

# Sur une mesure $\mathfrak{f}$ des matrices binaires

Le Fay Yvann

Juin 2018

L'objet de ce document est d'étudier les propriétés d'une fonction mesurant en quelque sorte une difficulté (on détaillera à la suite ce que l'on entend par là) d'une matrice binaire.

## 1 Outils préalables

### 1.1 Fonction de padding $\mathfrak{p}$

Il nous sera nécessaire d'introduire une notation correspondant à un processus de padding d'une matrice carrée  $\mathbf{A}$  d'ordre  $n$ .

$$\mathfrak{p} : \mathcal{M}_{n^2} \rightarrow \mathcal{M}_{(n+2)^2}$$
$$: \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n \times n} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(n+2) \times (n+2)}.$$

Une autre manière d'écrire  $\mathfrak{p}$  est  $\mathfrak{p}((a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}) = ((\mathbf{1}_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 0;n+1 \rrbracket^2})$ .

### 1.2 Fonction des voisins d'ordre $K$ , $\mathfrak{v}$

On définit la fonction de voisinage  $\mathfrak{v}$  d'ordre  $K$  de  $(i, j)$  d'une matrice carrée  $\mathbf{A}$  de la manière suivante

$$\mathfrak{v}((i, j), \mathbf{A}, K) = (a_{i+nj+m})_{(n,m) \in \llbracket -K;K \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_{(2K+1)^2}.$$

La matrice créée a alors pour taille de structure (c'est-à-dire que ces coefficients peuvent ne pas être définis ces dimensions),  $(2K+1)^2$ . Si l'on ne renseigne aucune coordonnées alors on prend par défaut le centre de la matrice carrée comme étant les coordonnées de départ, noté  $c = (n/2, n/2)$ , le centre de la matrice créée est  $(i, j)$ .

### 1.3 Notion de sous-matrice

On appelle une sous-matrice  $\mathbf{A}^*$  de  $\mathbf{A}$ , une matrice qui a pour éléments de l'ensemble de coefficients des coefficients de  $\mathbf{A}$  à coordonnées incluses dans  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ , ainsi

$$\mathbf{A}^* \subset (\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}) \iff \mathbf{A}^* = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \subset \mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Ainsi on a par exemple  $\mathbf{A} \subset \mathfrak{p}(\mathbf{A})$ , une notion assez naturelle.

### 1.4 Coordonnées d'une matrice

On déclare la fonction  $\mathfrak{C}$  qui à une matrice  $(a_{ij})_{(i,j) \in C}$  renvoie  $C$ .

## 1.5 Fonction OU $\sigma$ d'une matrice

La fonction OU de  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}$  n'est rien d'autre que la somme des coefficients  $a_{ij}$ ,

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{A}) &= \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})} a_{ij} \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}), \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}\{0, 1\}.\end{aligned}$$

## 1.6 Fonction ET $\pi$ d'une matrice

La fonction ET de  $\mathbf{A}$  n'est rien d'autre que le produit des coefficients de  $\mathbf{A}$ ,

$$\pi(\mathbf{A}) = \prod_{a_{ij} \in \mathbf{A}} a_{ij}.$$

## 1.7 Fonction de concaténation $\mathfrak{k}$ de matrices

On définit la fonction  $\mathfrak{k}$  de concaténation de  $j^2$  fois la matrice carrée d'ordre  $n$ ,  $\mathbf{A}$  comme étant

$$\begin{aligned}\mathfrak{k} : \mathcal{M}_{n^2} &\rightarrow \mathcal{M}_{(nj)^2} \\ : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{n \times n} &\mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \\ \vdots & \mathbf{A} & \vdots \\ \mathbf{A} & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(nj) \times (nj)}.\end{aligned}$$

# 2 $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{R}$

## 2.1 L'ensemble $\mathfrak{R}(n)$ des matrices binaires $\mathfrak{g}$ – Néquivalentes de degré $n$

### 2.1.1 Définitions

On introduit ici un ensemble de matrices binaires très intéressant dans le cadre de l'étude de  $\mathfrak{g}$ . On note  $\mathfrak{R}(n)$ , l'ensemble des matrices binaires  $\mathfrak{g}$  – Néquivalentes de degré  $n$ , il est défini par

$$\mathfrak{R}(n) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} : a_{ij}\sigma(\mathbf{A} \circ \mathbf{C}_+) = n\}, \quad \text{où } \mathbf{C}_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 2.1.2 Les ensembles

Ici  $\star$  dénote un nombre dans  $\{0, 1\}$ , à chaque apparition, elle est indépendante par rapport aux autres apparitions (i.e ce n'est pas la même  $\star$ ).

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(0) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star \end{bmatrix} \right\}, \mathfrak{R}(1) = \left\{ \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(2) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(3) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(4) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 0 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 0 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 0 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 0 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \\ \mathfrak{R}(5) &= \left\{ \begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ 1 & 1 & 1 \\ \star & 1 & \star \end{bmatrix} \right\}, \forall n \geq 6, \mathfrak{R}(n) = \{\}. \end{aligned}$$

### 2.1.3 Quelques propriétés

**Proposition 1.**

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), a_{ij}\sigma(\mathbf{AC}_+) = b_{ij}\sigma(\mathbf{BC}_+) = n.$$

*Preuve.* D'après la définition de  $\mathfrak{R}(n)$ . □

**Remarque.** Si l'on se place dans le cas  $n \leq 0$ , on peut se débarasser du coefficient du centre de la matrice devant  $\sigma$ .

