

Une fonction sur des tableaux binaires

Le Fay Yvann

Juin 2018, Juin 2019

Résumé

On introduit une structure de tableaux sur un monoïde $(A, +)$ puis une fonction sur les tableaux binaires. On étudie quelques propriétés de cette fonction.

1 Définitions

1.1 Tableaux et structures

Un tableau \mathbf{t} de dimension $m, n \in \mathbb{N}^*$, de structure C isomorphe à une structure normalisée, $C' \subset \llbracket 1; n \rrbracket^m$ (c'est-à-dire, à un décalage prêt) est une suite $(a_c)_{c \in C}$, autrement dit, c'est l'application

$$\mathbf{t} : \begin{cases} C \rightarrow A \\ c \mapsto a_c \end{cases}$$

On note la structure, aussi appelée, les coordonnées, C de \mathbf{t} , $\mathfrak{C}(\mathbf{t})$.

Pour $m = 1$, on représente le tableau par $[a_1, \dots, a_n]$, pour $m = 2$, $\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$.

La structure n'étant pas forcément complète, c'est-à-dire pas forcément égale, $\llbracket 1; n \rrbracket^m$, on représente les coefficients n'existant pas par \square ou par des \cdot . L'ensemble des tableaux de dimension n, m est noté $T_{n,m}$. L'ensemble des tableaux est noté T .

On définit l'application \mathfrak{z} de mise à zéros des coefficients non définis, plus précisément,

$$\forall \mathbf{t} \in T_{n,m}, \quad \mathfrak{z}(\mathbf{t}) = (a_c \mathbb{1}_{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t})})_{c \in \mathfrak{K}(\mathfrak{C}(\mathbf{t}))}$$

où l'application \mathfrak{K} est définie

$$\mathfrak{K} : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{Z}^m) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}^m) \\ S = \{x_1, \dots, x_k\} \mapsto \llbracket \min_{1 \leq j \leq m, x \in S} x^j; \max_{1 \leq j \leq m, x \in S} x^j \rrbracket^m \end{cases}$$

Avec x^j , la j -ème composante de la coordonnée x . Autrement dit, c'est une application qui renvoie la plus petite structure de la forme d'un hypercube, contenant entièrement la structure d'entrée. On comprend bien ici le rôle de \mathfrak{K} dans \mathfrak{z} , cela permet de mettre à 0 toutes les cases dans la plus petite structure de la forme d'un hypercube contenant le tableau d'entrée.

Plus généralement, on note le prolongement du tableau \mathbf{t} sur C' tel que $\mathfrak{C} \subset C'$ par ${}_{C'}\mathbf{t} = (a_c \mathbb{1}_{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t})})_{c \in C'}$.

On peut munir $T_{n,m}$ d'une opération \oplus définie par

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{n,m}, \quad \mathbf{t}_1 \oplus \mathbf{t}_2 = \begin{cases} \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1) \cup \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2) \rightarrow A \\ c \mapsto (\max_{\{\mathfrak{K}(\mathbf{t}_1); \mathfrak{K}(\mathbf{t}_2)\}} \mathbf{t}_1 + \max_{\{\mathfrak{K}(\mathbf{t}_1); \mathfrak{K}(\mathbf{t}_2)\}} \mathbf{t}_2)(c) \end{cases}$$

Les prolongements assurent la définition de l'opération partout, en prenant la plus petite structure hypercubique contenant les deux tableaux. Cette opération assure dans le cas où A est un groupe additif, la structure de groupe additif à $(T_{n,m}, \oplus)$. Si on s'est donné une multiplication \cdot , on peut aussi munir (A, \oplus) du produit d'Hadamard associé, noté \otimes , défini par

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{n,m}, \quad \mathbf{t}_1 \oplus \mathbf{t}_2 = \begin{cases} \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1) \cup C(\mathbf{t}_2) \rightarrow A \\ c \mapsto (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2)(c) \end{cases}$$

où l'on a pas noté les prolongements comme pour \oplus , afin de ne pas alourdir les notations. Le produit s'effectue bien coefficient à coefficient en prenant la structure hypercubique la plus petite contenant les deux tableaux.

1.2 Fonction de masquage

La fonction de masquage noté \cap^* est définie par

$$\cap^* : \begin{cases} T_{n,m} \times \mathcal{P}(\llbracket 1; n \rrbracket^m) \rightarrow T_{n,m} \\ (\mathbf{t}, S) \mapsto \mathbf{t}|_S \end{cases}$$

Cela correspond à restreindre le tableau à une sous structure S .

