Resumo de conceitos matemáticos úteis para Computação Gráfica

2024/2

1. Vetores

- **Definição:** Representados por $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ em 2D ou $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ em 3D, possuem magnitude e direção.
- **Operações básicas:**
  - Soma, subtração e multiplicação escalar como operações fundamentais.
- **Módulo (ou norma euclidiana):**

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

- **Produto interno:** Mede a projeção de $\mathbf{u}$ em $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

- **Produto vetorial (3D):** Resulta em um vetor perpendicular a dois vetores dados:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

2. Determinantes

- **Determinante de uma matriz 2x2:** Dado $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$\det(\mathbf{A}) = ad - bc.$$

  - Usado para calcular área em 2D ou verificar orientação de pontos.
- **Determinante de uma matriz 3x3:** Dado $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$,

$$\det(\mathbf{A}) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$$

  - Usado para cálculo de volume ou orientação em 3D.

3. Operador de Orientação

- **Em 2D:** Dados três pontos $\mathbf{p_1} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{p_2} = (x_2, y_2)$ e $\mathbf{p_3} = (x_3, y_3)$, a orientação pode ser verificada com o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).$$

  - **Interpretação:**
    - $\Delta > 0$: Orientação anti-horária.
    - $\Delta < 0$: Orientação horária.
    - $\Delta = 0$: Pontos colineares.
- **Em 3D:** A orientação de quatro pontos $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \mathbf{p_4}$ pode ser verificada pelo determinante de:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}.$$

O sinal indica se o ponto $\mathbf{p_4}$ está acima, abaixo ou no plano formado pelos outros três.

4. Área de Paralelogramo e Triângulo

- **Paralelogramo em 2D:** Dados dois vetores $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$:

$$\text{Área} = |u_x v_y - u_y v_x| = |\det(\mathbf{U})|,$$

onde $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$.

- **Triângulo em 2D:** A área é metade da área do paralelogramo formado por dois vetores.

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\det(\mathbf{U})|.$$

- **Paralelogramo em 3D:** Usar o módulo do produto vetorial:

$$\text{Área} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

5. Distância

- **Distância Euclidiana:** Entre dois pontos $\mathbf{p_1} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{p_2} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

- **Distância em uma direção:** Seja $\mathbf{v}_{unit}$ um vetor unitário, a distância projetada é:

$$d_{\|} = (\mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}) \cdot \mathbf{v}_{unit}.$$

6. Combinações

- **Combinação linear:**

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- **Combinação afim:** Restrições dos pesos:

$$\mathbf{p} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n}, \quad \text{com } a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1.$$

- **Coordenadas baricêntricas:** Dentro de um triângulo, calcular os pesos baricêntricos:

$$\mathbf{p} = \lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \lambda_3\mathbf{v_3}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

7. Projeções

- **Reta:** Dado $\mathbf{p}$ e direção $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{q}_{proj} = \mathbf{p} + \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|^2}\mathbf{d}.$$

- **Plano:** Para $\mathbf{p}$ no plano e vetor normal $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{q}_{proj} = \mathbf{q} - \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}.$$

7. Projeções (Forma Simplificada)

Projeção de um ponto em uma reta

- **Dados necessários:**
  - Um ponto na reta $\mathbf{p_0}$.
  - Um vetor diretor $\mathbf{d}$ da reta.
  - O ponto $\mathbf{q}$ que queremos projetar.
- **Fórmula simplificada:**
  1. Calcule o vetor entre $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p_0}$: $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p_0}$.
  2. Calcule o fator escalar da projeção:
  $$t = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}.$$
  3. Encontre o ponto projetado:
  $$\mathbf{q}_{proj} = \mathbf{p_0} + t\mathbf{d}.$$

Projeção de um ponto em um plano

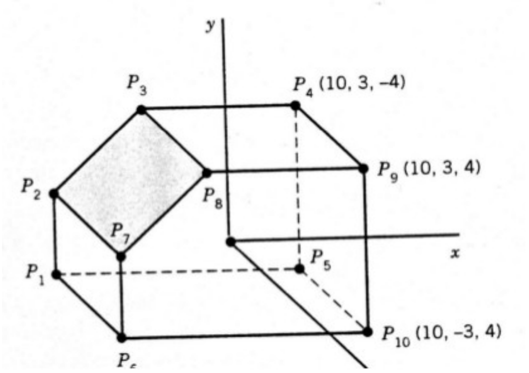
- **Dados necessários:**
  - Um ponto no plano $\mathbf{p_0}$.
  - O vetor normal $\mathbf{n}$ do plano.
  - O ponto $\mathbf{q}$ que queremos projetar.
- **Fórmula simplificada:**
  1. Calcule o vetor entre $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p_0}$: $\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p_0}$.
  2. Calcule a distância do ponto ao plano:
  $$d = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}.$$
  3. Encontre o ponto projetado:
  $$\mathbf{q}_{proj} = \mathbf{q} - d\mathbf{n}.$$

