Bài 1 - 206 trang 37:

Với $n \geq 2$

$$T(n) = 2T(n-1) + n - 1$$
$$T(1) = 1$$

Lặp phép đệ quy i lần ta có:

$$T(n) = 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j (n-j-1)$$

Thật vậy,

+, Với $i = 1$, ta thấy biểu thức đúng.

+, Giả sử $i > 1$, xét lần lặp thứ $i-1$:

$$T(n) = 2^{i-1} T(n-i+1) + \sum_{j=0}^{i-2} 2^j (n-j-1)$$

Tại lần lặp thứ i:

$$T(n) = 2^{i-1} T(n-i+1) + \sum_{j=0}^{i-2} 2^j (n-j-1)$$
$$= 2^{i-1} (2T(n-i) + (n-i)) + \sum_{j=0}^{i-2} 2^j (n-j-1)$$
$$= 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j (n-j-1)$$

(Đúng với yêu cầu)

Chọn $i = n-1$, ta có:

$$T(n) = 2^{n-1} T(1) + \sum_{j=0}^{n-2} 2^j (n-j-1)$$
$$= 2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} 2^j (n-j-1)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} 2^j (n-j-1)$$

Bài 1-224 trang 38

Từ bài 2.23, ta có

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n-1} X(k).X(n-k)$$

Ta thấy: với $n < i$ thì $X(n) \geq 2^{n-2}$

Giả sử $X(n) \geq 2^{n-2}$ với $n = i$, tức là:

$$X(i) = \sum_{k=1}^{i-1} X(k).X(i-k) \geq 2^{i-2}$$

Ta cần chứng minh $X(i+1) \geq 2^{i-1}$

Xét

$$X(i+1) = \sum_{k=1}^{i} X(k).X(i+1-k)$$

$$= X(k).X(k+1-k) + \sum_{k=1}^{i-1} X(k).X(i-k)$$

$$= X(k).X(1) + X(k)$$

$$= 2X(k) \geq 2.2^{n-2} = 2^{n-1}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 1-231 trang 38

Bài toán: Tìm $\log_2 B$ (với $B \geq 2$)

Giải:

$$T(n) = T(n/2) + 1 \text{ với } n > 2$$

$$T(n) = 1 \text{ với } n = 2$$

Ta thấy: với $n = 2$ thì nghiệm đúng

Giả sử nghiệm đúng tại k tức là

$$T(k) = T(k/2) + 1 = \log_2 k$$

Xét tại $2k$

$$T(2k) = T(k) + 1$$

$$= \log_2 k + 1$$

$$= \log_2 2k.$$