Sur les racines imbriquées

Yvann Le Fay

Lycée Henri IV, 75005

Mai 2018, modifié en mars 2019

1 Définitions

Soient $(u_n) \in [1, +\infty[^{\mathbb{N}}$, la suite d'exposants des radicaux, C une constante positive et $(f_n) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$. On définit pour tout $n,m \in \mathbb{N}$,

$$A(n,m) = \begin{cases} f_n \sqrt[u_n]{C + A(n+1,m)}, & n \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Aussi cette forme est équivalente à toutes les autres formes de radicaux imbriquées.

2 Inégalités, équivalents de $A(n,m)$

Proposition 1. *Soient $n,m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$, alors*

$$A(n,m) \leq \sum_{j=n}^{m} \left(\prod_{k=0}^{j-n} u_{k+n} \right)^{-1} (C + f_j^{u_j})$$

Démonstration. Par récurrence, l'inégalité est vérifiée en $n = m$ par l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$A(m,m) = f_m \sqrt[u_m]{C} \leq (C + f_m^{u_m})/u_m$$

Supposons qu'elle soit vérifiée pour $n + 1$, i.e

$$A(n+1,m) \leq \sum_{j=n+1}^{m} \left(\prod_{k=0}^{j-n-1} u_{k+n+1} \right)^{-1} (C + f_j^{u_j})$$

Alors

$$
\begin{aligned}
A(n,m) &= \sqrt[u_n]{f_n^{u_n}(C + A(n+1,m))} \\
&\leq \frac{1}{u_n}(f_n^{u_n} + C + A(n+1,m)) \\
&\leq \frac{1}{u_n}\left(f_n^{u_n} + C + \sum_{j=n+1}^{m}\left(\prod_{k=0}^{j-n-1} u_{k+n+1}\right)^{-1}(C + f_j^{u_j})\right) \\
&= \sum_{j=n}^{m}\left(\prod_{k=0}^{j-n} u_{k+n}\right)^{-1}(C + f_j^{u_j})
\end{aligned}
$$

□

Proposition 2. *Soient $n,m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$, si (u_n) est de terme constant égal à r et f admet un prolongement dérivable et concave, alors*

$$A(n,m) \leq \frac{C}{r-1} + \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s} A^{r-s}B^s\Phi(r^{-1}, -s,0)$$

où $\Phi(z,s,a) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k(k+a)^{-s}$ et $A = f(n), B = f'(n)$.

Démonstration. D'après la proposition 1., on a

$$A(n,m) \leq \sum_{j=1}^{m-n+1} r^{-j}(C + f_{n+j-1}^{u_{n+j-1}}) = \underbrace{\frac{C}{R-1}(1 - r^{n-m-1})}_{=V} + \sum_{j=1}^{m-n+1} r^{-j} f_{n+j-1}^{u_{n+j-1}}$$

Or f est concave, ainsi $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$f(n+j-1) \leq A + B(j-1)$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
A(n,m) &\leq V + \sum_{j=1}^{m-n+1}\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s} A^{r-s}B^s\frac{(j-1)^s}{r^j} \\
&= V + \frac{1}{r}\sum_{s=0}^{r}\sum_{j=0}^{m-n}\binom{r}{s} A^{r-s}B^s\frac{j^s}{r^j}
\end{aligned}
$$

Or

$$\sum_{j=0}^{m-n}\frac{j^s}{r^j} = \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j^s}{r^j}}_{=\Phi(r^{-1},-s,0)} - \underbrace{\sum_{j=m-n+1}^{+\infty}\frac{j^s}{r^j}}_{=r^{n-m-1}\Phi(r^{-1},-s,m-n+1)}$$

Enfin, asymptotiquement pour m, on obtient le résultat. □

Proposition 3. *Soient $n,m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$, si on dispose de deux suites $((\lambda_k),\ (\mu_k))_{k\in[\![n+1;m]\!]}$ tels que $\lambda_k A(k,m) \le C + A(k,m) \le \mu_k A(k,m)$ alors on a*

$$f_n \prod_{j=1}^{m-n} (f_{n+j}\lambda_{n+j})^{P_{j,n}} \le A(n,m) \le f_n \prod_{j=1}^{m-n} (f_{n+j}\mu_{n+j})^{P_{j,n}}$$

où

$$P_{j,n} = \left(\prod_{i=0}^{j-1} u_{i+n}\right)^{-1}$$

Démonstration. On traite par récurrence l'inégalité de droite, *mutatis mutandis* pour celle de gauche. L'inégalité est vérifiée en $n = m-1$, on a

$$A(m-1,m) = f_{m-1} \sqrt[u_{m-1}]{C + f_m \sqrt[u_m]{C}} \le f_{m-1} \sqrt[u_{m-1}]{\mu_m f_m}$$

