Des racines imbriquées faisant intervenir des nombres premiers

Le Fay Yvann

Mai 2018

Préface

L'objectif de ce papier est d'étudier certaines expressions de racines imbriquées faisant intervenir des nombres premiers.

1 Définition

Soit $\mathcal{P}(n)$, le n-ème nombre premier, on note ici $\mathbb{1}_F$, la fonction indicatrice de F. On étudie la fonction suivante définie par

$$\begin{aligned}\forall n, b \in \mathbb{N}^*, b \geq n, \Psi(n,b) &= \mathcal{P}(n)\sqrt{1+\Psi((n+1)\mathbb{1}_{[\![0;b-1]\!]}(n), b)} \\ &= \sqrt{\mathcal{P}(n)^2(1+\Psi((n+1)\mathbb{1}_{[\![0;b-1]\!]}(n), b))} \\ \Psi(0,b) &= 0 \\ &= \Psi(n,0)\end{aligned}$$

2 Résultats

Proposition 1. *Des conditions simples sur μ et γ, deux suites dans les réels, permettent d'écrire*

$$\mathcal{P}(n)\prod_{j=1}^{b-n}(\mu_{j+n}\mathcal{P}(n+j))^{2^{-j}} \leq \Psi(n,b) \leq \mathcal{P}(n)\prod_{j=1}^{b-n}(\gamma_{j+n}\mathcal{P}(n+j))^{2^{-j}}.$$

Preuve. Pour le terme à gauche,

$$\begin{aligned}&\mu_{n+1}\Psi(n+1,b) \leq 1+\Psi(n+1,b) \\ \Leftrightarrow &\mathcal{P}(n)\sqrt{\mu_{n+1}\mathcal{P}(n+1)\sqrt{\dots\sqrt{\mu_b\mathcal{P}(b)}}} \leq \dots \leq \quad \mathcal{P}(n)\sqrt{\mu_{n+1}\mathcal{P}(n+1)\sqrt{\mu_{n+2}\Psi(n+2,b)}} \leq \mathcal{P}(n)\sqrt{\mu_{n+1}\Psi(n+1,b)} \leq \Psi(n,b).\end{aligned}$$

Pour celui à droite,

$$\begin{aligned}&1+\Psi(n+1,b) \leq \gamma_{n+1}\Psi(n+1,b) \\ \Leftrightarrow &\Psi(n,b) \leq \mathcal{P}(n)\sqrt{\gamma_n\Psi(n,b)} \leq \mathcal{P}(n)\sqrt{\gamma_{n+1}\mathcal{P}(n+1)\sqrt{\gamma_{n+2}\Psi(n+2,b)}} \leq \dots \leq \mathcal{P}(n)\sqrt{\gamma_{n+1}\mathcal{P}(n+1)\sqrt{\dots\sqrt{\gamma_b\mathcal{P}(b)}}}.\end{aligned}$$

□

Remarque. *On a ainsi l'égalité seulement quand $\mu_n = \gamma_n = 1 + \frac{1}{\Psi(n,b)}$.*

Remarque. *On peut choisir $\mu_n = 1$ et $\gamma_n = \frac{3}{2}$.*

Proposition 2.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Psi(n,b) \leq \widetilde{\Psi}(n,b,k) = \frac{\Psi((n+k+1)\chi_{[\![0;b]\!]}(n+k+1),b)}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\chi_{[\![0;b]\!]}(n+j-1)}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2+1) \leq \widetilde{\Psi}(n,b,k+1).$$

Preuve. Par l'inégalité arithmético-géométrique appliquée deux fois successivement à (1)

$$\begin{aligned}
\Psi(n,b) &\leq \frac{\mathcal{P}(n)^2+1+\Psi((n+1)\chi_{[\![0;b-1]\!]}(n)),b)}{2} = \widetilde{\Psi}(n,b,0) \\
\widetilde{\Psi}(n,b,0) &\leq \frac{1}{2}(\mathcal{P}(n)^2+1+\frac{1}{2}(\mathcal{P}(n+1)^2+1+\Psi((n+2)\chi_{[\![0;b-2]\!]}(n),b))) \\
&= \widetilde{\Psi}(n,b,1)
\end{aligned}$$

