

# 量子エンタングルメントと ベルの不等式の破れ

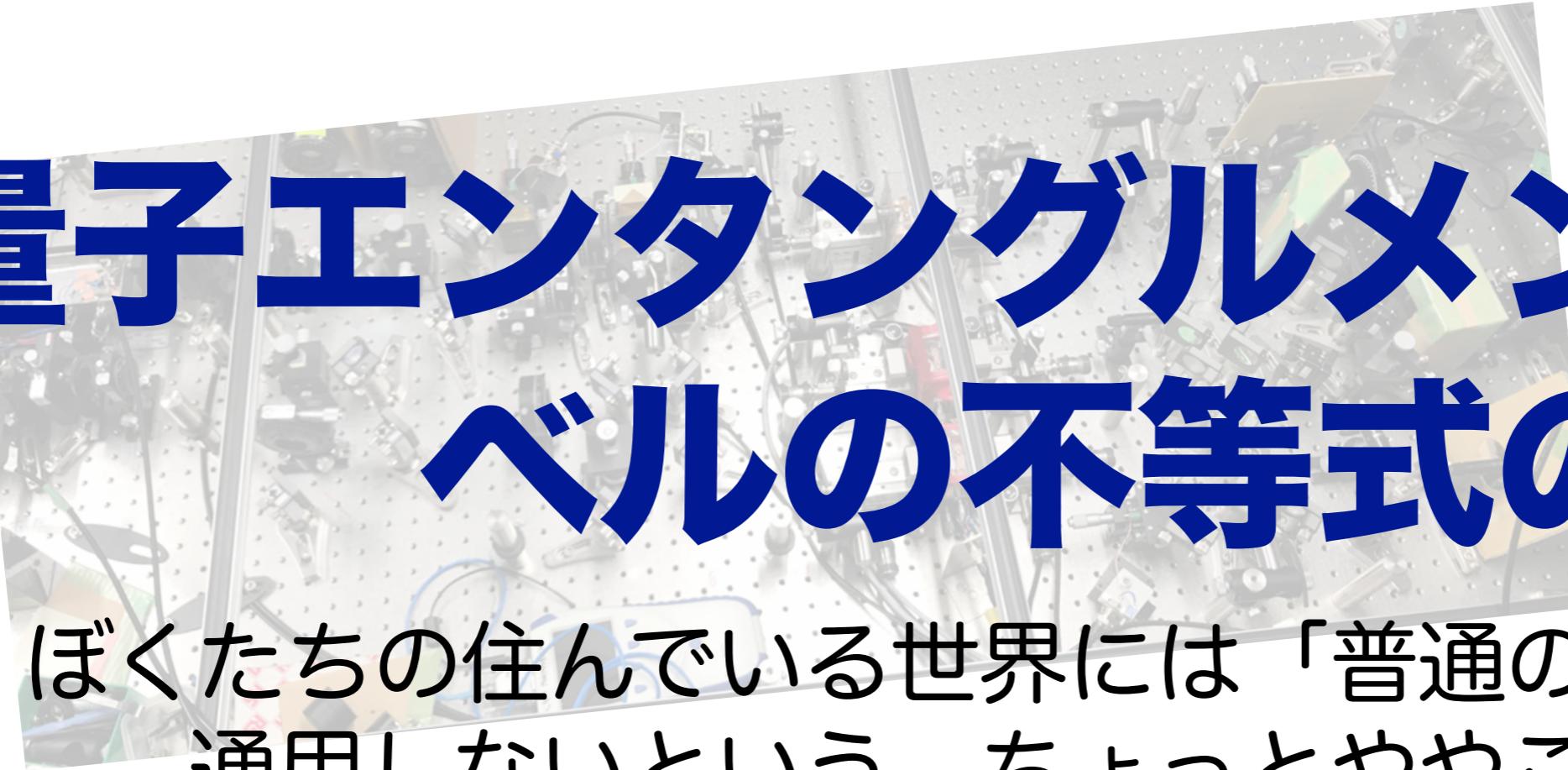
ぼくたちの住んでいる世界には「普通の考え方」が通用しないという、ちょっとややこしいけれど  
知つてみると実はかなりおもしろい話



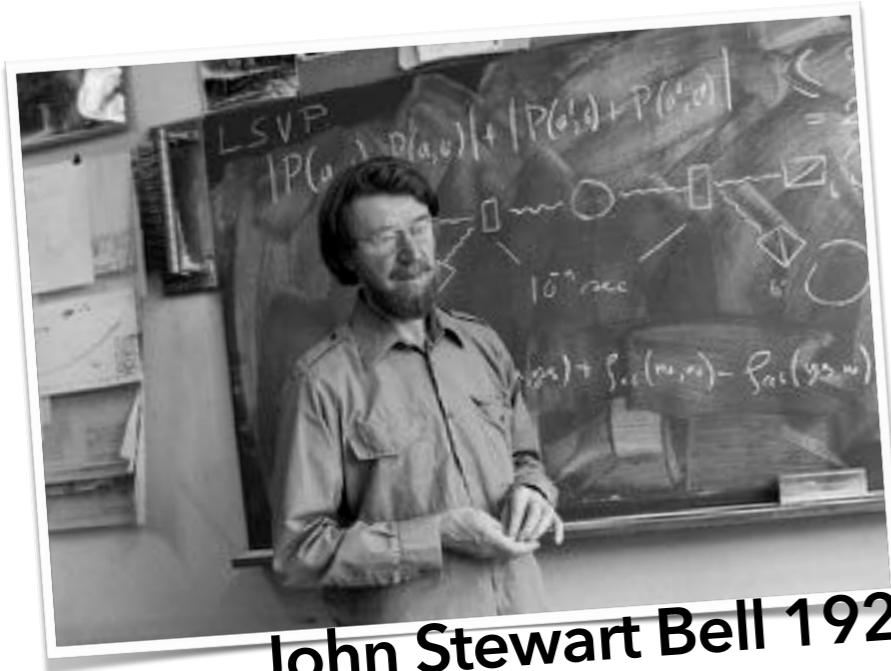
Alice



Bob



# 目次



John Stewart Bell 1928-1990

- エンタングルしたスピンの測定をめぐって
- ベルの不等式
  - 基本的な設定
  - Bell-CHSH 不等式
  - 理論と実験と

テレパシーとか超能力とか  
瞬間的な通信とかとは関係  
ないです

量子的に「からみあった」

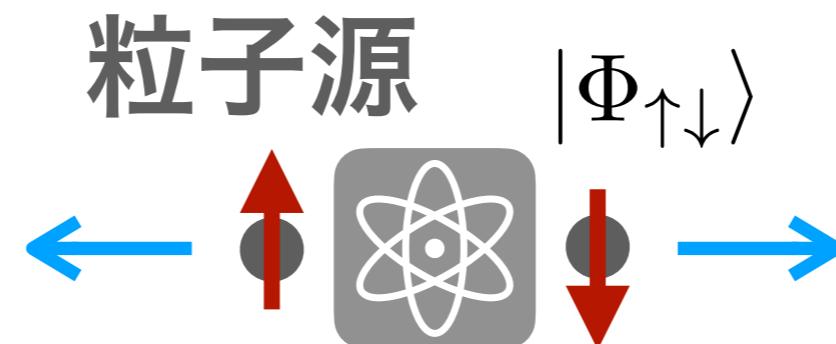
量子的に「もつれた」

エンタングルしたスピシンの  
測定をめぐって

# もっとも基本的な実験 1



Alice



Bob

スピン(=小さな磁石)をもった粒子の対を射出

状態  $|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle$  左向きに飛んだ粒子のスピンは上向き  
右向きに飛んだ粒子のスピンは下向き

