量子力学 II

2025 年 7 月 30 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい）。**第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n=1,2,3,4$）。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと）。2 学期になったら答案を受け取りに来ること。2025 年 10 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

1.　1 次元の粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{3}{2a^3}}\times\begin{cases}0, & x\le -a;\\ (x+a), & -a\le x\le 0;\\ (-x+a), & 0\le x\le a;\\ 0, & x\ge a,\end{cases}\tag{1}$$

で表わされるとする。a は正の定数であり、この波動関数は規格化されている。

(a) 位置演算子を $\hat{x}$、運動量演算子を $\hat{p}$ と書く。状態 (1) に関する期待値 $\langle\hat{x}\rangle_\varphi$, $\langle\hat{x}^2\rangle_\varphi$, $\langle\hat{p}\rangle_\varphi$, $\langle\hat{p}^2\rangle_\varphi$ を求めよ。

付記：波動関数 (1) の一回微分は不連続なので $\langle\hat{p}^2\rangle_\varphi$ を計算する際に $\hat{p}^2\varphi(x)$ を求めようとするとややこしくなる。（デルタ関数をちゃんと使えばうまくいく。）ここは、レポートで誘導したように、$\langle\hat{p}^2\rangle_\varphi=\|\hat{p}|\varphi\rangle\|^2$ を用いて計算してもらうつもりで出題した。

(b) 上で求めた期待値を使って、位置のゆらぎ $\sigma_\varphi[\hat{x}]:=\sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_\varphi-(\langle\hat{x}\rangle_\varphi)^2}$ および運動量のゆらぎ $\sigma_\varphi[\hat{p}]:=\sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle_\varphi-(\langle\hat{p}\rangle_\varphi)^2}$ を求め、不確定性関係 $\sigma_\varphi[\hat{x}]\,\sigma_\varphi[\hat{p}]\ge\hbar/2$ が成り立つことを確かめよ。

2.　$\hat{\boldsymbol{r}}=(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}}=(\hat{p}_\mathrm{x},\hat{p}_\mathrm{y},\hat{p}_\mathrm{z})$ を 3 次元での位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}}:=\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知として用いてよい。

交換子 $[\hat{L}_\mathrm{y},\hat{x}^2]$, $[\hat{L}_\mathrm{y},\hat{y}^2]$, $[\hat{L}_\mathrm{y},\hat{z}^2]$ および $[\hat{L}_\mathrm{y},\hat{\boldsymbol{r}}^2]$ を求めよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{r}}^2:=\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2$ である。

3. 3 次元での質量 m の自由粒子の（定常状態の）シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y,z) = E\,\varphi(x,y,z) \tag{2}$$

を考え、正の定数 R について、$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq R$ なら $\varphi(x,y,z) = 0$ という境界条件を課す（つまり原点から R 以上離れたところには無限大のポテンシャルがある）。

定常状態（エネルギー固有状態）の波動関数が

$$\varphi(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin\!\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R \text{ のとき} \\ 0 & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq R \text{ のとき} \end{cases} \tag{3}$$

と書けるとする。境界条件（波動関数の連続性）に注意して定数 $k > 0$ の取りうる値を求めよ。さらに、(3) が $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R$ で方程式 (2) を満たすことを示し、対応するエネルギー固有値 E を求めよ。

一般の一変数関数 $f(r)$ について、

$$\Delta f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = f''(r) + \frac{2}{r}\,f'(r)\bigg|_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4}$$

が成り立つことを証明なしで用いてよい。

4. 単独の（大きさ 1/2 の）スピン角運動量演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わす。

(a) $\hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{z}}$ および $\hat{S}_{\mathrm{z}}\hat{S}_{\mathrm{y}}$ を計算し、$[\hat{S}_{\mathrm{y}}, \hat{S}_{\mathrm{z}}]$ および $\hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{z}} + \hat{S}_{\mathrm{z}}\hat{S}_{\mathrm{y}}$ を求めよ。

(b) 演算子 $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ の固有値と固有状態を求めよ。

(c) 一般の状態 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$（ただし $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$）において $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定したときどのような値がどのような確率で得られるか答えよ。また、同じ状態で $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ を測定したときどのような値がどのような確率で得られるか答えよ。