Supposons qu'elle soit vérifiée pour $n+1$, i.e

$$A(n+1,m) \le f_{n+1} \prod_{j=1}^{m-n-1} (f_{n+1+j}\mu_{n+1+j})^{P_{j,n+1}}$$

Alors

$$\begin{aligned} A(n,m) = f_n \sqrt[u_n]{C + A(n+1,m)} &\le f_n \sqrt[u_n]{\mu_{n+1} A(n+1,m)} \\ &\le f_n \sqrt[u_n]{\mu_{n+1} f_{n+1} \prod_{j=2}^{m-n} (f_{n+j}\mu_{n+j})^{P_{j-1,n+1}}} \\ &= f_n \prod_{j=1}^{m-n} (f_{n+j}\mu_{n+j})^{P_{j,n}} \qquad \text{car } u_n^{-1} P_{j-1,n+1} = P_{j,n} \end{aligned}$$

Remarque. *On a égalité si et seulement si $\lambda_k = 1 + \frac{C}{A(k,m)}$.*

$\square$

Proposition 4. *Si f est une fonction croissante et (u_n) de terme constant égal à u, λ tel que quelque soit $k \ge n$, $\lambda A(k,\infty) \le C + A(k,\infty)$ alors*

$$f_n(\lambda f_n)^{\frac{1}{u-1}} \le A(n,\infty)$$

Aussi, si f est décroissante, (u_n) de terme constant égal à u et μ tel que quelque soit $k \ge n$, $\mu A(k,\infty) \ge C + A(k,\infty)$ alors

$$f_n(\lambda f_n)^{\frac{1}{u-1}} \ge A(n,\infty)$$

Démonstration. D'après la proposition 3, on a pour la majoration (mutatis mutandis pour la minoration)

$$f_n(\lambda f_n)^{\frac{1}{u-1}} = f_n \prod_{j=1}^{\infty} (\lambda f_n)^{u^{-j}} \le f_n \prod_{j=1}^{\infty} (\lambda f(n+j))^{u^{-j}} \le A(n,\infty)$$

$\square$

Proposition 5. *Si u_n est de terme constant égal à u, $f_n \sim f_{n+j}$ et que $A(n,\infty)$ tend vers $+\infty$ alors*

$$f_n^{\frac{u}{u-1}} \sim A(n,\infty)$$

Démonstration. Posons pour tout $k \geq n$ $\lambda_k = 1 + \frac{C}{A(k,m)}$, soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{C}{A(n,\infty)} \right| < \varepsilon \text{ et } \left| \frac{f_n}{f_N} - 1 \right| < \varepsilon$$

Aussi d'après la proposition 3,

$$f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_{n+j}(1 + \frac{C}{A(n+j,m)}) \right)^{u^{-j}} = A(n,m)$$

Ainsi pour $n \geq N$, $j \geq 1$, on a $f_N(1-\varepsilon) < f_{n+j} < f_N(1+\varepsilon)$

$$f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_N(1-\varepsilon)^2 \right)^{u^{-j}} < A(n,m) < f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_N(1+\varepsilon)^2) \right)^{u^{-j}}$$

Puis pour $m \to +\infty$,

$$f_n(f_N(1-\varepsilon)^2)^{1/(u-1)} \leq A(n,\infty) \leq f_n(f_N(1+\varepsilon)^2)^{1/(u-1)}$$

Or $N \to n$ convient, ce qui implique $\varepsilon \to 0$, d'où le résultat. □

Remarque. *Il peut être utile de suivre le même raisonnement avec (u_n) non constante dans le cas où $P_{j,n}$ admet un équivalent pratique.*

Proposition 6. *Si u_n est de terme constant égal à u et $f_{n+j} \sim f_n K^j$ avec $K > 1$, alors*

$$f_n^{\frac{u}{1-u}} K^{\frac{u}{(1-u)^2}} \sim A(n,\infty)$$

Démonstration. Adaptons la preuve de la proposition précédente, nécessairement $A(n,\infty)$ tend vers $+\infty$, soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{C}{A(n,\infty)} \right| < \varepsilon \text{ et } \left| \frac{f_{n+j}}{K^j f_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

On a pour $n \geq N$, $j \geq 1$, $f_n(1-\varepsilon)K^j < f_{n+j} < f_n(1+\varepsilon)K^j$ puis d'après la proposition 3,

$$f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_n(1-\varepsilon)^2 K^j \right)^{u^{-j}} < A(n,m) < f_n \prod_{j=1}^{m-n} \left(f_n(1+\varepsilon)^2 K^j \right)^{u^{-j}}$$