**Proposition 2.**

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n \leq \sigma(\mathbf{A}) \leq n + 4.$$

*Preuve.*

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), n = a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 0 & a_{i+1j} & 0 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 0 & a_{i-1j} & 0 \end{bmatrix} \leq a_{ij}\sigma(\mathbf{A}) \leq a_{ij}\sigma \begin{bmatrix} 1 & a_{i+1j} & 1 \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ 1 & a_{i-1j} & 1 \end{bmatrix} = n + 4.$$

□

**Proposition 3.**

$$\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} = \bigcup_{i=0}^5 \mathfrak{R}(i).$$

*Preuve.* Il suffit de raisonner sur les cardinalités en remarquant que par définition, les  $\mathfrak{R}(i)$  sont disjoints et inclus dans  $\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\}$ ,  $\forall 0 \leq n \neq m \leq 5, \mathfrak{R}(n) \cap \mathfrak{R}(m) = \{\}$ .

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=0}^5 \mathfrak{R}(i) \right| &= \sum_{i=0}^5 |\mathfrak{R}(i)| = 2^8 + 2^4 + 4 \times 2^4 + 6 \times 2^4 + 4 \times 2^4 + 2^4 = 2^9 \\ &= |\mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\}|. \end{aligned}$$

□

## 2.2 Fonction de comptage $\mu$ de sous-matrices $\mathfrak{g} - n$ -équivalentes

### 2.2.1 Définition

Soit  $\mathbf{A}$ , une matrice quelconque de coefficients binaires ou non définis, les coefficients non définis sont considérés comme nuls. La fonction de comptage de sous-matrices de  $\mathbf{A}^*$  elle-même, sous matrice de  $\mathbf{A}$  est défini par

$$\mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, n) = |\{(i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) : \mathfrak{v}((i, j), \mathbf{A}, 1) \in \mathfrak{R}(n)\}|.$$

## 2.3 Mesure macroscopique $\mathfrak{g}$ d'une matrice binaire carrée d'ordre 3

### 2.3.1 Définition

On définit une première mesure  $\mathfrak{g}$ , appelée mesure macroscopique, puisqu'intervenant que sur des matrices carrée binaire d'ordre 3 (i.e, image de  $\mathfrak{v}$  d'ordre 1), qui nous permettra ensuite de définir la mesure  $\mathfrak{f}$  pour une matrice binaire carrée d'ordre  $n$ . On décide de 5 coefficients positifs  $\alpha_i$  (on pourrait travailler sur les négatifs, mais ça rendrait impossible la formulation certaines inégalités).

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} : \mathcal{M}_{3 \times 3}\{0, 1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} \\ a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} \\ a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} \end{bmatrix} &\mapsto \mathfrak{g}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}(\mathbf{A})$  peut s'écrire de plein de manières différentes et les fonctions que nous avons introduites vont nous permettre de mieux apercevoir les propriétés de  $\mathfrak{g}$ . Notons  $\mathfrak{S}_k$  le groupe symétrique de  $\{a_{i+i_1, j+j_1}, \dots, a_{i+i_k, j+j_k}\}$ , pour  $1 \leq k \leq 4$ , les coordonnées des  $a_{ij}$  cités juste avant correspondant à celles des coefficients non nuls de  $\mathbf{C}_+$ . Ainsi,  $i_1 = 0, j_1 = 1, i_2 = 0, j_2 = -1, i_3 = 1, j_3 = 0, i_4 = -1, j_4 = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\mathbf{A}) &= a_{ij}(\alpha_1 + \alpha_2(a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i+1j} + a_{i-1j}) + \\ &\alpha_3(a_{i-1j}(a_{i+1j} + a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{i+1j}(a_{ij-1} + a_{ij+1}) + a_{ij+1}a_{ij-1}) + \\ &\alpha_4(a_{i-1j}(a_{ij+1}(a_{ij-1} + a_{i+1j}) + a_{i+1j}a_{ij-1}) + a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) + \\ &\alpha_5a_{i-1j}a_{i+1j}a_{ij-1}a_{ij+1}) \\ &= a_{ij} \sum_{k=0}^4 \alpha_{k+1} \sum_{\mathfrak{S}_k} a_{i+i_1j+j_1} \dots a_{i+i_kj+j_k}. \end{aligned}$$

### 2.3.2 Propriétés

**Proposition 4.**

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{R}(n), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \mathfrak{g}(\mathbf{B}).$$

*Preuve.* L'un remarquera premièrement que  $\mathfrak{g}$  ne dépend pas des termes aux sommets, ainsi il suffit d'étudier respectivement, pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , les 1, 1, 4, 6, 4, 1 cas. On vérifiera que pour chaque  $n$ , l'expression de  $\mathfrak{g}$  pour chacun des cas correspondant, reste inchangée. L'expression de  $\mathfrak{g}$  a en fait été construite pour respecter cette propriété, en effet, les termes des  $a_{ij}$  permutent autour du centre sans passer par les sommets.  $\square$