En l'appliquant ainsi $k+1$ fois,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Psi(n,b) \leq \widetilde{\Psi}(n,b,k) = \frac{\Psi((n+k+1)\chi_{[\![0;b]\!]}(n+k+1),b)}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\chi_{[\![0;b]\!]}(n+j-1)}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2+1) \leq \widetilde{\Psi}(n,b,k+1).$$

□

Remarque.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Psi((n+k+1)\chi_{[\![0;b]\!]}(n+k+1),b)}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2+1), \qquad \text{si } n+k \leq b \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2+1) = \widetilde{\Psi}(n,k), \qquad \text{si } n+k \geq b
\end{aligned}$$

Proposition 3.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(n,k) &= 1-\frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(\mathcal{P}(n+j-1)^2) \\
&\geq 1-\frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}((n+j-1)(\ln(n+j-1)+\ln\ln(n+j-1)-1))^2, \qquad n \geq 2 \\
\widetilde{\Psi}(n,k) &\leq 1-\frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}((n+j-1)(\ln(n+j-1)+\ln\ln(n+j-1)))^2, \qquad n \geq 6
\end{aligned}$$

Preuve. Voir [1]. □

Proposition 4. *Pour $n \geq 6$, on connaît une majoration assez fine de $\widetilde{\Psi}(n,k)$, qui est un polynome de n, on la note $\Psi^*(n,k,n)$.*

Preuve. Majorons $\ln x$ pour obtenir une majoration de la majoration en proposition 3,

$$\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \ln x \leq \frac{1}{a}(x-a) + \ln a.$$

Remplaçons les termes de la somme,

$$((n+j-1)(\ln(n+j-1) + \ln\ln(n+j-1)))^2 \leq \left[\left(2\ln a + \frac{\ln a}{a} - 2 - \frac{1}{a}\right)(n+j-1) + (n+j-1)^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\right)\right]^2.$$

Il ne nous reste plus qu'à simplifier la somme suivante

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(n,k) &\leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(J(n+j-1) + (n+j-1)^2 L)^2, \qquad L = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}, J = 2\ln a + \frac{\ln a}{a} - 2 - \frac{1}{a} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(J^2(n+j-1)^2 + JL(n+j-1)^3 + L^2(n+j-1)^4)\end{aligned}$$

Pour cela, on introduit la fonction transcendante de Lerch, définie par $\Phi(z,s,\alpha) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{(j+\alpha)^s}$, et on écrit les trois termes de notre carré apparaissant dans la somme grâce à celle-ci

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{2^j}(n+j-1)^p &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}(n+j)^p - \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^j}(n+j)^p\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}(n+j)^p - \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}(n+k+1+j)^p\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\Phi[\frac{1}{2}, -p, n] - \frac{1}{2^{k+1}}\Phi[\frac{1}{2}, -p, n+k+1]\right).\end{aligned}$$

Le a fournissant la majoration la plus fine est n. Les égalités suivantes permettent de conclure, (on écrira pas $\Psi^\star(n,k)$, l'expression complète est bien trop indigeste),

$$\begin{aligned}\Phi[\frac{1}{2}, -2, n] &= 2n^2 + 4n + 6 \\ \Phi[\frac{1}{2}, -3, n] &= 2n^3 + 6n^2 + 18n + 26 \\ \Phi[\frac{1}{2}, -4, n] &= 2n^4 + 8n^3 + 36n^2 + 104n + 150.\end{aligned}$$

□

Proposition 5. *Pour tout* $(n,b) \in \mathbb{N}_*^2 \backslash \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$*,* $\Psi(n,b)$ *est un nombre irrationnel.*

Preuve. Montrons tout d'abord l'irrationnalité de $\sqrt{1+p}$ où $p \in \mathbb{P}$. Déterminons p tel que $\sqrt{1+p}$ est rationnel,

$$\begin{aligned}
& p \in \mathbb{P}, \sqrt{1+p} \in \mathbb{Q} \\
\Leftrightarrow & p \in \mathbb{P}, 1+p = \frac{q^2}{k^2}, q \wedge k = 1 \\
\Leftrightarrow & p \in \mathbb{P}, p = (q-1)(q+1), \qquad \text{car } 1+p \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow & p = 3.
\end{aligned}$$

Excluons donc le cas particulier de $p = 3$ et travaillons par récurrence. Premièrement l'initialisation en partant du b-ème terme