遠く離れた測定者 A と測定者 B は、それぞれ左と右に飛んだ粒子を捕捉し、スピンの向きを測定



Alice



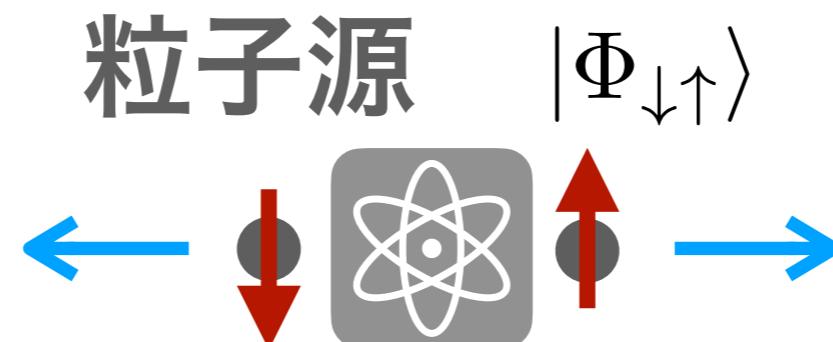
Bob

スピン上向き = +1    スピン下向き = -1

# もっとも基本的な実験 2



Alice



Bob

スピン(=小さな磁石)をもった粒子の対を射出

状態  $|\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle$  左向きに飛んだ粒子のスピンは下向き  
右向きに飛んだ粒子のスピンは上向き

遠く離れた測定者 A と測定者 B は、それぞれ左と右に飛んだ粒子を捕捉し、スピンの向きを測定



Alice



Bob

スピン上向き = +1    スピン下向き = -1

# 重ね合わせた状態を用いる



Alice

Bob

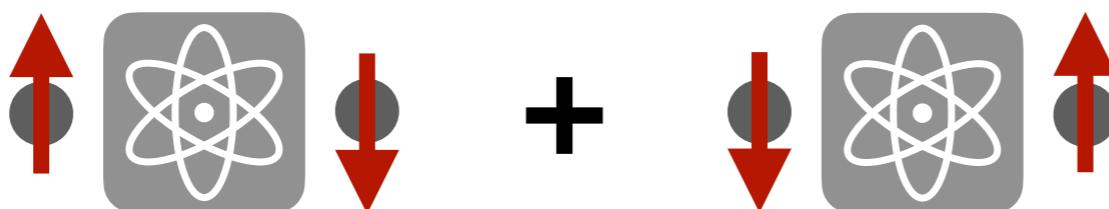
粒子源  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$



スピン(=小さな磁石)をもった粒子の対を射出

状態  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$

**$|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle$  と  $|\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle$  の重ね合わせ**



測定者 A と測定者 B は、それぞれ左と右に飛んだ  
粒子を捕捉し、スピンの向きを測定



Alice



Bob



# 重ね合わせた状態とは？

## もっともわかりやすい説明

$|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle$  と  $|\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle$  は複素線型空間(ヒルベルト空間)の要素  
任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  について線型結合  $\alpha|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + \beta|\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle$   
は同じ空間の要素

## 数式を使わないので何かに喻えた直感的な説明は？

量子状態の重ね合わせは、私たちがこの世界で経験してきた何物のにも似ていない (波の干渉が唯一の例外)

比喩 (色を混ぜる、どちらかわからない、画像の合成、和音、… ) はすべて誤解しか呼ばない

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$  と  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle - |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$  はどちらも  $|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle$  と  $|\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle$  の「半々の重ね合わせ」だが性質は全く違う！

# 重ね合わせた状態とは？

単音しか存在しない世界の人に「ドとミの和音」を説明できるか？



「ドとミのどちらかわからないということ？」

「ドとミの音を素早く交互に弾く？」

「ドとミの中間のレの音？」

「この世にあり得ないものの  
文学的表現とかそういうやつ？」



# 重ね合わせた状態を用いる

Alice



Bob



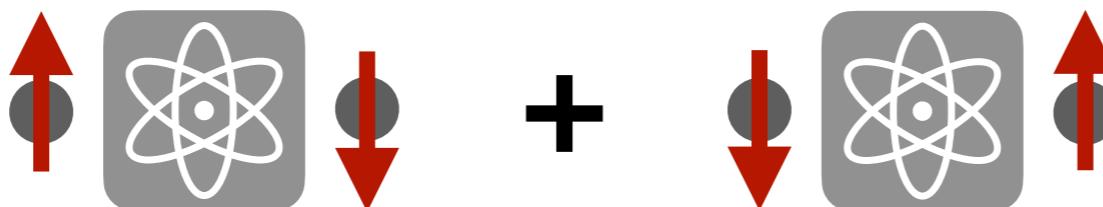
$$\text{粒子源 } \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$$

二つの粒子のスピン状態は  
エンタングルしている

スピン(=小さな磁石)を左と右に射出

$$\text{状態 } \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$$

|\Phi\_{\uparrow\downarrow}\rangle と |\Phi\_{\downarrow\uparrow}\rangle の重ね合わせ



測定者 A と測定者 B は、それぞれ左と右に飛んだ  
粒子を捕捉し、スピンの向きを測定

Alice



Bob



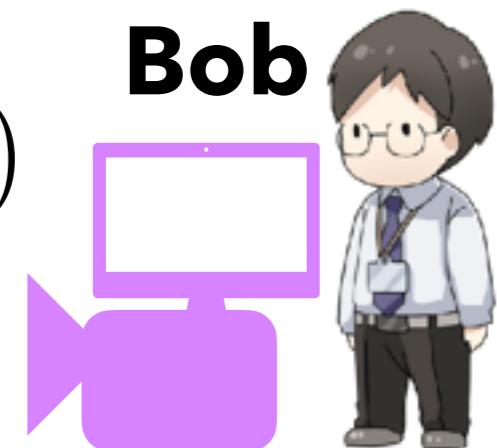
# 実験の結果



Alice

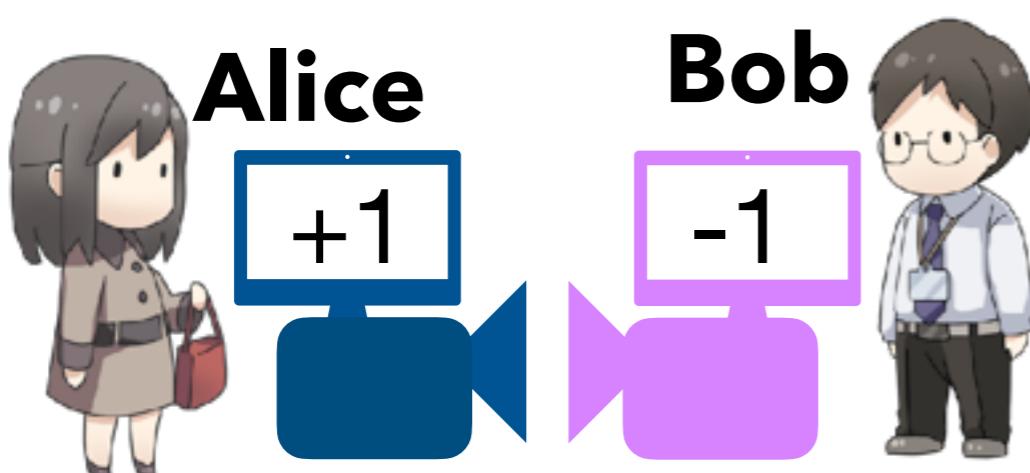
粒子源  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$