1.3 Fonction de padding

On définit la fonction de padding \mathfrak{p} par

$$\mathfrak{p} : \begin{cases} T_{n,m} \rightarrow T_{n+2,m} \\ t \mapsto \begin{cases} \llbracket 0; n+1 \rrbracket^m \rightarrow A \\ c \mapsto \begin{cases} \mathfrak{z}(t)(c) \text{ si } c \in \llbracket 1; n \rrbracket^m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

On peut par exemple voir que dans le cas où $\mathbf{t} \in T_{n,2}$, on a

$$\mathfrak{p}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{t} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+2)}.$$

On pourrait par ailleurs effectuer un réindilage afin de se ramener à la structure canonique dans $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$, mais celui-ci n'a que peu d'intérêt en plus de coûter cher en terme d'efficacité rédactionnelle. C'est pour cela qu'on privilégiera la représentation en tableau lorsqu'elle est possible, les problèmes d'indilage n'ayant aucun effet.

1.4 Boules

On appelle boule de rayon $R \in \mathbb{N}$, de $T_{n,m}$, de centre $c_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket^m$, l'ensemble

$$\mathfrak{B}(c_0, R) = \{c \in \llbracket c_0 - R; c_0 + R \rrbracket^m : \|c c_0\| \leq R\}$$

où $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{Z}^m . On notera $\|\cdot\|$ la norme 1 si rien d'autre n'est précisé. A remarquer que pour de petites valeurs de R , les normes finies coïncident toutes, notamment pour la définition de \mathfrak{g} qui utilise des boules de rayon 1. On a par ailleurs,

$$\mathfrak{B}(c_0, R) = \{c \in \llbracket c_0 - R; c_0 + R \rrbracket^m : \sum_{i=1}^m |c^i - c_0^i| \leq R\}$$

Cette boule a une forme de diamant.

Aussi, on peut généraliser la notion de boule en utilisant un diamètre, afin de s'autoriser à avoir des tableaux de tailles paires. On appelle boule de diamètre $D \in \mathbb{N}$, de $T_{n,m}$ de centre c_0 ,

$$\mathfrak{B}^*(c_0, D) = \{c \in \mathbb{Z} : \|c_0 c\| \leq (D-1)/2\}$$

Sur la structure canonique (le coefficient le plus en haut à gauche, au fond, est repéré par $(1, 1, \dots, 1)$, l'ensemble est noté $\mathfrak{B}^*(D)$ par

$$\mathfrak{B}^*(D) = \{c \in \llbracket 1; n \rrbracket^m : |c((D+1)/2, (D+1)/2, \dots, (D+1)/2)| \leq (D-1)/2\}$$

On a quelque soit la norme, $\mathfrak{B}^*(2R+1) = \mathfrak{B}(R)$.

En norme 1, on a par exemple

$$\mathfrak{B}^*(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{B}^*(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{B}^*(4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En norme 2,

$$\mathfrak{B}^*(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{B}^*(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{B}^*(7) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5 Voisinage

On définit la fonction de voisinage d'un tableau $\mathbf{t} \in T_{n,m}$ au centre $c \in \mathbb{Z}^m$ (on préférera $c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t})$ afin que le voisinage ne soit pas vide) de rayon R , par

$$\mathfrak{v}(c, \mathbf{t}, R) = \cap^*(\mathbf{t}, \mathfrak{B}^*(c, 2R+1)) = \cap^*(\mathbf{t}, \mathfrak{B}^*(c, R))$$

Bien que formellement, le résultat soit encore un élément de $T_{n,m}$, on comprend vite que pour la norme 1, il est isomorphe à un tableau de taille $T_{2R+1,m}$ après restriction et réindication dont on se taira bien de les formaliser. Ainsi, on a par exemple

$$\mathfrak{v}((n, n), (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1; 2n-1 \rrbracket}, 1) = \begin{bmatrix} & a_{n-1,n} & \\ a_{n,n-1} & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ & a_{n+1,n} & \end{bmatrix}$$

Ou encore, si on se place au bord,

$$\mathfrak{v}((1, 1), (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1; 2n-1 \rrbracket}, 1) = \begin{bmatrix} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & & \end{bmatrix}$$

1.6 Sous tableaux

On peut définir une relation d'ordre (démonstration immédiate) sur $T_{n,m}$, qu'on note abusivement \subset , elle est définie par

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1 \iff \cap^*(\mathbf{t}_1, \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2)) = \mathbf{t}_2$$

1.7 Fonction OU

On définit la fonction OU, σ par

$$\mathfrak{p} : \begin{cases} T_{n,m} \rightarrow A \\ \mathfrak{t} = (a_c)_{c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{t})} \mapsto \sum_{c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{t})} a_c \end{cases}$$

2 \mathfrak{g} , \mathfrak{f} et \mathfrak{R} dans le cas $m = 2$, norme 1 et infinie

Dans toute la suite, $A = \{0,1\}$, muni de l'opération $+$ suivante

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 &= 1 \end{aligned}$$

et du produit classique. On aurait pu se placer dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2.1 Une relation d'équivalence sur $T_{3,2}$

Posons $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et plus généralement $\mathbf{C}_k = \mathfrak{z}(\cap^*(\mathbf{Id}, \mathfrak{B}(1)))$.

