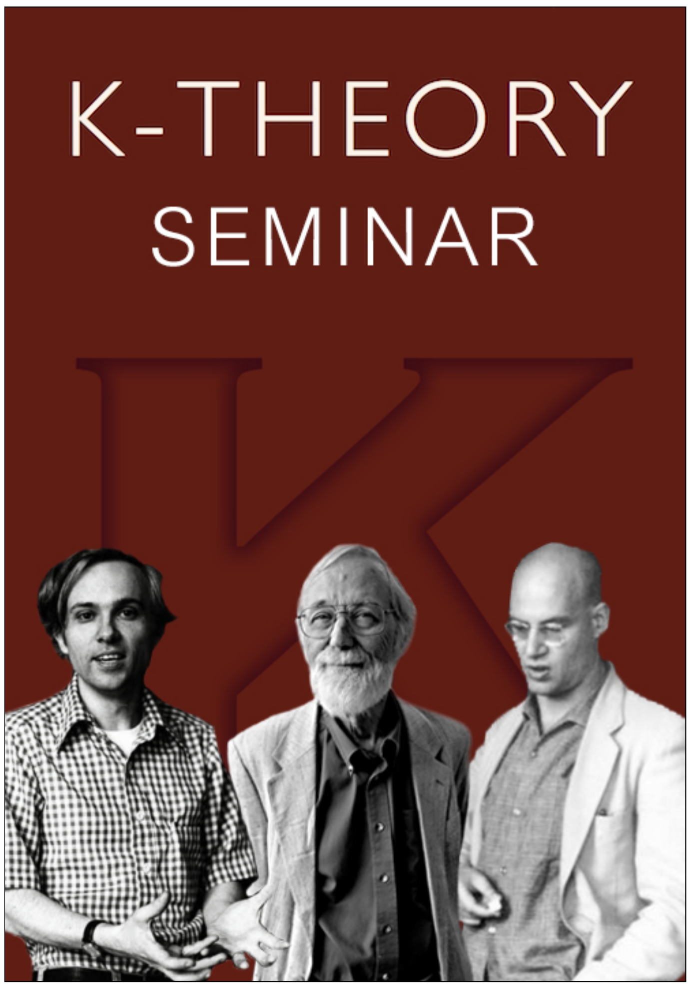
代数 K 理论讨论班笔记

中国科学院大学 数学科学学院
H. Zhang



从左至右依次为
Quillen Milnor Grothendieck

2017 年 3 月 15 日

目录

第一章　环的 K_1 群

Kazuya Kato(斋藤和也) 在他的讲义中曾经说道

> If you look on the street, you never meet a commutative ring; that's rather strange. They are rather shy I think. We need to ask them to come to this room. Rings, rings, please come! Rings, rings, please come! **shuffles along the floor, playing the part of the ring** Finite fields, come! Rings of functions, come! **hops** I think they are here now.

这一章开始让我们也呼唤环的到来，同时也呼唤群的到来！

阅读这一章所需的预备知识大致有：基本抽象代数 (群、环、域)，基础同调代数等，其它相关知识会在讲义中回忆或介绍。Weibel [1] 第三章的主要包含了

- K_1, K_2 的定义
- 相对 K_1, K_2 的定义
- 负 K 理论，代数 K 理论基本定理
- Milnor K 理论

在第四章将对于一般的 $n \geq 0$, 定义 $K_n(R) = \pi_n(K(R))$, 其中 $K(R)$ 是 K 理论空间. 当然 $K(R)$ 有很多种取法, 如 $K_0(R) \times BGL(R)^+$(+ 构造) 或者 $\Omega BQ\mathbf{P}(R)$(Q-构造), 另外还有其他构造.

在 K 理论的历史中会出现的著名数学人物有

K_0: A. Grothendieck

K_1: J. H. C. Whitehead, Hyman Bass

K_2: John Milnor

K_n: Daniel Quillen, Waldhausen ...

研究领域涉及到 K 理论的华人学者有王湘浩、林节玄 (T. Y. Lam)、项武忠 (W.-C. Hsiang) 等.