← ?  ? →



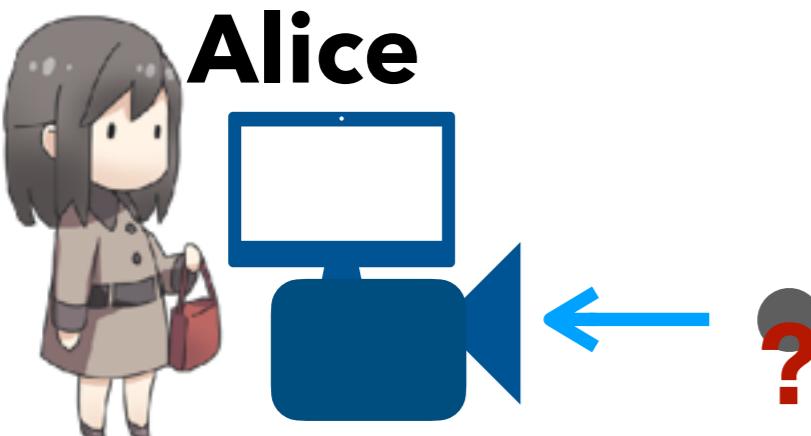
Bob

- 結果は確定せず完全にランダムに生じる
- 確率  $1/2$  で A が上向き、B が下向き
- 確率  $1/2$  で A が下向き、B が上向き

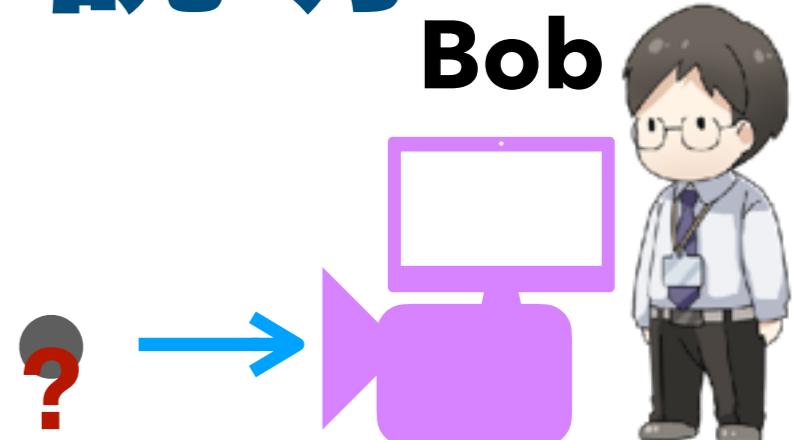
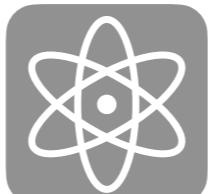


A も B も +1 と -1 を確率  $1/2$  で得る  
二人の測定結果は(付き合わせてみると)完全に逆

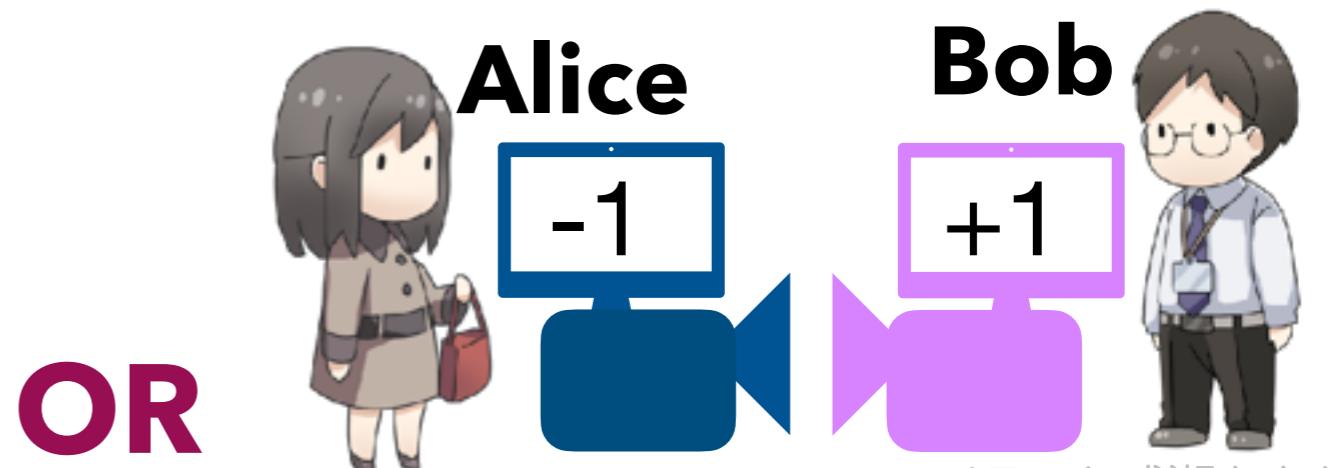
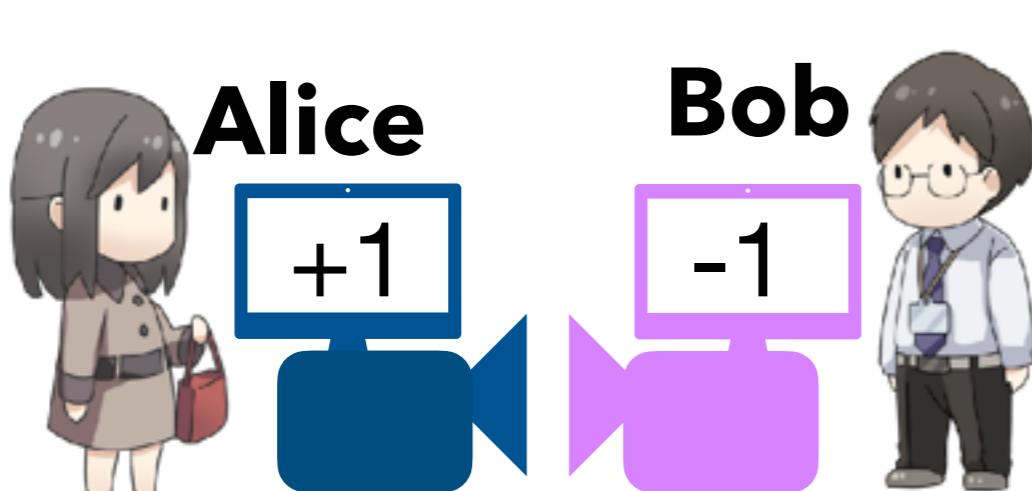
# 量子力学で標準の説明



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$$

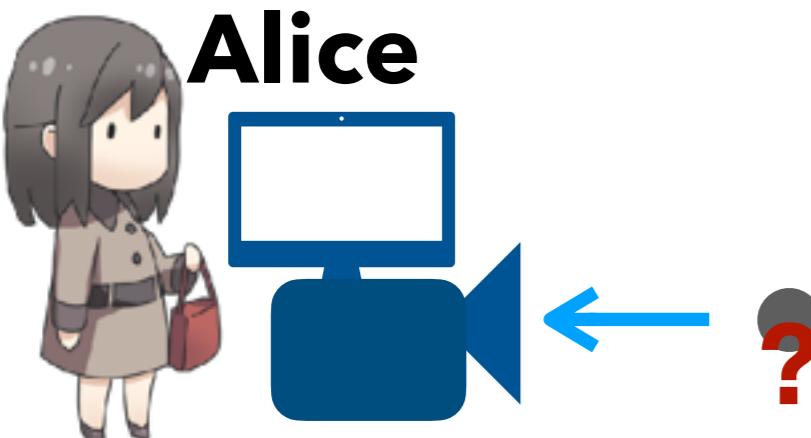


- ▶ 測定前は、二つの粒子のスピンの状態は重ね合わせを保っており、スピンの向きは定まっていない
- ▶ 測定器との相互作用の後、スピンの向きが定まる
- ▶ A にとっても B にとっても測定結果は完全にランダムだが、二人の測定結果は相関している  
(この相関を利用して A と B が通信することはできない)

