Herstein Algebra Moderna Resuelto

Humberto Alonso Villegas

12 de enero de 2014

Nociones Preliminares

1. Teoría de Conjuntos

Ejemplo 1.- Sea s un conjunto cualquiera y definamos en S por a b para $a, b \in S$ si y solo si a = b. Hemos definido claramente, así, una relación de equivalencia sobre S. En

- pensar como humano
- actuar como humano
- actuar racionalmente
- pensar racionalmente

2. Teoría de Grupos

2.1. Definición de Grupo

Ejemplo 1.- Supongamos que $G = \mathbb{Z}$, con a·b, para $a, b \in G$, definida como la suma usual entre enteros, es decir, con $a\Delta b = a + b$. Demostrar que G es un grupo abeliano infinito en el que 0 juega el papel de e y $-a$ el de a^{-1} G es un grupo $\iff$ cumple lo siguiente.

1. $\forall$ a,b $\in$ G $\in$ G a·b $\in$ G
2. $\forall$ a,b,c $\in$ G, a·(b·c) = (a·b)·c
3. $\exists$ e $\in$ G : $\forall$ a $\in$ G, e·a=a·e=a
4. $\forall$ a $\in$ G $\exists$ a^{-1} $\in$ G : a·a^{-1} = e

Demostración. :

1.- Sean a,b $\in$ G, a·b $\in$ G $\iff$ a+b $\in \mathbb{Z}$ $\iff$ a,b $\in \mathbb{Z}$

2.- Sean a,b,c $\in$ G, $\Rightarrow$ a,b,c $\in$ G, $\Rightarrow$ a·(b·c) = a+(b+c) = (a+b)+c = (a·b)·c $\Rightarrow$ a·(b·c)=(a·b)·c

3.- Sea a $\in$ G, $\exists$ e $\in$ G : e·a = a·e = a $\forall$ a $\in$ G $\iff$ $\exists$ w $\in \mathbb{Z}$: w·a = a·w = a $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$ (1 cumple)

4.- Sea a $\in \mathbb{Z}$, $\exists$ a^{-1} $\in$ G : a·a^{-1} = a^{-1}·a = e $\iff$ $\exists$ a^{-1} $\in \mathbb{Z}$: a+a^{-1} = a^{-1}+a = 1 (cumple -a)

De esto se tiene que G es un grupo, ahora veamos que G es grupo abeliano

Sea a,b $\in$ G $\Rightarrow$ a,b $\in \mathbb{Z}$, a·b = b·a $\iff$ a+b = b+a $\square$