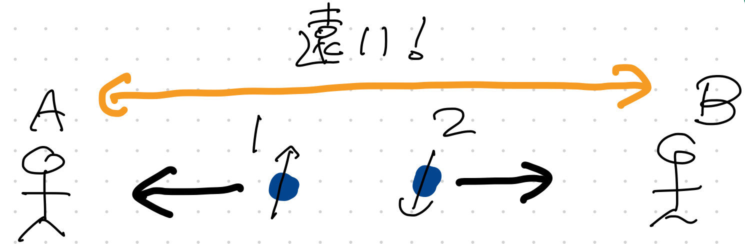
〈量子力学と情報〉

§ エンタングルメントと超光速通信

超光速 → 光速を超えた情報の伝達



① 設定と問題

スピン$\frac{1}{2}$の2つの粒子(区別できる) 1, 2

全状態

$$\text{(1)}\quad |\Psi_{Total}\rangle = \underbrace{\overbrace{|\varphi_1\rangle_1 \otimes |\varphi_2\rangle_2}^{\text{座標部分}}}_{} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}}_{\equiv |\Psi_0\rangle}$$

スピン部分 = singlet ← 1と2はエンタングルしている

$|\varphi_1\rangle_1$: 左へ進む　$|\varphi_2\rangle_2$: 右へ進む

離れたところにいるAとBがそれぞれ粒子1と粒子2をうけとる.

Aが状態を測定すると
- Bの状態も一瞬で変わるのか? → 「Bの状態」の定義による.
- Bになんらかの情報が一瞬で伝わるのか? → 明確に答えられる.

情報 → Yes or No, 0 or 1

AとBは同じ状態$|\Psi_0\rangle$をたくさん共有　様々な実験をくり返す

$\hat{S}_z$ の測定

(1) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$

・まずAが粒子1の$\hat{S}_z$を測定する

(2)
$$\begin{cases} \hat{S}_z^{(1)}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 \\ \hat{S}_z^{(1)}|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 \end{cases}$$ より

測定結果 (3)
- 確率$\frac{1}{2}$で↑ $\left(\frac{\hbar}{2}\right)$ → 測定後の状態 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ ①
- 確率$\frac{1}{2}$で↓ $\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$ → 測定後の状態 $|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$ ②

このあとBが粒子2の$\hat{S}_z$を測定すれば結果は確定している ① ↓ ② ↑

AからBに情報が伝わったのか?

・まずBが粒子2の$\hat{S}_z$を測定　　あとからAが$\hat{S}_z$を測定

(4)
- 確率$\frac{1}{2}$で↑ → 測定後の状態 $|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$ → ↓
- 確率$\frac{1}{2}$で↓ → 測定後の状態 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ → ↑

・いずれの場合も測定結果は (5)

確率$\frac{1}{2}$で　Aは↑　Bは↓
確率$\frac{1}{2}$で　Aは↓　Bは↑

測定結果が相関しているだけで情報は伝わっていない!

▷ 測定する物理量を変えることによる通信 [?]

$\hat{S}_x$の固有状態

(1) $\begin{cases} \hat{S}_x|\rightarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\rightarrow\rangle \\ \hat{S}_x|\leftarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\leftarrow\rangle \end{cases}$

(2) $\begin{cases} |\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\} \\ |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\} \end{cases}$

これを使えば (3) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2 - |\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2\}$

- $|\Phi_0\rangle$でAが$\hat{S}_x$を測定 (4) $\begin{cases} \text{確率}\frac{1}{2}\text{で}\rightarrow(\frac{\hbar}{2}) \rightarrow \text{測定後の状態 } |\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2 \\ \text{確率}\frac{1}{2}\text{で}\leftarrow(-\frac{\hbar}{2}) \rightarrow \text{測定後の状態 } |\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2 \end{cases}$