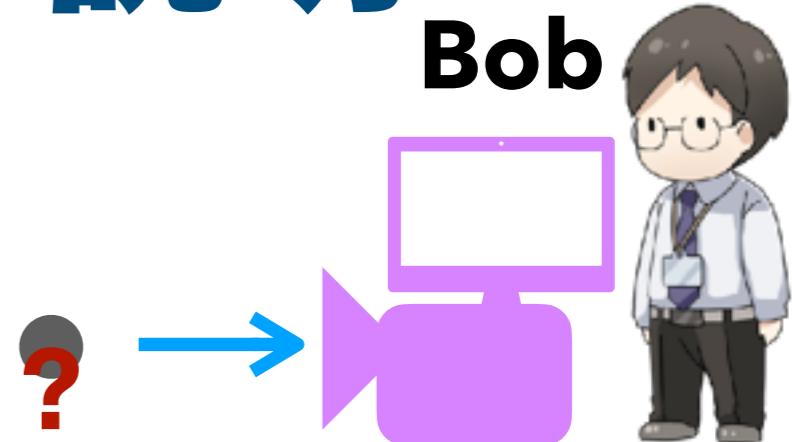
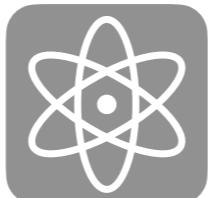


OR

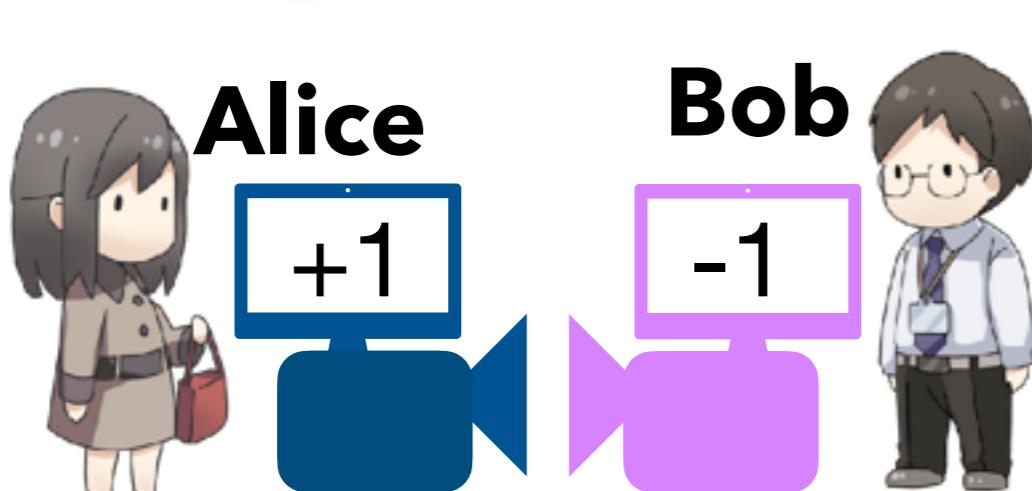
# 量子力学で標準の説明



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$$



- ▶ 測定前は、二つの粒子のスピンの状態は重ね合わせを保っており、スピンの向きは定まらない
  - ▶ 測定器との相互作用によって定まる
  - ▶ A に +1 のランダムな値が表示される  
(この相関を利用して A と B が通信することはできない)
- この説明は「普通の考え方」  
ではない！



# 「普通の考え方」

「局所実在論」とも呼ばれる

## 「普通の考え方」

物理量の値は測定しなくても定まっている  
物理現象は局所的

物理的な影響は空間を有限の速さで伝わっていく

## 前のページの説明は「普通の考え方」ではない！！

- ▶ 測定器と相互作用するまではスピンの状態は重ね合わせのままで、スピンの向きは定まらない  
→ 測定しなくともスpinの向きは定まっているはず
- ▶ Aにとっても Bにとっても測定結果は完全にランダムだが、二人の測定結果は相関している  
→ 遠く離れた二人の測定結果が相関するとしたら「何か」が瞬時で伝わることになり局所性に反する

# 「普通の考え方」

「普通の考え方」

物理量の値は測定しなくても定まっている  
物理現象は局所的

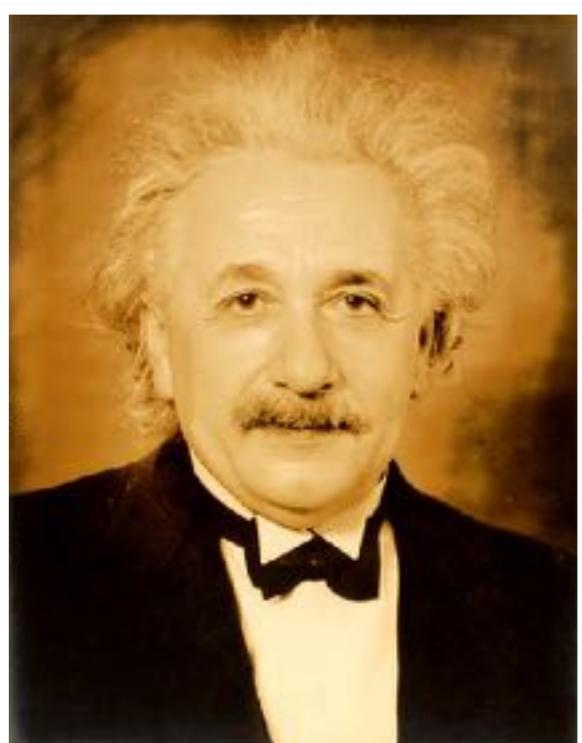
物理的な影響は空間を有限の速さで伝わっていく

Einstein, Podolsky, Rosen 1935

「普通の考え方」を認めると量子力学は不完全

- ◆ 今日の標準的な考え方とは異なるが、  
量子力学の本質を示す考察
- ◆ 重要な「舞台」を設定

粒子の対を射出する粒子源、  
二人の測定者、非可換な測定量、…

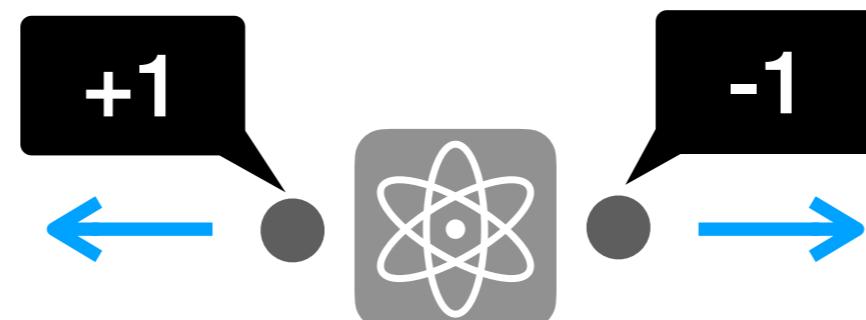


1935 年のアインシュタイン、プリンストンにて (public domain, from Wikipedia)

