Convex Hull Assignment

November 4, 2015

1 Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

1.1 Curso de Algoritmos

1.1.1 Assignment sobre Fecho Convexo

1.1.2 Aluno: Hallison da Paz

1.1.3 Rio de Janeiro, novembro de 2015

Este trabalho tem por objetivo estudar o problema de determinação de fecho convexo de pontos no plano. Para isso, serão implementados, e analisados sob questões de desempenho, os algoritmmos de Graham e de Jarvis. O código completo para este problema encontra-se em [1].

1. Implemente o algoritmo de Jarvis e o algoritmo de Graham, nas suas duas variantes. (Implemente também outros algoritmos se quiser.) Escreva o programa mais simples possível para cada algoritmo. Não se preocupe com interfaces gráficas.

Os algoritmos de Jarvis e de Graham foram implementados no arquivo convex_hull.py, enviado em anexo.

2. Teste os seus programas no seguinte conjunto de pontos:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
x	3	11	6	4	5	8	1	7	9	14	10	17	15	13	3	12	16
y	9	1	8	3	15	11	6	4	7	5	13	14	2	16	12	10	8

```
In [1]: %matplotlib inline
        from convex_hull import *
        from Point2D import Point2D
        from random_points import *
        from PIL import Image
        data_folder = "data/"
        images_folder = "images/"
        DEBUG = False
```

```
In [2]: #Teste do Graham
        filename = data_folder + "teste.txt"
        points = Point2D.read_from_file(filename)
        hull = Graham([p for p in points])
        print("Pontos do fecho convexo do conjunto de teste (Graham): ")
        for point in hull:
            print(point)
```

```
Pontos do fecho convexo do conjunto de teste (Graham):
B 11.0 1.0
M 15.0 2.0
```

```
L 17.0 14.0
N 13.0 16.0
E 5.0 15.0
O 3.0 12.0
G 1.0 6.0
D 4.0 3.0
```

```
In [3]: #Teste do Graham variante com ordenação lexicográfica
        hull = Graham_up_down([p for p in points])
        print("Pontos do fecho convexo do conjunto de teste (Graham variante 2): ")
        for point in hull:
            print(point)
```

```
Pontos do fecho convexo do conjunto de teste (Graham variante 2):
G 1.0 6.0
D 4.0 3.0
B 11.0 1.0
M 15.0 2.0
L 17.0 14.0
N 13.0 16.0
E 5.0 15.0
O 3.0 12.0
```

```
In [4]: #Teste do Jarvis March
        hull = Jarvis([p for p in points])
        print("Pontos do fecho convexo do conjunto de teste (Jarvis): ")
        for point in hull:
            print(point)
```

```
Pontos do fecho convexo do conjunto de teste (Jarvis):
B 11.0 1.0
M 15.0 2.0
L 17.0 14.0
N 13.0 16.0
E 5.0 15.0
O 3.0 12.0
G 1.0 6.0
D 4.0 3.0
```

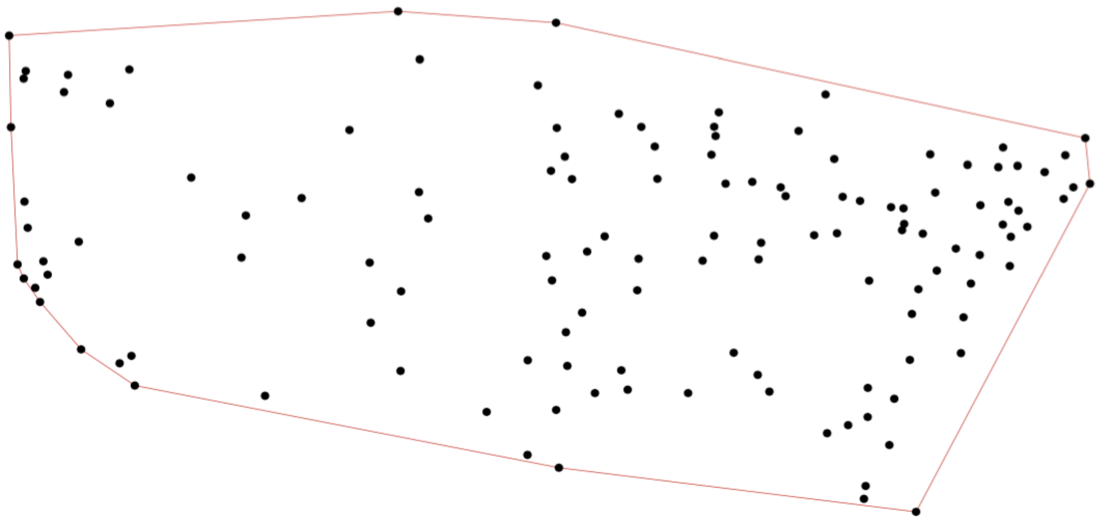
Teste também para as 128 cidades da América do Norte e para as 5565 sedes dos municípios do Brasil, e compare a sua solução com as figuras acima. Quantos vértices tem o fecho convexo em cada caso?

```
In [5]: #Teste com as 128 cidades da América do Norte
        filename = data_folder + "america.txt"
        points = Point2D.read_from_file(filename)
        graham_hull = Graham([p for p in points])
        graham2_hull = Graham_up_down([p for p in points])
        jarvis_hull = Jarvis([p for p in points])
        size_hull_america = len(graham_hull)
        if len(graham2_hull) != size_hull_america or len(jarvis_hull) != size_hull_america:
            print("Erro em algum dos algoritmos", len(graham2_hull), len(graham2_hull), len(jarvis_hull
        else:
            print("O numero de vértices no feixo convexo da america do norte é: ", len(graham_hull))
```

```
O numero de vértices no feixo convexo da america do norte é:  13
```

```
In [6]: # Imagem do fecho convexo para as 128 cidades da América do Norte
        img = Image.open(images_folder + "america_hull.png")
        img
```

Out[6]:

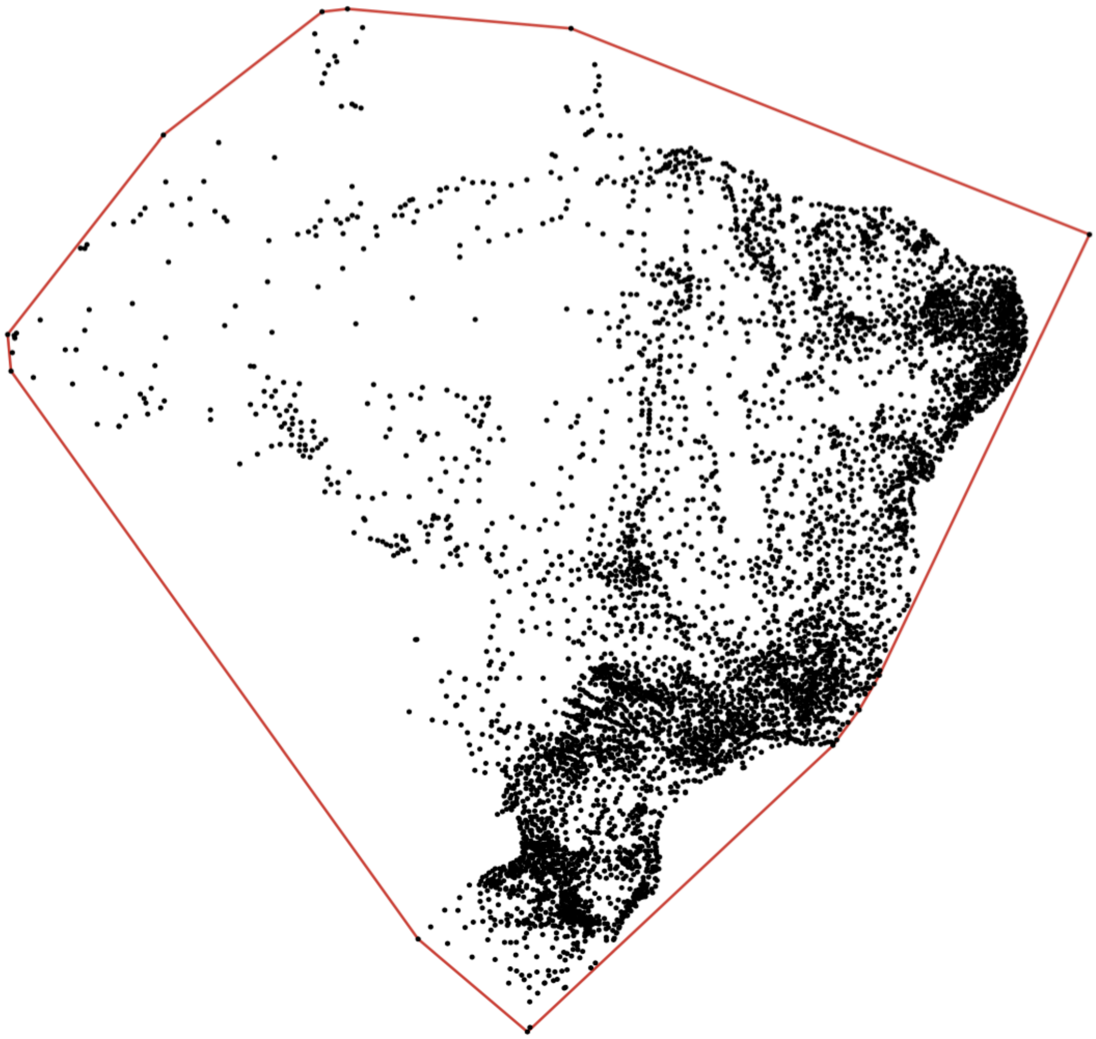


```
In [7]: #Teste com as 5565 cidades do Brasil
        filename = data_folder + "brasil.txt"
        points = Point2D.read_from_file(filename)
        graham_hull = Graham([p for p in points])
        graham2_hull = Graham_up_down([p for p in points])
        jarvis_hull = Jarvis([p for p in points])
        size_hull_brasil = len(graham_hull)
        if len(graham2_hull) != size_hull_brasil or len(jarvis_hull) != size_hull_brasil:
            print("Erro em algum dos algoritmos", len(graham2_hull), len(graham2_hull), len(jarvis_hull
        else:
            print("O numero de vértices no feixo convexo das cidades do Brasil é: ", len(graham_hull))
```

```
O numero de vértices no feixo convexo das cidades do Brasil é:  12
```

```
In [8]: # Imagem do fecho convexo para as 5565 cidades do Brasil
        img = Image.open(images_folder + "brasil_hull.png")
        img
```

Out[8]:

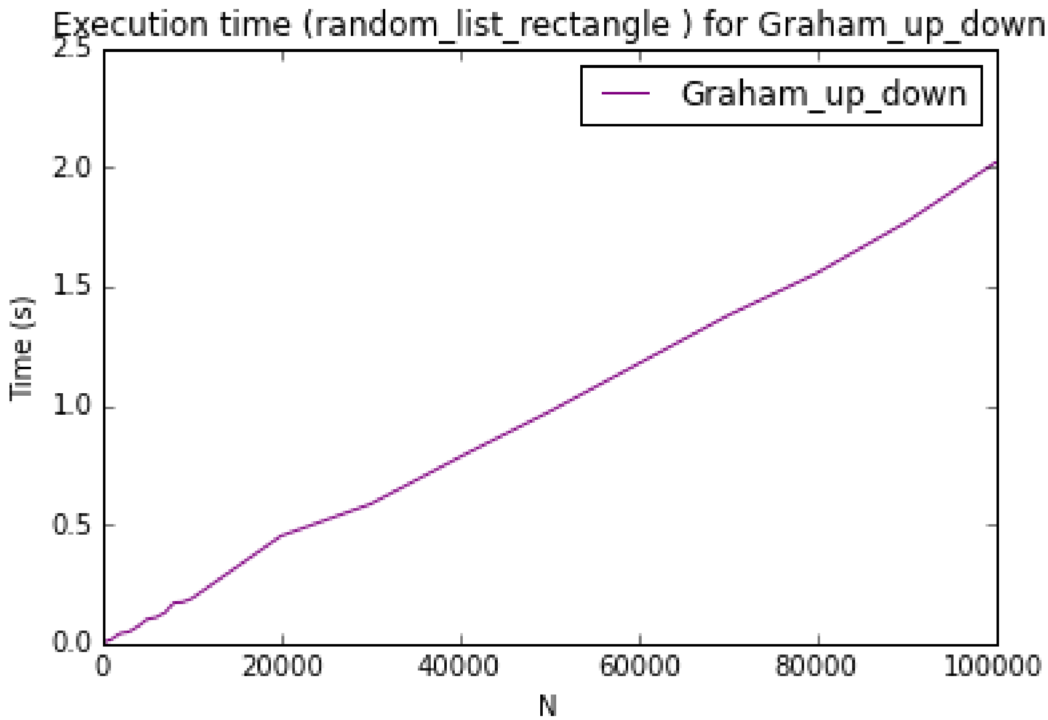


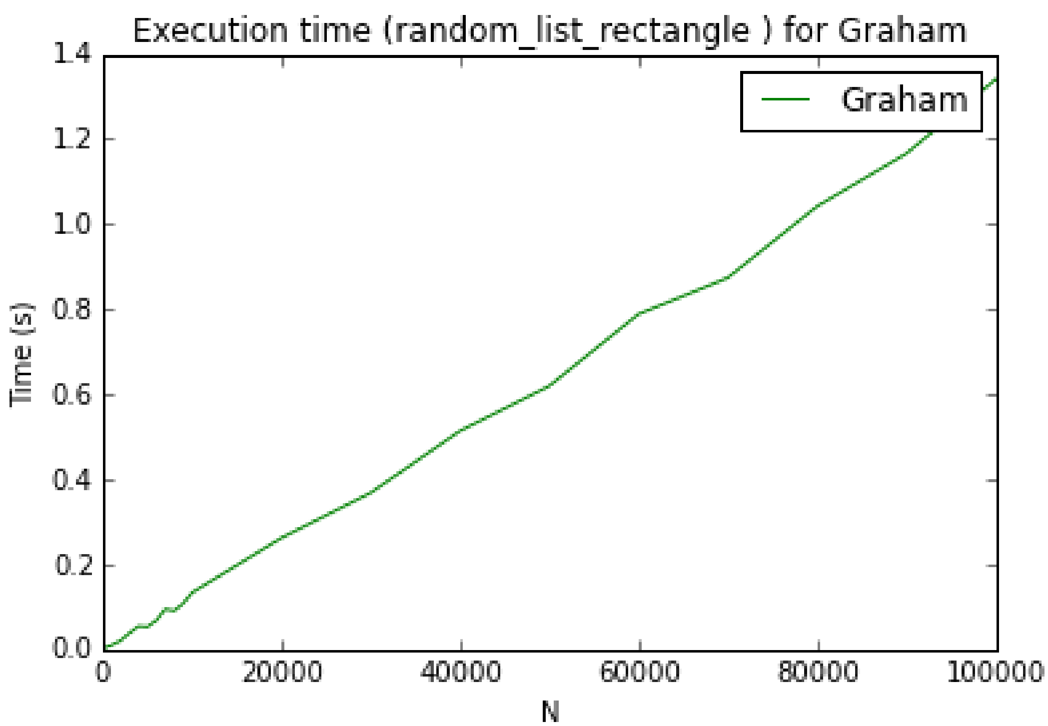
3. Compare o desempenho dos algoritmos implementados em conjuntos de pontos gerados aleatoriamente dentro de um retângulo, dentro de um triângulo, dentro de um círculo, e sobre o círculo. Use conjuntos de 100 até 100000 pontos. (E mais se for possível.) Compare os tempos de cada algoritmo e também o esforço necessário para sua implementação.