- (4)とP2-(3)を利用して、AからBへ 1bitの情報(yes or No)を一瞬で送る

(5)
$\boxed{\begin{array}{l} \text{yes} \rightarrow \text{Aは}\hat{S}_z\text{を測定} \rightarrow \text{測定後のBの状態 } |\uparrow\rangle_2 \text{ or } |\downarrow\rangle_2 \\ \text{no} \rightarrow \text{Aは}\hat{S}_x\text{を測定} \rightarrow \text{測定後のBの状態 } |\rightarrow\rangle_2 \text{ or } |\leftarrow\rangle_2 \end{array}}$

Bが $|\uparrow\rangle$ or $|\downarrow\rangle$ と $|\rightarrow\rangle$ or $|\leftarrow\rangle$ を区別できれば

超光速で情報が伝えられる!!

- Bが $\hat{S}_z$ を測定すると

(1) yesのとき
- 確率$\frac{1}{2}$で $|\uparrow\rangle_z$ → 測定結果 ↑
- 確率$\frac{1}{2}$で $|\downarrow\rangle_z$ → 測定結果 ↓

(2) noのとき
- 確率$\frac{1}{2}$で $|\rightarrow\rangle_z$ →
  - 確率$\frac{1}{4}$で測定結果 ↑
  - 確率$\frac{1}{4}$で測定結果 ↓
- 確率$\frac{1}{2}$で $|\leftarrow\rangle_z$ →
  - 確率$\frac{1}{4}$で測定結果 ↑
  - 確率$\frac{1}{4}$で測定結果 ↓

→ 確率$\frac{1}{2}$（↑）
→ 確率$\frac{1}{2}$（↓）

この測定ではyesとnoを区別できない → 他の量を測ったら？（次のページ）

もしBが測定前の状態をそのままコピーできれば

- yes → $|\uparrow\rangle_z$ → $|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\otimes\cdots$ → $\hat{S}_z$を次々と測定するといつも ↑
- no → $|\rightarrow\rangle_z$ → $|\rightarrow\rangle\otimes|\rightarrow\rangle\otimes|\rightarrow\rangle\otimes\cdots$ → $\hat{S}_z$を次々と測定するとランダムに↑と↓

区別できる!! しかし このようなコピーは不可能（クローン禁止定理）

▷ 一般的な設定

$|\Phi_0\rangle$ は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の任意の状態

$\mathcal{H}_1$ → Aが扱える　$\mathcal{H}_2$ → Bが扱える

$|\Phi_0\rangle$ →
- エンタングルした粒子 ES
- さまざまな装置

状態 $|\Phi_0\rangle$ において
- Aは $\mathcal{H}_1$ 上の物理量 $\hat{A}$ を測定
- Bは $\mathcal{H}_2$ 上の物理量 $\hat{B}$ を測定

→ これを何度も繰り返す。

結果　任意の $\hat{B}$ について、Bの測定結果の期待値 $\langle\hat{B}\rangle$ は $\hat{A}$ に依存しない

先ほどの例の一般化。

- Aは $\hat{A}$ を変えることでBに情報を伝えようとする。
- しかしBが得る結果 $\langle\hat{B}\rangle$ は $\hat{A}$ の選び方によらない

超光速通信はできない…

証明　$\hat{A}$の規格化された固有状態 (1) $\hat{A}|\Phi_j\rangle_1 = a_j|\Phi_j\rangle_1$

縮退なし

- $|\Phi_j\rangle_1$への射影演算子 (2) $\hat{P}_j := |\Phi_j\rangle_1 {}_1\langle\Phi_j| \otimes \hat{1}_2$

もちろん (3) $\hat{P}_j^2 = \hat{P}_j$　(4) $\sum_j \hat{P}_j = \hat{1}$

- $|\Phi_0\rangle$で$\hat{A}$を測定してa_jが得られる確率 (5) $p_j = \|\hat{P}_j|\Phi_0\rangle\|^2 = \langle\Phi_0|\hat{P}_j|\Phi_0\rangle$