环 R 的 K_1 群与 K_2 群主要研究两个基本的数学对象— $GL(R)$ 与 $E(R)$. 其中 $GL(R)$ 在许多数学分支都占据着重要地位, 从线性代数、李群、表示论到纤维丛、微分几何都

会出现它的身影. 接下来我们看看 K 理论中是如何研究这些对象的.

1.1 环的 K_1 群

若不特别指出的话, 这一节中的 R 均为含幺结合环 (不要求交换).

首先我们介绍 $GL(R)$ 的定义.

定义 1.1 (一般线性群)**.** 令 R 是含幺结合环, $GL_n(R)$ 是 n 阶一般线性群,

$$GL_n(R) \overset{嵌入}{\hookrightarrow} GL_{n+1}(R)$$
$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而有

$$R^* = GL_1(R) \hookrightarrow GL_2(R) \hookrightarrow \cdots GL_n(R) \hookrightarrow GL_{n+1}(R) \hookrightarrow \cdots.$$

一般线性群 (general linear group)$GL(R)$ 定义为

$$GL(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} GL_n(R) = \varinjlim_{n\to\infty} GL_n(R),$$

则 $GL_n(R) \longrightarrow GL(R)$ 由

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_\infty \end{pmatrix}$$

给出, 其中 1_∞ 表示无穷单位矩阵.

由正向极限的泛性质, 任意 $i < j$, 有交换图

$$\begin{tikzcd}
GL_i(R) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & GL_j(R) \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& GL(R) \arrow[d, dashed] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

注意 $GL(R)$ 一般不是交换群, 即使 R 交换, $GL(R)$ 也未必是交换群, 易看出

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

比如矩阵 A 右乘 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示 A 的第一列与第二列互换, 而 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 左乘 A 表示 A 的第一行与第二行互换.

回想 K_0 群的定义, 把交换半群 $\mathbf{P}(R)$ 作群完备化后即得交换群 $K_0(R)$. 对于 K_1 群, 想法是把 $GL(R)$" 变成" 交换群. 这一手段称为交换化 (abelianization). 在抽象代数中, 把一个群 G 模掉它的换位子群 $[G,G]$ 就变成交换群 $G/[G,G]$. 想法是这样的: 对于任意的 $g,h \in G$, 要想使得 $gh = hg$, 即需要 $ghg^{-1}h^{-1} = 1$, 但在 G 中未必满足这样的等式. 我们可以通过商群的构造把 $ghg^{-1}h^{-1}$ 这种形式的元和单位元 1 等同起来. 这样" 等同" 的思想在几何中也经常出现, 考虑 $I = [0,1]$, $I/0 \sim 1 \cong S^1$, 或者 $S^2/$对径点等同 $\cong \mathbb{R}P^2$. 交换化的具体做法是这样的:

定义 1.2 (交换化)**.** 令 $[G,G] \subset G$ 是由群 G 中的换位子 $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$生成的子群, 称作 G 的换位子群, 则

1. $[G,G] \lhd G$ 是正规子群, 从而可以作商群 $G/[G,G]$.
2. 商群 $G/[G,G]$ 是交换群.
3. 泛性质: 若 A 是一个交换群, $f : G \longrightarrow A$ 是群同态, 则 f 可通过 $G/[G,G]$ 唯一分解,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & A \\ & G/[G,G] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

因为在 A 中 $f(g)f(h) = f(h)f(g)$, 由 f 是群同态得到 $f(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$, 即 $[G,G] \subset \ker f$, 由于商群是余核, 由余核的泛性质

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & {[G,G]} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "0"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \operatorname{coker}\pi = G/[G,G] \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\ & & A & & \end{tikzcd}$$

存在唯一同态 $G/[G,G] \longrightarrow A$ 使得上图交换. 实际上交换化是一个从群范畴到交换群范畴的函子

$$-_{\text{ab}} : \text{Group} \longrightarrow \text{Ab}$$
$$G \mapsto G_{\text{ab}} = G/[G,G]$$

