

Sur une mesure \mathfrak{f} de réseaux

Le Fay Yvann

Juin 2018

L'objet de ce document est d'étudier les propriétés d'une fonction mesurant en quelque sorte la connectivité d'un tableau multidimensionnel (en premier lieu, une matrice).

1 Outils préalables

1.1 Fonction de padding \mathfrak{p}

Il nous sera nécessaire d'introduire une notation correspondant à un processus de padding d'une matrice carrée \mathbf{A} d'ordre n .

$$\mathfrak{p} : \mathcal{M}_{n^2} \rightarrow \mathcal{M}_{(n+2)^2}$$
$$: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n \times n} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+2)}.$$

Une autre manière d'écrire \mathfrak{p} est $\mathfrak{p}((a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}) = ((\mathbb{1}_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 0;n+1 \rrbracket^2})$, ou plus généralement dans le cas de tableaux hypercubiques d'ordre m , $\mathfrak{p}((a_{\mathbf{c}})_{\mathbf{c} \in \llbracket 1;n \rrbracket^m}) = ((\mathbb{1}_{\mathbf{c} \in \llbracket 1;n \rrbracket^m} a_{\mathbf{c}})_{\mathbf{c} \in \llbracket 0;n+1 \rrbracket^m})$

1.2 Fonction des voisins d'ordre K , \mathfrak{v}

On définit la fonction de voisinage \mathfrak{v} d'ordre K de (i, j) d'une matrice carrée \mathbf{A} de la manière suivante

$$\mathfrak{v}((i, j), \mathbf{A}, K) = (a_{i+nj+m})_{(n,m) \in \llbracket -K;K \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_{(2K+1)^2}.$$

La matrice créée a alors pour taille de structure (c'est-à-dire que ces coefficients peuvent ne pas être définis ces dimensions), $(2K+1)^2$. Si l'on ne renseigne aucune coordonnées alors on prend par défaut le centre de la matrice carrée comme étant les coordonnées de départ, noté $c = (n/2, n/2) = ((n-1)/2, (n-1)/2)$, selon la parité de n , le centre de la matrice créée est (i, j) . Cette notion sera remplacée par la notion de boule de rayon K (1 privilégié en fait).

1.3 Notion de sous-matrice

On appelle une sous-matrice \mathbf{A}^* de \mathbf{A} , une matrice qui a pour éléments de l'ensemble de coefficients des coefficients de \mathbf{A} à coordonnées incluses dans $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$, ainsi

$$\mathbf{A}^* \subset (\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}) \iff \mathbf{A}^* = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \subset \mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Ainsi on a par exemple $\mathbf{A} \subset \mathfrak{p}(\mathbf{A})$, une notion assez naturelle.

1.4 Coordonnées d'une matrice

On déclare la fonction \mathfrak{C} qui à une matrice $(a_{ij})_{(i,j) \in C}$ renvoie C .

1.5 Fonction OU inclusive et comptant σ d'une matrice

La fonction OU inclusive (comptant car de $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}$ n'est rien d'autre que la somme des coefficients a_{ij} ,

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{A}) &= \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})} a_{ij} \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}), \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}\{0, 1\}.\end{aligned}$$

1.6 Fonction de concaténation \mathfrak{k} de matrices

On définit la fonction \mathfrak{k} de concaténation de j^2 fois la matrice carrée d'ordre n , \mathbf{A} comme étant

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} : \mathcal{M}_{n^2} &\rightarrow \mathcal{M}_{(nj)^2} \\ : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n \times n} &\mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(nj) \times (nj)}.\end{aligned}$$

1.7 Fonction \mathfrak{z} de mise à zéro d'une sous-matrice

On définit la fonction \mathfrak{z} comme la fonction qui à une sous-matrice \mathbf{A}^* de \mathbf{A} renvoie la matrice dont les coefficients sont définis sur $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$, en particulier, sur $\mathfrak{C}(\mathbf{A}) \setminus \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)$, les coefficients sont à zéro, sinon, ils restent inchangés, voir proposition 7.