Selon qu'on utilise la norme finie k ou infini, on utilise \mathbf{C}_k , respectivement \mathbf{Id} . Si on ne précise pas k c'est qu'on se place dans la norme 1, sinon ce sera précisé. Plaçons-nous sans perte de généralité dans le cas où l'on considère la norme 1 pour nos boules, la relation d'équivalence (démonstration immédiate) \sim est définie par

$$\forall \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2 \in T_{3,2}, \quad \mathfrak{t}_1 \sim \mathfrak{t}_2 \iff a_{2,2}\sigma(\mathfrak{t}_1 \otimes \mathbf{C}) = a_{2,2}\sigma(\mathfrak{t}_2 \otimes \mathbf{C})$$

Remarquons qu'on aurait pu se passer de l'utilisation du produit en profitant de \cap^* et de \mathfrak{B} . On note $\mathfrak{o}(\mathfrak{t}) = a_{2,2}\sigma(\mathfrak{t} \otimes \mathbf{C})$, l'ordre de \mathfrak{t} .

Où l'on a considéré les structures canoniques ($\llbracket 1; 3 \rrbracket^2$ pour avoir noté $a_{2,2}$ le coefficient du milieu).

Proposition 1. *Les classes d'équivalence de \sim sont pour la norme 1*

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(0) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \right\}, \mathfrak{R}(1) = \left\{ \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix} \right\}, \mathfrak{R}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\} \\ \mathfrak{R}(3) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\} \\ \mathfrak{R}(4) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\} \\ \mathfrak{R}(5) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}(0)| &= 2^8 \\ \forall n \in \llbracket 1; 5 \rrbracket, \quad |\mathfrak{R}(n)| &= 2^4 \binom{4}{n-1} \end{aligned}$$

De même dans le cas de la norme infinie,

$$|\mathfrak{R}(0)| = 2^8$$

$$\forall n \in \llbracket 1; 9 \rrbracket, \quad |\mathfrak{R}(n)| = \binom{8}{n-1}$$

Remarque. On obtiendrait non pas 6 classes d'équivalences mais 10 dans le cas de la norme infinie, elles sont évidentes.

Démonstration. AQT □

Proposition 2. En norme 1 (en norme infinie, il y égalité $\sigma(\mathbf{t}) = n$)

$$\forall \mathbf{t} \in \mathfrak{R}(n), \quad n \leq \sigma(\mathbf{t}) \leq n + 4$$

Démonstration. AQT □

2.2 Fonction de comptage μ de sous tableaux dans $\mathfrak{R}(n)$

On définit la fonction qui compte le nombre de sous tableaux dans $\mathfrak{R}(n)$ d'un tableau dans un environnement donné par

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{n,2} : \mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1, \quad \mu(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1, n) = |\{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2) : \mathbf{v}((i,j), \mathbf{t}_1, 1) \in \mathfrak{R}(n)\}|$$

Proposition 3. On a dans le cas où l'environnement n'a aucune conséquence $(\mathfrak{p}(\mathbf{t}), \mathfrak{z}(\mathbf{t}), \mathbf{t}, \dots)$,

$$\forall \mathbf{t} \in T_{n,2}, \quad \mu(\mathbf{t}, n) = |\{\mathbf{t}' \in T_{3,2} : \mathbf{t}' \subset \mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathfrak{R}(n)\}|$$

Démonstration. AQT □

2.3 Mesure locale \mathfrak{g} pour la norme finie 1

On définit une première mesure \mathfrak{g} (pour la norme finie d'ordre 1), appelée mesure locale, puisqu'intervenant que sur des tableaux de $T_{3,2}$, (i.e, image de \mathbf{v} d'ordre 1, c'est-à-dire qu'on considère une boule de rayon 1, ce qui est un choix), qui nous permettra ensuite de définir la mesure \mathfrak{f} sur $T_{n,2}$ puis par généralisation, sur $T_{n,m}$. On décide de 5 coefficients α_i (on pourrait travailler sur les négatifs, mais ça rendrait impossible la formulation certaines inégalités).