熟悉群同调的读者可以看出实际上这个函子就是群 G 的 1 阶同调, $G_{\text{ab}} = H_1(G,\mathbb{Z}) = G/[G,G]$. 现在我们根据之前的想法给出 K_1 群的定义

定义 1.3. 令 R 是含幺结合环, 定义 $K_1(R) = GL(R)_{\mathrm{ab}} = GL(R)/[GL(R), GL(R)]$. 有正合列

$$1 \longrightarrow [GL(R), GL(R)] \longrightarrow GL(R) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow 0\text{[1]}.$$

将上面交换化的泛性质翻译成 K_1 的泛性质, 即
对任意的交换群 A 与群同态 $GL(R) \longrightarrow A$, 存在唯一的交换群同态 $K_1(R) \longrightarrow A$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
GL(R) \arrow[rr] \arrow[dr] & & A \\
& K_1(R) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

另外由于正向极限 (余极限) 是正合函子, 故它与同调函子可交换, 从而

$$K_1(R) = H_1(GL(R), \mathbb{Z}) = H_1(\varinjlim GL_n(R), \mathbb{Z}) = \varinjlim H_1(GL_n(R), \mathbb{Z}).$$

环的 K 理论实际上是研究从环范畴 Ring 到交换群范畴 Ab 的一系列函子 K_n, 现在我们有了对象之间的对应

$$\begin{aligned} K_1 \colon \mathrm{Ring} &\longrightarrow \mathrm{Ab} \\ R &\mapsto K_1(R) \end{aligned}$$

接下来我们考虑态射之间的对应. 令 $f : R \longrightarrow S$ 是环同态, 则利用泛性质可以得到交换群同态 $K_1(f) : K_1(R) \longrightarrow K_1(S)$:

$$\begin{tikzcd}
GL(R) \arrow[r, "1."] \arrow[d, "3.\text{由泛性质}"'] \arrow[dr, dashed, "1.2.\text{的合成}"] & GL(S) \arrow[d, "2.\text{自然同态}"] \\
K_1(R) \arrow[r, "K_1(f)", "4."'] & K_1(S)
\end{tikzcd}$$

命题 1.4. *若 R 可以写成两个环的直积 $R_1 \times R_2$, 由于 $GL(R) = GL(R_1) \times GL(R_2)$(任意 $f : R_1 \times R_2 \longrightarrow R_1 \times R_2 \in GL_n(R)$ 都可以写成 $f = (f_1, f_2)$, $f_i \in GL_n(R_i)$), $GL(R)$ 换位子群也可以写成直积的形式 $[GL(R_1) \times GL(R_2), GL(R_1) \times GL(R_2)] = [GL(R_1), GL(R_1)] \times [GL(R_2), GL(R_2)]$, 故 $K_1(R) = K_1(R_1) \oplus K_1(R_2)$.*

实际上, 在今后可以得到对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 均有 $K_n(R) = K_n(R_1) \oplus K_n(R_2)$.

[1]注意这里和上面正合列中右端的 0 表示前一项是交换群, 将交换群的运算记为加法, 那么 0 是加法单位元.

1.1.1 Whitehead 引理

接下来我们会给出 $K_1(R)$ 的等价表述 Whitehead 引理, 从某种程度上说这是 K 理论的源头. 首先介绍初等矩阵群 $E(R) \subset GL(R)$, 这立马会提出两个问题: $E(R)$ 是否是 $GL(R)$ 的正规子群, $E(R)$ 和 $GL(R)$ 有什么更紧密的联系? Whitehead 引理回答了这个问题 $E(R) = [GL(R), GL(R)]$, 故 $E(R) \lhd GL(R)$, 从而得到 $K_1(R) = GL(R)/E(R)$.