# 「普通の考え方」に基づく説明

## 「隠れた変数」モデルのもっとも簡単な例

- ▶ 粒子が射出されるときスピンの向き(など)の情報が粒子に「書き込まれる」



(+1,-1) と (-1,+1)  
が確率  $1/2$  で  
選ばれる



- ▶ A, B は書き込まれていた値を読み取る

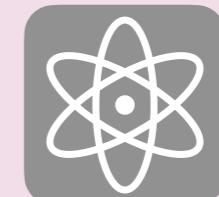


スピンの向きは測定しなくても定まっている  
A と B の測定結果が相關するのも当たり前

# 同じ実験の二つの説明

## ○量子力学の標準の説明

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$$



状態はエンタングルしている

スピンの向きは測定するまで定まらない

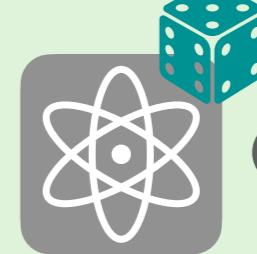
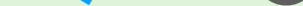
## ○「普通の考え方」による説明

最初にスピンの向きが定まる

われわれは最初はスピンの向きを知らないだけで  
測定すれば（隠れていた）値がわかる

+1

-1



どちらの説明でも実験結果を再現できる

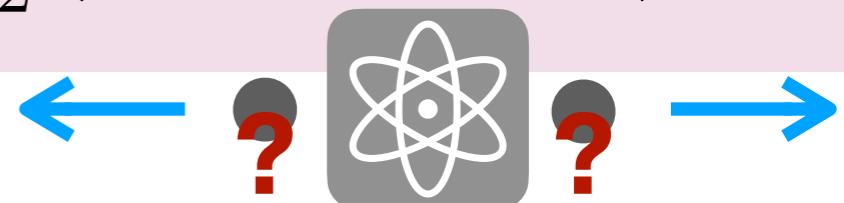
これらのうち一方がより適切と言えるだろうか？

それとも、単なる考え方のちがい？？

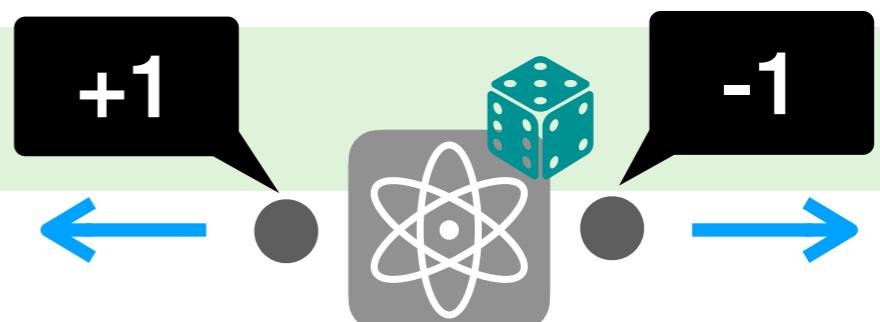
# ベルの不等式

## ○量子力学の標準の説明

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle + |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$$



## ○「普通の考え方」による説明



これらのうち一方がより適切と言えるだろうか？

Bell 1964

- ▶ この問題には実験で決着をつけられる
- ▶ 「普通の考え方」を認めれば必ず成り立つ関係(ベルの不等式)を導き、適切な(もう少しややこしい)実験系でそれが成り立つかどうかを調べる

# ベルの不等式

Physics Vol. 1, No. 3, pp. 195–200, 1964  
Physics Publishing Co. Printed in the United States

## ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX\*

J. S. BELL<sup>†</sup>  
Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin

(Received 4 November 1964)

### I. Introduction

THE paradox of Einstein, Podolsky and Rosen [1] was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality [2]. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty. There have been attempts [3] to show that even without such a separability or locality requirement no “hidden variable” interpretation of quantum mechanics is possible. These attempts have been examined elsewhere [4] and found wanting. Moreover, a hidden variable interpretation of elementary quantum theory [5] has been explicitly constructed. That particular interpretation has indeed a grossly non-local structure. This is characteristic, according to the result to be proved here, of any such theory which reproduces exactly the quantum mechanical predictions.

### II. Formulation

With the example advocated by Bohm and Aharonov [6], the EPR argument is the following. Consider two particles formed somehow in the singlet spin state and moving freely in opposite directions. If a unit vector, say  $\hat{e}$ , is applied to each particle by Stern-Gerlach magnets, on selected components of the spin, say  $\hat{s}_x$  and  $\hat{s}_y$ , yields the value  $+1$  and vice versa.

量子力学の歴史

「普通」

これ

Bell 1964

この

「普

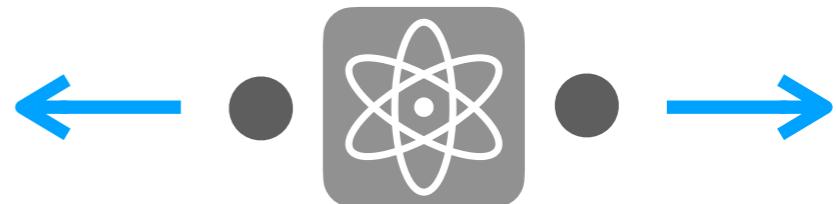
(ベル  
い)実

# ベルの不等式

## 基本的な設定

# ベル実験の設定

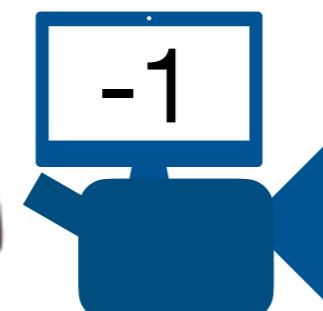
粒子源から粒子の対を射出



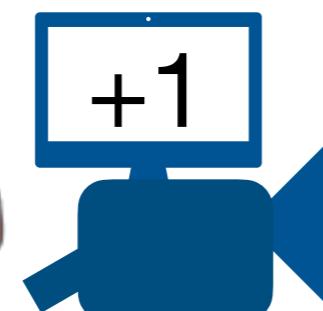
Aは左向きに飛んだ粒子を捕捉し、二つの量  $A_1, A_2$  のいずれかを測定（測定結果は +1 か -1）