\mathfrak{g} peut s'écrire de plusieurs manières, la plus rudimentaire bien qu'elle nous aide pas à comprendre ce qu'elle représente, est

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\mathbf{t}) = & a_{ij}(\alpha_1 + \alpha_2(a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{i-1j}) + \\ & \alpha_3(a_{i-1j}(a_{i+1j} + a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{i+1j}(a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{ij+1}a_{ij-1}) + \\ & \alpha_4(a_{i-1j}(a_{ij+1}(a_{ij-1} + a_{i+1j}) + a_{i+1j}a_{ij-1}) + a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) + \\ & \alpha_5a_{i-1j}a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) \end{aligned}$$

Là où les coefficients ne sont pas définis, on les pose à 0 (application de \mathfrak{z}).

Proposition 4.

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathfrak{R}(n), \quad \mathfrak{g}(\mathbf{t}_1) = \mathfrak{g}(\mathbf{t}_2)$$

Démonstration. Dans le cas de la norme finie (quelconque), l'un remarquera premièrement que \mathfrak{g} ne dépend pas des termes aux sommets, ainsi il suffit d'étudier respectivement, pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, les 1, 1, 4, 6, 4, 1 cas. On vérifiera que pour chaque n , l'expression de \mathfrak{g} pour chacun des cas correspondant, reste inchangée. L'expression de \mathfrak{g} a en fait été construite pour respecter cette propriété, en effet, les termes des a_{ij} permutent autour du centre sans passer par les sommets. Dans le cas de la norme infinie, le même raisonnement pourra être conduit lorsqu'on aura proposé l'expression généralisée. □

Proposition 5.

$$\forall n \geq 1, \mathbf{t} \in \mathfrak{R}(n), \quad \mathfrak{g}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \binom{n-1}{i-1}$$

Démonstration. Par la proposition 4, il suffit de calculer \mathfrak{g} pour un tableau dans chacun des $\mathfrak{R}(n)$. \square

Proposition 6. \mathfrak{g} est une fonction croissante de n .

Démonstration. Voir proposition 5. \square

Proposition 7.

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{3,2} : \mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1, \quad \mathfrak{g}(\mathbf{t}_2) \leq \mathfrak{g}(\mathbf{t}_1)$$

Démonstration. Il suffit de voir que $\mathfrak{g}(\mathbf{t}_2) = \mathfrak{g}(\mathfrak{z}(\mathbf{t}_2))$, d'où la comparaison,

$$\forall (i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1) \setminus \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2), \mathfrak{z}(\mathbf{t}_2)(i,j) = 0 \leq \mathbf{t}_1(i,j) \leq 1$$

or \mathfrak{g} est une fonction croissante des coefficients du tableaux, d'où l'inégalité voulue. \square

2.4 Mesure globale \mathfrak{f} sur $T_{n,2}$

On définit \mathfrak{f} de \mathbf{t}_2 dans l'environnement \mathbf{t}_1 , avec $\mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1$ par

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2)} \mathfrak{g}(\mathbf{v}((i,j), \mathbf{t}_1, 1))$$

Par souci d'écriture, on notera $\mathfrak{f}(\mathbf{t})$ quand l'environnement n'a aucun effet, i.e par exemple, $\mathfrak{p}(\mathbf{t})$, $\mathfrak{z}(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}..$

Proposition 8. On note $\mathfrak{g}(\mathfrak{R}(n)) = \mathfrak{g}(n)$, alors

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) = \sum_{j=1}^5 \mu(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1, j) \mathfrak{g}(j)$$

Démonstration. On a directement par le partitionnement en classes d'équivalences,

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) = \sum_{k=1}^5 \mathfrak{g}(k) \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2), \mathbf{v}((i,j), \mathbf{t}_1, 1) = j} 1$$

\square

Proposition 9. Pour tout tableau $\mathbf{t} \in T_{n,2}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{t}) &\leq \mathfrak{f}((1)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}) \\ &= (n-2)^2(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5) + 4(n-2)(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4) + 4(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3). \end{aligned}$$

Démonstration. Le choix de ce tableau comme maximum est trivial. Enfin, on remarquera par jeux de découpages que pour $\mathbf{Id} = (1)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}$,

$$\mu(\mathbf{Id}, 5) = (n-2)^2, \quad \mu(\mathbf{Id}, 4) = 4(n-2), \quad \mu(\mathbf{Id}, 3) = 4.$$

\square

Proposition 10.