規格化しておく

a_jが得られたあとの状態 (6) $|\Phi_j\rangle = \dfrac{\hat{P}_j|\Phi_0\rangle}{\|\hat{P}_j|\Phi_0\rangle\|} = \dfrac{\hat{P}_j|\Phi_0\rangle}{\sqrt{p_j}}$

- $|\Phi_j\rangle$で$\hat{B}$の測定をくり返したときの期待値は $\langle\Phi_j|(\hat{1}_1\otimes\hat{B})|\Phi_j\rangle$だから

$\hat{P}_j$と$(\hat{1}_1\otimes\hat{B})$が可換であることに注意すれば、Bの測定結果の期待値は

(7) $\langle\hat{B}\rangle = \sum_j p_j \langle\Phi_j|(\hat{1}_1\otimes\hat{B})|\Phi_j\rangle = \sum_j \langle\Phi_0|\hat{P}_j(\hat{1}_1\otimes\hat{B})\hat{P}_j|\Phi_0\rangle$

$= \sum_j \langle\Phi_0|\hat{P}_j(\hat{1}_1\otimes\hat{B})|\Phi_0\rangle = \langle\Phi_0|(\hat{1}_1\otimes\hat{B})|\Phi_0\rangle$

$\hat{A}$によらない！

§クローン禁止定理

様々なバージョンのうちのひとつ

未知の量子状態をそのままコピーする量子系

(1) $|\psi\rangle \otimes |\psi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \xrightarrow{\text{時間発展}} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\Phi'\rangle$

$|\psi\rangle$: コピーしたい未知の状態　$|\psi_0\rangle$: コピー用紙　$|\Phi_0\rangle$: コピー機

定理 $|\psi\rangle$が $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\rightarrow\rangle, |\leftarrow\rangle$ のいずれかをとるとする。
$|\psi\rangle$を忠実にコピーする系は存在しない

証明 可能とする

(2) $|\uparrow\rangle \otimes |\psi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\Phi_1\rangle$

(3) $|\downarrow\rangle \otimes |\psi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\Phi_2\rangle$

(4) $\underline{|\rightarrow\rangle \otimes |\psi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle} \rightarrow |\rightarrow\rangle \otimes |\rightarrow\rangle \otimes |\Phi_3\rangle$ ← まったくちがう

しかし ||

(5) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |\psi_0\rangle |\Phi_0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\Phi_1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\Phi_2\rangle\}$

線形性

(注) $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ならコピーは可能

▷ 参考 $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$ or $|\downarrow\rangle$ をコピーする方法

(1) $|\psi\rangle_1 \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_2 + i|\downarrow\rangle_2\}}$ から出発し ハミルトニアン (2) $\hat{H} = \gamma \hat{S}_z^{(1)} \hat{S}_x^{(2)}$

→ y方向上向き

$\frac{\pi}{\gamma\hbar}$ だけ時間発展させると $|\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2$ になる! ($\psi = \uparrow, \downarrow$)

なぜか? $|\psi\rangle_1 = |\uparrow\rangle_1$ のとき

(3) $\begin{cases} \hat{H}|\uparrow\rangle_1 \otimes |\rightarrow\rangle_2 = \gamma\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |\uparrow\rangle_1 \otimes |\rightarrow\rangle_2 \\ \hat{H}|\uparrow\rangle_1 \otimes |\leftarrow\rangle_2 = -\gamma\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |\uparrow\rangle_1 \otimes |\leftarrow\rangle_2 \end{cases}$

Sch. eq. の一般解 (4) $|\Psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\gamma\frac{\hbar}{4}t} |\uparrow\rangle_1 |\rightarrow\rangle_2 + \beta e^{i\gamma\frac{\hbar}{4}t} |\uparrow\rangle_1 |\leftarrow\rangle_2$

初期条件より (5) $\alpha = \frac{1+i}{2} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1-i}{2} = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}$ なので