1. Para **retas**, o fator t é a fração ao longo do vetor diretor $\mathbf{d}$ onde ocorre a projeção.
2. Para **planos**, a projeção ajusta o ponto $\mathbf{q}$ ao longo da direção do vetor normal $\mathbf{n}$, removendo a componente perpendicular.

Questões de Provas anteriores
e Listas de exercícios:

(Algumas poucas questões contém sugestão de solução em azul)

1. Considere a geometria do objeto abaixo (isso é as coordenadas dos seus vértices) dada pela matriz P. Que transformações você deve submetê-lo para que os pontos P1, P5, P10 e P6 fiquem paralelos ao plano xy?
   a) Descreva a matriz que faria isso.
   b) Como ficaria a matriz de coordenadas do vértice do objeto quando transformada por ela?
   c) Desenhe o objeto na nova posição.



$$[P] = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & 1 & -4 & 1 \\ -8.5 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & -3 & 4 & 1 \\ -10 & 1 & 4 & 1 \\ -8.5 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para fazer os pontos P1, P5, P10 e P6 paralelos ao plano xy deve-se dar um rotação de 90 graus em sentido anti horário, o que se faz pela matriz:

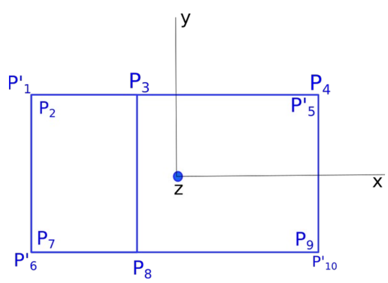
$$[T_R]_x^\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com o valor do ângulo correto (90º):

$$[T_R]_x^{90^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

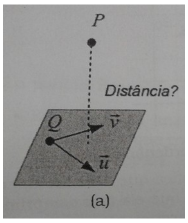
A figura transformada fica com as coordenadas abaixo e na forma desenhada a seguir:

$$[P^*] = \begin{bmatrix} -10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & 1 & -4 & 1 \\ -8.5 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & 3 & -4 & 1 \\ 10 & -3 & -4 & 1 \\ -10 & -3 & 4 & 1 \\ -10 & 1 & 4 & 1 \\ -8.5 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 & -3 & 1 \\ -10 & 4 & 1 & 1 \\ -8.5 & 4 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & -3 & 1 \\ -10 & -4 & -3 & 1 \\ -10 & -4 & 1 & 1 \\ -8.5 & -4 & 3 & 1 \\ 10 & -4 & 3 & 1 \\ 10 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$



2. Para cada um dos itens abaixo, responda usando apenas os operadores geométricos dados em aula, tais como produto escalar, produto vetorial, operador de orientação e operadores afim entre pontos, vetores e escalares. Em particular, nenhuma resposta deve envolver resolução de sistemas de equações. Você pode usar funções transcedentais tais como seno, cosseno, raiz quadrada, etc.

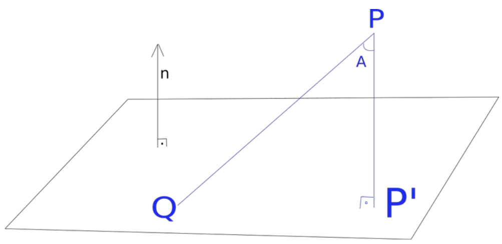
a) Em R^3 , como computar a distância entre um ponto P e um plano definido por um ponto Q e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$?