**Proposition 5.**

$$\forall \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n), \mathfrak{g}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \binom{n-1}{i-1}.$$

*Preuve.* Par la proposition 4, il suffit de calculer  $\mathfrak{g}$  pour une matrice  $\mathbf{A}$  dans chacun des  $\mathfrak{R}(i)$ .  $\square$

**Proposition 6.**  $\mathfrak{g}$  est une fonction croissante de  $n$ .

*Preuve.* Proposition 5.  $\square$

*Preuve.* Remarquons que puisque les  $a_{ij} \geq 0$  et que  $n = a_{ij}(a_{i+1j} + a_{ij+1} + a_{ij-1} + a_{i-1j})$ ,  $n$  est une fonction croissante des  $a_{ij}$  (i.e de tous les  $a_{ij}$ , et inversement, les  $a_{ij}$  croient quand  $n$  croit), et plus particulièrement de ceux n'étant pas sur les sommets, or  $\mathfrak{g}$  est croissante de ces mêmes  $a_{ij}$ , donc  $\mathfrak{g}$  est croissante de  $n$ .  $\square$

**Proposition 7.**

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathfrak{g}(\mathbf{A}^*) \leq \mathfrak{g}(\mathbf{A}).$$

*Preuve.* Il suffit de définir, artificiellement  $a_{ij}^* = 0$  si  $(i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \setminus \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)$ , afin de pouvoir poser  $\mathfrak{g}$  même si  $\mathbf{A}^*$  n'est pas remplie,

$$\forall \mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathbf{A}^* = (a_{ij}^*)_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} = \left( \begin{cases} a_{ij} & \text{si } (i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \right)_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})}.$$

Finalement, on a  $\forall (i, j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}) \setminus \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*), a_{ij}^* = 0 \leq a_{ij} \leq 1$ , or  $\mathfrak{g}$  est une fonction croissante des  $a_{ij}$  (et  $a_{ij}^*$ ), d'où l'inégalité voulue.  $\square$

**Remarque.** L'égalité a lieu si et seulement si les coefficients dont a été privée  $\mathbf{A}^*$  sont sur les sommets ou si  $\mathbf{A}^*, \mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$ .

## 2.4 Mesure globale $\mathfrak{f}$ d'une sous matrice d'une matrice binaire carrée d'ordre $n$ selon $\mathfrak{g}$ d'ordre 3

### 2.4.1 Définitions

On définit  $\mathfrak{f}$  de  $\mathbf{A}^*$  dans l'environnement  $\mathbf{A}$  comme étant la somme des mesures macroscopiques  $\mathfrak{g}$  des matrices voisines d'ordre 1 aux coordonnées de  $\mathbf{A}^*$ .

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i, j), \mathbf{A}, 1)).$$

Par soucis d'écriture, quand on notera  $\mathfrak{f}(\mathbf{A})$ , on entendra  $\mathfrak{f}(\mathbf{A}, \mathfrak{p}(\mathbf{A}))$ .

### 2.4.2 Propriétés

**Proposition 8.**

$$\mathfrak{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{(i,j) \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*)} \mathfrak{g}(\mathfrak{v}((i, j), \mathbf{A}, 1) \mathbf{C}_+).$$

*Preuve.* L'opération  $\mathbf{A} \mathbf{C}_+$  consiste à mettre à 0 les coefficients des sommets, or  $\mathfrak{g}$  ne dépend pas des sommets, d'où l'égalité.  $\square$

**Remarque.** On peut absolument remplacer  $\mathbf{C}_+$  par toute matrice carrée d'ordre 3 telle que  $\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$  soit incluse dans cette matrice.

**Proposition 9.** On note par abus,  $\mathbf{g}(\mathfrak{R}(n)) = \mathbf{g}(\mathbf{A})$  où  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}(n)$ .

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^5 \mu(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}, j) \mathbf{g}(\mathfrak{R}(n)).$$

**Proposition 10.** Pour toute matrice carrée  $\mathbf{A}$  d'ordre  $n$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{A}) &\leq \mathbf{f}((1)_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}) \\ &= (n-2)^2(\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + \alpha_5) + 4(n-2)(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4) + 4(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3). \end{aligned}$$

**Proposition 11.**

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}) + \mathbf{f}(\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^*, \mathbf{A}) = \mathbf{f}(\mathbf{A}).$$

*Preuve.* Par la définition de  $\mathbf{f}$  en remarquant que  $\mathfrak{C}(\mathbf{A}) = \mathfrak{C}(\mathbf{A}^*) \sqcup \mathfrak{C}(\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^*)$ . □

**Proposition 12.**

$$n\mathbf{f}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{f}(\mathfrak{k}(\mathbf{A}, n))$$

**Remarque.** Il y a égalité lorsque  $\mathbf{A}$  a été paddée,  $\mathbf{A} = \mathbf{p}(\mathbf{B})$ .