(6) $|\Psi(t)\rangle = \underbrace{|\uparrow\rangle_1}_{\text{変わらない}} \otimes \underbrace{\left\{\cos\left(\gamma\frac{\hbar}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)|\uparrow\rangle_2 - i\sin\left(\gamma\frac{\hbar}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)|\downarrow\rangle_2\right\}}$

→ 変わらない　→ 回転運動 $t = \frac{\pi}{\gamma\hbar}$ で $|\uparrow\rangle_2$

$|\psi\rangle_1 = |\downarrow\rangle_1$ の場合も同様 (2つ目のスピンが感じる「磁場」が反転)

§ 量子暗号（量子鍵配送）

◁ 暗号とは？

送信者Aから受信者Bに第3者E（→ eavsedropper）に内容がわからないようにメッセージを送る

送信者A　平文 P（メッセージ）

f ↓ 暗号化

暗号文 $(C=f(P))$ —— C ——→ 暗号文 C

↓ 盗聴者E ？

受信者B　平文 $P=f^{-1}(C)$

f^{-1} ↑ 復号（暗号文 C から）

◁ 古くからの暗号

AとBが事前にこっそりと暗号のルール（f と f^{-1}）を共有

A　「めしいこ」 ↓ 「もすうさ」 ——→ B　「もすうさ」 ↑ 「めしいこ」

$\boxed{\text{ずっと使っていると解読されてしまう}}$

◁ 公開鍵暗号

Bはある方法で f と f^{-1} をつくり、f だけを世界に公開

- もちろん f がわかれば誰でも（原理的には）f^{-1} が計算できるが、その計算に極めて長い時間が必要なようにしてある。→ 計算機・計算法の進歩で解読？

① one-time pad　絶対に安全な暗号

AとBは事前に 0と1のランダムな列(秘密鍵)をこっそりと共有　(確率 ½ で 0 or 1)

A
平文　0 1 1 0 0 1 1 0
↓
秘密鍵　1 0 1 1 0 1 0 1
↓
各々の0,1を足す (mod 2)　1 1 0 1 0 0 1 1

(0+0=0, 1+0=1, 0+1=1, 1+1=0)

→ 暗号文は ただの乱数列!!

B
暗号文　1 1 0 1 0 0 1 1
↑
秘密鍵　1 0 1 1 0 1 0 1
↑
各々の0,1を足す　0 1 1 0 0 1 1 0

秘密鍵は1回しか使ってはいけない!　(くり返し使うと解読されてしまう)

AとBでどうやって秘密鍵を共有するかが問題　量子鍵配送 (Quantum Key Distribution)

例 BB84プロトコル　量子鍵配送の例 (Bennett, Brassard 1984)

実用的には光をつかう　11

復習 スピン$\frac{1}{2}$の状態 $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, $|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\}$, $|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\}$

- $\hat{S}_z$を測定 ▶ $|\uparrow\rangle$ かならず ↑　▶ $|\downarrow\rangle$ かならず ↓　▶ $|\rightarrow\rangle$, $|\leftarrow\rangle$ 確率$\frac{1}{2}$で ↑ or ↓
- $\hat{S}_x$を測定 ▶ $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ 確率$\frac{1}{2}$で → or ←　▶ $|\rightarrow\rangle$ かならず →　▶ $|\leftarrow\rangle$ かならず ←

確率1/2

手順
- Aはランダムに $\beta = x, z$ と $\sigma = 0, 1$ を選ぶ
- Aは以下のルールに従ってスピン$\frac{1}{2}$の状態 $|\varphi\rangle$ をつくり、Bにおくる

$$\beta = x \quad |\varphi\rangle = \begin{cases} |\rightarrow\rangle & \sigma = 0 \\ |\leftarrow\rangle & \sigma = 1 \end{cases} \qquad \beta = z \quad |\varphi\rangle = \begin{cases} |\uparrow\rangle & \sigma = 0 \\ |\downarrow\rangle & \sigma = 1 \end{cases}$$