定义 1.5 (初等矩阵群)**.** 令 $i \neq j$ 是两个不相等的正整数, $r \in R$, 定义初等矩阵$e_{ij}(r) \in GL(R)$ 为以下形状的矩阵: 对角线元均为 1, 在 i 行 j 列[2]的位置上的元为 r, 其余位置均为 0.

$$e_{ij}(r) = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} j\text{列} \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&& \text{\Large 0} & \\ && 1 & \cdots & r && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ & \text{\Large 0} &&&& \ddots & \\ &&&&&& \ddots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} .$$

令 $E_n(R) \subset GL_n(R)$ 为满足 $1 \leq i,j \leq n$ 的所有初等矩阵 $e_{ij}(r)$ 生成的子群, 同样地, $E_2(R) \hookrightarrow E_3(R) \hookrightarrow \cdots E_n(R) \hookrightarrow E_{n+1}(R) \hookrightarrow \cdots$, 初等矩阵群$E(R)$ 定义为

$$E(R) = \bigcup E_n(R) = \varinjlim_{n\to\infty} E_n(R),$$

是由所有的初等矩阵生成的一个 $GL(R)$ 的子群.

固定下标 i, j 后,

$$\begin{aligned} e_{ij}(r)e_{ij}(s) &= e_{ij}(r+s), \\ e_{ij}(-r) &= e_{ij}(r)^{-1}. \end{aligned}$$

为了方便计算初等矩阵的乘积, 我们给出以下交换子公式 (除了 $j = k$ 并且 $i = l$ 的情况

[2]台湾的朋友请注意这里遵循大陆的线性代数书籍的叫法, $\overset{\text{háng}}{\text{行}}$表示 row, 列表示 column.

均容易验算),

$$[e_{ij}(r), e_{kl}(s)] = \begin{cases} 1, & 若\ j \neq k \text{ and } i \neq l \\ e_{il}(rs), & 若\ j = k \text{ and } i \neq l \\ e_{kj}(-sr), & 若\ j \neq k \text{ and } i = l \end{cases}. \tag{1.5}$$

若 $j \neq k$ and $i \neq l$, $e_{ij}(r)e_{kl}(s) = e_{kl}(s)e_{ij}(r)$ 得到的是一个对角线位置为 1, (i,j) 位置为 r, (k,l) 位置为 s, 其它位置均为 0 的矩阵. 设 $g = (g_{ij}) \in GL_n(R)$, 于是分块上 (下) 三角阵 $\begin{pmatrix} 1_n & g \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ 可以写成初等矩阵的乘积

$$\begin{pmatrix} 1_n & g \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i,j \leq n} e_{i,n+j}(g_{ij}) \in E_{2n}(R),$$

同理

$$\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ g & 1_n \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i,j \leq n} e_{n+i,j}(g_{ij}) \in E_{2n}(R).$$

回忆若 $G = [G,G]$, 则称 G 是完满群[3]. 若 $H \subset G$ 是完满子群, 则显然 $H = [H,H] \subset [G,G]$.

引理 1.6. *若 $n \geq 3$, 则 $E_n(R)$ 是完满群, 因此 $E(R)$ 是完满群.*

Proof. 由以下等式

$$e_{ij}(r) = [e_{ik}(r), e_{kj}(1)], \quad i,j,k\ 互不相同,$$

可得 $E(R) \subset [E(R), E(R)]$, 而反方向的包含是显然的. □

为了方便证明 Whitehead 引理, 我们引入记号 $\bar{w}_{ij}(r)$, 这在定义 K_2 群的 Steinberg 符号中起到了重要作用. 若 $r \in R^*$ 是环 R 中的可逆元, 记 $\bar{w}_{ij}(r) = e_{ij}(r)e_{ji}(-r^{-1})e_{ij}(r)$. 我们在此计算 $\bar{w}_{12}(r)$, 对于一般的 i,j 是类似的,

$$\bar{w}_{12}(r) = e_{12}(r)e_{21}(-r^{-1})e_{12}(r) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ -r^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

可得 $\bar{w}_{ij}(r)\bar{w}_{ij}(-r) = 1$. 实际上可以看出若 $g \in GL_n(R)$, 将 $e_{ij}(g)$ 视作分块矩阵[4], 这一等式仍是对的. 该等式的重要性体现在以下事实中 ([1], chapter 2, exercise 1.11):

[3]Perfect group, 有些译作完全群, 但完全群也常指 complete group; 为了消除歧义, 将 perfect group 译为完满群, complete group 译为完备群, 后者在本书中不会提及.

