Высокопроизводительные компьютерные технологии

Задача 3. Неявная диффузия

Описание задачи

Реализовать численное уравнение диффузии, задаваемое в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u) + f(u, t)$$

Дискретизируемое методом конечных разностей на прямоугольной плоскости:

$$u_{i,j}^{n} + \frac{D \cdot \tau}{h^2}(4u_{i,j}^{n} - u_{i-1,j}^{n} - u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j-1}^{n} - u_{i,j+1}^{n}) = u_{i,j}^{n-1} + \tau f_{i,j}^{n-1}$$

Сравнить производительность между прямым решением системы линейных уравнений и итерационным решением.

Вариант 1

Диффузия с периодическим источником в центре:

$$f(x,y,t) = \begin{cases} sin(t), \mathit{if}\ 40\% < x \leq 60\%,\ 40\% < y < 60\%, \\ 0.0, otherwise \end{cases}$$

Нулевые граничные условия Дирихле: $u\Big|_{\partial\Omega} = 0$

$$u^n_{0,j} = u^n_{m_x,j} = u^n_{i,0} = u^n_{i,m_y} = 0.$$

Нулевые начальные условия: $u(x,y,0) = 0$

Сетка размером $256 \times 256, \tau = 0.01, h = 0.1, D = 1$

Вариант 2

$$f(x, y, t) = 0$$

Диффузия с неравномерной проводимостью среды по направлениям:

$$D = diag(d_x, d_y)$$

Что приводит к измененной дискретизации:

$$u_{i,j}^n + \frac{d_x \tau}{h_x^2}(2u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n - u_{i+1,j}^n) + \frac{d_y \tau}{h_y^2}(2u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n - u_{i,j+1}^n) = u_{i,j}^{n-1} + \tau f_{i,j}^{n-1}$$

Нулевые граничные условия Дирихле (как в варианте 1)

Начальные условия:

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1, if\, 40\% < x \leq 60\%,\ 40\% < y < 60\%, \\ 0.0, otherwise \end{cases}$$

Сетка размером $256 \times 256, \tau = 0.01, h = 0.1, d_x = 0.5, d_y = 1$

Вариант 3

$$f(x, y, t) = 0$$

Граничные условия Неймана: $\Delta u\Big|_{\partial\Omega} = 0$

Что приводит к иной дискретизации по границам:

$$\begin{cases} u^n_{0,j} + \frac{D\cdot\tau}{h^2}(3u^n_{0,j} - u^n_{1,j} - u^n_{0,j-1} - u^n_{0,j+1}) = u^{n-1}_{0,j} \\ u^n_{m,j} + \frac{D\cdot\tau}{h^2}(3u^n_{m,j} - u^n_{m-1,j} - u^n_{m,j-1} - u^n_{m,j+1}) = u^{n-1}_{m,j} \\ u^n_{i,0} + \frac{D\cdot\tau}{h^2}(3u^n_{i,0} - u^n_{i-1,0} - u^n_{i+1,0} - u^n_{i,1}) = u^{n-1}_{i,0} \\ u^n_{i,m} + \frac{D\cdot\tau}{h^2}(3u^n_{i,m} - u^n_{i-1,m} - u^n_{i+1,m} - u^n_{i,m-1}) = u^{n-1}_{i,m} \end{cases}$$

Начальные условия:

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1, \mathit{if}\ 50\% < x \leq 100\%,\ 50\% < y < 100\%, \\ 0.0,\ otherwise \end{cases}$$

Сетка размером $256 \times 256, \tau = 0.01, h = 0.1, D = 1$

Условия оценивания:

Для оценки нужно продемонстрировать верный вывод модели с распространением вещества в пространстве со временем.
Оценить производительность решения (без графического вывода)
(500 шагов по времени)

Оценка (максимум 25 баллов): ускорение решения по сравнению с прямым sparse.linalg.spsolve / 2.5

Вариант со звездочкой

Реализовать модель ФицХью-Нагумо возбудимой среды:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u) + u(1-u)(u-a) - v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon(\beta u - \gamma v - \sigma).$$

В этой системе уравнений частных производных u – «быстрая» переменная, соответствующая потенциалу действия на клетке или ткани;

v – «медленная» переменная, связанная с проводимостью среды.

a, ε, β, γ, σ – константы

Дискретизируется модель аналогично (где здесь функция источника? Как добавить вторую изменяющуюся переменную)

Установка модели

Если правильно задать начальные условия:

$$u(x,y,0) = \begin{cases} 1.0, \textit{если } 0\% < x \le 50\%,\ 0\% < y < 50\%, \\ 0.0, \textit{иначе} \end{cases}$$

$$v(x,y,0) = \begin{cases} 0.1, \textit{если } 0\% < x \le 50\%,\ 0\% < y < 100\%, \\ 0.0, \textit{иначе} \end{cases}$$