Bは右向きに飛んだ粒子を捕捉し、二つの量  $B_1, B_2$  のいずれかを測定（測定結果は +1 か -1）

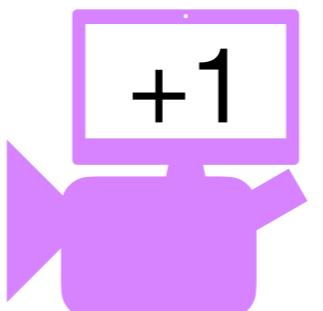
A<sub>1</sub>を測ろう



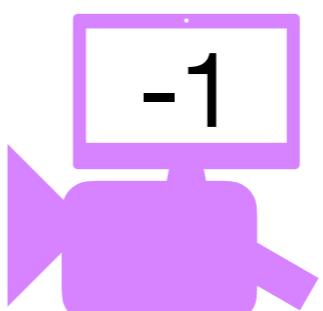
A<sub>2</sub>を測ろう



Bob



B<sub>1</sub>を測ろう



B<sub>2</sub>を測ろう

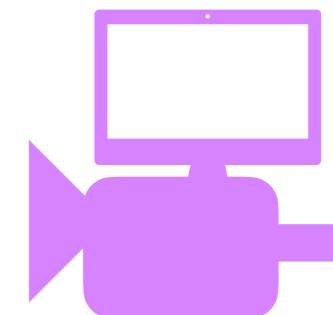
# ベル実験の一回分の手順

Alice

粒子の対を射出

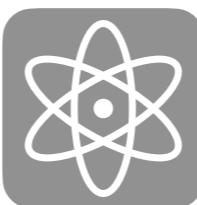


Bob

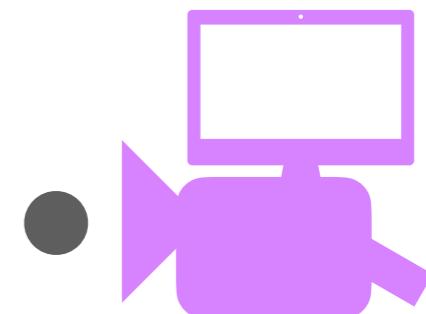


A, B は粒子を受ける直前に測定する量を確率  $1/2$  でランダムに決める

Alice

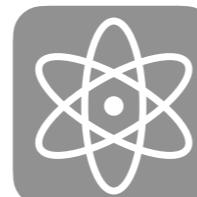
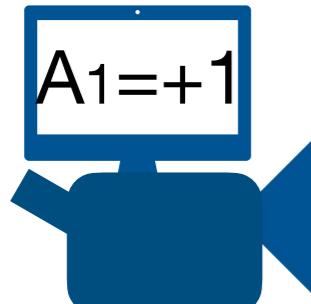


Bob

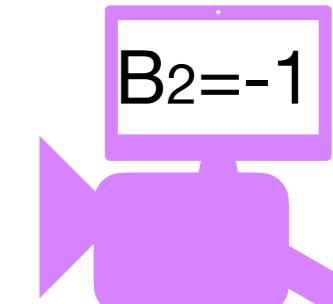


Alice

測定してその結果を記録



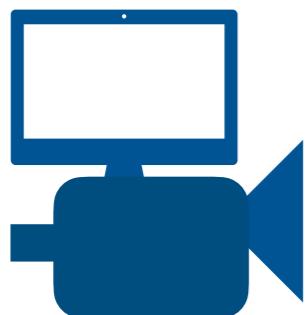
Bob



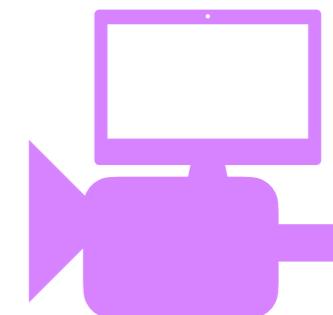
# ベル実験の一回分の手順

Alice

粒子の対を射出



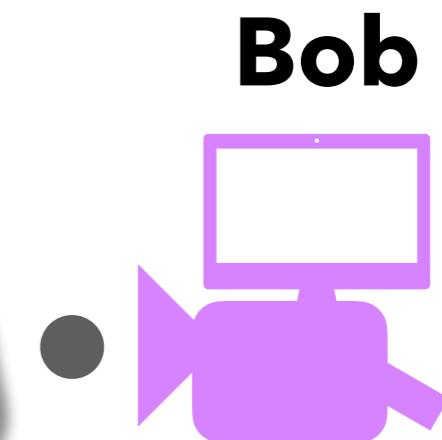
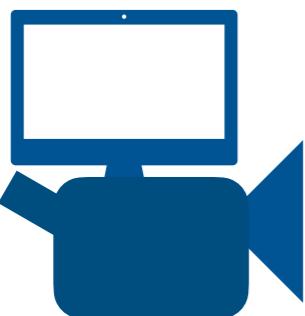
Bob



A, B は粒子を受ける直前に測定する量を確率  $1/2$  でランダムに決める

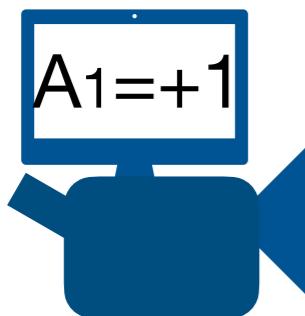
Alice

この手順を  
何度も何度も  
くり返す

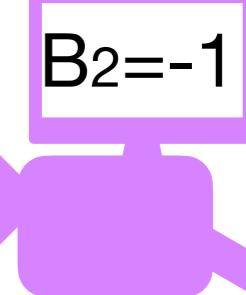


Alice

測定結果を記録



Bob



# データ処理して相関関数を求める

測定結果を表にまとめる（歯抜けになる）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...	N
A1		-1		+1			-1		-1			+1		+1		-1		...	-1
A2	+1		-1		+1	-1		-1		+1	+1		-1		+1		+1	...	
B1			+1			+1		-1			-1			+1	-1			...	
B2	-1		+1		+1	-1		+1		-1		+1		-1		+1	-1	...	+1

A が A<sub>1</sub> を B が B<sub>2</sub> を測定した回を抜き出す

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	N <sub>12</sub>
A1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	...	-1
B2	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	...	+1
A <sub>1</sub> × B <sub>2</sub>	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	...	-1

表を整理し  $A_1 \times B_2$  を計算

# データ処理して相関関数を求める

- A が  $A_1$  を B が  $B_2$  を測定した回を抜き出す
- 表を整理し  $A_1 \times B_2$  を計算



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	$N_{12}$
$A_1$	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	...	-1
$B_2$	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	...	+1
$A_1 \times B_2$	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	...	-1

- $A_1 \times B_2$  の平均が相関関数  $\langle A_1 B_2 \rangle = \frac{1}{N_{12}} \sum_{n=1}^{N_{12}} A_1^{(n)} B_2^{(n)}$

$\langle A_1 B_2 \rangle = 1$  なら、いつでも  $A_1 = B_2$

$\langle A_1 B_2 \rangle = 0$  なら、 $A_1$  と  $B_2$  は無相関

$\langle A_1 B_2 \rangle = -1$  なら、いつでも  $A_1 = -B_2$

- 同様に  $\langle A_1 B_1 \rangle, \langle A_1 B_2 \rangle, \langle A_2 B_1 \rangle, \langle A_2 B_2 \rangle$  を求める