Sabe-se que a menor distância entre P e o plano é dada na direção perpendicular a este plano, ou seja, na direção do vetor normal do plano.
Chamamos este vetor normal de n = (a, b, c).
O ponto P é projetado perpendicularmente no plano no ponto P' (na mesma direção de n) formando um triângulo:

A distância que queremos calcular é igual ao módulo do vetor PP' = d.
A hipotenusa do triângulo é o módulo do vetor QP.
Então, se

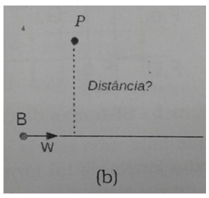
$$\cos A = \frac{d}{|QP|} \therefore d = \cos A \cdot |QP|$$



Alternativamente, pode-se calcular diretamente a projeção do ponto P, na direção do vetor n.

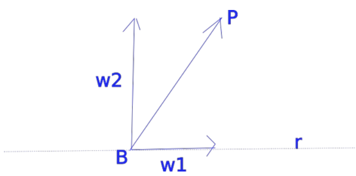
Note que a solução não depende de se conhecer P'.

b) Em R^3 , como computar a distância entre um ponto P e uma reta definida por um ponto B e um vetor $\vec{w}$?



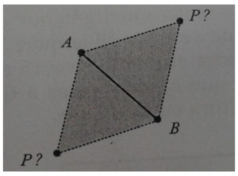
Vamos chamar a reta que passa por B e tem mesma direção do vetor w de r.
A equação paramétrica da reta é:
r = B + w t

O vetor PB tem 2 componentes: uma paralela à reta r w1 e outra ortogonal w2. Esta última (w2) é exatamente a distância que queremos calcular entre o ponto e a reta.



$$w2 = d = \frac{||PB \times \vec{w}||}{||\vec{w}||}$$

c) Dados dois vértices A = (x_a, y_a) e B = (x_b, y_b) de um triângulo equilátero em R^2, como você faria para determinar as coordenadas do terceiro vértice?
Observe que há duas posições possíveis para o terceiro vértice e você deve dizer como encontrar ambas.

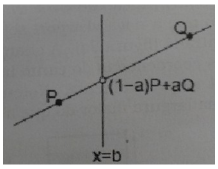


Para o outro ponto basta fazer o ângulo = -60º ou trocar A com B.

$$R = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x - A_x \\ P_y - A_y \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

d) Dada uma linha vertical x = b e um par de pontos Q e P no plano, calcule em função de b e das coordenadas de P e Q, a combinação afim de P e Q que está sobre a linha vertical.



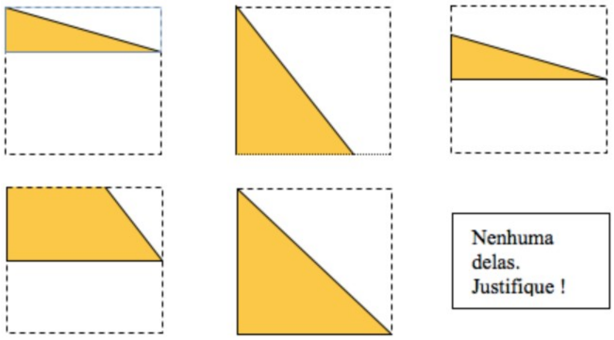
$$\begin{aligned} x &= (1-a)P_x + aQ_x \\ &= P_x + a(P_x - Q_x) \\ &= b \end{aligned}$$

$$a = \frac{(b - P_x)}{(Q_x - P_x)}$$

$$\begin{aligned} y &= (1-a)P_y + aQ_y \\ &= P_y + a(Q_y - P_y) \\ &= P_y + \frac{(b-P_x)}{(Q_x - P_x)}(Q_y - P_y) \end{aligned}$$

3. Considere: todas as etapas do processo de visualização de objetos 2D; uma window delimitada por: xmin=10, xmax=70, ymin=40 e ymax=80; e os seguintes parâmetros de instanciamento, aplicados nesta ordem:

1º) Escala em X: 1, Escala em Y: 2
2º) Rotação: 0
3º) Translação X: 10, Translação Y: 0
Os retângulos com linhas pontilhadas representam a viewport.
Qual dos desenhos a seguir pode representar o desenho do
triângulo definido por (0,10)-(0,40)-(60,10)?
Justifique sua resposta.