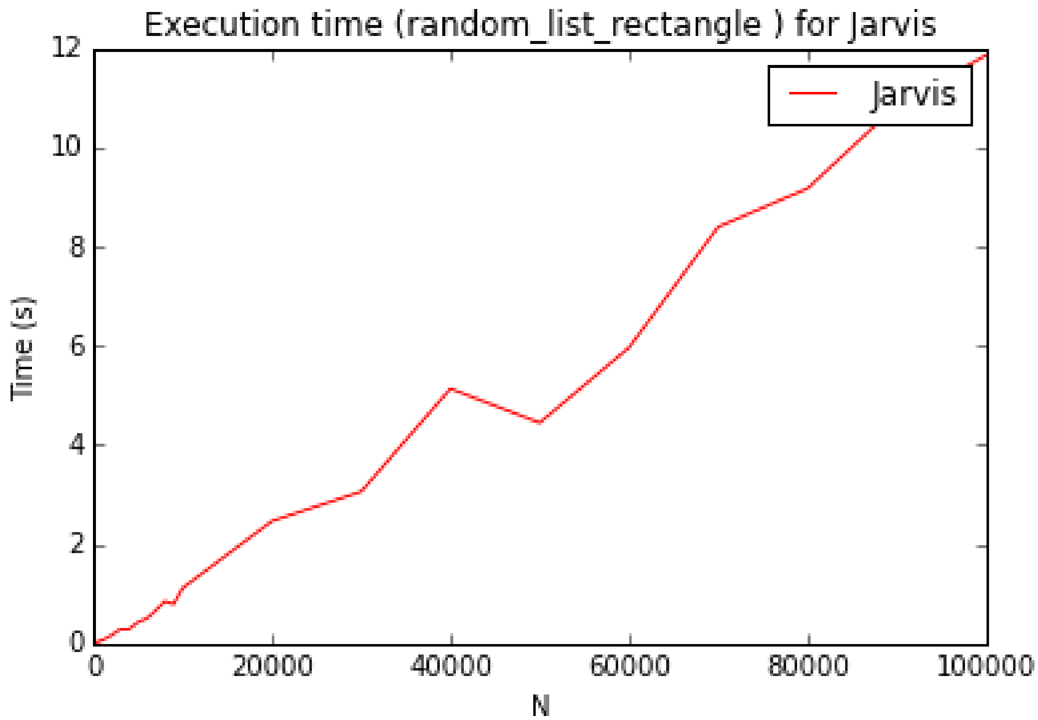
Para cada um dos testes neste item, implementou-se rotinas de geração de listas com pontos amostrados aleatoriamente dentro de regiões com a geometria solicitada. Para garantir uma distribuição de probabilidade uniforme, utilizou-se as ideias apresentadas em [2] e [3]. Os gráficos a seguir ilustram o comportamento do tempo de execução de cada um dos algoritmos em relação à quantidade de pontos amostrados.

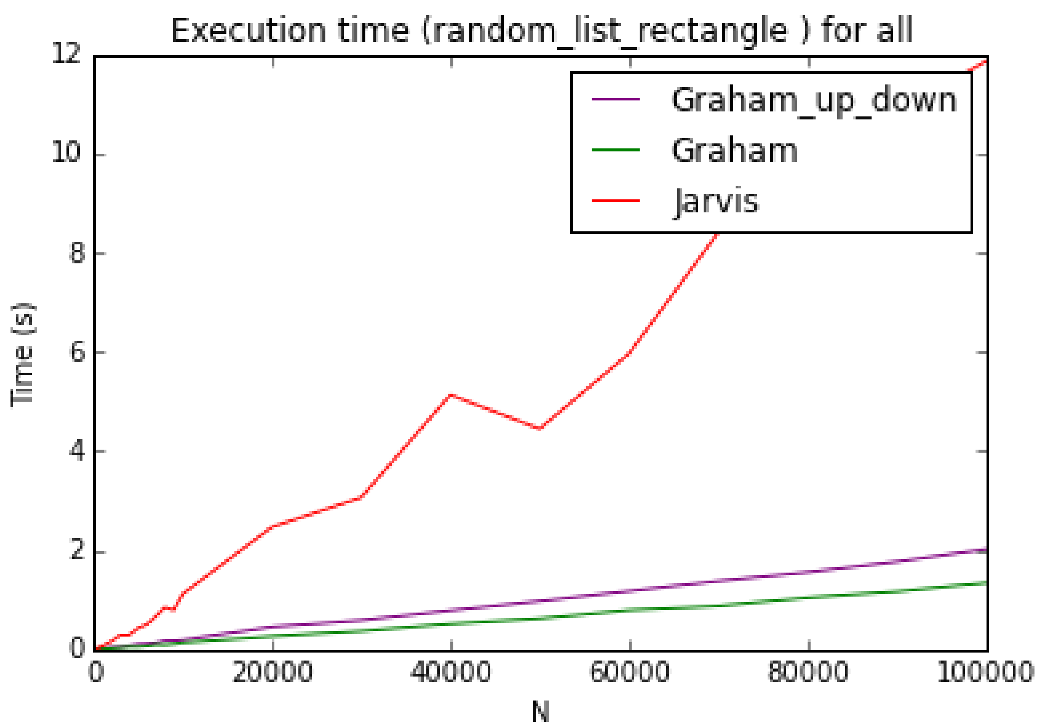
```
In [2]: #Preparação para a execução
        algorithms = [Graham, Graham_up_down, Jarvis]
        xsamples = [i*100 for i in range(1,10)]
        xsamples += [i*1000 for i in range(1,10)]
        xsamples += [i*10000 for i in range(1,11)]
```

```
In [10]: # Testes com pontos gerados aleatoriamente no interior de um retângulo
         compare_algorithms_with_generated_data(algorithms, random_list_rectangle, xsamples)
```


Execution time (random_list_rectangle) for Graham_up_down
Graham_up_down
Time (s)
N
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
0
20000
40000
60000
80000
100000

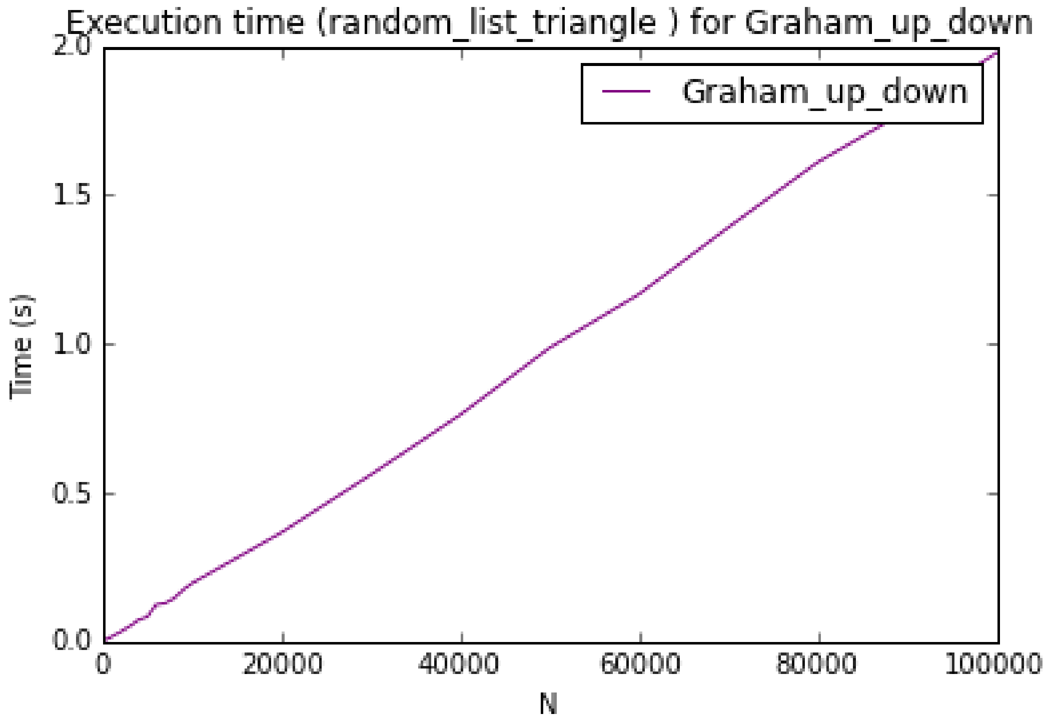

Execution time (random_list_rectangle) for Graham
Graham
Time (s)
N
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0
20000
40000
60000
80000
100000

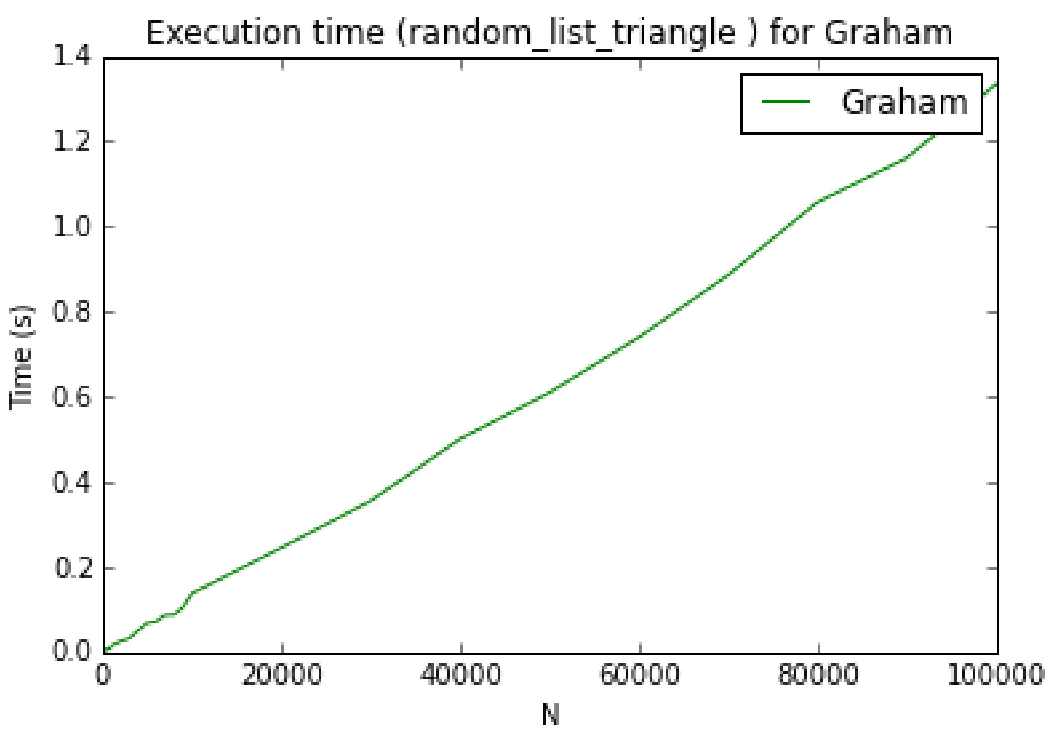

Execution time (random_list_rectangle) for Jarvis
Jarvis
Time (s)
N
0
2
4
6
8
10
12
0
20000
40000
60000
80000
100000

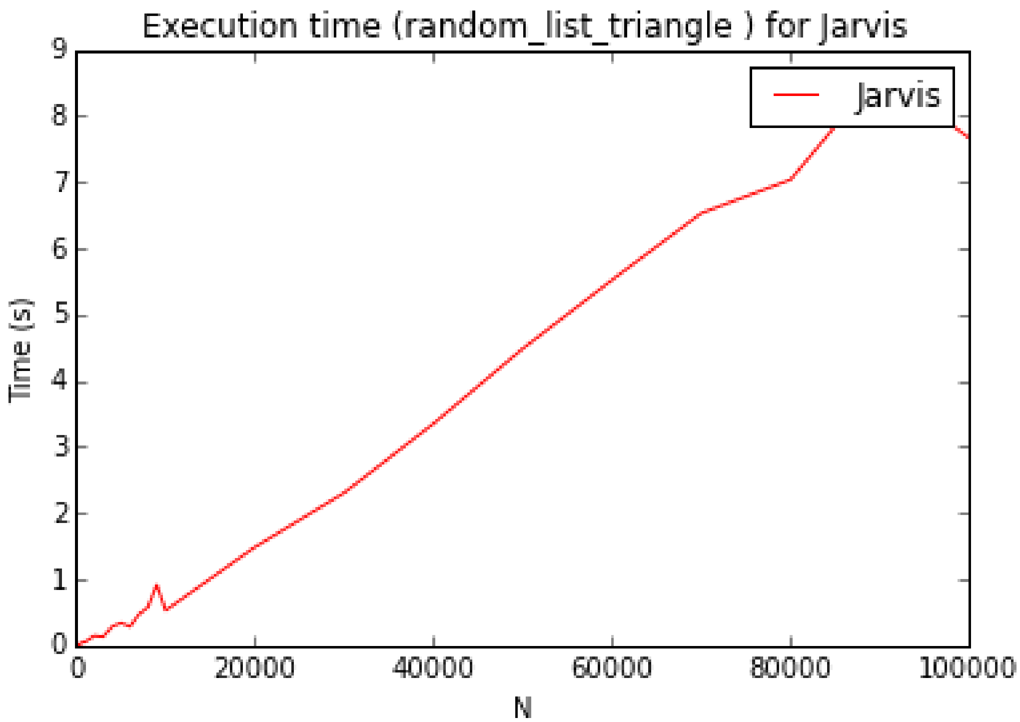

Execution time (random_list_rectangle) for all
Graham_up_down
Graham
Jarvis
Time (s)
N
0
2
4
6
8
10
12
0
20000
40000
60000
80000
100000