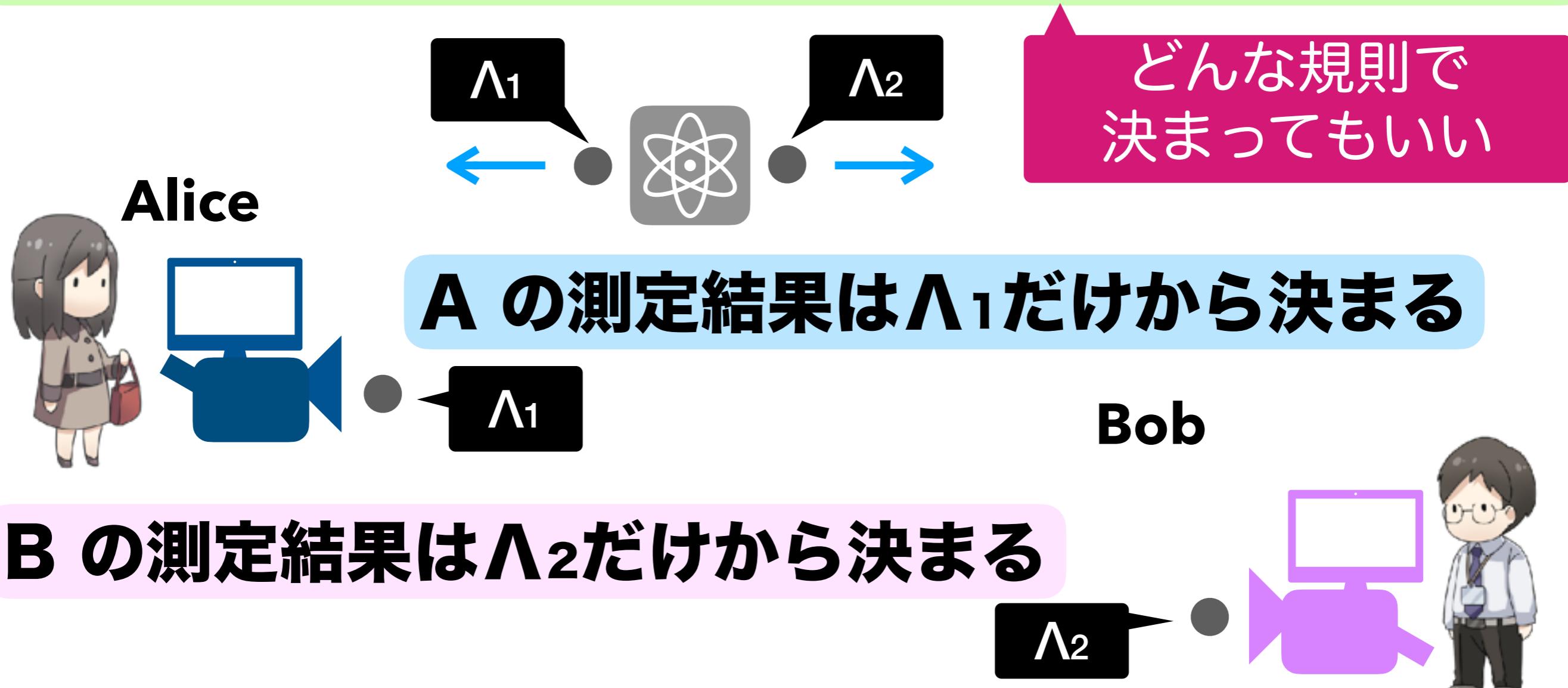


ベルの不等式

Bell-CHSH 不等式

# 「普通の考え方」に基づく前提

粒子が射出されるとき 「隠れた変数」 が書き込まれる



もう一人がどちらの量を測定したかは、測定結果に影響しない（局所性）

# Bell-CHSH 不等式

粒子が射出されるとき 「隠れた変数」 が書き込まれる

A の測定結果は  $\Lambda_1$  だけから決まる

B の測定結果は  $\Lambda_2$  だけから決まる

実験の回数が十分に大きいとき

$$-2 \leq \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle \leq 2$$

Bell 1964, Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969

「普通の考え方」 から導かれる当たり前の不等式

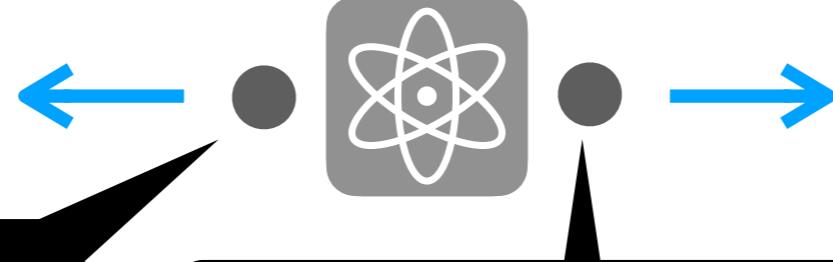
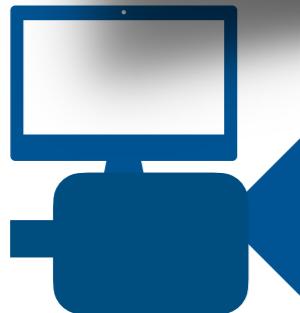
$$\langle A_1 B_1 \rangle = \langle A_2 B_1 \rangle = \langle A_2 B_2 \rangle > \frac{2}{3} \longrightarrow \langle A_1 B_2 \rangle \geq 3\langle A_1 B_1 \rangle - 2 > 0$$



# Bell-CHSH 不等式を破る方法

## Bell-CHSH 不等式

$$-2 \leq \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle \leq 2$$



いつでも  
 $A_1 = A_2 = 1$

A が  $A_1$  を測るなら  $B_1 = 1, B_2 = -1$   
A が  $A_2$  を測るなら  $B_1 = B_2 = 1$

いつでも  $A_1 B_1 = A_2 B_1 = A_2 B_2 = 1, A_1 B_2 = -1$

$$\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle = 4$$

Bell-CHSH 不等式が破れた！

A がどちらの量を測定したかの選択が B の測定結果に影響している (局所性を露骨に破る反則技！)

# **ベルの不等式**

## **理論と実験と**

# 量子力学の具体例の計算

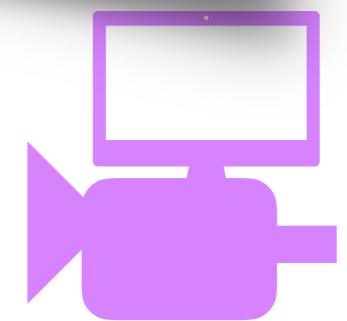
## Bell-CHSH 不等式

$$-2 \leq \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle \leq 2$$

Alice



Bob



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_{\uparrow\downarrow}\rangle - |\Phi_{\downarrow\uparrow}\rangle)$$

状態と測定する量を巧みに選ぶ

$$\hat{A}_1 = \frac{2}{\hbar} \hat{S}_z^{(1)} \quad \hat{A}_2 = \frac{2}{\hbar} \hat{S}_x^{(1)}$$

スピノンがエンタングルした状態

$$\hat{B}_1 = -\frac{2}{\hbar} (\hat{S}_z^{(2)} + \hat{S}_x^{(2)})$$

$$\hat{B}_2 = \frac{2}{\hbar} (\hat{S}_z^{(2)} - \hat{S}_x^{(2)})$$

## 量子力学に従って相関関数を計算

$$\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle = 2\sqrt{2} \simeq 2.8$$