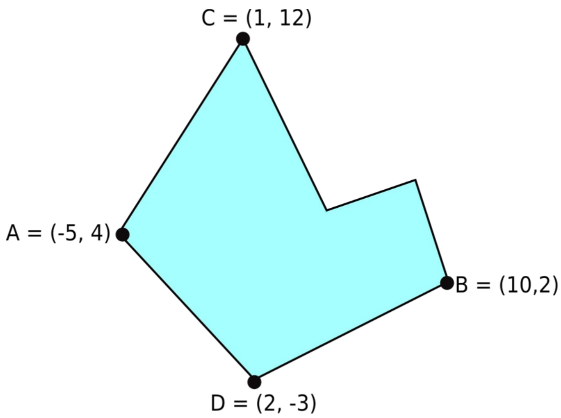


4. Mostre a imagem gerada pelo trecho de programa em OpenGL dado a seguir. Numere os desenhos de acordo com os comentários do código fonte.

```
void DesenhaObjeto() {
    glBegin(GL_LINE_STRIP);
        glVertex2f(0,0);
        glVertex2f(2,0);
        glVertex2f(2,2);
        glVertex2f(0,2);
    glEnd();
}
```

```
void Desenha(void) {
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
    glLoadIdentity();
    glColor3f(1.0f, 1.0f, 1.0f);
    glTranslatef(5,0,0);
    DesenhaObjeto();                // Desenha 1
    glPushMatrix();
        glTranslatef(-10,0,0);
        DesenhaObjeto();            // Desenha 2
        glPushMatrix();
            glRotatef(90,0,0,1);
            glTranslatef(0,-5,0);
            DesenhaObjeto();        // Desenha 3
        glPopMatrix();
        glRotatef(-90,0,0,1);
        glTranslatef(0,5,0);
        DesenhaObjeto();            // Desenha 4
    glPopMatrix();
}
```

5. Qual a window adequada para enquadrar o objeto abaixo, centralizado em uma viewport de resolução igual a 400x800 ?



6. Dada uma sequência de n pontos <P_1, . . . , P_n> em três dimensões, descreva uma função booleana Planar(P_1, . . . , P_n) que retorna verdadeiro, se e somente se, os pontos estiverem em um plano comum. Se você preferir escrever um pseudocódigo, comente-o para indicar o que ele está fazendo.

7. Suponha que você receba os vértices de um polígono de 4 lados, $<P_0, P_1, P_2, P_3>$ no plano. Lembre-se que um polígono é convexo se todo ângulo interno for menor ou igual a 180 graus.

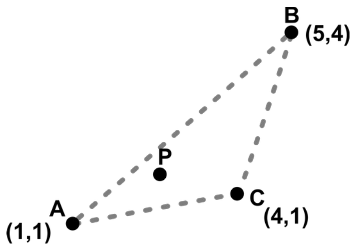
convexo *não convexo*

(a) Supondo que esses vértices foram dados em sentido anti-horário, explique como usar o teste de orientação para determinar se este polígono é convexo.

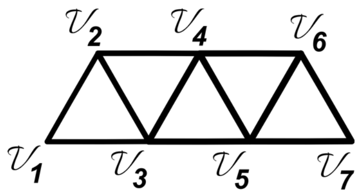
(b) Repita (a), mas agora a ordem dos vértices é desconhecida, mas com certeza será no sentido horário ou anti-horário.

8. Dado o triângulo com vértices A, B, e C, abaixo e o ponto P interno a ele.

Expresse P como uma combinação afim de A, B, e C.



9. Em OpenGL os vértices tem que ser enviados na sequência correta (sentido anti-horário) para lidar com a orientação das faces geradas. Entretanto, OpenGL trabalha de maneira excepcional quando se trata do desenho da primitiva TRIANGLE_STRIP, para garantir a intenção do projetista. Sendo assim, Considere a faixa triangular mostrada na figura abaixo. Dada a ordem de desenho $<V_1, V_2, . . . , V_n>$ qual das seguintes declarações é verdadeira? Justifique.



(a) Os triângulos da faixa são todos *front-facing* (voltados para frente)

(b) Os triângulos da faixa são todos *back-facing* (voltados para trás)

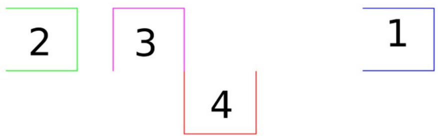
(c) Eles alternam entre *front* e *back*

(d) Nenhuma das anteriores.