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) + \mathfrak{f}(\mathbf{t}_1 \setminus \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) = \mathfrak{f}(\mathbf{t}_1)$$

Démonstration. $\mathfrak{C}(\mathbf{t}_2) \sqcup \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1 \setminus \mathbf{t}_2) = \mathfrak{C}(\mathbf{t}_1)$. □

Proposition 11. *Pour tout $\mathbf{t}_1 \in T_{n,2}$*

$$\sum_{j=0}^5 \mu(\mathfrak{z}(\mathbf{t}_1), j) = |\mathfrak{K}(\mathfrak{C}(\mathbf{t}_1))| \leq n^2$$

Démonstration. AQT (\mathfrak{z} non inutile!), l'égalité est très souvent vraie puisqu'il suffit qu'il y ait un coefficient défini sur une bordure (droite, bas). □

3 Généralisation pour $m \geq 3$, norme finie et infinie

3.1 Une relation d'équivalence sur $T_{3,m}$

En norme finie k , on utilise \mathbf{C}_k , où l'on a utilisé la structure canonique pour noter le centre d'une telle boule par $(2, \dots, 2)$. On décrit par exemple $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}$ pour $m = 3$ en écrivant ses trois couches,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En norme infinie, c'est \mathbf{Id} qui est utilisée. La relation d'équivalence est la même,

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{3,m}, \quad \mathbf{t}_1 \sim \mathbf{t}_2 \iff a_{(2)_m} \sigma(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{C}) = a_{2,2} \sigma(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{C})$$

A voir qu'on notera plus tard le centre d'un tableau de $T_{3,m}$ par \mathbf{c} , ici c'est la structure canonique qui a été choisie. L'ordre est encore noté \mathfrak{o} .

Proposition 12. *On a clairement,*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{R}(n, m) = \{\mathbf{t} \in T_{3,m} : \mathfrak{o}(\mathbf{t}) = n\}$$

On ne représente pas les classes d'équivalences pour \sim pour des raisons évidentes. De plus pour la norme 1,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}(0, m)| &= 2^{3^m - 1} \\ \forall n \in \llbracket 1; 2m + 1 \rrbracket, \quad |\mathfrak{R}(n, m)| &= 2^{3^m - 2m - 1} \binom{2m}{n - 1} \\ \forall n > 2m + 1, \quad |\mathfrak{R}(n, m)| &= 0 \end{aligned}$$

Pour la norme infinie,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}(0, m)| &= 2^{3^m - 1} \\ \forall n \in \llbracket 1; 3^m \rrbracket, \quad |\mathfrak{R}(n, m)| &= \binom{2^{3^m} - 1}{n - 1} \\ \forall n > 3^m, \quad |\mathfrak{R}(n, m)| &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons un tableau $\mathbf{t} \in T_{3,m}$. On remarque que $\mathfrak{o}(\mathbf{t}) = \mathfrak{o}(\mathfrak{z}(\mathbf{t}))$, ainsi pour déterminer $T_{3,m}/\sim$, il est possible de remplacer \mathbf{t} par $\mathfrak{z}(\mathbf{t})$. Cela est équivalent à dire que tous les coefficients de \mathbf{t} sont définis, i.e, sa structure est complète.

En norme finie, ou infinie, un élément de $T_{3,m}$ est un élément de $\mathfrak{R}(0,m)$ si et seulement si son coefficient au centre, $a_{(2)_m}$ est nul, il n'y aucune contrainte sur les autres coefficients. Ainsi, $\mathfrak{R}(0,m)$ est isomorphe à $\{0,1\}^{3^m-1}$.

En norme finie d'ordre 1, on trouve que $\mathfrak{B}((2)_m,1)$ est isomorphe à l'ensemble

$$\{(0)_m, \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{m-1}, \underbrace{(-1, 0, \dots, 0)}_{m-1}, \dots, \underbrace{(0, \dots, 0, 1)}_{m-1}\}$$

qui est de cardinal $2m+1$. Ainsi pour construire un élément de $\mathfrak{R}(n,m)$, on dispose des choix pour les coefficients n'intervenant pas dans la définition de \mathfrak{g} (ou encore de \mathfrak{o}), c'est-à-dire, ceux qui sont en dehors de $\mathfrak{B}((2)_m,1)$, au nombre de $3^m - 2m - 1$. Le premier est déjà placé au centre, il ne reste plus qu'à placer les $n-1$ autres 1 dans $\mathfrak{B}((2)_m,1) \setminus \{(0)_m\}$, soit $\binom{2m}{n-1}$. L'expression coïncide avec le cas $n > 2m+1$.