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1+\mathcal{P}(b)} \notin \mathbb{Q} \\
\Rightarrow & \mathcal{P}(b-1)\sqrt{1+\mathcal{P}(b)} = \Psi(b-1,b) \notin \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Enfin, l'hérédité

$$\begin{aligned}
& \Psi(n,b) \notin \mathbb{Q} \\
\Rightarrow & \sqrt{1+\Psi(n,b)} \notin \mathbb{Q} \\
\Leftrightarrow & \mathcal{P}(n-1)\sqrt{1+\Psi(n,b)} = \Psi(n-1,b) \notin \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Finalement, à part pour $\Psi(1,1) = 2, \Psi(1,2) = 4$ et $\Psi(2,2) = 3$, $\Psi(n,b) \notin \mathbb{Q}$. □

Proposition 6. *Pour tout* k *entier naturel,*

$$\mathcal{P}(n+k) \sim \prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}}$$

En particulier pour $k = 0$ *et* $k = 1$*.*

Preuve. En sachant que $P(n+k) \sim P(n)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{P}(n+k)}{\prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{P}(n+k)}{\prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+1)^{2^{-j}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \mathcal{P}(k+n)\mathcal{P}(n+1)^{-1+2^{-m}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Proposition 7.

$$\mathcal{P}(n)^2 < \Psi(n,+\infty)$$

Preuve. Par la proposition 1. en posant $\mu_j = 1$,

$$\mathcal{P}(n)^2 = \mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n)^{2^{-j}} < \mathcal{P}(n) \prod_{j=1}^{+\infty} \mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}} < \Psi(n,+\infty)$$

□

Proposition 8.

$$\Psi(n,+\infty) \sim \mathcal{P}(n)^2$$

Preuve. Par la proposition 1., en posant l'égalité du côté gauche pour $\mu_j = 1 + \frac{1}{\Psi(j,+\infty)}$

$$\frac{\mathcal{P}(n)\prod_{j=1}^{+\infty}\mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}}}{\Psi(n,+\infty)} = \frac{\mathcal{P}(n)\prod_{j=1}^{+\infty}\mathcal{P}(n+j)^{2^{-j}}}{\mathcal{P}(n)\prod_{j=1}^{+\infty}((1+\frac{1}{\Psi(j,+\infty)})\mathcal{P}(n+j))^{2^{-j}}}.$$

Par la proposition 7, pour le nominateur, et par passage à la limite, $\lim_{n\to+\infty}\mu_n = 1$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathcal{P}(n)^2}{\Psi(n,+\infty)} = 1.$$

□

Proposition 9. *Une autre forme plus agréable de* $\Psi(n,b)$ *est*

$$\Psi(n,b) = \sqrt{a_{n,1} + \sqrt{a_{n,2} + ...\sqrt{a_{n,b-n+1}}}} \qquad \text{avec } a_{n,i} = \prod_{j=1}^{i}\mathcal{P}(j+n-1)^{2^{i-j+1}}$$

Preuve. Avec les mains, en faisant rentrer chaque facteur devant la racine à l'intérieur. □

Proposition 10. $\Psi(n,b)$ *converge quand* $b \to +\infty$.

Preuve. Chacune des propositions précédentes peut-être utilisée pour démontrer ce résultat (notamment 3), en associant des équivalences $\mathcal{P}(n)$, pour exemple, $\mathcal{P}(n) \sim n\ln n$, et en utilisant le critère de d'Alembert (on trouvera un rapport de $\frac{1}{2} \leq 1$). □

Preuve. En utilisant la forme précédente de $\Psi(n,b)$, et en appliquant le théorème de Vijayaraghavan, qui garantit que sous cette forme, $\Psi(n,b)$ converge si et seulement si $\frac{\ln a_{n,i}}{2^i}$ est borné pour $i \to +\infty$. On a en effet, par le postulat de Bertrand,

$$\begin{aligned}\frac{\ln a_{n,i}}{2^i} = 2^{-i}\sum_{j=1}^{i}2^{i-j+1}\ln\mathcal{P}(j+n-1) &\leq \ln 2\sum_{j=1}^{i}2^{-j+1}(j+n-1)\\ &= 2\ln 2(1+n-2^{-i}(1+i+n)) \to 2(1+n)\ln 2, \qquad i \to +\infty.\end{aligned}$$

□

References

[1] PIERRE DUSART. *THE k-th PRIME IS GREATER THAN* $k(\ln k + \ln\ln k)$ *FOR* $k \geq 2$. MATHEMATICS OF COMPUTATION, 1999.