2 \mathfrak{g} , \mathfrak{f} et \mathfrak{R} dans le cas des matrices (et en norme finie)

2.1 L'ensemble $\mathfrak{R}(n)$ des matrices binaires \mathfrak{g} - n -équivalentes

2.1.1 Définition

On introduit ici un ensemble de matrices binaires très intéressant dans le cadre de l'étude de \mathfrak{g} . On note $\mathfrak{R}(n)$, l'ensemble des matrices binaires \mathfrak{g} - n -équivalentes, il est défini par

$$\mathfrak{R}(n) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} : a_{ij}\sigma(\mathbf{A} \circ \mathbf{C}_+) = n\}, \quad \text{où } \mathbf{C}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Les ensembles

Ici \star dénote un nombre dans $\{0, 1\}$, à chaque apparition, elle est indépendante par rapport aux autres apparitions (i.e ce n'est pas la même \star).

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(0) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{R}(1) = \left\{ \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(2) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(3) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(4) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(5) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \quad \forall n \geq 6, \mathfrak{R}(n) = \{\}. \end{aligned}$$

2.1.3 Quelques propriétés

Proposition 1.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), a_{ij}\sigma(\mathbf{A}\mathbf{C}_+) = b_{ij}\sigma(\mathbf{B}\mathbf{C}_+) = n.$$

Preuve. D'après la définition de $\mathfrak{R}(n)$. □

Remarque. Si l'on se place dans le cas $n \leq 0$, on peut se débarrasser du coefficient du centre de la matrice devant σ .

Proposition 2.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n \leq \sigma(\mathbf{A}) \leq n + 4.$$

Preuve.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n = a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 0 & a_{i+1j} & 0 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 0 & a_{i-1j} & 0 \end{bmatrix} \leq a_{ij}\sigma(\mathbf{A}) \leq a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 1 & a_{i+1j} & 1 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 1 & a_{i-1j} & 1 \end{bmatrix} = n + 4.$$

□

Proposition 3.

$$\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} = \bigcup_{i=0}^5 \mathfrak{R}(i), \quad \mathfrak{R}(n) \cap \mathfrak{R}(m) = \{\}. \quad \mathfrak{R}(n) \cap \mathfrak{R}(m) = \{\}.$$

Preuve. Il suffit de raisonner sur les cardinalités en remarquant que par définition, les $\mathfrak{R}(i)$ sont disjoints et inclus dans $\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\}$, $\forall 0 \leq n \neq m \leq 5, \mathfrak{R}(n) \cap \mathfrak{R}(m) = \{\}$.

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=0}^5 \mathfrak{R}(i) \right| &= \sum_{i=0}^5 |\mathfrak{R}(i)| = 2^8 + 2^4 + 4 \times 2^4 + 6 \times 2^4 + 4 \times 2^4 + 2^4 = 2^9 \\ &= |\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\}|. \end{aligned}$$

□

2.2 Fonction de comptage μ de sous-matrices \mathfrak{g} - n -équivalentes

2.2.1 Définition

Soit \mathbf{A} , une matrice quelconque de coefficients binaires ou non définis, les coefficients non définis sont considérés comme nuls. La fonction de comptage de sous-matrices de \mathbf{A}^* elle-même, sous matrice de \mathbf{A} est défini par

$$\mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n) = |\{(i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) : \mathfrak{v}((i, j), \mathbf{A}, 1) \in \mathfrak{R}(n)\}|.$$

On acceptera de noter $\mu(\mathbf{A}^*, n)$, dans le cas où $\mathbf{A} = \mathfrak{p}(\mathbf{A}^*)$.

2.3 Mesure macroscopique \mathfrak{g} d'une matrice binaire carrée d'ordre 3

2.3.1 Définition

On définit une première mesure \mathfrak{g} , appelée mesure macroscopique, puisqu'intervenant que sur des matrices carrée binaire d'ordre 3 (i.e, image de \mathfrak{v} d'ordre 1), qui nous permettra ensuite de définir la mesure \mathfrak{f} pour une matrice binaire carrée d'ordre n . On décide de 5 coefficients positifs α_i (on pourrait travailler sur les négatifs, mais ça rendrait impossible la formulation certaines inégalités).