En norme infinie, la totalité du tableau est englobé dans $\mathfrak{B}((2)_m,1)$, d'où le résultat. Il est clair qu'il y a $3^m + 1$ classes d'équivalences. \square

Proposition 13. *En norme finie (en norme infinie, il y a égalité),*

$$\forall \mathbf{t} \in \mathfrak{R}(n,m), \quad n \leq \sigma(\mathbf{t}) \leq n + 3^m - 2m - 1$$

Démonstration. AQT \square

3.2 Fonction de comptage μ de sous tableaux dans $\mathfrak{R}(n,m)$

On définit de même la fonction μ sur $T_{3,m}$ par

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{n,3} : \mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1, \quad \mu(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1, n) = |\{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2) : \mathbf{v}(c, \mathbf{t}_1, 1) \in \mathfrak{R}(n,m)\}|$$

Proposition 14. *On a dans le cas où l'environnement n'a aucune conséquence $(\mathbf{p}(\mathbf{t}), \mathfrak{z}(\mathbf{t}), \mathbf{t}, \dots)$*

$$\forall \mathbf{t} \in T_{n,m}, \quad \mu(\mathbf{t}, n) = |\{\mathbf{t}' \in T_{3,m} : \mathbf{t}' \subset \mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathfrak{R}(n,m)\}|$$

Démonstration. AQT \square

3.3 Mesure locale \mathfrak{g} pour la norme finie et infinie

On définit une fonction semblable à celle en 2.3 mais généralisée pour m et la norme. On pourrait par ailleurs changer le rayon de la boule considérée.

$$\forall \mathbf{t} \in T_{3,m}, \quad \mathfrak{g}(\mathbf{t}) = a_{\mathbf{c}} \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}(\mathbf{c}, \mathbf{t}) \setminus \{\mathbf{c}\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{c \in \mathfrak{C}} a_c$$

Proposition 15.

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathfrak{R}(n,m), \quad \mathfrak{g}(\mathbf{t}_1) = \mathfrak{g}(\mathbf{t}_2)$$

Démonstration. On travaille sur des tableaux à structure complète pour des raisons évidentes (rien ne change si les coefficients ne sont pas définis, ils sont posés à 0). Soient $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathfrak{R}(n,m)$, de suites respectivement a et b , notons pour alléger les notations, $\mathfrak{B}(\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}, 1) = \mathfrak{B}^*(\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}, 3)$ par \mathfrak{B}_1 , de même pour le deuxième tableau, \mathfrak{B}_2 . On a $n=0$ si et seulement si $a_{\mathbf{c}} = 0$ et la propriété est immédiate. Supposons $n \geq 1$, les deux tableaux étant équivalents, on a

$$n = \sum_{c \in \mathfrak{B}_1} a_c = \sum_{c \in \mathfrak{B}_2} b_c = |\mathfrak{B}_1 \setminus \{c : a_c = 0\}| = |\mathfrak{B}_2 \setminus \{c : a_c = 0\}|$$

Ces deux ensembles sont donc en bijection, leurs sous-parties le sont donc aussi, ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_1 \setminus \{\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}, c: a_c=0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} &= \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_2 \setminus \{\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}, c: b_c=0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \\
&= \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_1 \setminus \{\mathbf{c}_{\mathbf{t}_1}\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{c \in \mathfrak{C}} a_c \\
&= \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_2 \setminus \{\mathbf{c}_{\mathbf{t}_2}\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \prod_{c \in \mathfrak{C}} b_c
\end{aligned}$$

Ce qui correspond bien après avoir rajouté le coefficient au centre, à la définition de \mathfrak{g} . \square

Proposition 16.

$$\forall \mathbf{t} \in \mathfrak{R}(n, m), \quad \mathfrak{g}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \binom{n-1}{i-1}$$

Démonstration. En effet, pour $n = 0$, le résultat est évidemment vrai. Pour $n \geq 1$, on peut ne pas écrire le produit par $a_{\mathbf{c}}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}(\mathbf{t}) &= \sum_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B} \setminus \{\mathbf{c}, c: a_c=0\}} \alpha_{|\mathfrak{C}|+1} \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i |\{S \subset \mathfrak{B} \setminus \{\mathbf{c}, c: a_c=0\} : |S| = i-1\}| \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \binom{n-1}{i-1}
\end{aligned}$$

\square

Proposition 17.

$$\forall \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T_{3,m} : \mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1, \quad \mathfrak{g}(\mathbf{t}_2) \leq \mathfrak{g}(\mathbf{t}_1)$$

Démonstration. AQT \square

3.4 Mesure globale \mathfrak{f} sur $T_{n,m}$

On définit de même qu'en 2.4, \mathfrak{f} de \mathbf{t}_2 dans l'environnement \mathbf{t}_1 avec $\mathbf{t}_2 \subset \mathbf{t}_1$ par

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) = \sum_{c \in \mathfrak{C}(\mathbf{t}_2)} \mathfrak{g}(\mathbf{v}(c, \mathbf{t}_1, 1))$$

Proposition 18. On note $\mathfrak{g}(\mathfrak{R}(n, m)) = \mathfrak{g}(n)$, alors

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1, j) \mathfrak{g}(j)$$

A voir que la somme s'arrête à $2m+1$ pour la norme finie d'ordre 1, 3^m pour la norme infinie.