In [11]: # Testes com pontos gerados aleatoriamente no interior de um triângulo

```
compare_algorithms_with_generated_data(algorithms, random_list_triangle, xsamples)
```

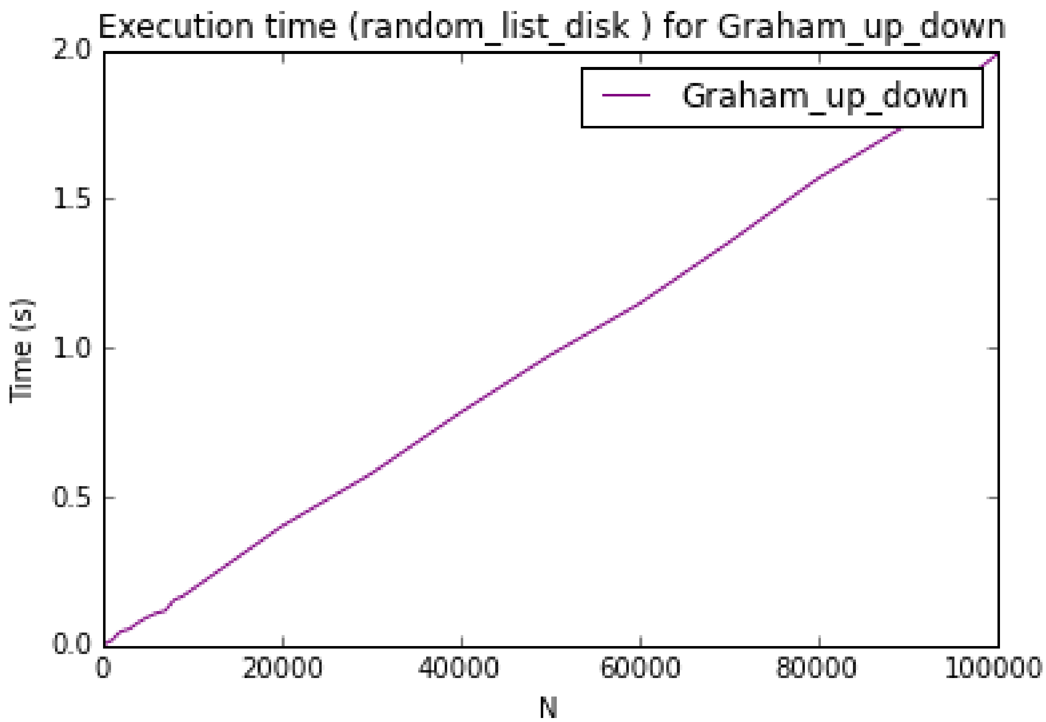


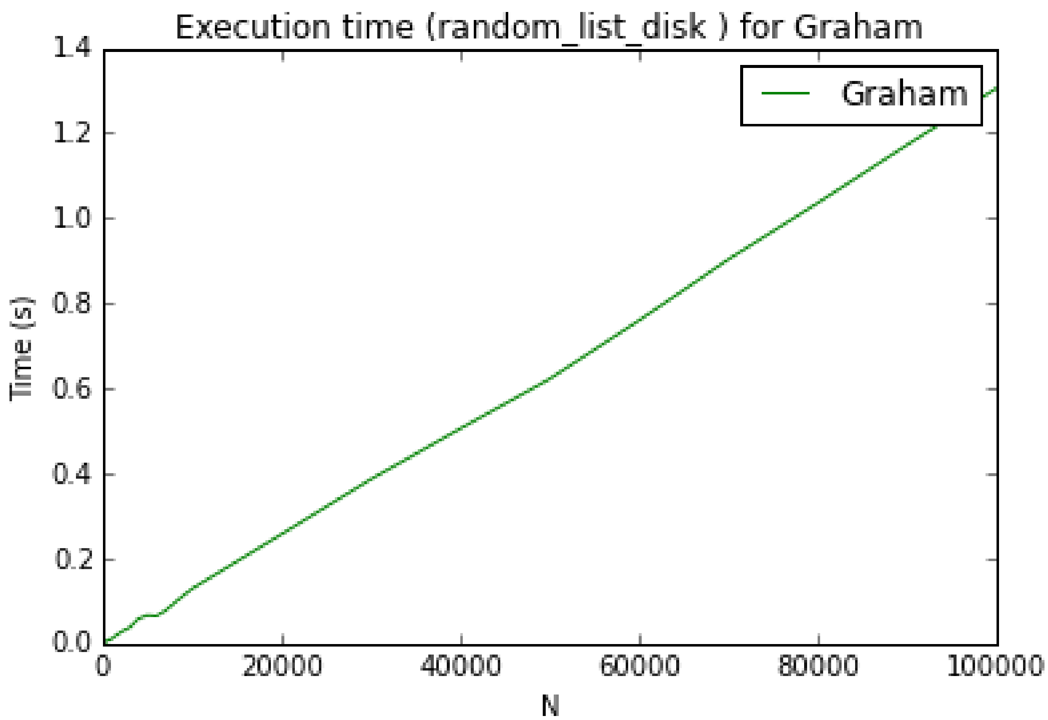


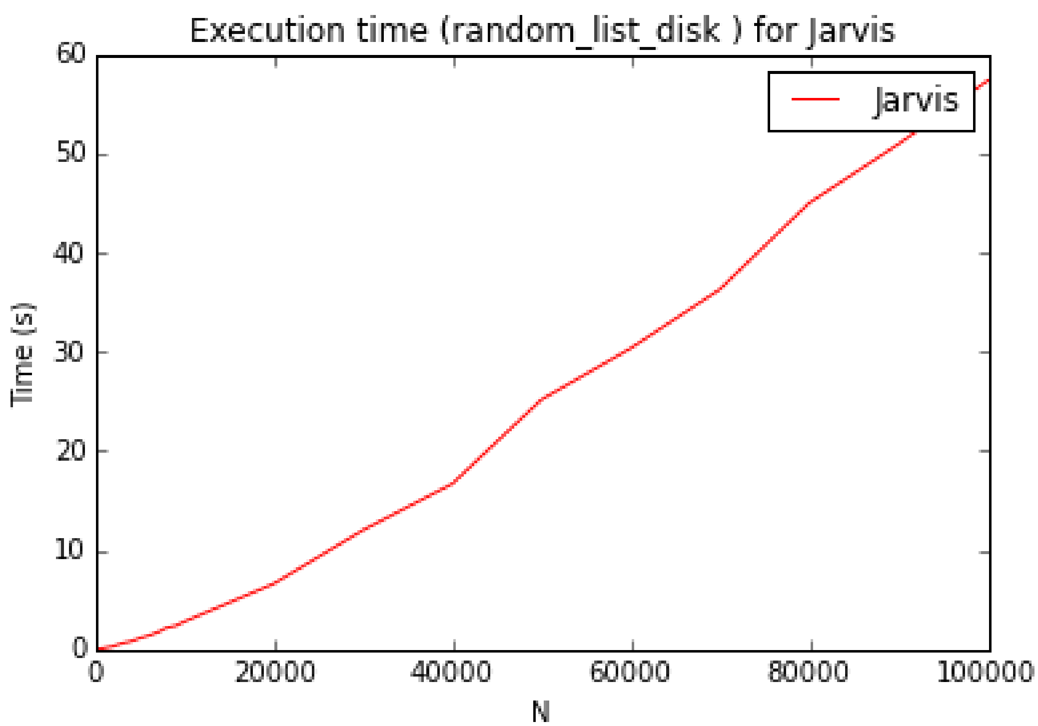

Execution time (random_list_triangle) for Jarvis
Jarvis
Time (s)
N
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
20000
40000
60000
80000
100000


Execution time (random_list_triangle) for all
Graham_up_down
Graham
Jarvis
Time (s)
N
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0
20000
40000
60000
80000
100000

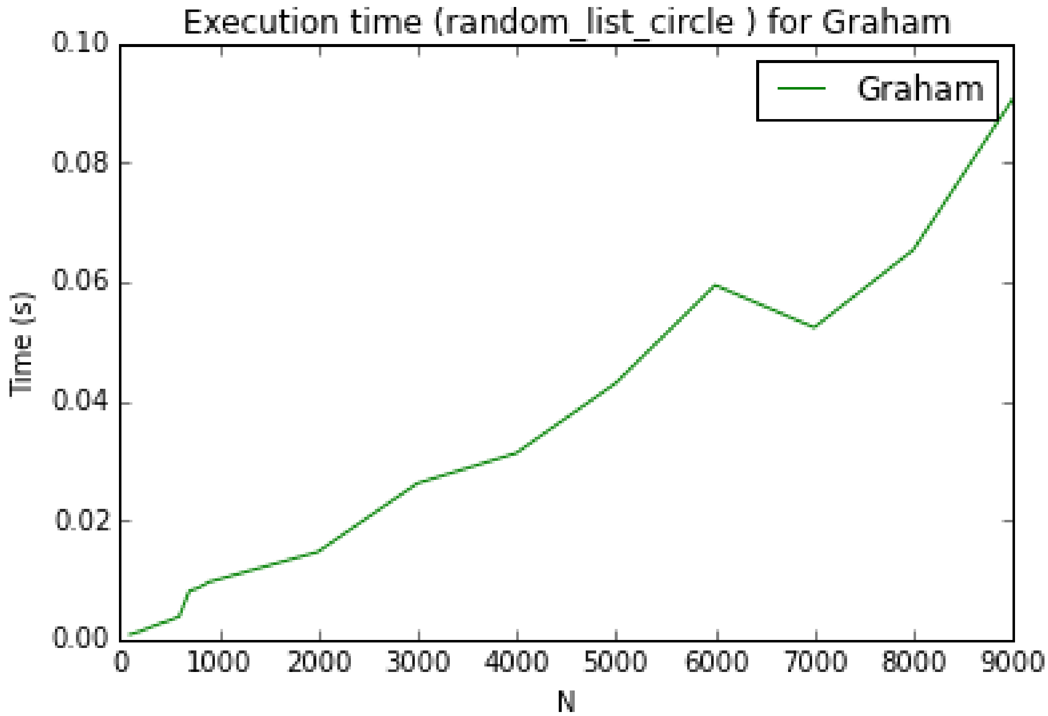
In [12]:
```
# Testes com pontos gerados aleatoriamente no interior de um círculo
compare_algorithms_with_generated_data(algorithms, random_list_disk, xsamples)
```