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} : \mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ : \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} \end{bmatrix} \mapsto \mathfrak{g}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(\mathbf{A})$ peut s'écrire de plein de manières différentes et les fonctions que nous avons introduites vont nous permettre de mieux apercevoir les propriétés de \mathfrak{g} .

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\mathbf{A}) &= a_{ij}(\alpha_1 + \alpha_2(a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{i-1j}) + \\ &\alpha_3(a_{i-1j}(a_{i+1j} + a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{i+1j}(a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{ij+1}a_{ij-1}) + \\ &\alpha_4(a_{i-1j}(a_{ij+1}(a_{ij-1} + a_{i+1j}) + a_{i+1j}a_{ij-1}) + a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) + \\ &\alpha_5a_{i-1j}a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) \end{aligned}$$

2.3.2 Propriétés

Proposition 4.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B})$$

Preuve. L'un remarquera premièrement que \mathfrak{g} ne dépend pas des termes aux sommets, ainsi il suffit d'étudier respectivement, pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, les $1, 1, 4, 6, 4, 1$ cas. On vérifiera que pour chaque n , l'expression de \mathfrak{g} pour chacun des cas correspondant, reste inchangée. L'expression de \mathfrak{g} a en fait été construite pour respecter cette propriété, en effet, les termes des a_{ij} permutent autour du centre sans passer par les sommets. \square

Proposition 5.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n \geq 1), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \binom{n-1}{i-1}.$$

Preuve. Par la proposition 4, il suffit de calculer \mathfrak{g} pour une matrice \mathbf{A} dans chacun des $\mathfrak{R}(i)$. \square

Proposition 6. \mathfrak{g} est une fonction croissante de n .

Preuve. Proposition 5. \square

Preuve. Remarquons que puisque les $a_{ij} \geq 0$ et que $n = a_{ij}(a_{i+1j} + a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i-1j})$, n est une fonction croissante des a_{ij} (i.e de tous les a_{ij} , et inversement, les a_{ij} croient quand n croit), et plus particulièrement de ceux n'étant pas sur les sommets, or \mathfrak{g} est croissante de ces mêmes a_{ij} , donc \mathfrak{g} est croissante de n . \square

Remarque. Cette propriété se généralise au cas à m -dimensions.

Proposition 7.

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathfrak{g}(\mathbf{A}^*) \leq \mathfrak{g}(\mathbf{A}).$$

Preuve. Il suffit de définir, artificiellement $a_{ij}^* = 0$ si $(i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \setminus \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)$, afin de pouvoir poser \mathfrak{g} même si \mathbf{A}^* n'est pas remplie,

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathfrak{z}(\mathbf{A}^* = (a_{ij}^*)_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)}, \mathbf{A}) = \left(\begin{array}{cc} a_{ij} & \text{si } (i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right)_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Finalement, on a $\forall (i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \setminus \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*), a_{ij}^* = 0 \leq a_{ij} \leq 1$, or \mathfrak{g} est une fonction croissante des a_{ij} (et a_{ij}^*), d'où l'inégalité voulue. \square

Remarque. L'égalité a lieu si et seulement si les coefficients dont a été privée \mathbf{A}^* sont sur les sommets ou si $\mathbf{A}^*, \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$. La propriété se généralise au cas à m -dimensions.

2.4 Mesure globale \mathfrak{f} d'une sous matrice d'une matrice binaire carrée d'ordre n selon \mathfrak{g} d'ordre 3

2.4.1 Définition

On définit \mathfrak{f} de \mathbf{A}^* dans l'environnement \mathbf{A} comme étant la somme des mesures macroscopiques \mathfrak{g} des matrices voisines d'ordre 1 aux coordonnées de \mathbf{A}^* .