[4]这里实际上是初等矩阵的乘积.

引理 1.7. 若 $g \in GL_n(R)$, 则在 $GL_{2n}(R)$ 在有等式,

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_n & g \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ -g^{-1} & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & g \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

从而说明 $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$.

定义 1.8. 若矩阵在相差正负号的情况下置换了集合 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 中的元, 则称该矩阵为符号置换矩阵. 任意置换矩阵均是符号置换矩阵.

特别地, 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ 是一个符号置换矩阵, 是否可以把它写成初等矩阵的乘积? 我们通过列运算[5]可以得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = e_{12}(1)e_{21}(-1)e_{12}(1) \in E_2(R)$.

接下来我们证明 Whitehead 引理

引理 1.9 (Whitehead 引理, [2])**.** 对任意结合幺环 R, $E(R) = [GL(R), GL(R)]$, 从而 $K_1(R) = GL(R)/E(R)$.

Proof. 由引理1.6得 $E(R) \subset [GL(R), GL(R)]$. 下证 $[GL(R), GL(R)] \subset E(R)$: 设 $[g, h] \in [GL_n(R), GL_n(R)]$, 则

$$\left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (hg)^{-1} & 0 \\ 0 & hg \end{pmatrix}$$

由引理1.7, 右端的三项均属于 $E_{2n}(R)$, 故 $\begin{pmatrix} [g,h] & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \right] \in E_{2n}(R)$. 因此 $[GL_n(R), GL_n(R)] \subset E_{2n}(R) \subset E(R)$, 故 $[GL(R), GL(R)] \subset E(R)$. □

[5]同样可以使用行运算.

1.2 交换环的 K_1 群

1.3 投射模与 K_1 群

1.4 相对 K_1 群

目标: 将环 R 与它的商环 R/I 的 K_1 群联系起来.

步骤: 定义相对 K_1 群 $K_1(R,I)$, 连接 K_0 和 K_1 的六项正合列. 由此得到计算 K 群的工具, 如 $SK_1(R,I)$ 与 Mayer-Vietoris 序列.

定义 1.10. R: 环, $I \subset R$: 理想. $R \to R/I$ 诱导了 $GL(R) \to GL(R/I)$.

定义 $GL(I) := \ker(GL(R) \to GL(R/I))$, $GL_n(I) := \ker(GL_n(R) \to GL_n(R/I))$.

$E(R,I) :=$ 包含初等阵 $e_{ij}(x), x \in I$ 的 $E(R)$ 的最小的正规子群, 实际上是 $E(R,I) = \langle e_{ij}(x) \mid x \in I \rangle^{E(R)}$.

$E_n(R,I) :=$ 由 $e_{ij}(x), x \in I, 1 \le i \ne j \le n$ 这些矩阵生成的 $E_n(R)$ 的正规子群, 实际上是 $E_n(R,I) = \langle e_{ij}(x) \mid x \in I, 1 \le i \ne j \le n \rangle^{E_n(R)} \lhd E_n(R)$.

$E(R,I) = \bigcup_n E_n(R,I)$.

注记 1.11. Rosenberg 的书中将 $GL(I)$ 记为 $GL(R,I)$, Weibel 在 K-book 的第三章习题 1.1.10 中说 $GL(I)$ 与 R 的选择无关, 仅与 I 视为无幺元的环的结构有关。令 I 是无幺元的环, 可以将其添加一个幺元使它成为含幺环, 记为 $I_+ = I \oplus \mathbb{Z}$,
其中的加法结构: $(x,n) + (y,m) = (x+y, n+m)$
乘法结构: $(x,n) \cdot (y,m) = (xy + ny + mx, nm)$
乘法单位元 $(0,1)$: $(x,n)(0,1) = (x,n) = (0,1)(x,n)$.
$GL_n(I) := \ker(GL_n(I \oplus \mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}))$, 若 $I \subset R$ 是理想, 则有 $GL_n(I) = \ker(GL_n(R) \to GL_n(R/I))$.