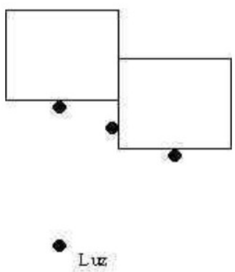
10. Mostre a imagem gerada pelo trecho de programa em OpenGL dado a seguir. Numere os desenhos de acordo com os comentários do código fonte.

```
void DesenhaObjeto() {
    glBegin(GL_LINE_STRIP);
        glVertex2f(0,0);
        glVertex2f(2,0);
        glVertex2f(2,2);
        glVertex2f(0,2);
    glEnd();
}
void Desenha(void) {
    glClear(GL_COLOR_BUFFER_BIT);
    glLoadIdentity();
    glColor3f(1.0f, 1.0f, 1.0f);
    glTranslatef(5,0,0);
    DesenhaObjeto();              // Desenha 1
    glPushMatrix();
        glTranslatef(-10,0,0);
        DesenhaObjeto();          // Desenha 2
        glPushMatrix();
            glRotatef(90,0,0,1);
            glTranslatef(0,-5,0);
            DesenhaObjeto();      // Desenha 3
        glPopMatrix();
        glRotatef(-90,0,0,1);
        glTranslatef(0,5,0);
        DesenhaObjeto();          // Desenha 4
    glPopMatrix();
}
```

Resposta ->



11. Segundo os modelo de iluminação difusa, quais os pontos das faces do desenho abaixo são mais claras e quais são mais escuras?(Considere a cena vista de cima). Enumere as faces em ordem crescente de luminosidade. Liste as faces que não são *vistas* pela luz.



12. Informe os comandos OpenGL na sequência correta, para indicar as transformações geométricas responsáveis por rotacionar um objeto 45º ao redor do eixo Y e, em seguida, transladá-lo por 3 unidades no eixo Z.

13. Qual é a distância entre os pontos (3,2) e (7,5), considerando o vetor direcional (1,2)?

14. Qual é o papel do algoritmo *z-buffer* ao desenhar dois triângulos em OpenGL, um em frente ao outro? Marque a alternativa correta e justifique.

(a) O *z-buffer* garante que o triângulo com maior coordenada Z seja desenhado primeiro
(b) O *z-buffer* desativa a profundidade de campo, desenhando os triângulos na ordem que são formecidos ao OpenGL
(c) O *z-buffer* armazena as profundidades dos fragmentos e garante que os fragmentos mais próximos da câmera sejam desenhados.
(d) O *z-buffer* substitui o algoritmo de cálculo de sombreamento, gerando a noção de profundidade

15. Ao projetar dois segmentos de linha de mesmo comprimento no espaço 3D usando projeção ortográfica, o que pode acontecer com suas projeções na tela 2D? Marque a alternativa correta e justifique.

(a) sempre terão o mesmo comprimento, independente da orientação
(b) terão o mesmo comprimento somente se forem paralelas ao plano de projeção
(c) os segmentos podem ter comprimentos diferentes dependendo de suas orientações no espaço 3D.
(d) A projeção ortográfica não altera o comprimento dos segmentos

16. Considere o triângulo com vértices em (2,2,3), (3,3,4) e (3,1,3). Qual é o vetor normal a este triângulo?

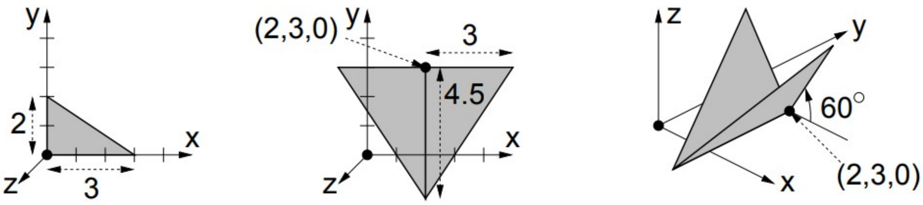
17. Suponha que você tenha uma câmera com ponto focal em (0,0,0) e o plano de projeção em z =1.

a) Dê exemplo de um triângulo retângulo no espaço 3D que também aparecerá na imagem como um triângulo retângulo assumindo projeção em Perspectiva;
b) Idem ao item a, porém assumindo projeção ortográfica.

18. Considere a imagem abaixo de uma foto tirada à noite, com luzes refletidas na água em um porto. A fonte de luz no topo da imagem produz um reflexo muito longo e fino. A água tem alto grau de reflexão especular e tem uma reflexão difusa pobre.
a) Com base no seu conhecimento de projeção em perspectiva, do modelo de iluminação Phong e da natureza da água, explique por que a luz refletida tem esta forma alongada. (Pode ser útil fazer um desenho para ilustrar seu ponto de vista.)

b) Se a superfície da água fosse perfeitamente plana, a forma do reflexo seria diferente e, em caso afirmativo, como?