Puis pour $m \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat. □

Remarque. *Si $K < 1$ alors $A(n,\infty) \to 0$.*
Proposition 7. *Une autre forme de $A(n,m)$ est*

$$A(n,m) = \sqrt[u_n]{a_{n,1} + \sqrt[u_{n+1}]{a_{n,2} + ... + \sqrt[u_m]{a_{n,m-n+1}}}} \text{ avec } a_{n,i} = C \prod_{j=1}^{i} f_{j+n-1}^{Q_{j,i,n}} \text{ où } Q_{j,i,n} = \prod_{l=0}^{i-j} u_{n+l}$$

Démonstration. L'égalité est vérifiée pour $n = m$, on a

$$A(m,m) = f_m \sqrt[u_m]{C} = \sqrt[u_m]{f_m^{u_m} C}$$

Supposons qu'elle soit vérifiée pour $n + 1$, i.e

$$A(n+1,m) = \sqrt[u_{n+1}]{a_{n+1,1} + ... + \sqrt[u_m]{a_{n+1,m-n}}}$$

Alors

$$A(n,m) = \sqrt[u_n]{C f_n^{u_n} + \sqrt[u_{n+1}]{f_n^{u_n u_{n+1}} a_{n+1,1} + ... + \sqrt[u_m]{f_n^{Q_{1,m-n+1,n}} a_{n+1,m-n}}}}$$

Ainsi, $a_{n,1} = C f_n^{u_n}$, de plus pour $2 \le i \le m - n + 1$, $a_{n,i} = a_{n+1,i-1} f_n^{Q_{1,i,n}}$, ce qui est attendu. $\square$

Remarque. *Cette forme peut être utilisée pour appliquer le théorème de convergence de Herschfeld.*
Proposition 8. *Quitte à translater les indices de (u_i), (f_i), notons $r = n-m+1$ et considérons $A(n,m)$ égale à*

$$\sqrt[u_n]{a_n + \sqrt[u_{n+1}]{a_{n+1} + ... + \sqrt[u_m]{a_m}}}$$

On définit la fonction $g_i = g_{n,i}$

$$g_i(x) = \begin{cases} x \text{ si } i = 0 \\ g_{i-1}^{u_{n+i-1}}(x) - a_{n+i-1} \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors

$$\Delta_{n,m} = A(n,m+1) - A(n,m) \le \sqrt[u_{m+1}]{a_{m+1}} \left(\prod_{i=1}^{r} u_{n-1+i} g_{i-1}^{u_{n-1+i}-1}(A(n,m)) \right)^{-1}$$
$$= M_{n,m}$$

Démonstration. Notons qu'on a pour $i \in [\![1;r]\!]$, $g_i(A(n,m)) = A(n,m+1)$, mais aussi,

$$g_i(x) - g_i(y) = g_{i-1}^{u_{n-1+i}}(x) - g_{i-1}^{u_{n-1+i}}(y) = (g_{i-1}(x) - g_{i-1}(y)) \sum_{j=0}^{u_{n-1+i}-1} g_{i-1}^{j}(x) g_{i-1}^{u_{n-1+i}-1-j}(y)$$

On a en déroulant l'identité précédente,

$$(g_{n-1}(A(n,m+1)) - g_{n-1}(A(n,m)))\prod_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{u_{n-1+i}-1} g_{i-1}^{j}(A(n,m+1))g_{i-1}^{u_{n+i-1}-1-j}(A(n,m))$$

$$= g_{m-1}^{u_m}(A(n,m+1)) - g_{m-1}^{u_m}(A(n,m)) = \sqrt[u_{m+1}]{a_{m+1}}$$

Or $\Delta_{n,m} = g_{n-1}(A(n,m+1)) - g_{n-1}(A(n,m))$ d'où le résultat intermédiaire.
Enfin $g_i'(y) = u_i g_{i-1}^{u_{n+i-1}-1}(y)g_{i-1}'(y)$ puis $g_i(A(n,m+1)) \geq g_i(A(n,m))$ d'où

$$\sum_{j=0}^{u_{n+i-1}-1} g_{i-1}^{j}(A(n,m+1))g_{i-1}^{u_{n+i-1}-1-j}(A(n,m)) \geq r_i g_{i-1}^{u_{n-1+i}-1}(A(n,m))$$

Ce qui conclue cette démonstration. □

Remarque. *Si la série $\sum_k M_{n,k}$ converge alors $A(n,m)$ converge.*