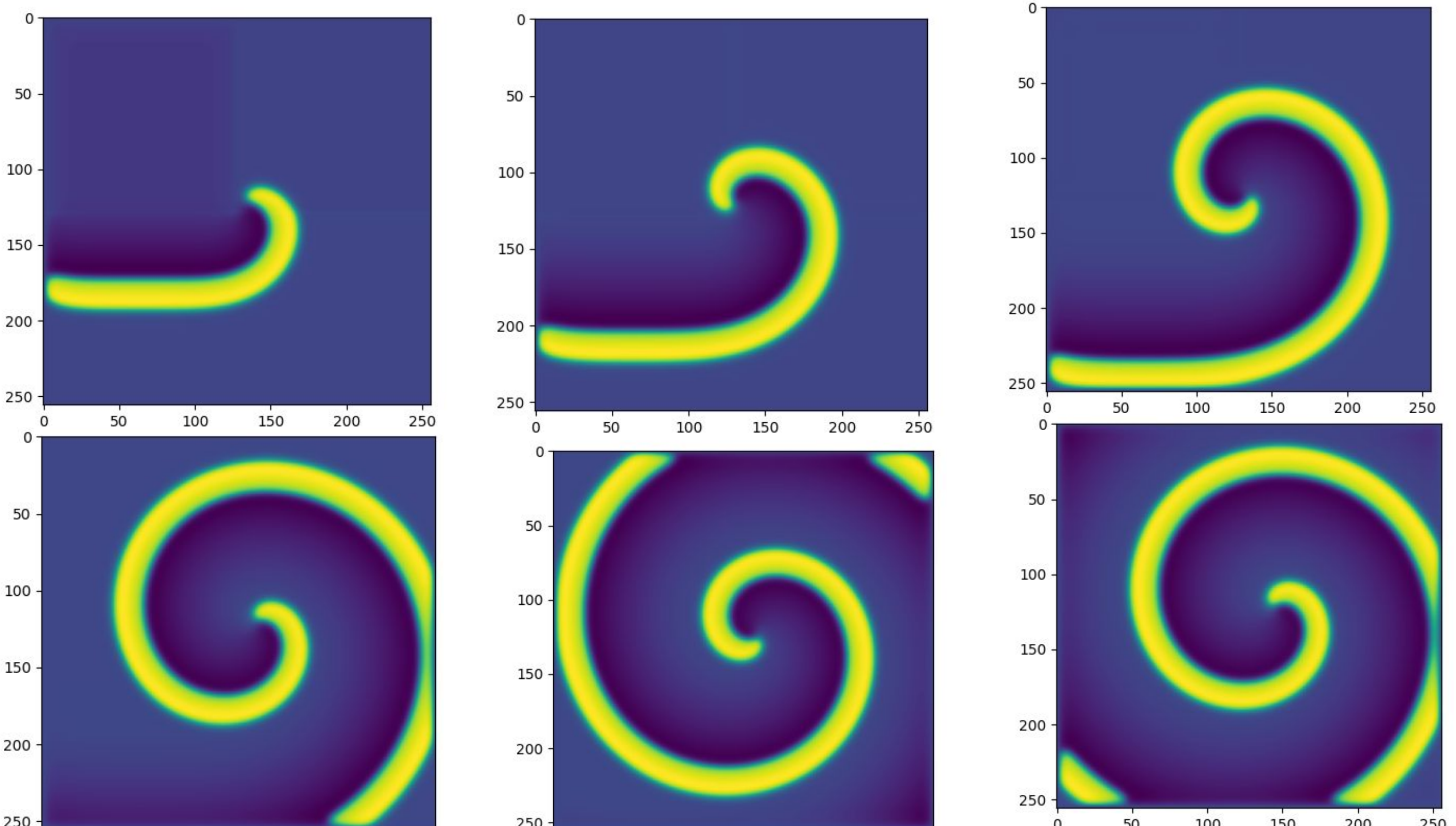
Разбить сетку по пространству и времени: $256 \times 256, h = \dfrac{2.5}{256}, \tau = 0.1, D = 10^{-4}$

Зафиксировать константы в модели: $\varepsilon = 0.01, a = 0.1, \beta = 0.5, \gamma = 1, \sigma = 0$

Задать нулевые граничные условия Дирихле: $u\Big|_{\partial\Omega} = 0$

Спиральные волны

…То мы получаем модель волны реполяризации на миокарде при аритмии!



Условия оценивания

Реализовать модель ФицХью-Нагумо и показать, что у вас крутится спиральная волна
(контур волны вырисовывается на ~400 шаге по времени, ~4000 шагов по времени уходит на полный оборот)
Оценить производительность решения (без графического вывода)
(5000 шагов по времени)

Оценка (максимум 50 баллов): ускорение решения по сравнению с прямым sparse.linalg.spsolve / 1.75