Proposition 19. De même, en utilisant le partitionnement par les classes d'équivalences.

De même, on note $\mathfrak{f}(\mathbf{t})$ quand l'environnement n'a aucun effet.

Proposition 20. Pour tout $\mathbf{t} \in T_{3,m}$, et toute partition de sa structure $\mathfrak{C}(\mathbf{t}) = \bigsqcup_{i=1}^r \mathfrak{C}_i$,

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}) \geq \sum_{i=1}^r \mathfrak{f}(\cap^*(\mathbf{t}, \mathfrak{C}_i))$$

C'est une propriété de suradditivité. Il y a égalité si par exemple les sous tableaux sont isolés par des 0 les uns des autres, d'une couche de largeur 1 pour des boules de rayon 1, R pour des boules de rayon R . Il y a plus généralement égalité quand $\mathfrak{f}(\cap^*(\mathbf{t}, \mathfrak{C}_i)) = \mathfrak{f}(\cap^*(\mathbf{t}, \mathfrak{C}_i), \mathbf{t})$.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 17. \square

Proposition 21. Pour tout $\mathbf{t} \in T_{3,m}$ et toute partition de sa structure, (\mathfrak{C}_i) , on a

$$\mathfrak{f}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^r \mathfrak{f}(\cap^*(\mathbf{t}, \mathfrak{C}_i), \mathbf{t})$$

Le raisonnement est très proche de la proposition précédente mais la démonstration formelle se fait bien très bien par récurrence sur le nombre d'éléments dans la partition en utilisant la proposition 10, qui se généralise bien évidemment à $T_{n,m}$.

Proposition 22. La proposition 11. se généralise aussi à $T_{n,m}$.

Démonstration. AQT \square

Proposition 23. La proposition 9. se généralise, pour tout tableau $\mathbf{t} \in T_{n,m}$, en norme 1,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{t}) &\leq \mathfrak{f}((1)_m) \\ &= \sum_{k=0}^m 2^{m-k} \binom{m}{k} (n-2)^k \sum_{i=1}^{m+k+1} \alpha_i \binom{m+k}{i-1} \\ &= (4n-4)^m \quad \forall i \in \llbracket 1; 2m+1 \rrbracket, \alpha_i = 1 \end{aligned}$$

Démonstration. \square

Proposition 24. On dénombre le nombre d'éléments dans la boule de diamètre $D = 2R+1$ en norme 1 et dimension m ,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}_m^*(D)| &= 2 \sum_{k=0}^{(D-3)/2} |\mathfrak{B}_{m-1}^*(2k+1)| + |\mathfrak{B}_{m-1}^*(D)| \\ |\mathfrak{B}_1^*(D)| &= D \end{aligned}$$

Démonstration. Un dessin permet de mieux comprendre, observons que pour $m = 3$, la boule peut-être vue comme le collage suivant

$$\mathfrak{B}_2^*(1) || \mathfrak{B}_2^*(3) || \dots || \mathfrak{B}_2^*(D) || \mathfrak{B}_2^*(D-2) || \dots || \mathfrak{B}_2^*(1)$$

De même pour $m = 2$, la boule peut-être vue comme le collage de segments (qu'on a décidé de représenter verticalement)

$$[1] || \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} || \dots || \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\mathfrak{B}_1^*(D)} || \dots || \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} || [1]$$

On comprend vite qu'on a le collage suivant

$$\mathfrak{B}_{m-1}^*(1) || \dots || \mathfrak{B}_{m-1}^*(D) || \dots || \mathfrak{B}_{m-1}^*(1)$$

D'où le résultat. \square

Proposition 25. On dénombre la peau de la boule de de diamètre $D = 2R + 1$ en norme 1

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}^*(D) \setminus \mathfrak{B}^*(D-2)| &= |\{c \in \llbracket -R; R \rrbracket^m : \sum_{i=1}^m |c^i| = R\}| \\ &= |\mathfrak{B}_{m-1}^*(D)| + |\mathfrak{B}_{m-1}^*(D-2)| \end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant la propriété 25, on vérifie facilement l'égalité. \square

Proposition 26. On dénombre le nombre d'éléments dans la boule de diamètre $D = 2R$ en norme 1 et dimension m ,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}_m^*(D)| &= 2 \sum_{k=0}^{(D-2)/2} |\mathfrak{B}_{m-1}^*(2k)| \\ |\mathfrak{B}_1^*(D)| &= D \end{aligned}$$