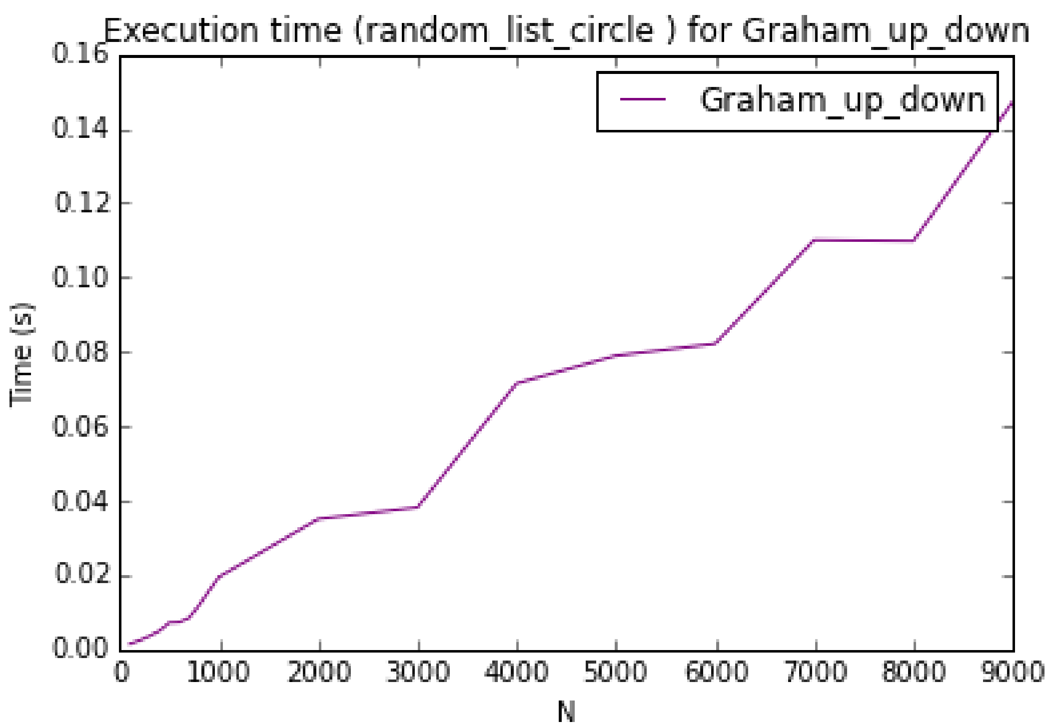


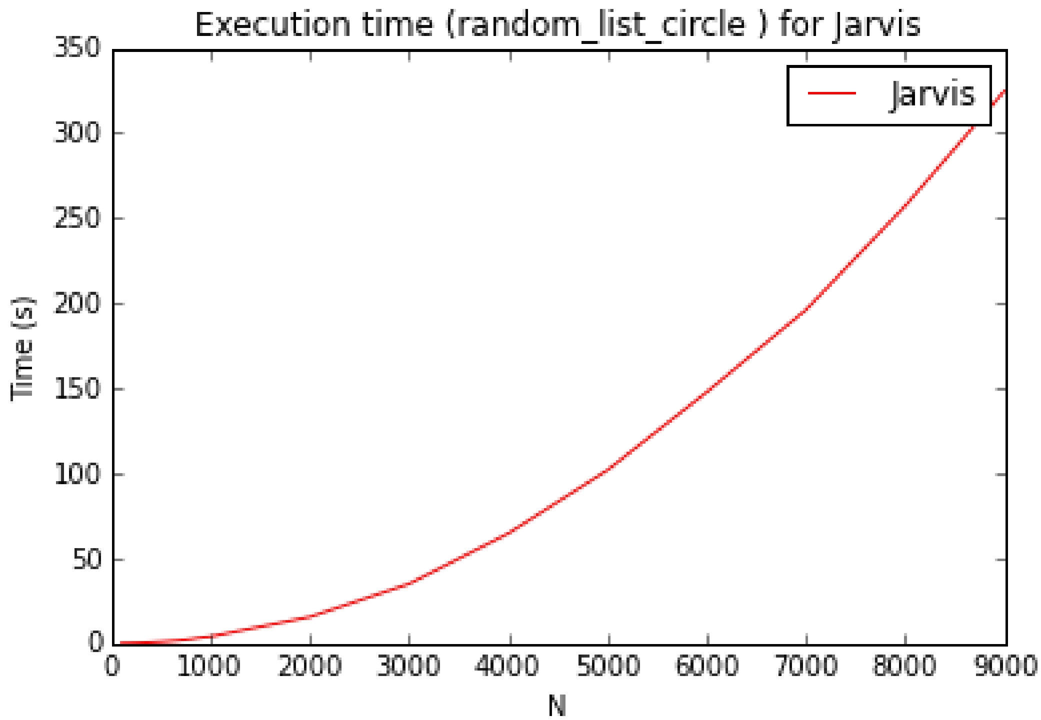

Execution time (random_list_disk) for Graham
Graham
Time (s)
N
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0
20000
40000
60000
80000
100000


Execution time (random_list_disk) for Jarvis
Jarvis
Time (s)
N
0
10
20
30
40
50
60
0
20000
40000
60000
80000
100000


```
In [3]: # Testes com pontos gerados aleatoriamente sobre um círculo. Como demoraria muito executar esta
        #parte novamente neste ambiente, os resultados estão sendo lidos de um arquivo da primeira exec
        #compare_algorithms_with_generated_data(algorithms, random_list_circle, xsamples)
        plot_random_list_circle_results(False)
```


Execution time (random_list_circle) for Graham
Graham
Time (s)
N
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000


Execution time (random_list_circle) for Graham_up_down
Graham_up_down
Time (s)
N
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000



Ao analisarmos os gráficos, podemos observar algumas relações interessantes:

i) O tempo de execução para as duas variantes do algoritmo de Graham manteve praticamente o mesmo em todos os casos; isto é, independente de amostrarmos em um retângulo, triângulo, disco ou circunferência, o tempo de execução mostrou-se apenas dependente da quantidade de pontos do conjunto de entrada.

ii) O algoritmo de Jarvis, por sua vez, apresentou um desempenho dependente da região de amostragem dos pontos. No caso do triângulo, o tempo necessário não foi superior a 9s; para o retângulo, Jarvis apresentou tempo máximo de cerca de 12s, enquanto para o disco e o círculo observou-se quase 60s e mais de 300s (com menos de 10000 amostras!!!), respectivamente. Esse resultado está de acordo com o esperado teoricamente, pois Jarvis é um algoritmo de complexidade O(nh), em que h é o número de pontos no fecho convexo do conjunto. Assim, quanto maior o número de pontos pertencentes ao fecho convexo, maior é a quantidade de operações executadas pelo algoritmo de Jarvis.

iii) Ainda seguindo a observação *"ii"*, verifica-se que nos casos circulares o algoritmo de Jarvis demora um tempo muitíssimo superior aos demais, dificultando a visualização do 3 algoritmos juntos sob a mesma escala. Pela dependência do tamanho da saída, o círculo configura-se como o opior caso para este algoritmo, pois todos os elementos do conjunto pertencem ao fecho convexo.

Quanto ao esforço de implementação, o algoritmo de Graham com ordenação angular foi o algoritmo com menor esforço de implementação, sendo implementado corretamente sem muitos problemas.

A variante do algoritmo de Graham em que realiza-se uma ordenação dos pontos por seus valores da coordenada x e determinam-se os fechos inferior e superior apresenta um grau de esforço um pouco maior, porém ainda bem similar, visto que a base do algoritmo é a mesma, mudando-se apenas alguns detalhes quanto à dupla passagem pelos pontos.

O algoritmo de Jarvis, por sua vez, foi o que apresentou maior esforço de implementação, embora também seja um algoritmo bastante simples, uma vez que as rotinas de cálculo do teste CCW estão funcionando adequadamente.

4. Refaça os testes do item anterior incorporando eliminação de pontos interiores. Vale a pena eliminar pontos interiores? Qual as frações do tempo total que levam a eliminação de pontos interiores e o cálculo do fecho convexo após essa eliminação?

Para a eliminação de pontos interiores, adotou-se a seguinte estratégia:

i) Primeiramente, determina-se dentre o conjunto de pontos de entrada 4 pontos particulares: o ponto de menor ordenada x (left), o ponto de menor abcissa y (bottom), o ponto de maior ordenada x (right) e o ponto de maior abcissa y (top).

ii) Após isso, para cada ponto de entrada, realizam-se 4 testes CCW em relação às arestas do quadrilátero formado pelos pontos (left, bottom, right, top).

iii) Caso o ponto esteja à direita de algum destes seguimentos, ele é adicionado a uma nova lista (inicialmente vazia), que contempla apenas os pontos que não estão no interior deste quadrilátero. (Retornar esta nova lista é equivalente a remover os demais pontos da lista de entrada).

O caso degenerado em que algum dos 4 pontos coincide com um dos outros 3 é tratado naturalmente (apenas elimina-se os pontos no interior do triângulo). No caso em que o quadrilátero degenera-se em um segmento de reta, nenhum ponto é eliminado. (Considerando que os pontos foram gerados aleatoriamente e com distribuição uniforme, este caso é praticamente impossível).

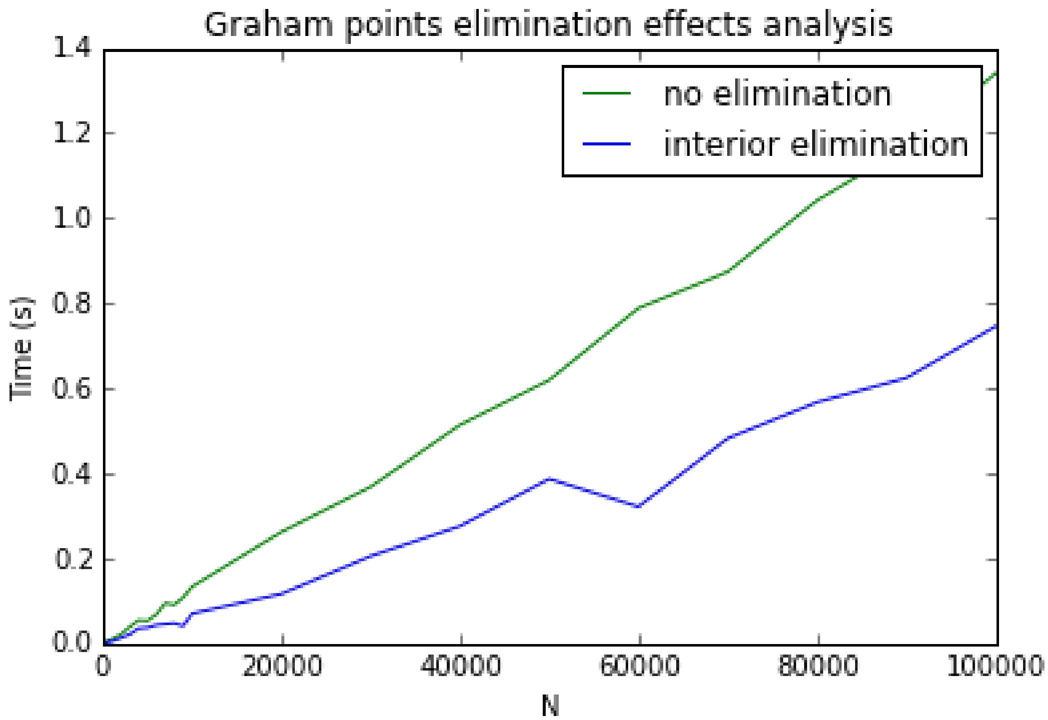
In [5]:
```
# Testes com pontos gerados aleatoriamente no interior de um retangulo com eliminação de pontos
compare_algorithms_with_generated_data(algorithms, random_list_rectangle, xsamples, True)
```

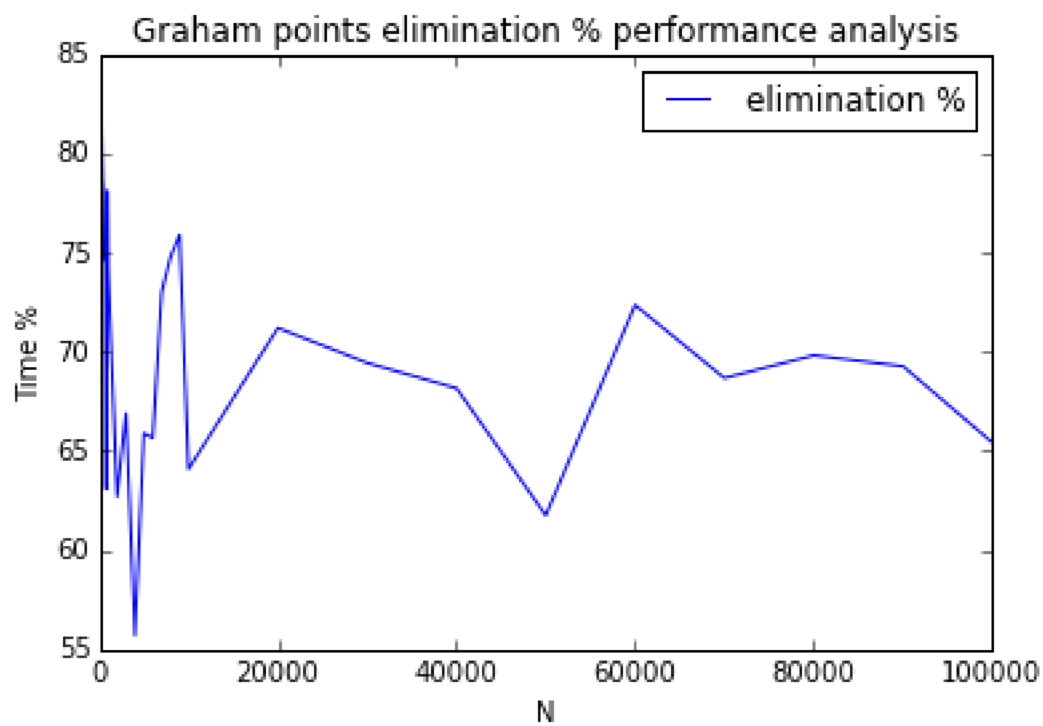
In [6]:
```
# Testes com pontos gerados aleatoriamente no interior de um triângulo com eliminação de pontos
compare_algorithms_with_generated_data(algorithms, random_list_triangle, xsamples, True)
```

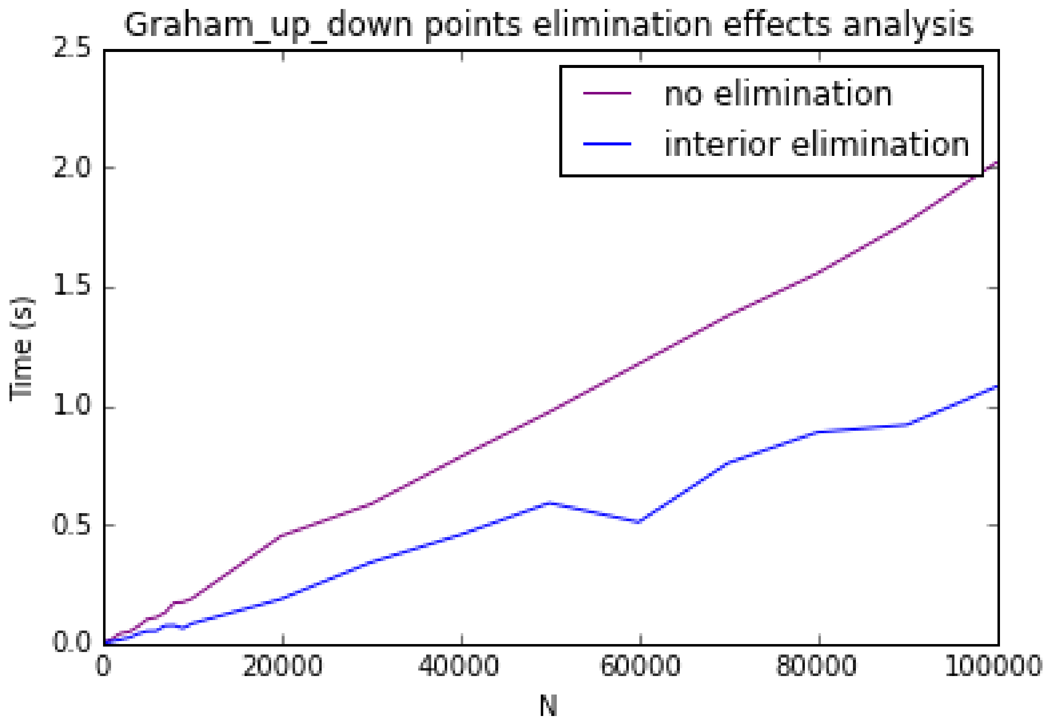
In [7]:
```
# Testes com pontos gerados aleatoriamente no interior de um círculo com eliminação de pontos i
compare_algorithms_with_generated_data(algorithms, random_list_disk, xsamples, True)
```