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i, j), \mathbf{A}, 1)).$$

Par soucis d'écriture, quand on notera $\mathfrak{f}(\mathbf{A})$, on entendra $\mathfrak{f}(\mathbf{A}, \mathfrak{p}(\mathbf{A}))$.

2.4.2 Propriétés

Proposition 8.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1) \mathbf{C}_+).$$

Preuve. L'opération $\mathbf{A}\mathbf{C}_+$ consiste à mettre à 0 les coefficients des sommets, or \mathfrak{g} ne dépend pas des sommets, d'où l'égalité. \square

Remarque. On peut absolument remplacer \mathbf{C}_+ par toute matrice carrée d'ordre 3 telle que $\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$ soit incluse dans cette matrice.

Proposition 9. On note par abus, $\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{g}(\mathbf{A})$ où $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^5 \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, j) \mathfrak{g}(n).$$

Preuve. Pour toute sous-matrice $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n} \{0, 1\}$, sachant qu'on calcule \mathfrak{f} selon l'environnement \mathbf{A} ,

$$\mathfrak{z}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{z}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A}).$$

Or $\forall (i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*), \exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{f}(\mathfrak{z}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A})) = \mathfrak{g}(n)$, notons le n correspondant pour la coordonnée (i,j) , $n((i,j))$, alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) &= \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{f}(\mathfrak{z}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A})) \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{f}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1), \mathbf{A}) \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i,j), \mathbf{A}, 1)) \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(n((i,j))) \\ &= \sum_{n=1}^5 \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n) \mathfrak{g}(n). \end{aligned}$$

\square

Preuve. Cela suit de la proposition 3, 4 et de la définition de μ . \square

Proposition 10. Pour toute matrice carrée \mathbf{A} d'ordre n ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{A}) &\leq \mathfrak{f}((1)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}) \\ &= (n-2)^2(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5) + 4(n-2)(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4) + 4(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3). \end{aligned}$$

Preuve. Le choix de cette matrice comme argument maximum de \mathfrak{f} est trivial (croissance de \mathfrak{f} pour tous les coefficients de la matrice d'entrée), l'un remarquera enfin que pour $\mathbf{M} = (1)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}$,

$$\mu(\mathbf{M}, 5) = (n-2)^2, \quad \mu(\mathbf{M}, 4) = 4(n-2), \quad \mu(\mathbf{M}, 3) = 4.$$

\square

Proposition 11.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) + \mathfrak{f}(\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \mathfrak{f}(\mathbf{A}).$$

Preuve. Par la définition de \mathfrak{f} en remarquant que $\mathfrak{C}(\mathbf{A}) = \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \sqcup \mathfrak{C}(\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^*)$. \square

Proposition 12.

$$n\mathfrak{f}(\mathbf{A}) \leq \mathfrak{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}, n))$$

Preuve. Notons \mathbf{A}^* , la matrice ayant pour coefficients intérieurs, ceux de \mathbf{A} , et sur les contours, 0, ainsi \mathbf{A}^* est paddée. Par l'isolement de celle-ci, il est clair qu'on a l'égalité, or \mathfrak{f} est une fonction croissante des $a_{ij} \geq 0$, donc $\mathfrak{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}, n)) \geq \mathfrak{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}^*, n))$. \square

Remarque. Il y a égalité lorsque \mathbf{A} a été paddée, $\mathbf{A} = \mathfrak{p}(\mathbf{B})$.

Proposition 13. Pour toute sous-matrice $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}\{0, 1\}$,

$$\sum_{j=0}^5 \mu(\mathfrak{z}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}), \mathbf{A}, j) = |\mathfrak{C}(\mathbf{A})| = n^2.$$

Preuve. Résultat trivial d'après la proposition 3 et la définition de μ . \square