Démonstration. De même, on obtient le collage suivant

$$\mathfrak{B}_{m-1}^*(2) || \dots || \mathfrak{B}_{m-1}^*(D-2) || \mathfrak{B}_{m-1}^*(D-2) || \dots || \mathfrak{B}_{m-1}^*(2)$$

\square

Proposition 27. On dénombre la peau de la boule de diamètre $D = 2R$ en norme 1,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{B}^*(D) \setminus \mathfrak{B}^*(D-2)| &= |\{c \in \llbracket -R+1; R \rrbracket^m : \sum_{i=1}^m |c^i| = R\}| \\ &= 2\mathfrak{B}_{m-1}^*(D-2) \end{aligned}$$

Démonstration. Proposition 26. \square

Proposition 28. On a pour tout $D \in \mathbb{N}^*$, en dimension $m = 2$ et norme 1,

$$\mathfrak{f}(\cap^*(\text{Id}, \mathfrak{B}^*(D))) = \begin{cases} \alpha_1/2(1+D^2) + 2\alpha_2(D-1)^2 + \alpha_3(9-10D+3D^2) \\ + \alpha_4(10-8D+2D^2) + \alpha_5(10-8D+2D^2)/4, & D \equiv 1 \pmod{2} \\ \alpha_1(D^2/2-D) + \alpha_2(8-8D+2D^2) + \alpha_3(20-16D+3D^2) \\ + \alpha_4(16-12D+2D^2) + \alpha_5(4-3D+D^2/2) & D \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Démonstration. \square

Proposition 29. On appelle damier $\mathbf{d}_{p,k}$ de reste p de diviseur $k \geq 2$ le tableau de $T_{n,m}$ tel que

$$\forall c \in \llbracket 1; n \rrbracket^m, \mathbf{d}_{p,k}(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c^i \equiv p \pmod{k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par exemple pour $n = 3, m = 2$

$$\mathbf{d}_{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a alors en norme d'ordre 1,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{d}_0) &= \alpha_1 \sigma(\mathbf{d}_{p,k}) \\ &= \alpha_1 |\{c \in \llbracket 1; n \rrbracket^m : \sum_{i=1}^m c^i \equiv p \pmod{k}\}| \end{aligned}$$

Démonstration. Pour $k \geq 2$, il suffit de démontrer que chaque coefficient de $\mathbf{d}_{p,k}$ non nul est isolé dans un rayon de 1 selon la boule de norme 1 (c'est-à-dire, ± 1 sur les directions), alors g aura pour image α_1 sur tous ces points, 0 sur les autres.

Sans perte de généralité, posons $\alpha_1 = 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe un coefficient $c = (c^1, \dots, c^m) \in \llbracket 1; n \rrbracket^m$ tel que $\mathbf{d}_{p,k}(c) = 1$ et tel qu'il existe $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que pour $c' = (c_1, \dots, c_j + \varepsilon, \dots, c_m)$, $\mathbf{d}_{p,k}(c') = 1$. Alors $\varepsilon \equiv 0 [k]$, absurde car $k \geq 2$. \square

Proposition 30. *Soit $\mathbf{t} \in T_{n,m}$, si les coefficients α_i sont tous égaux entre-eux, alors $\mathfrak{f}(\mathbf{t})$ est une mesure pertinente du volume associée à la figure qu'elle représente, un exemple est qu'en norme k pour le disque ($m = 2$), on a*

$$\mathfrak{f}(\cap^*(\mathbf{Id}, \mathfrak{B}(R))) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathfrak{f}(\mathbf{Id}) \int_0^1 \sqrt[k]{1-x^k} dx$$

Démonstration. On ne proposera pas de démonstration formelle. L'idée est que si notre forme est composée surtout d'endroit peu lacunaires, c'est-à-dire, des endroits où les 1 sont très denses, sans perte de généralité, le tableau sur la boule est rempli, alors, l'image par \mathfrak{f} sera une somme notamment sur ces parties-là, dont l'union est notée I , égale, modulo des facteurs qui disparaîtront lorsqu'on fera le rapport par $\mathfrak{f}(\mathbf{Id})$ à $\mathfrak{g}(|\mathfrak{B}(1)|)|I|$ où $|I|$ compte le nombre de 1 dedans. Le terme en \mathfrak{g} est celui qui compose quasi entièrement $\mathfrak{f}(\mathbf{Id})$, d'où le rapport entre $|I|$ et n^m . Le passage à la limite provient du fait que la boule est d'autant plus proche de la boule dans \mathbb{R}^n que son rayon est grand. \square