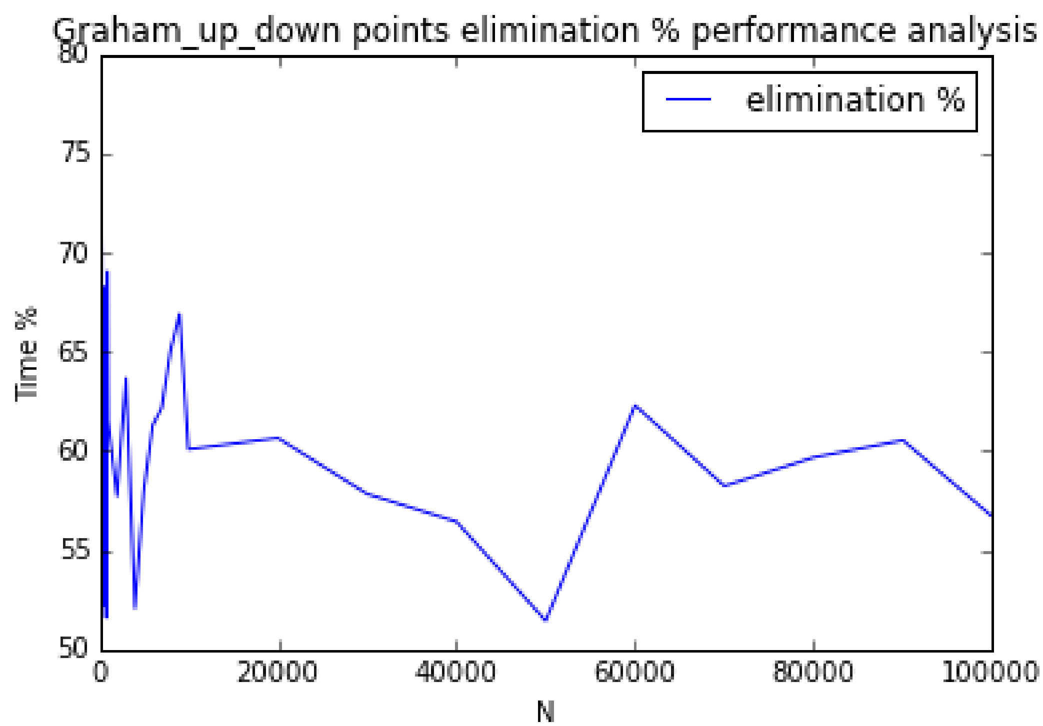
In [5]:
```
# Testes com pontos gerados aleatoriamente sobre um círculo com eliminação de pontos interiores
compare_algorithms_with_generated_data(algorithms, random_list_circle, xsamples, True)
```

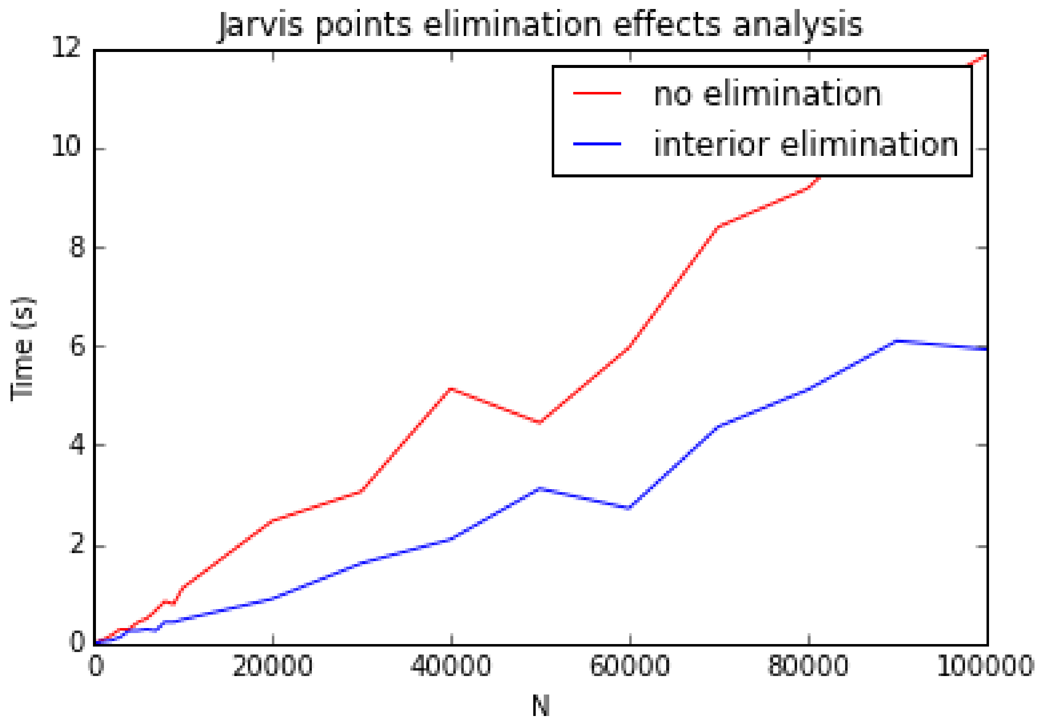
In [8]:
```
#Efeito da eliminação de pontos interiores no caso de amostragem em retângulo
compare_interior_elimination_effect(Graham, random_list_rectangle)
compare_interior_elimination_effect(Graham_up_down, random_list_rectangle)
compare_interior_elimination_effect(Jarvis, random_list_rectangle)
```

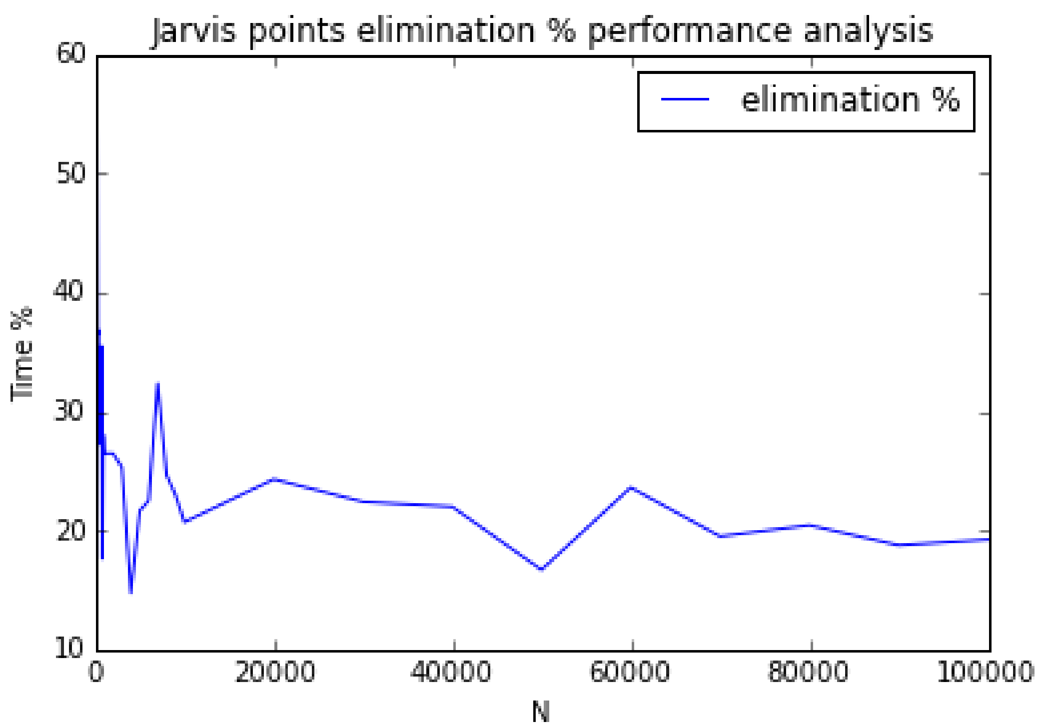

Graham points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0
20000
40000
60000
80000
100000


Graham points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
55
60
65
70
75
80
85
0
20000
40000
60000
80000
100000

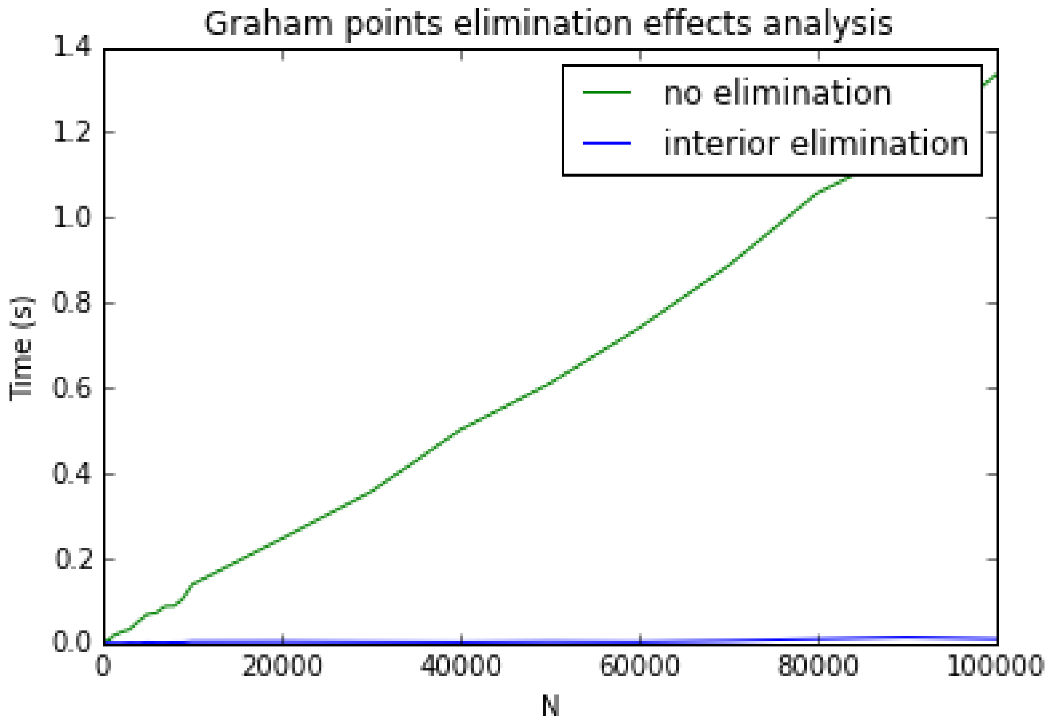

Graham_up_down points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
0
20000
40000
60000
80000
100000

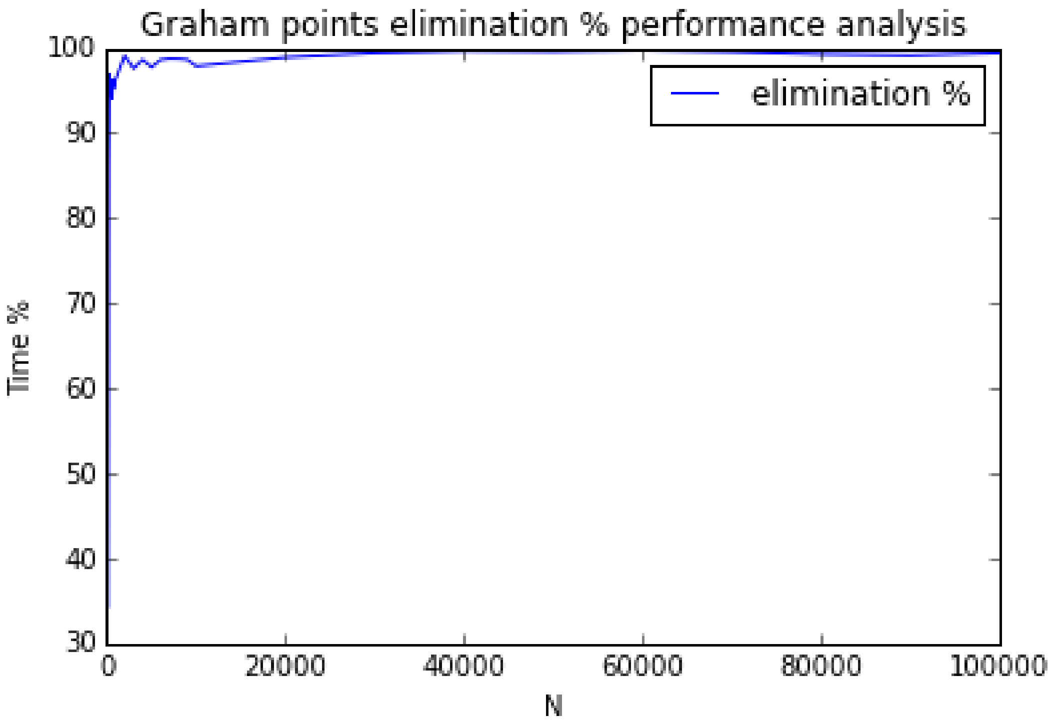

Graham_up_down points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
50
55
60
65
70
75
80
0
20000
40000
60000
80000
100000

