Примеры символьных вычислений в Matlab

(полезный материал под учебные задачи)

(необходима версия Matlab >= 2017 и режим Live scrtipt, открывается через меню команды New)

После нажатия на строку слева в правом окне подсвечивается соответствующее символьное выражение

Для запуска каждой из секций ниже достаточно Ctrl + Enter

Объявление выражений, их упрощение, подстановка

```
% syms - объявление символьной переменной \ функции
syms  f(x) y z
f(x) =  x * cos(x)
```

f(x) = $x\cos(x)$

```
% подстановка z = z(y) вместо x в f(x)
z = y * y
```

z = y^2

```
f_sub = subs(f(x), x, z)
```

f_sub = $y^2\cos(y^2)$

```
% упрощение выражений, полезно применить к большим формулах
% в ответах к ОДУ \ интегралам
g = 2*sin(y) ^ 2 + 2*cos(y) ^ 2
```

g = $2\cos(y)^2 + 2\sin(y)^2$

```
g_simplified = simplify(g)
```

g_simplified = 2

Исключение комплексных решений

```
clc
clear all

% По умолчанию в matlab символьные переменные предполагаются комплексными
syms x
equ = x^2 == -1
```

equ = $x^2 = -1$

```
solve(equ)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

```
% В сложных решениях\интегралах это может приводить к
% зависанию\перегрузке вычислений, лишним решениям
% Чтобы исправить, нужно добавить предположения assume
syms x
assume(x, 'real')
equ = x^2 == -1
```

equ = $x^2 = -1$

```
solve(equ)
```

ans =

Empty sym: 0-by-1

```

```

Дифференцирование

```
syms  f(x)
f(x) =  cos(x) + x^3
```

f(x) = $\cos(x) + x^3$

```
% diff - дифференцирование (результат - справа)
 diff(f(x), x)
```

ans = $3\,x^2 - \sin(x)$

```
% то же, но с запоминанием в переменную df
df = diff(f(x), x)
```

df = $3\,x^2 - \sin(x)$

```
ddf_1 = diff(df, x)
```

ddf_1 = $6\,x - \cos(x)$

```
% то же, но сразу вторая производная
ddf_2 = diff(f(x), x, 2)
```

ddf_2 = $6x - \cos(x)$

```
% то же, но по нескольким переменным
syms g(x,y)
g(x,y) = x*x*y*y
```

g(x, y) = $x^2 y^2$

```
df_xy = diff(g, x, y)
```

df_xy(x, y) = $4xy$

Задание дифф. уравнения и его символьное решение

```
clear all

syms  y(x)
% в объект с названием equation целиком помещается уравнение
% обратите внимание, на == вместо = при записи самого уравнения
equation = ( diff(y,x) == x^2 )
```

equation(x) =

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = x^2$$

```
% можно записать без скобок
equation = diff(y,x) == x^2
```

equation(x) =

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = x^2$$

```
% принимает "контейнер" с уравнением и возвращает решение
equ_solution = dsolve(equation)
```

equ_solution =

$$\frac{x^3}{3} + C_1$$

```
% то же, но с начальными условиями
% (правкой одного числа можно получить резонанс)
equ = diff(y, x, 2) + y == sin(x/3)
```

equ(x) =

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, y(x) + y(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

```
gu1 = (y(0) == 1)
```

gu1 = $y(0) = 1$

```
gu2 = (y(1) == 1)
```

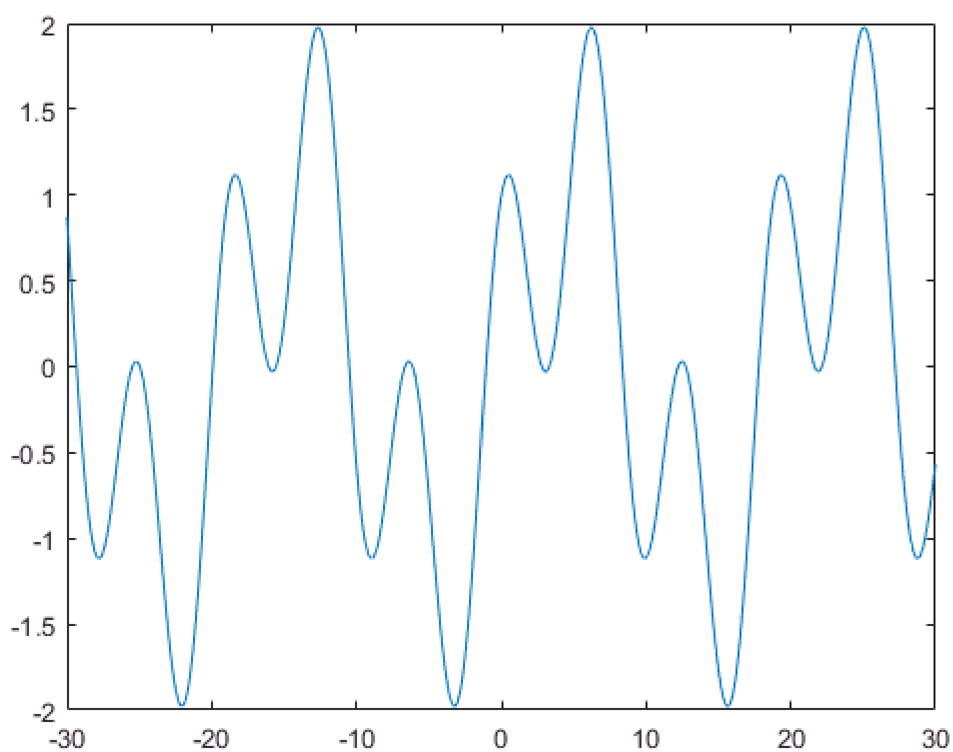
gu2 = $y(1) = 1$

