## 数学 II

2025 年 7 月 25 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい）。**第 $n$ 問の解答は $n$ 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n = 1, 2, 3, 4$）。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと）。2 学期になったら答案を受け取りに来ること。2025 年 10 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

**1.**　$m > 0,\ t_0 > 0,\ f_0$ を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} \dfrac{f_0}{t_0}\,t, & 0 \le t \le t_0 \\ f_0, & t \ge t_0 \end{cases}$$

を、初期条件を $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$ として解け。$x(t)$ だけを答えればよい。

**2.**　$\omega_0, \omega_1$ を異なる正の定数、$\alpha$ を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -(\omega_0)^2\,x(t) + \alpha\,\cos(\omega_1 t) \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $x_0(t) = A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t)$ が $\alpha = 0$ とした常微分方程式の解であることを確かめよ（$A,\ B$ は任意定数）。これは一般解である。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t) = C\,\cos(\omega_1 t)$ と書けるものを求めよ（$C$ は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数 $A,\ B$ を初期値 $x(0),\ v(0) = \dot{x}(0)$ を用いて表わせ。

**3.**　$\alpha, \beta$ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,x(t) + \beta\,t\,e^{\alpha t} \tag{2}$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,e^{\alpha t}$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(2) の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

$\alpha, \beta$ を正の定数とする。$t \geq 0$ について以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(c) では $x(t) > 0$ とする)。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$\text{(c)}\quad \frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, t\, x(t) \qquad \text{(d)}\quad \frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\beta t)\left(1 + \{x(t)\}^2\right) \tag{3}$$

**4.** 実成分を持つ $d \times d$ 行列 $\mathsf{A}$ の $i, j$ 成分を $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ と書く。(a), (c) では、$a_{ij}$（の添え字 $i$, $j$ を適切に他のもので置き換えたもの）を用いて答えよ。

(a) $(\mathsf{A}^2)_{i,j}$ と $\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^2]$ を求めよ。

(b) チャレンジ問題 (満点外)：一般に $\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^2] \geq 0$ が成り立つか？　成り立つなら証明し、成り立たないなら簡単な反例を挙げよ。

(c) 全ての $i$, $j$ について $a_{i,j} = a_{j,i}$ なら、$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^2] \geq 0$ であることを証明せよ。

以下の計算をせよ（答えは結果だけでよい)。

$$\text{(d)}\quad \begin{pmatrix} -3+\sqrt{3}\,i \\ 3\sqrt{3}-i \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}\,i \\ \sqrt{3}+i \end{pmatrix} \qquad \text{(e)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(f)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(g)}\quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

$$\text{(h)}\quad \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(i)}\quad \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$$