Interpolations multivariables sur l'hypercube

Yvann Le Fay

Novembre 2017

Préambule. Dans ce court papier dont l'écriture a été motivée par les contraintes posées par la généralisation des interpolations Lagrangiennes qu'on a proposé dans un autre papier, on s'attachera à présenter plusieurs méthodes d'interpolation polynomiale, sur des sommets de l'hypercube, sans contrainte supplémentaire.

1 Construction des interpolations simples sur l'hypercube

Soit $H_i = \begin{pmatrix} h_{i\,1} \\ ... \\ h_{i\,N} \end{pmatrix} \in \{0,1\}^N$, un sommet du N-cube, noté $\mathcal{H}^N$. Les valeurs binaires intérieurs de ce point sont les valeurs antécédentes à une valeur associée y_k dans $\mathbb{R}$. On a ainsi une collection de $(d+1)$ sommets distincts de $\mathcal{H}^N$, $\{H_0, ...H_d\}$ et une collection de $(d+1)$ images associées $\{y_0, ..., y_d\}$.

On peut facilement expliciter au moins deux interpolations de nos deux ensembles.

Posons $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$, l'ensemble des fonctions qui renvoient à 0, 1 et à 1, 0 (voir 2.). Définissons un ensemble R_d de fonctions (pouvant être constantes) tel que

$$R_d = \{p_{i,j} | \forall (i,j) \in [\![0;d]\!] \times [\![1;N]\!], p_{i,j}(h_{i,j}) \neq 0\}.$$

Une première interpolation est alors défini comme ci-suit

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^{m \leq N} &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \sum_{i=0}^{d} y_i \Bigg[\prod_{\substack{j=1 \\ \bar{h}_{i,j} \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}}}^{n} (-1)^{1-h_{i,j}} (X_i - \bar{h}_{i,j})^{p_{i,j}(X_i)} \Bigg]. \end{aligned} \tag{1}$$

Une seconde est

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^{m \leq N} &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \sum_{i=0}^{d} y_i \Bigg[\prod_{j=1}^{n} (1 - X_i - h_{i,j} + 2X_i h_{i,j})^{p_{i,j}(X_i)} \Bigg]. \end{aligned} \tag{2}$$

2 L'ensemble $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$

2.1 Définitions des ensembles fonctionnelles $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$.

$$\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}} = \left\{ f : \mathcal{H} \cup A \to \mathcal{H} \cup B \Big|_{f(1)=0}^{f(0)=1} \right\} \tag{3}$$

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} = \left\{ f : \mathcal{H} \cup A \to \mathcal{H} \cup B \Big|_{f(1)=1}^{f(0)=0} \right\} \tag{4}$$

2.2 Automorphisme involutif canonique entre $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$.

Soit $\mathcal{I}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \quad &\leftrightarrow \quad \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}} \\ f \quad &\mapsto \quad -f + 1. \end{aligned} \tag{5}$$

$\mathcal{I}$ est un automorphisme involutif entre $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$.

2.3 Composition entre $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$.

$$\forall f, g \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}},\ f \circ g \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} \tag{6}$$

$$\forall f \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}},\ i \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}, f \circ i \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} \tag{7}$$

$$i \circ f \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} \tag{8}$$

$$\forall i, j \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}, i \circ j \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} \tag{9}$$

En prenant $n > 0, i(x) = x^n \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$, $\forall f \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$, (7) et (8) permettent d'écrire que

$$f(x^n) \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}} \text{ et } f(x)^n \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}. \tag{10}$$

2.4 Produit entre $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$.

$$\forall f, g \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}, f \times g \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}} \tag{11}$$

$$\forall i, j \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}, i \times j \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} \tag{12}$$

La seconde affirmation de (10) peut aussi être obtenue à partir de (11) en posant $f = g$.

2.5 Somme de fonctions dans $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$.

$$\forall \mathbb{F} \subset \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}},\ \#(\mathbb{F})^{-1} \sum_{f_i \in \mathbb{F}} f_i \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}} \tag{13}$$

$$\forall \mathbb{F} \subset \mathrm{Id}_{\mathcal{H}},\ \#(\mathbb{F})^{-1} \sum_{f_i \in \mathbb{F}} f_i \in \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \tag{14}$$

2.6 Convexité de $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$.

$\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$ est convexe, en effet on a bien :

$$\forall f, g \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}, \forall t \in \mathbb{R},\ tf + (1-t)g \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}. \tag{15}$$

L'application $\mathcal{I}$ étant linéaire, $\mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}$ est aussi convexe.

2.7 Ensemble de fonctions constante sur $\mathbb{E}$, $\mathfrak{F}_{\mathbb{E},e}$.

Notons $\mathfrak{F}_{\mathbb{E},e}$, l'ensemble des fonctions qui évaluées sur E renvoient e.

$$\mathfrak{F}_{\mathbb{E},e} = \left\{ f : E \cup A \to C \middle| \forall g,\ \forall j \in \mathbb{E},\ f(x) = e \right\} \tag{16}$$

$$\mathbb{E}' \subset \mathbb{E} \Leftrightarrow \mathfrak{F}_{\mathbb{E},e} \subset \mathfrak{F}_{\mathbb{E}',e}. \tag{17}$$

Ainsi on a en particulier pour les éléments neutres de $+$, $\times$ et $\times^{-1}$,

$$\begin{aligned}
&\forall f \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}, \forall g \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}},\\
&\qquad \forall j \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H},0},\ j + f \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}},\ j + g \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} && (18)\\
&\qquad \forall j \in \mathfrak{F}_{\mathcal{H},1},\ j \times f,\ j \times^{-1} f \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}},\ j \times g,\ j \times^{-1} g \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}. && (19)
\end{aligned}$$

2.8 Explicitation de certaines formes de $\mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}}$.

$$\begin{aligned}
&\text{Soit } f \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} \cap \mathbb{R}[X]\\
&\Leftrightarrow \exists! P \in \mathbb{R}[X] | (f(X) = XP(X) \text{ et } P(1) = 1)\\
&\Leftrightarrow \exists! P \in \mathbb{R}[X] | (f(X) = XP(X) \text{ et } X - 1 \text{ divise } P(X) - 1)\\
&\Leftrightarrow \exists! Q \in \mathbb{R}[X] | (f(X) = X(1 + (X-1)Q(X))).
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Soit } f \in \mathfrak{F}_{\underset{\mathcal{H}}{\rightleftarrows}} \cap \mathbb{R}[X]\\
&\Leftrightarrow \mathcal{I}(f) = -f + 1 \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}} \cap \mathbb{R}[X]\\
&\Leftrightarrow \exists! Q \in \mathbb{R}[X] | (f(X) = -X(1 + (X-1)Q(X)) + 1).
\end{aligned} \tag{21}$$

A remarquer à fortiori que :

$$\forall Q : \mathcal{H} \cup A \to \mathcal{H} \cup B,\ f(X) = X(1 + (X-1)Q(X)) \in \mathfrak{F}_{\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}}. \tag{22}$$