbb{P}_2^2(x,t|Z) \tag{6}$$

Soit $t\in\mathbb{N}$, $F(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}}f((x,t))$, en reprenant (4) avec la définition de $\Phi$, et en remarquant que comme $\varphi$ ne dépend pas de la variable $t$, on a $\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}(x,t)=1$, on obtient,

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\sum_{Z\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} f(Z)\mathbb{P}_2((x,t)|Z)\mathbb{P}_2((y,t)|Z)=\sum_{t'=0}^{t}\sum_{(x',x,y)\in\mathbb{Z}^3} f(Z)\mathbb{P}(x-x',t-t')\mathbb{P}(y-x',t-t')\\&=\sum_{t'=0}^{t}\sum_{x'\in\mathbb{Z}} f((x',t'))=\sum_{t'=0}^{t}F(t')\end{aligned}$$

Posons pour tout $t\in\mathbb{N}$, $K(t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}^2(x,t)$, et introduisons les séries génératrices, $\tilde{F}$ et $\tilde{K}$ respectivement associées à $F$ et $K$. Reprenons (5),

$$1=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}(x,t)=\sum_{x\in\mathbb{Z},Z\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} f(Y)\mathbb{P}_2^2(x,t|Z)=\sum_{t'=0}^{t}F(t')K(t-t')$$

Cela se traduit par l'égalité sur les séries génératrices suivante,

$$\frac{1}{1-z}=\tilde{F}(z)\tilde{K}(z)$$

Soit encore, pour tout $t\in\mathbb{N}$,

$$\Phi(t)=\sum_{t'=0}^{t}\left(\frac{1}{1-z}\frac{1}{\tilde{K}(z)}\right)_{t'}$$

On peut bien sûr tronquer $\tilde{K}$ aux puissances inférieures à $t$ pour calculer $\Phi(t)$. De plus, on montre par récurrence une égalité, appelée équation de Chapman-Kolmogorov-Smoluchowski discrète, qui traduit l'invariance du problème par translatation d'origine, qui est que pour tout site $X'=(x',t')$, pour tout $0\leq t\leq t'$,

$$\mathbb{P}(X')=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}(x,t)\mathbb{P}(x'-x,t'-t) \tag{7}$$

Si l'on suppose de plus, que l'avalanche est centrée par rapport à 0, c'est-à-dire que,

$$\forall \delta \in \mathbb{Z}, \delta \in E \Rightarrow -\delta \in E, \qquad \forall \delta \in E, \varphi(\delta) = \varphi(-\delta)$$

Alors, $\mathbb{P}(x,t) = \mathbb{P}(-x,t)$, cela pour tout $(x,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, couplé à (7), on a que pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0,2t) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_2((0,2t)|(x,t))\mathbb{P}_2((x,t)|(0,0)) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}^2(x,t) = K(t) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $H(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(0,m) z^m$, on obtient,

$$\tilde{K}(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(0,2m) z^m = \frac{1}{2}(H(\sqrt{z}) + H(-\sqrt{z}))$$

Or, le premier théorème donne $\mathbb{P}(0,t)$, pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(0,t) = \frac{1}{2\pi S^t} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{\delta \in E} e^{i\delta\theta} \varphi(\delta) \right)^t \mathrm{d}\theta$$

donc,

$$H(z) = \frac{S}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{S - z \sum_{\delta \in E} e^{i\delta\theta} \varphi(\delta)}$$

Il s'agit de calculer un développement de $H(z)$ quand $z \to 1^-$, car alors on aura un équivalent de $\Phi(t)$ pour $t \to \infty$. Remarquons toute de suite que le caractère central de l'avalanche implique

$$\sum_{\delta \in E} \varphi(\delta)\delta = 0$$

Si $E = \{-n, n\}$, posons $\gamma(G) = 2n\sqrt{\frac{S}{Q}}$, sinon posons $\gamma(G) = \sqrt{\frac{S}{Q}}$, aussi $Q(G) = \sum_{\delta \in E} \varphi(\delta)\delta^2$. Tout calcul fait, on trouve

$$H(z) = \frac{\gamma}{\sqrt{2(1-z)}} + o((1-z)^{-1/2})$$

Puis,

$$\begin{aligned} \tilde{K}(z) &= \frac{\gamma}{2\sqrt{2(1-\sqrt{z})}} + o((1-\sqrt{z})^{-1/2}) \\ &= \frac{\gamma}{2\sqrt{1-z}} + o((1-z)^{-1/2}) \end{aligned}$$

D'où l'on en déduit que

$$\Phi(t) = \frac{2}{\gamma} \sum_{t'=0}^{t} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z}} \right)_{t'} + O(1)$$

En utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$, on trouve,

$$\Phi(t) = \frac{4}{\gamma\sqrt{\pi}} \frac{(1+t)\Gamma(1/2(3+2t))}{\Gamma(2+t)} + O(1) = \frac{4}{\gamma}\sqrt{\frac{t}{\pi}} + O(1)$$

$\square$

**Remarque 1.** *Le résultat précédent reste vrai si l'effondrement admet un axe de symétrie.*

*Démonstration.* Comme il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ affine telle que pour tout $t \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(x + f(t), t) = \mathbb{P}(x - f(t), t)$, il est possible de remanier le graphe initial $G = \mathcal{G}(E, \varphi)$ en un $G' = \mathcal{G}(E', \varphi')$ centré et tel que,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \mathbb{P}_G(x + f(t), t) = \mathbb{P}_{G'}(x, t)$$

En appliquant le théorème précédent à $G'$, on obtient le résultat. $\square$

**Théorème 3.** *Si $\varphi$ ne dépend pas de $t$ et la distribution initiale est $\mathbb{P}(0,0) = 1$, alors*

*Démonstration.* Reprenons la démonstration du théorème 2 sans supposer que l'avalanche est centrée. Nous avons besoin d'évaluer la quantité, $K(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}^2(x,t)$, et on a

$$K(t) = \frac{1}{2\pi S^{2t}} \int_0^{2\pi} |\tilde{A}(\theta)|^{2t} \mathrm{d}\theta$$

Ainsi,

$$\tilde{K}(z) = \frac{S^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{S^2 - z|\tilde{A}(\theta)|^2}$$

Un calcul semblable à celui mené dans le second théorème donne l'exposant $\frac{1}{2}$ pour le flux.

$\square$

# Réferences

[DD16] Paul Expert Kim Christensen Nicky Zachariou Deepak Dhar, Gunnar Pruessner. Directed abelian sandpile with multiple downward neighbors. *Phys. Rev. E 93, 042107*, 2016.