19. Suponha que você tenha uma função drawWing(), que desenha o formato de asa de pássaro semelhante a uma gaivota de papel, mostrado na figura abaixo à esquerda. (Isso deve ser desenhado no plano $z = 0$. Na figura, o eixo z aponta para cima e para fora da página.)



drawWing() *(vista de cima)* | drawBird1() *(vista de cima)* | drawBird2() *(vista lateral)*

(a) Use o procedimento drawWing() e outras funções OpenGL (por exemplo, glPushMatrix(), glRotate*(), glScale*(), glTranslate*(), etc.), para produzir um procedimento drawBird1() que desenha as duas asas mostradas na figura central.

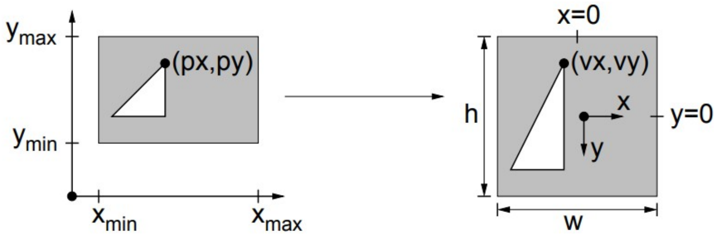
(b) Explique como modificar sua solução para a parte (a) para produzir um procedimento drawBird2() que tem exatamente o mesmo formato e tamanho de asa da parte (a), mas os dois triângulos agora estão girados para cima em torno do eixo central do pássaro, para simular o bater das suas asas. O ângulo de rotação é de 60 graus. (Dica: apenas mostre como modificar a solução para (a).)

Nota: Seus procedimentos drawBird1() e drawBird2() devem ser executados em relação à pilha de matrizes OpenGL.

Em particular, sua ação é transformada por qualquer matriz que esteja atualmente no topo da pilha de matrizes e, ao sair, o conteúdo da pilha de matrizes deve ser restaurado ao seu valor original.

20. No planeta extremamente distante de Omicron Persei 9 (OP9), as viewports gráficas são projetadas de forma que a origem da viewport esteja no centro da janela, com o eixo **x** direcionado para a direita e o eixo **y** direcionado para baixo. Sejam **w** e **h** a largura e a altura de uma janela de visualização OP9. (Veja a figura abaixo à direita.)

Considere uma região de desenho retangular cujos limites esquerdo e direito são xmin e xmax e cujos limites inferior e superior lados são ymin e ymax.



Forneça a transformação da viewport que mapeia um ponto $P = (p_x, p_y)$ na região de desenho retangular para o ponto correspondente $V = (v_x, v_y)$ na viewport OP9. Expresse sua transformação como duas equações:

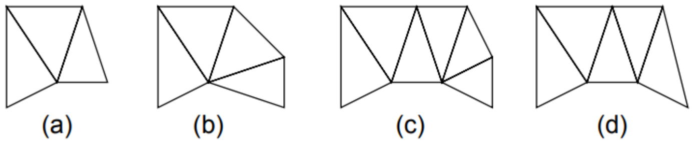
v_x = uma função de p_x e/ou p_y
v_y = uma função de p_x e/ou p_y

21. Questões de resposta curta. Explicações não são necessárias, mas podem ser fornecidas para crédito parcial.

(a) Na chamada glutInitDisplayMode(GLUT RGB | GLUT DOUBLE | GLUT DEPTH);

explique em português (em uma única sentença para cada) o significado de cada um dos recursos que foram habilitados.

(b) Considere os grupos de triângulos mostrados abaixo. Para cada um, indique se ele pode ser desenhado como (1) uma única faixa triangular (triangle strip), (2) um único leque triangular (triangle fan), (3) pode ser desenhado como qualquer um deles, ou (4) não pode ser desenhado como uma única faixa triangular ou como um único leque triangular. Nenhuma explicação adicional é necessária. (Observe que cada triângulo deve ser desenhado conforme mostrado na figura e você não pode desenhar triângulos vazios.)



(c) Dados dois vetores diferentes de zero $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço tridimensional, a operação $\vec{u} \times \vec{v}$ produzirá um vetor diferente de zero que é perpendicular a ambos, **exceto** sob quais circunstâncias? (Seja o mais geral possível.)