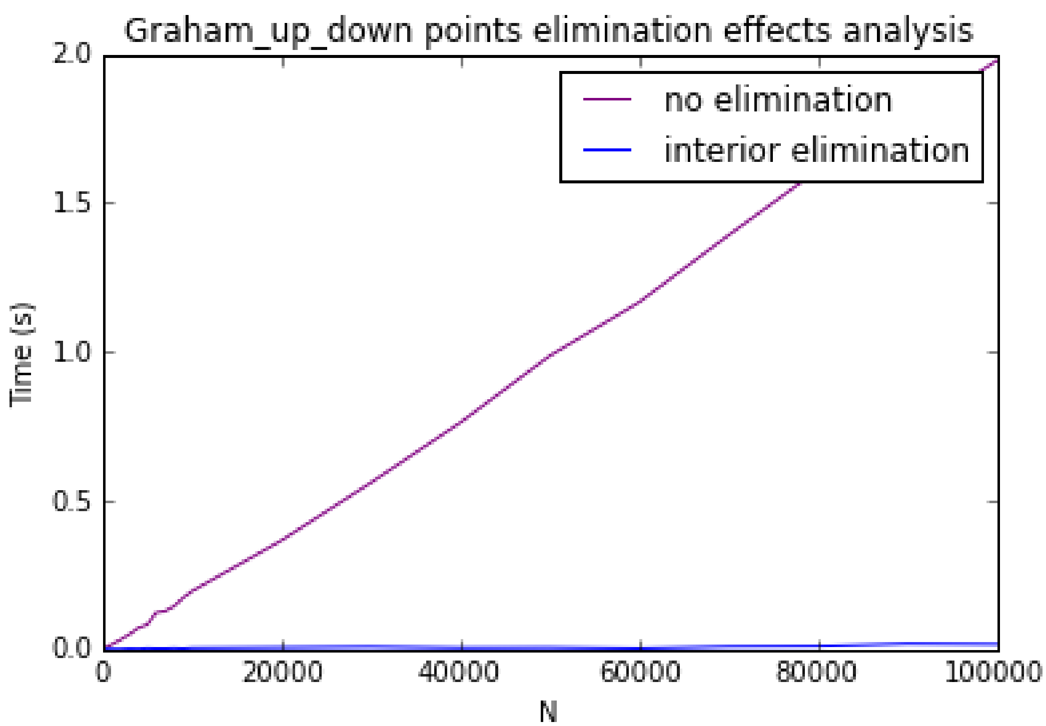

Jarvis points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
0
2
4
6
8
10
12
0
20000
40000
60000
80000
100000

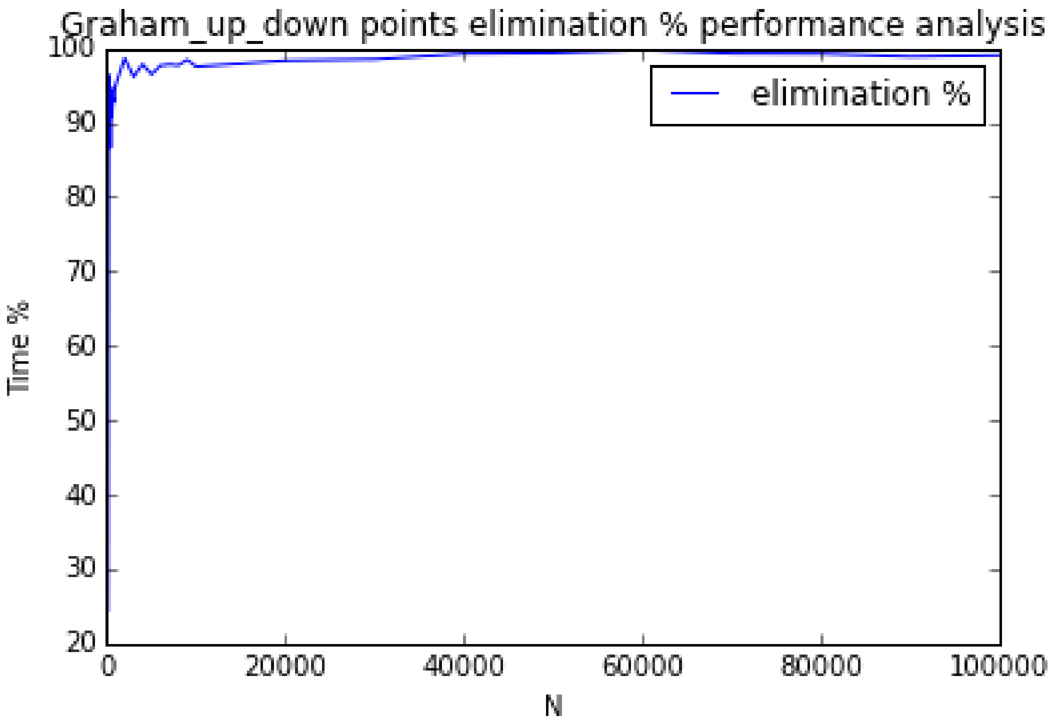

Jarvis points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
10
20
30
40
50
60
0
20000
40000
60000
80000
100000

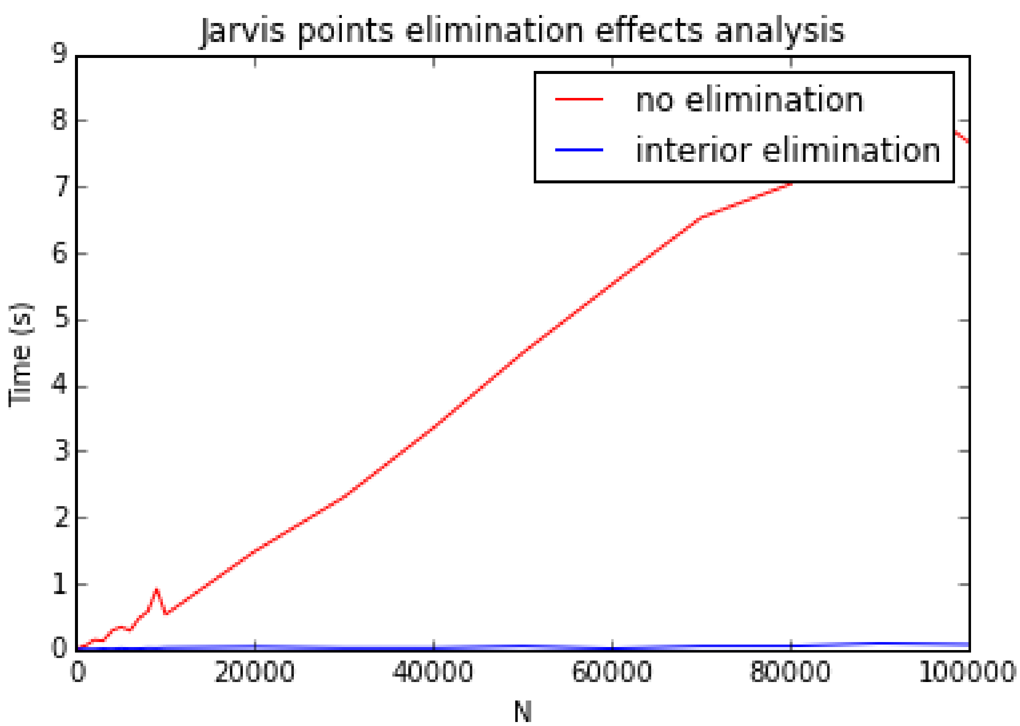
In [9]:
```
#Efeito da eliminação de pontos interiores no caso de amostragem em triângulo
compare_interior_elimination_effect(Graham, random_list_triangle)
compare_interior_elimination_effect(Graham_up_down, random_list_triangle)
compare_interior_elimination_effect(Jarvis, random_list_triangle)
```

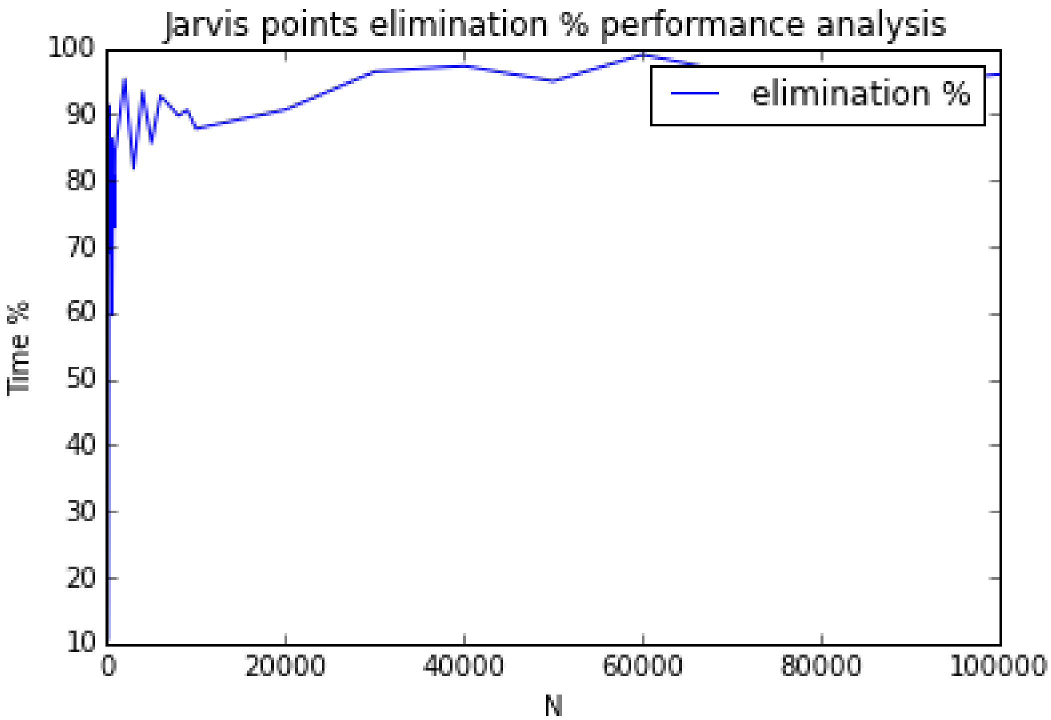



Graham points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
100
90
80
70
60
50
40
30
0
20000
40000
60000
80000
100000
N

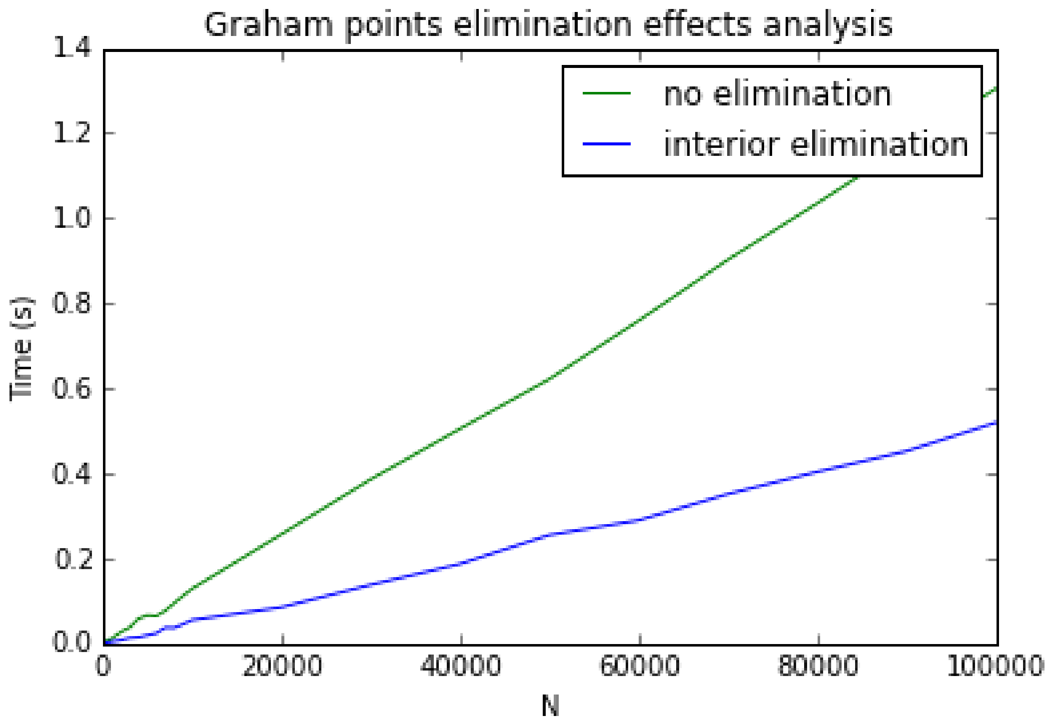

Graham_up_down points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
20000
40000
60000
80000
100000
N

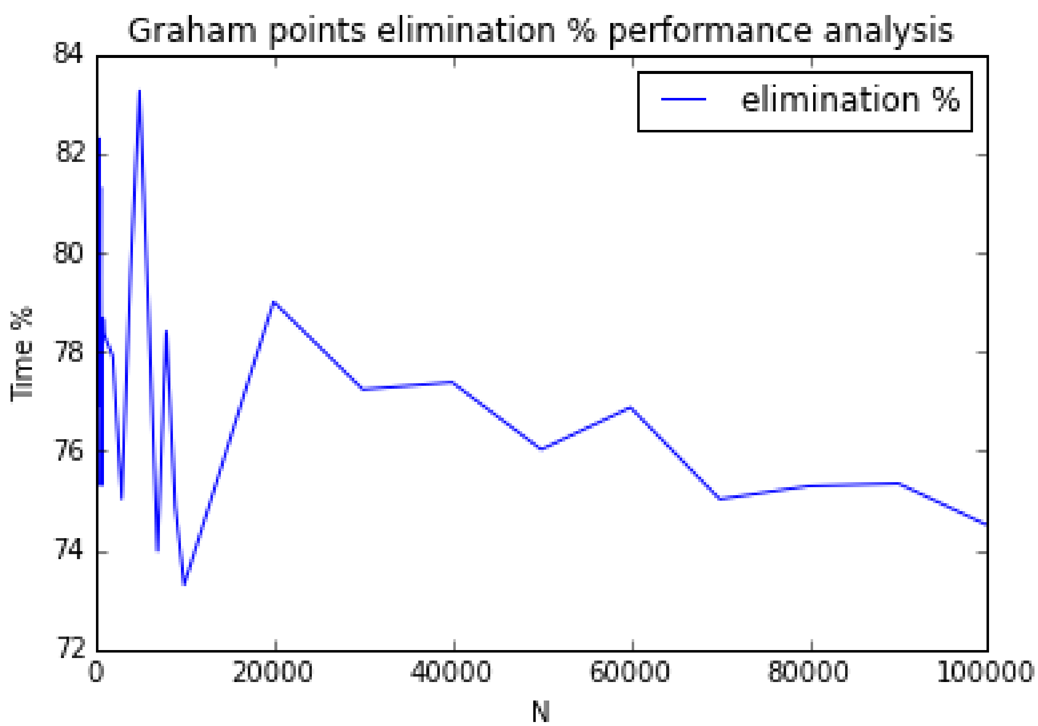

Graham_up_down points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
100
90
80
70
60
50
40
30
20
0
20000
40000
60000
80000
100000