Bell-CHSH 不等式が破れた！

- 「普通の考え方」を認めれば Bell-CHSH 不等式が成り立つ

量子力学は「普通の考え方」とは相容れない！！

# Bell-CHSH 不等式の破れの実測

## Bell-CHSH 不等式

$$-2 \leq \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle \leq 2$$

## Bell-CHSH 不等式の状況を再現する実験

Freedman, Clauser 1972

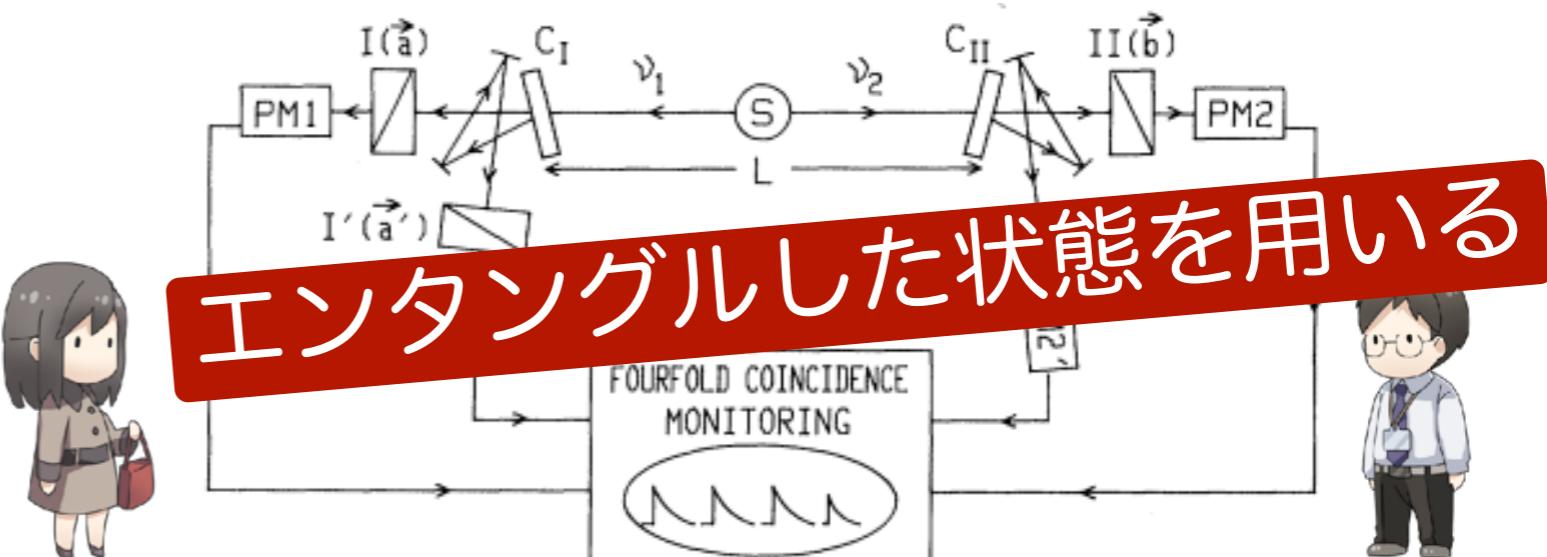
Aspect, Grangier, Roger 1981, 1982

Aspect, Dalibard, Roger 1982

Weihs, ..., Zeilinger 1989

Ursin, ..., Zeilinger 2007

Hensen et al. 2015, Giustina et al. 2015, Shalm et al. 2015, Rosenfeld et al. 2017



$$\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle \simeq 2.42 \pm 0.20$$

Bell-CHSH 不等式が破れた！

この世界では Bell-CHSH 不等式は成り立たない

# Bell-CHSH 不等式の破れの実測

## Bell-CHSH 不等式

$$-2 \leq \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle$$

The Nobel Prize in Physics 2022

## Bell-CHSH 不等式の実験

Freedman, Clauser 1972

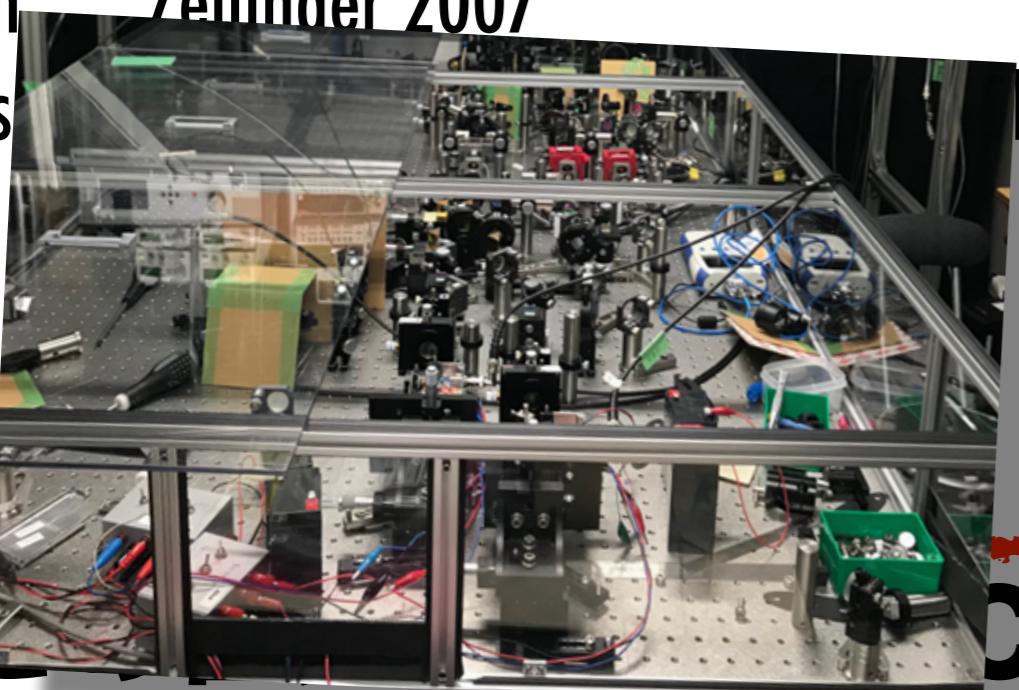
Aspect, Grangier, Roger 1981, 1982

Aspect, Dalibard, Roger 1982

Weihs, ..., Zeilinger 1989

Ursin, ..., Zeilinger 2007

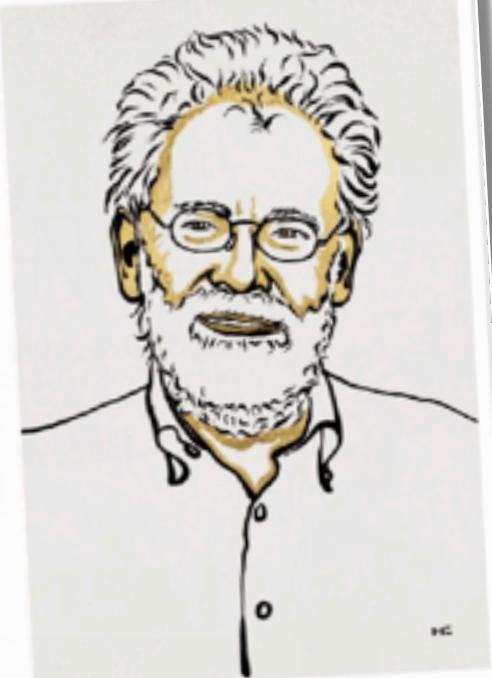
Hens



III. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach  
Alain Aspect  
Prize share: 1/3



III. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach  
John F. Clauser  
Prize share: 1/3



III. Niklas Elmehed © Nobel Prize Outreach  
Anton Zeilinger  
Prize share: 1/3

$$\langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle \simeq 2.42 \pm 0.20$$

Bell-CHSH 不等式が破れた！

CHSH 不等式は成り立たない

# Bell-CHSH 不等式の破れの意味

「普通の考え方」

物理量の値は測定しなくても定まっている  
物理現象は局所的

物理的な影響は空間を有限の速さで伝わっていく

- ◆ 「普通の考え方」を認めれば Bell-CHSH 不等式が成り立つ
- ◆ この世界では Bell-CHSH 不等式は成り立たない

この世界を「普通の考え方」で完全に記述することは不可能！

この世界は「見た通り」ではない！

- 量子力学が正しいと証明されたわけではない
- この世界での多くの現象は「普通の考え方」で記述・理解できる

# Bell-CHSH 不等式の破れの意味

For me, it is so reasonable to assume that the photons in those experiments carry with them programs, which have been correlated in advance, telling them how to behave. ... So for me, it is a pity that Einstein's idea doesn't work. **The reasonable thing just doesn't work.**  
John Bell (from J. Bernstein "Quantum Profiles")

こういう実験での二つの光子には、測定されたときどう振る舞うかについて、事前に調整されたプログラムが書き込まれていると仮定することこそが筋が通っていると私には思えます。・・・ですから、私にとっては、アインシュタインの考えがうまくいかなかつことは残念なのです。**筋の通った考えが、ともかくうまくいかないのです。**

John Bell

(from J. Bernstein "Quantum Profiles")