- Bはランダムに $\beta' = x, z$ を選び、以下のように $\sigma' = 0, 1$ を決める

$\beta' = x$ なら $|\varphi\rangle$ で $\hat{S}_x$ を測定　→ なら $\sigma' = 0$　← なら $\sigma' = 1$

$\beta' = z$ なら $|\varphi\rangle$ で $\hat{S}_z$ を測定　↑ なら $\sigma' = 0$　↓ なら $\sigma' = 1$

もし $\beta = \beta'$ なら $\sigma = \sigma'$　　$\beta \neq \beta'$ なら 確率$\frac{1}{2}$で $\sigma = \sigma'$ or $\sigma \neq \sigma'$

秘密鍵の生成

A子 —147→ 子B

- A, Bは先ほどの手順をくり返す　以下のような表ができる

Alice	β	X	Z	Z	X	Z	X	X	Z	X	X	Z	Z	Z
	σ	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
Bob	β'	Z	Z	X	X	X	Z	X	Z	X	Z	Z	X	Z
	σ'	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1

→ Aしか知らない（Alice の行）

→ Bしか知らない（Bob の行）

- A, Bは通常の通信方法（盗聴されてもいい）で β と β' を教え合う.

上の表で $\beta=\beta'$ となったところだけを残して, あとはすてる.

Alice	β	~~X~~	Z	~~Z~~	X	~~Z~~	~~X~~	X	Z	X	~~X~~	Z	~~Z~~	Z
	σ	~~0~~	1	~~0~~	0	~~0~~	~~0~~	0	1	1	~~0~~	0	~~1~~	1
Bob	β'	~~Z~~	Z	~~X~~	X	~~X~~	~~Z~~	X	Z	X	~~Z~~	Z	~~X~~	Z
	σ'	~~0~~	1	~~1~~	0	~~0~~	~~1~~	0	1	1	~~0~~	0	~~0~~	1

AとBの手元には共通の0, 1のランダムな列が残る! $\boxed{\text{秘密鍵}}$

盗聴者

Eveは Aliceから Bobへの通信に介入し $|\varphi\rangle$を入手.

▶ Eveは $|\varphi\rangle$ が $\underbrace{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle}_{\beta=Z}, \underbrace{|\rightarrow\rangle, |\leftarrow\rangle}_{\beta=X}$ のいずれかであることは知っている.

しかし

▶ $|\varphi\rangle$をもっていても, βが X か Z かを知る方法はない! → できたら超光速通信!!!

▶ ともかく $\hat{S}_x$ か $\hat{S}_z$ かを測って, 結果に対応した $|\hat{\varphi}\rangle$ を Bに送る.

Alice $\xrightarrow{|\varphi\rangle}$ Eve $\xrightarrow{|\tilde{\varphi}\rangle}$ Bob

① $\beta=Z$, $\sigma=0$ $|\varphi\rangle=|\uparrow\rangle$　$\hat{S}_z$測定 $\uparrow$ $|\tilde{\varphi}\rangle=|\uparrow\rangle$を送る　$\beta'=Z$ $\uparrow$ $\sigma'=0$

Eve は Alice, Bob にばれずに $\sigma=\sigma'=0$ だと知った!

② $\beta=X$ $\sigma=0$ $|\varphi\rangle=|\rightarrow\rangle$　$\hat{S}_z$測定 $\downarrow$ $|\tilde{\varphi}\rangle=|\downarrow\rangle$を送る　$\beta'=X$ $\leftarrow$ $\sigma'=1$

ちがった!

$\beta=\beta'$だが $\sigma\neq\sigma'$ となっている!

Alice と Bob は $\beta=\beta'$ となった回の一部について σ と σ' を照合. → $\boxed{\text{Eveの介入がばれる!!}}$

(参考 Eve が何をやっても ばれずに盗聴するのは不可能なことが証明されている.)