```
ysol = dsolve(equ, [gu1, gu2])
```

ysol =

$$\frac{9\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{16} - \frac{3\sin\left(\frac{5x}{3}\right)}{8} + \frac{3\sin\left(\frac{7x}{3}\right)}{16} + \cos(x) + \sin(x)\left(\frac{3\cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{4} - \frac{3\cos\left(\frac{4x}{3}\right)}{8}\right) - \frac{\sin(x)\ \left(16\,\mathrm{co}\right.}{}$$

```
% график символьного выражения, аналог plot
fplot(ysol, [-30 30])
```




```
% то же, но с заданием констант в решении вручную
equ = diff(y,x, 2) + y == 1 / (x^2 + 0.1)
```

equ(x) =

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, y(x) + y(x) = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{10}}$$

```
ysol = dsolve(equ)
```

ysol =

$$C_4 \cos(x) + C_5 \sin(x) - \cos(x) \int \frac{10 \sin(x)}{10\, x^2 + 1}\, dx + \sin(x) \int \frac{10 \cos(x)}{10\, x^2 + 1}\, dx$$

```
% имена, которые будет использовать солвер в ответе, заранее не известны
% но их можно определить через symvar и затем подставить в них свои значения
names = symvar(ysol)
```

names = $\left(C_4 \quad C_5 \quad x\right)$

```
ysol_manual_set = subs(ysol, [names(1) , names(2)],[0.5 , 0.7])
```

ysol_manual_set =

$$\frac{\cos(x)}{2} + \frac{7 \sin(x)}{10} - \cos(x) \int \frac{10 \sin(x)}{10\, x^2 + 1}\, dx + \sin(x) \int \frac{10 \cos(x)}{10\, x^2 + 1}\, dx$$

Интегрирование:

```
clc
clear all

syms  f(x) g(x) x x0 x1
% интеграл в общем виде
I_undef = int(f)
```

I_undef(x) =

$$\int f(x)\, dx$$

```
% функция для подстановки
g =  1 / (x + 1)^0.5
```

g =

$$\frac{1}{\sqrt{x + 1}}$$

```
% подстановка + автовычисление,
% !константа автоматически не добавляется!
I = subs(I_undef, f, g)
```

I(x) = $2\, \sqrt{x + 1}$

```
% с подстановкой пределов
syms  g(x,y) f(x, y) x0 x1 y0 y1 x y

assume(x, 'real')
assume(y, 'real')

Inner = int(f, x, [x0 x1])
```

Inner(y) =

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

```
I_gen = int(Inner, y, [y0 y1])
```

I_gen =

$$\int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

```
g = 1/sqrt(1 + y^2 + x^2)
```

g =

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

```
result = subs(I_gen, [f, x0, x1, y0, y1], [g, -1, 1, -1, 1])
```

result =

$$\log\left(56\,\sqrt{3} + 97\right) - \frac{2\,\pi}{3}$$

- Дополнительно: дифференциальные операторы

```
close all
clear all

syms f(x,y,z) x y z s(y, z)
U(x,y,z) = 1 / (1 +x*x + y*y + z*z)
```

U(x, y, z) =

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$$

```
gr_f = gradient(U)
```

gr_f(x, y, z) =

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{2\,x}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} \\ -\dfrac{2\,y}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} \\ -\dfrac{2\,z}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} \end{pmatrix}$$

```
div_f = divergence(gr_f)
```

div_f(x, y, z) =

$$\frac{8\,x^2}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^3}-\frac{6}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2}+\frac{8\,y^2}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^3}+\frac{8\,z^2}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^3}$$

```
% ротор, проверка rot(grad(U)) === 0
rot_f = curl(gr_f)
```

rot_f(x, y, z) =

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Дополнительно: вычисление объема сферы

```
clc
clear all

syms r fi theta f(r, fi, theta) R

I_gen = int(int(int( f , r, [0, R]), fi, [0, pi]), theta, [0, 2*pi])
```

I_gen =

$$\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f\left(r,\mathrm{fi},\theta\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{dfi}\,\mathrm{d}\theta$$

```
% баг с subs непозволяет выполнить чистую подстановку, но можно записать без подстановки
I_gen = int(int(int( r*r*sin(fi) , r, [0, R]), fi, [0, pi]), theta, [0, 2*pi])
```

I_gen =

$$\frac{4\,\pi\,R^3}{3}$$