3 Généralisation

3.1 L'ensemble $\mathfrak{R}(n)$ des matrices binaires m -multidimensionnelles \mathfrak{g} - n -équivalentes

On considère les notations et objets suivants, l'ensemble des tableaux d'ordre m ayant 3^m éléments binaires (i.e, des tableaux de taille $3 \times 3 \times \dots \times 3$, m fois), noté $\mathcal{H}_3^m\{0, 1\}$,

$$\mathcal{H}_3^m\{0, 1\} = \{(a_{\mathbf{c}} \in \{0, 1\})_{\mathbf{c} \in \{-1, 0, 1\}^m}\}.$$

De même pour l'ensemble des tableaux, plus généralement, d'ordre m ayant n^m éléments binaires, $\mathcal{H}_n^m\{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2n+1}^m\{0, 1\} &= \{(a_{\mathbf{c}} \in \{0, 1\})_{\mathbf{c} \in \llbracket -n, n \rrbracket}\} \\ \mathcal{H}_{2n}^m\{0, 1\} &= \{(a_{\mathbf{c}} \in \{0, 1\})_{\mathbf{c} \in \llbracket -n+1, n \rrbracket}\} \end{aligned}$$

Notons c , le m -plet coordonnées du centre d'un élément \mathbf{A} de $\mathcal{H}_3^m\{0, 1\}$, i est un nombre entier caractérisant la norme que l'on considère et enfin $B(\|\cdot\|_i, 1, c)$, la boule discrète de norme $\|\cdot\|_i$, de rayon 1 et de centre c ,

$$B(\|\cdot\|_i, 1, c) = \{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{Z}^m : \|\mathbf{c}\mathbf{c}\|_1 \leq 1\}.$$

On peut remarquer qu'en fait $B(\|\cdot\|_i, 1, c) = B(\|\cdot\|_j, 1, c)$ pour tout i, j dans \mathbb{R}^* , on fera la distinction de la boule en norme $\|\cdot\|_\infty$ qui elle, par contre, englobe les 3^m voisins autour de c . Dans la suite du document, on s'intéresse principalement à la norme finie, on choisira la plus stricte $\|\cdot\|_1$. Toutes les notations étant introduites, on peut alors écrire

$$\mathfrak{R}^m(n) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{H}_3^m\{0, 1\} : a_{\mathbf{c}} \sum_{\mathbf{c} \in B(\|\cdot\|_i, 1, c, \mathbf{A})} a_{\mathbf{c}} = n\}.$$

Dans le cas où $m = 2$ (i.e $\mathcal{H}_3^m\{0, 1\} = \mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\}$), on obtient la définition vue en 2.1.2, même analogie pour \mathfrak{g} , ainsi $\mathfrak{R}(n)$ traité dans la partie précédente est en fait $\mathfrak{R}^2(n)$.

3.2 Généralisation de \mathfrak{g} à des tableaux à m -dimensions

Avec les mêmes notations qu'en 3.1, en considérant que des tableaux hypercubiques et paddés (on ne le précisera pas),

$$\mathfrak{g}(\mathbf{A}) = a_c \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B(\|\cdot\|_1, 1, c, \mathbf{A})} \alpha_{|\mathfrak{C}|} \prod_{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}} a_{\mathbf{c}}.$$

La définition de \mathfrak{f} coïncide avec celle donnée en 2.4.1.

Proposition 14.

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}^m(n), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B}).$$

Preuve. Premièrement ayons en tête le résultat suivant

$$\forall A, B \subseteq N : |A| = |B| = m, \forall n \in \llbracket 0; m \rrbracket, |A' \subseteq A : |A'| = n| = |B' \subseteq B : |B'| = n| = \binom{m}{n}.$$

En effet, si l'on considère une bijection de A vers B , alors elle est encore une bijection de tout $A' \subseteq A$ vers un certain $B' \subseteq B$. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}^m(n)$, pour $n = 0$, l'égalité est immédiate.