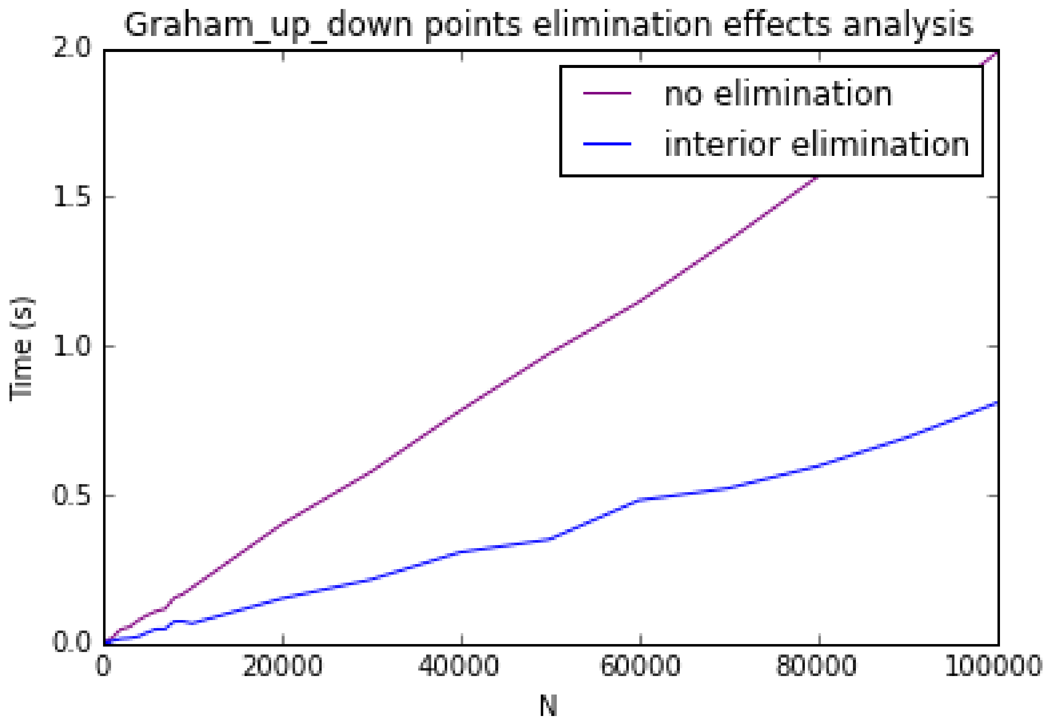

Jarvis points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
20000
40000
60000
80000
100000

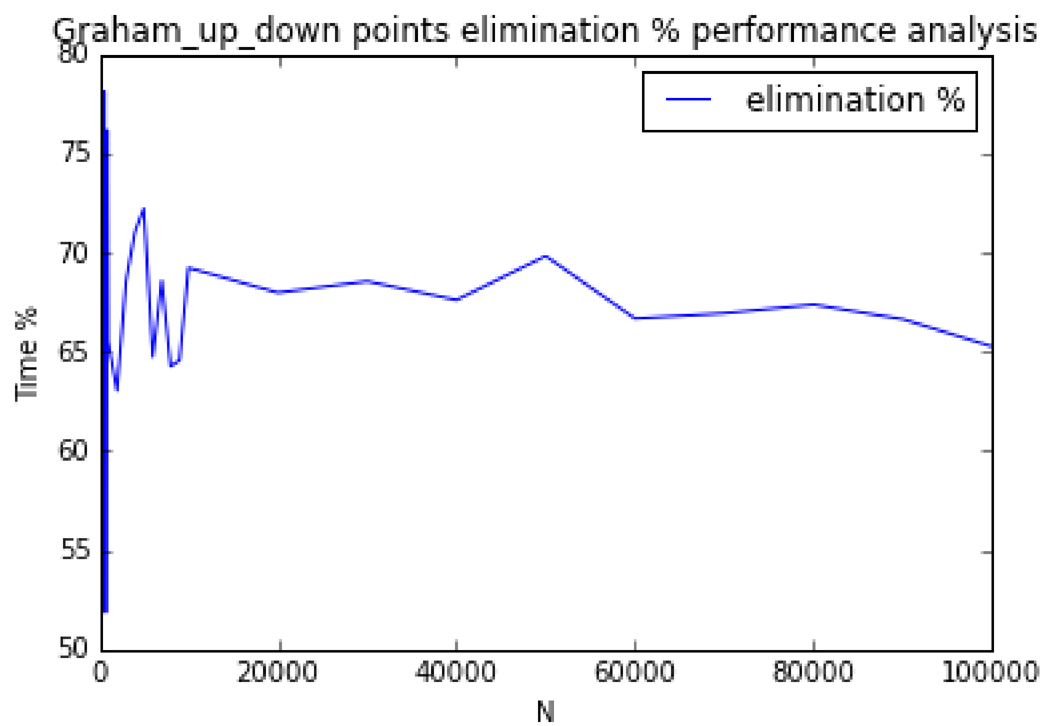


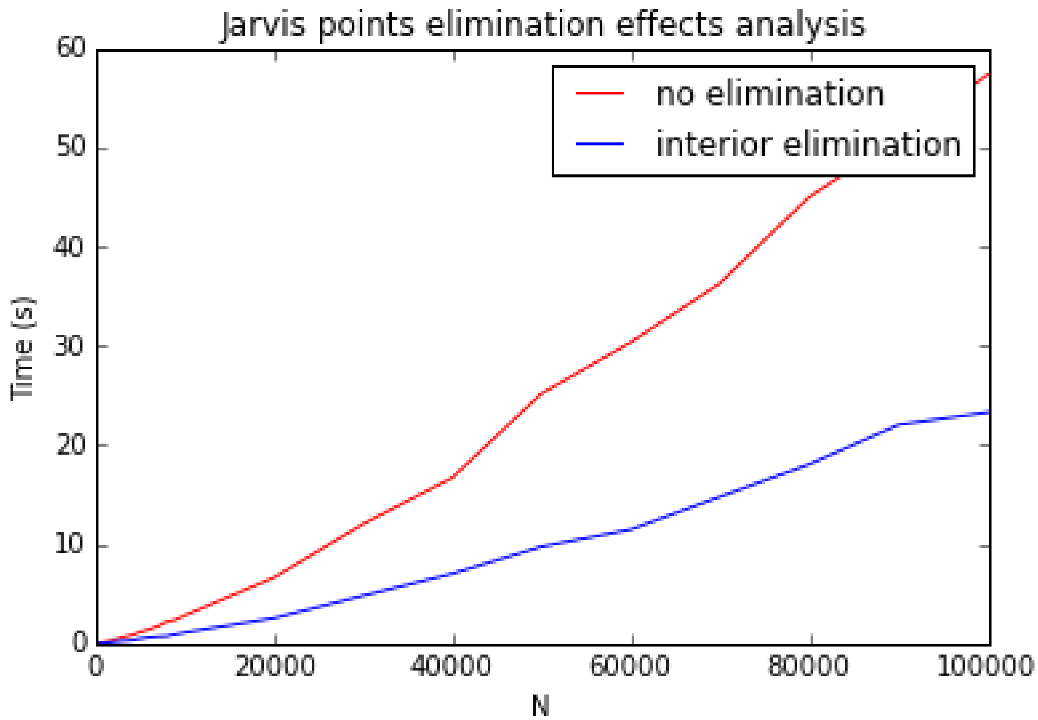

```
In [6]: #Efeito da eliminação de pontos interiores no caso de amostragem no interior do círculo
        compare_interior_elimination_effect(Graham, random_list_disk)
        compare_interior_elimination_effect(Graham_up_down, random_list_disk)
        compare_interior_elimination_effect(Jarvis, random_list_disk)
```

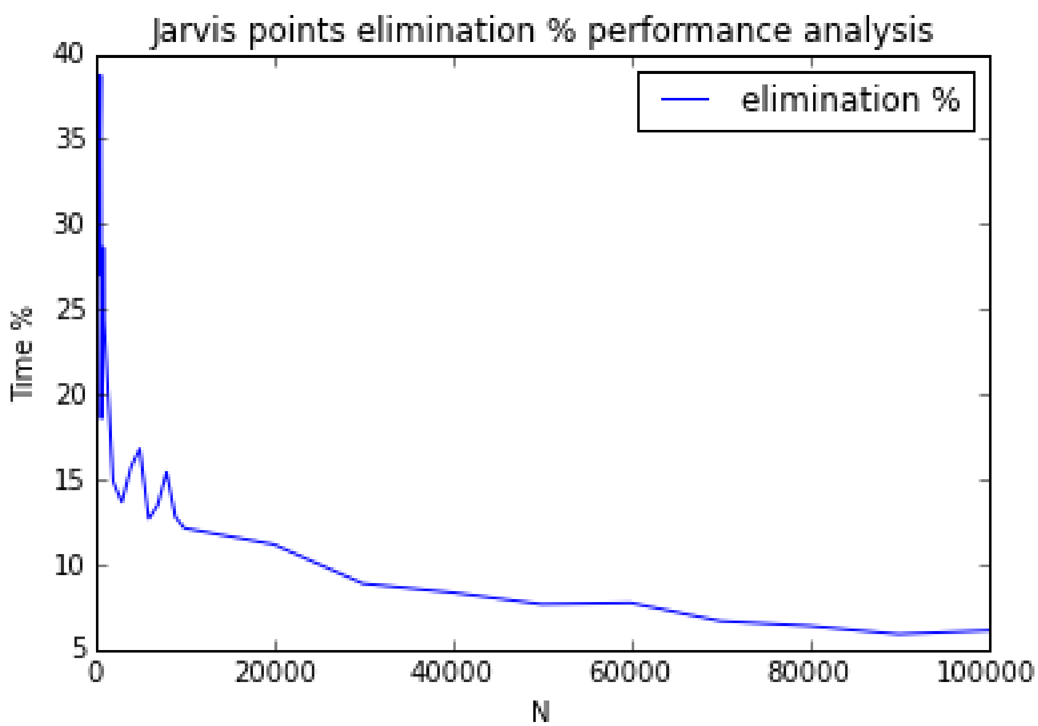

Graham points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20000
40000
60000
80000
100000


Graham points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
84
82
80
78
76
74
72
0
20000
40000
60000
80000
100000

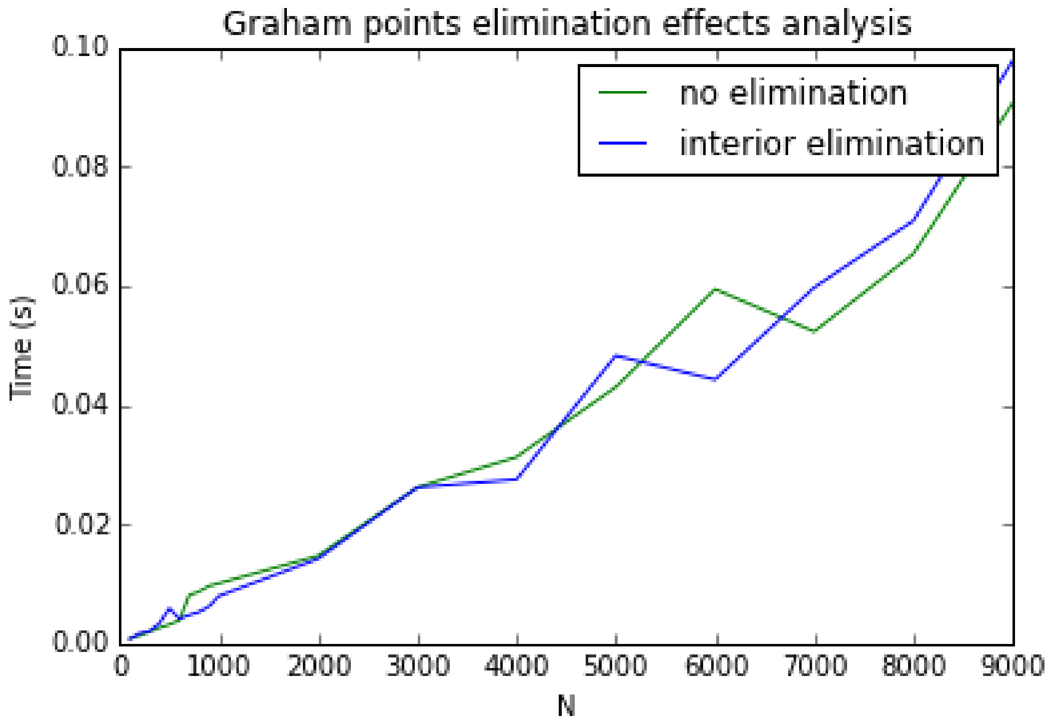

Graham_up_down points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0
20000
40000
60000
80000
100000