§量子コンピューター

通常の(古典的な)コンピューター

0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0

bit　0 or 1の2値をとる要素。　bit列　複数のbitの列 → n bitsなら2^n通りの値

コンピューター　bit列に様々な操作(演算)を施こして計算

量子コンピューター

qubit(量子ビット)　$|0\rangle$と$|1\rangle$という(規格化された)直交する2状態をもつ量子系。

一般の状態　$\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$　$(\alpha,\beta\in\mathbb{C})$

量子コンピューター　qubitsの集まりに様々な操作(ユニタリー変換)を施こして計算

n個のqubits　$n=2$　$|0\rangle_1\otimes|0\rangle_2$, $|0\rangle_1\otimes|1\rangle_2$, $|1\rangle_1\otimes|0\rangle_2$, $|1\rangle_1\otimes|1\rangle_2$

の4状態の線形結合

一般のn　$|\sigma_1\rangle_1\otimes\cdots\otimes|\sigma_n\rangle_n$　$(\sigma_1,\cdots,\sigma_n=0,1)$

の2^n状態の線形結合

量子コンピューターはすごいのか？

N桁の自然数の素因数分解

- 古典計算機で必要なステップ数 $\sim C^{N^{1/3}}$ （C：定数）
- 量子コンピューター（ショアのアルゴリズム）で必要なステップ数 $\sim N^2$ (Shor 1994)

Nが大きくなったときの増え方が全くちがう

量子コンピューターには簡単にできて古典コンピューターには（すごく）難しい問題がある。

（Googleの実演 2019 53qubits）

量子コンピューターはなぜすごいのか？ よくある説明

- 古典コンピューター — 入力 0010010001 $\xrightarrow{\text{計算}}$ 出力 1010110 1
- 量子コンピューター 入力 (1)

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n=0,1} \alpha_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n} |\sigma_1\rangle_1 |\sigma_2\rangle_2 \cdots |\sigma_n\rangle_n$$

出力 (2)

$$\hat{U}|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n=0,1} \alpha_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n} \hat{U}|\sigma_1\rangle_1 |\sigma_2\rangle_2 \cdots |\sigma_n\rangle_n$$

2^nとおりのbitの配列すべてについて並列でまとめて計算している!!!

さらに工夫が必要!

しかし (2)の状態をふつうに測定してしまうと，1つの配列しかわからない！

△ ドイッチュのアルゴリズム (Deutsch 1985)　「やらせ」っぽい(が面白い)例

問題　$f(\sigma)$ は $\sigma=0,1$ の関数で値 0, 1 のみをとる. われわれは $f(\cdot)$ を知らない

$f(0)=f(1)$ かどうかを判定せよ.

→ どういう f は全部で4通り.

条件　ただし $f(\cdot)$ は1回しか使ってはいけない!!

古典的には絶対に不可能だが量子系ならば可能

スピン$\frac{1}{2}$の状態(qubit)に (1) $|\uparrow\rangle \rightarrow (-1)^{f(0)}|\uparrow\rangle,\quad |\downarrow\rangle \rightarrow (-1)^{f(1)}|\downarrow\rangle$

のように作用する「しかけ」があるとする.

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\{(-1)^{f(0)}|\uparrow\rangle+(-1)^{f(1)}|\downarrow\rangle\} = \frac{(-1)^{f(0)}}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle+(-1)^{f(1)-f(0)}|\downarrow\rangle\}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{f(0)}|\rightarrow\rangle & f(0)=f(1) \text{ のとき} \\ (-1)^{f(0)}|\leftarrow\rangle & f(0)\neq f(1) \text{ のとき} \end{cases}$$

「しかけ」は1回しか使ってない!

$\hat{S}_x$ を測定して → なら $f(0)=f(1)$, ← なら $f(0)\neq f(1)$

$f(0)$ も $f(1)$ もわからない　$(-1)^{f(0)-f(1)}$ だけがわかる.