$E(R,I)$ 中的初等阵在模 I 后为单位矩阵, 即 $e_{ij}(x) \equiv \mathrm{id}(\mathrm{mod} I)$, 故 $E(R,I) \subset GL(I)$.

接下来想要定义 $K_1(R,I)$ 为 $GL(I)/E(R,I)$, 必须要求 $E(R,I) \lhd GL(I)$: 这就是相对 Whitehead 引理.

引理 1.12 (相对 Whitehead 引理). $E(R,I) \lhd GL(I)$, $[GL(I), GL(I)] \subset E(R,I)$.

Proof. (i) 下面证明对于 $g \in GL_n(I), h \in E_n(G,I)$, 下式成立

$$\begin{pmatrix} ghg^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} \in E(R,I).$$

实际上有

$$\begin{pmatrix} ghg^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & \\ & g^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{-1} & \\ & g \end{pmatrix}.$$

若将 g 写成 $g=1+\alpha\in GL_n(I)$, 由于 $GL(I)$ 中元映到 $GL_n(R/I)$ 为 1, 故 α 这个矩阵中的元素都属于 I,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1}\end{pmatrix} &= e_{12}(1)e_{21}(\alpha)e_{12}(-1)e_{12}(g^{-1}\alpha)e_{21}(-g\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g^{-1}\alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g\alpha & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

右边的式子前三项乘起来在 $E_{2n}(R,I)$ 中, 从而 $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1}\end{pmatrix}\in E_{2n}(R,I)$, 故 $\begin{pmatrix} ghg^{-1} & \\ & 1\end{pmatrix}\in E(R,I)$.

(ii) 若 $g,h\in GL(I)$, 则

$$[g,h]=\begin{pmatrix} g & \\ & g^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & \\ & h^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} (hg)^{-1} & \\ & hg\end{pmatrix}\in E_{2n}(R,I)\subset E(R,I).$$

□

有了上面的引理, 我们可以定义相对 K_1 群. 由于 $E(R,I)\lhd GL(I)$, 因此可以做商群, 并且由于 $[GL(I),GL(I)]\subset E(R,I)$, 因此商群是交换群, 这是因为对于任意的 $\bar{g},\bar{h}\in K_1(R,I)$, $\bar{g}\bar{h}\bar{g}^{-1}\bar{h}^{-1}=\overline{ghg^{-1}h^{-1}}\in E(R,I)$, 因此 $\bar{g}\bar{h}=\bar{h}\bar{g}$.

定义 1.13. $K_1(R,I):=GL(I)/E(R,I)$, 且为交换群.

接下来我们从 $GL(I)\rightarrowtail GL(R)$ 类比想得到 $K_1(R,I)\to K_1(R)$ 这样的映射。

若 $R\to S$ 是环同态, R 的理想 I 对应为 S 的理想 I', 则映射 $GL(I)\to GL(I')$ 和 $E(R)\to E(S)$ 诱导了映射 $K_1(R,I)\to K_1(S,I')$.

注记 1.14. 若 $R\to S$ 是环同态, R 的理想 I 同构地对应为 S 的理想 I, 则 $K_1(R,I)\to K_1(S,I)$ 是满射, 两者都是 $GL(I)$ 的商群. 因为 $E(R,I)\subset E(S,I)$, 故 $GL(I)/E(R,I)\twoheadrightarrow GL(I)/E(S,I)$.

参考文献

[1] Charles A. Weibel. *The K-book: An introduction to algebraic K-theory*. American Mathematical Society Providence (RI), 2013.

[2] J. H. C. Whitehead. Simple homotopy types. *American Journal of Mathematics*, 72(1):1–57, 1950.

索引

部分名词与专业用语索引如下