Posons $n \geq 1$, ainsi $a_c, b_c = 1$, et pour alléger les notations, $B(\|\cdot\|_1, 1, c, \mathbf{A}) = B_{\mathbf{A}}$.

$$\begin{aligned} n &= \sum_{\mathbf{c} \in B_{\mathbf{A}}} a_{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{c} \in B_{\mathbf{B}}} b_{\mathbf{c}} \\ &= \sum_{\mathbf{c} \in B_{\mathbf{A}} \setminus \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\}} 1 = |B_{\mathbf{A}} \setminus \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\}| = |B_{\mathbf{B}} \setminus \{\mathbf{c}' : b_{\mathbf{c}'} = 0\}|. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut appliquer le résultat qu'on a rappelé juste avant, il existe une bijection pour toute sous-partie de $B_{\mathbf{A}} \setminus \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\}$ vers une sous-partie de $B_{\mathbf{B}} \setminus \{\mathbf{c}' : b_{\mathbf{c}'} = 0\}$,

$$\begin{aligned} &\forall B'_{\mathbf{A}} \subseteq B_{\mathbf{A}} \setminus \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\}, \exists B'_{\mathbf{B}} \subseteq B_{\mathbf{B}} \setminus \{\mathbf{c}' : b_{\mathbf{c}'} = 0\} : |B'_{\mathbf{A}}| = |B'_{\mathbf{B}}| \\ \Rightarrow &\sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{A}} \setminus \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|} = \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{B}} \setminus \{\mathbf{c}' : b_{\mathbf{c}'} = 0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|} \\ &= \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{A}}} \alpha_{|\mathfrak{C}|} \prod_{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}} a_{\mathbf{c}} = \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{B}}} \alpha_{|\mathfrak{C}|} \prod_{\mathbf{c} \in \mathfrak{C}} b_{\mathbf{c}} \\ &= \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

□

Proposition 15. *La proposition 5 tient encore dans le cas général.*

Preuve. Conséquence immédiate de la propriété 14, notamment par la remarque

$$|\{B' \subseteq B : |B'| = n\}| = \binom{m}{n}.$$

En effet, sachant que pour $n \geq 1$, la coordonnée du centre n'est pas à compter,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n \geq 1) : \mathfrak{g}(\mathbf{A}) &= \sum_{\mathfrak{C} \subseteq B_{\mathbf{A}} \setminus \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i |\{B'_{\mathbf{A}} \subseteq B_{\mathbf{A}} \setminus \{\mathbf{c}' : a_{\mathbf{c}'} = 0\} \setminus \mathbf{c} : |B'_{\mathbf{A}}| = i - 1\}| \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \binom{n-1}{i-1}. \end{aligned}$$

□

Proposition 16. *La propriété 13 se généralise, pour toute sous matrice $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A} \in \mathcal{H}_n^m\{0, 1\}$,*

$$\sum_{j=0}^{3^m \text{ ou } 2m+1} \mu(\mathfrak{z}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}), \mathbf{A}, j) = n^m.$$

Remarque. 3^m lorsqu'on se place dans le cas de la boule à la norme infinie, sinon $2m+1$.

Preuve. Résultat trivial d'après la définition de μ , l'indice de fin de sommation vient du fait que

$$|B(|\cdot|_i, 1, c, \mathbf{A})| = \begin{cases} 2m+1 = |c| + m|\{-1, 1\}| & \text{si } i \in \mathbb{R}^* \\ 3^m = \sum_{k=0}^n 2^{n-k} \binom{n}{k} & \text{si } i = \infty \end{cases}$$

□

Proposition 17. *La proposition 9 se généralise,*

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{3^m \text{ ou } 2m+1} \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n) \mathfrak{g}(n).$$

Remarque. Même remarque concernant les indices de fin de sommation.

Preuve. Voir preuve de la proposition 9.

□

Proposition 18. *Généralisation de la proposition 10, pour tout tableau m -hypercube \mathbf{A} d'ordre n , en norme finie,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{A}) &\leq \mathfrak{f}((1)_{\mathbf{c} \in \llbracket 1; n \rrbracket^m}) \\ &= \sum_{k=0}^m 2^{m-k} \binom{m}{k} (n-2)^k \sum_{i=1}^{m+k+1} \alpha_i \binom{m+k}{i-1}. \end{aligned}$$