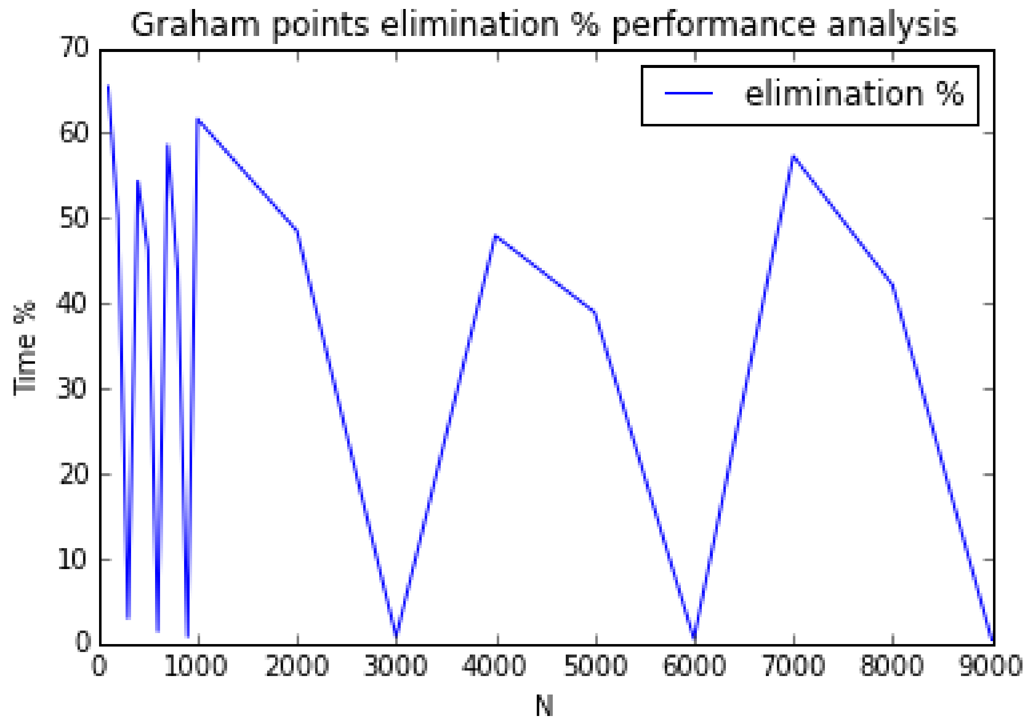

Graham_up_down points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
50
55
60
65
70
75
80
0
20000
40000
60000
80000
100000

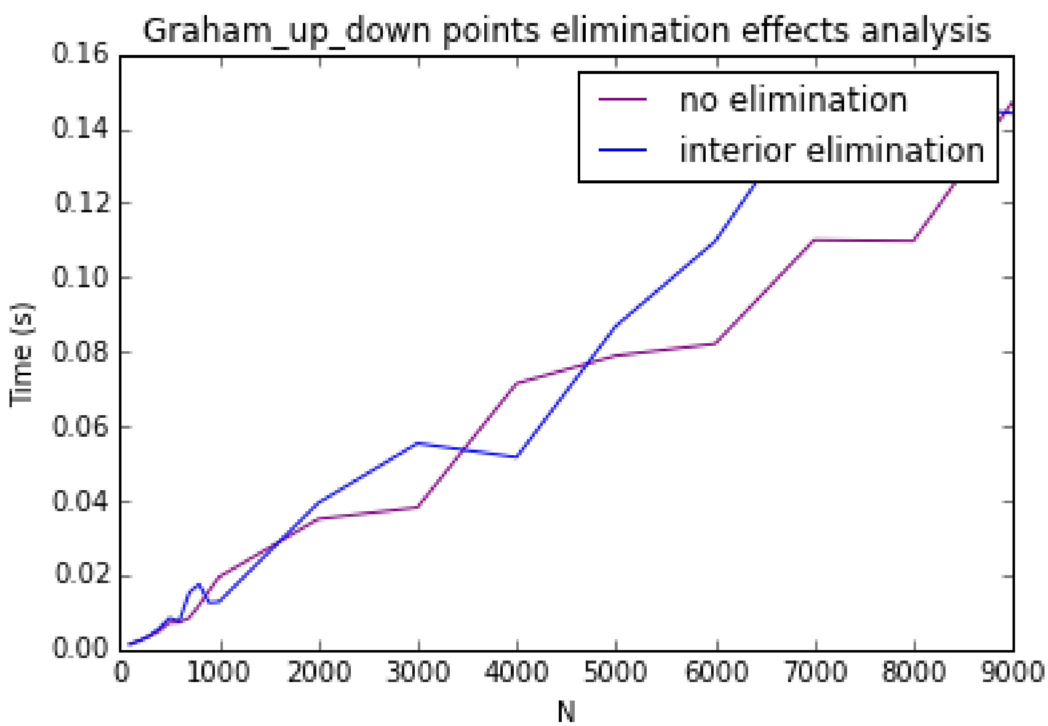

Jarvis points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
0
10
20
30
40
50
60
0
20000
40000
60000
80000
100000

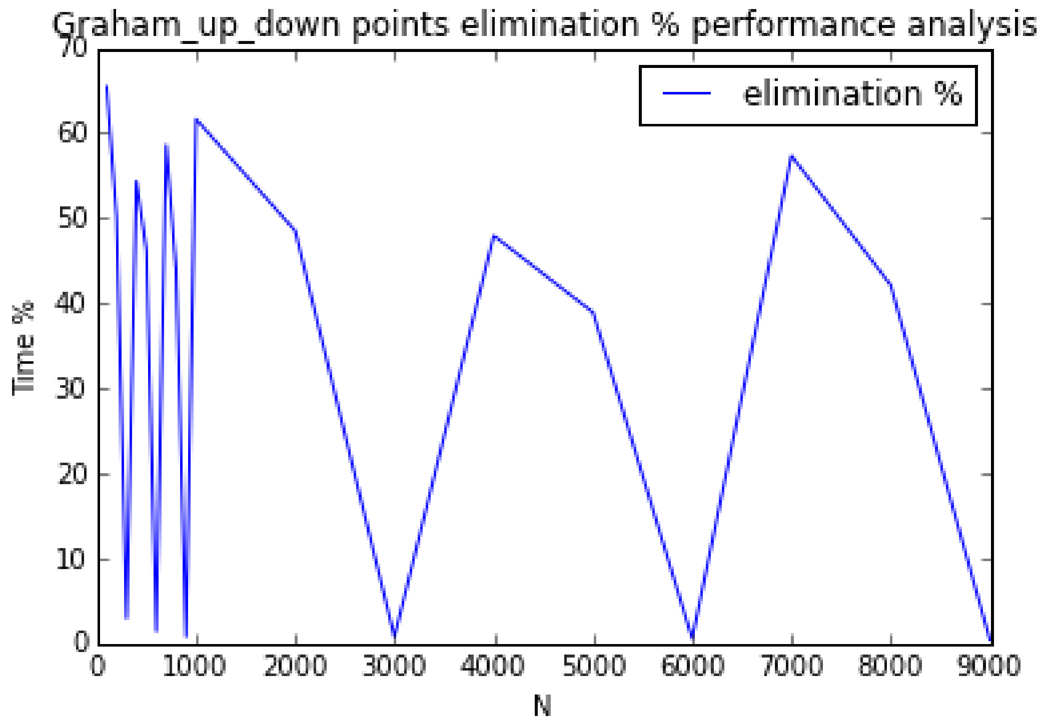

Jarvis points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
5
10
15
20
25
30
35
40
0
20000
40000
60000
80000
100000

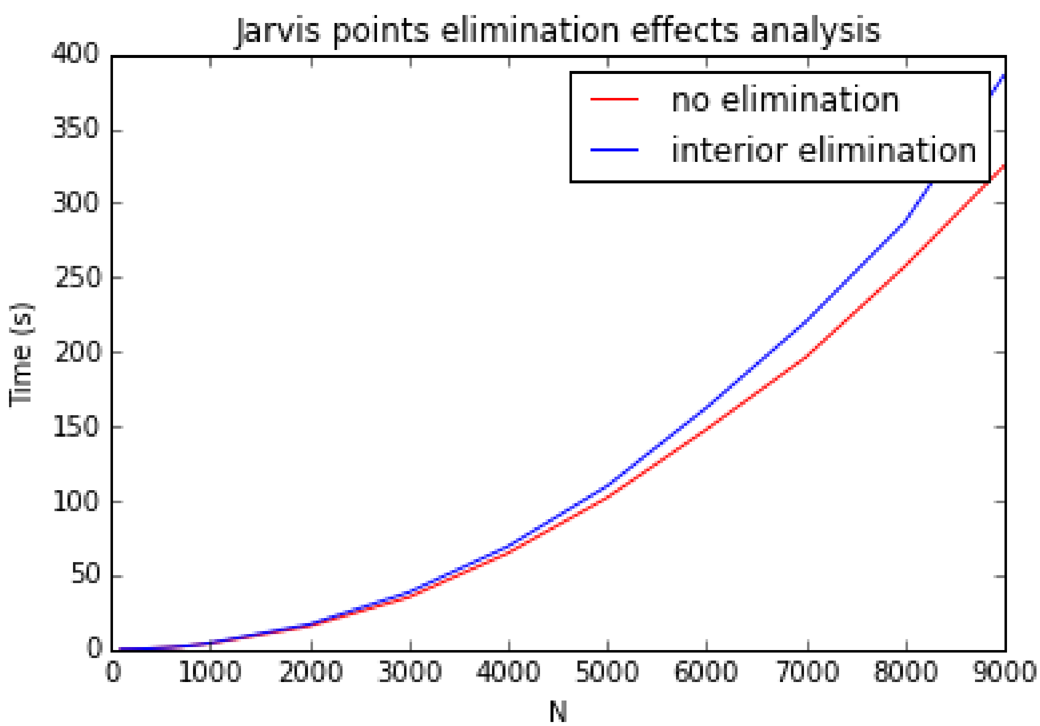
In [8]:
```
#Efeito da eliminação de pontos interiores no caso de amostragem sobre o círculo
compare_interior_elimination_effect(Graham, random_list_circle)
compare_interior_elimination_effect(Graham_up_down, random_list_circle)
compare_interior_elimination_effect(Jarvis, random_list_circle)
```

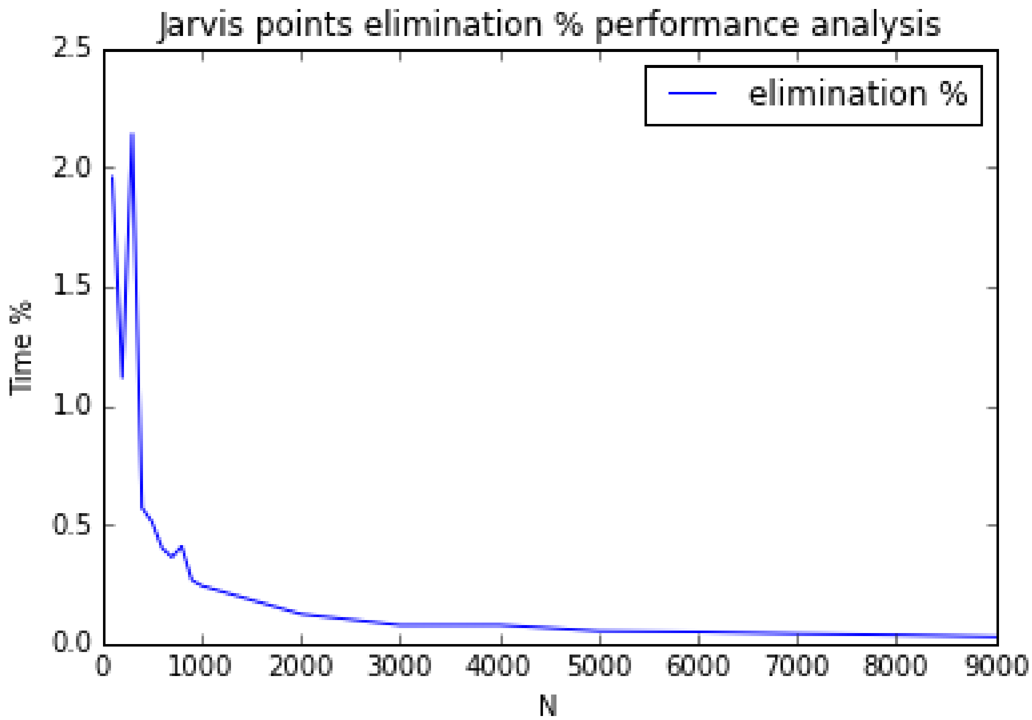



Graham points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
0
10
20
30
40
50
60
70
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000


Graham_up_down points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000


Graham_up_down points elimination % performance analysis
elimination %
Time %
N
0
10
20
30
40
50
60
70
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000


Jarvis points elimination effects analysis
no elimination
interior elimination
Time (s)
N
0
50
100
150
200
250
300
350
400
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000



Percebe-se que no caso de pontos gerados aleatoriamente como nestes experimentos, a eliminação de pontos interiores como um pré-processamento dos algoritmos reduziu o tempo necessário para a execução de cada um deles, exceto no caso do círculo.

Verifica-se que quanto mais rápida a execução após a eliminação de pontos interiores, maior o percentual do tempo de eliminação em relação ao tempo total de execução. No caso de amostragem no triângulo, por exemplo, a eliminação de pontos interiores foi tão efetiva que mais de 90% do tempo total de execução dos algoritmos foi dessa etapa, e o tempo de execução do algoritmo após isso foi bastante inferior ao tempo encontrado sem eliminação desses pontos.

No caso dos pontos amostrados sobre o círculo, não houve ganho de desempenho pois todos os pontos do círculo pertencem ao fecho convexo do conjunto e, portanto, não há pontos interiores a serem eliminados. Por conta disso, o percentual de tempo ocupado por essa etapa é pequeno em relação ao tempo total do algoritmo.

5. Avalie o papel do passo de ordenação no desempenho global dos seus programas. Qual a diferença entre usar um algoritmo quadrático ou um algoritmo O(n log n)?

O passo de ordenação tem papel fundamental no desempenho global dos algoritmos de fecho convexo com ordenação explícita, pois caso os pontos fossem dados já de forma ordenada, poderíamos encontrar o fecho convexo em tempo linear com o algoritmo de Graham, por exemplo.

A complexidade do algoritmo de ordenação utilizado é que domina assintoticamente a complexidade dos algoritmos ótimos de determinação de fecho convexo implementados. Assim, se utilizarmos um algorimo quadrático como passo do algoritmo de Graham, por exemplo, teremos uma solução com desempenho O(n2) e não mais O(nlog(n)).

1.1.4 Referências

[1] hallpaz Github: https://github.com/hallpaz/Algorithms-Course-IMPA-2015/tree/master/assignments/convex_hull

[2] Sample random point in triangle: http://stackoverflow.com/questions/4778147/sample-random-point-in-triangle

[3] Generate a random point within a circle (uniformly): http://stackoverflow.com/questions/5837572/generate-a-random-point-within-a-circle-uniformly/5838055#5838055

```
In [ ]:
```