〈量子力学における測定〉

§測定についての原理

観測ともいう

▷ 測定可能な物理量

$\updownarrow$

自己共役演算子 $\hat{A}$

「物理量 $\hat{A}$」などという.

簡単のため $\mathrm{spec}(\hat{A}) = \{a_1, a_2, \cdots\}$ の要素はすべて固有値とする. (1)

正規直交完全系 $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1,2,\cdots}$ (2)

$$\hat{A}|\psi_j\rangle = a_j|\psi_j\rangle \quad j=1,2,\cdots \tag{3}$$

▷ 物理量 $\hat{A}$ を測定するとかならず固有値 $a_1, a_2, \cdots$ のいずれかが得られる.

「とびとび」

↓

中間の値はでてこない.

▷ 粒子の状態が $|\psi_k\rangle$ のとき $\hat{A}$ を測定 2

→ かならず測定結果 a_k が得られる.

▷ 粒子の状態が $\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\psi_k\rangle + |\psi_\ell\rangle\}$ (1)

$(k \neq \ell)$

のとき $\hat{A}$ を測定すると?

- a_k か a_ℓ かどちらかを優先する理由はない
- $\frac{a_k + a_\ell}{2}$ のような中間の値が測定されることもない
- 測定結果は確率的

確率 $\frac{1}{2}$ で a_k が
確率 $\frac{1}{2}$ で a_ℓ が
} が得られる

ここでの確率はわれわれの無知の反映ではなく、自然の基本法則に含まれる本質的な確率

◎ 一般の状態の場合

($\hat{A}$の固有値 $a_1, a_2, \cdots$ が縮退していないと仮定)

測定の瞬間の状態 $|\varphi\rangle$ $(\||\varphi\|| = 1)$

$$|\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |\psi_j\rangle \quad \text{と展開} \tag{1}$$

規格化条件 $$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 = 1 \tag{2}$$

状態$|\varphi\rangle$で$\hat{A}$を測定

- $a_1, a_2, \cdots$ のいずれかが確率的に得られる.
- a_kが得られる確率は $P_k = |\alpha_k|^2$ (3)

Bornの規則

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1 \tag{4}$$

をみたす

◎理想的な測定装置をつかうと,
測定の直後の状態は$|\psi_k\rangle$.
測定によって状態はかわってしまう!

確率的というイミ

- 測定結果は何をどう工夫しても決して予測できない.
- 全く同じ$|\psi\rangle$について$\hat{A}$の測定をN回くり返したとき, a_kが得られた回数をN_k

$$\frac{N_k}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} p_k \qquad (1)$$

測定のたびに新たな$|\psi\rangle$を用意する!

「波動関数と物理的な状態の対応」

について ← ケット状態

$|\varphi\rangle$ 規格化された任意の状態

$$|\xi\rangle = e^{i\theta}|\varphi\rangle \quad (\theta \in \mathbb{R}) \qquad (1)$$

$$|\xi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} e^{i\theta}\alpha_j |\psi_j\rangle \qquad (2)$$

$|\xi\rangle$ において $\hat{A}$ を測定したとき，a_k が得られる確率 $= |e^{i\theta}\alpha_k|^2 = |\alpha_k|^2 = P_k$

$|\varphi\rangle$ と $|\xi\rangle$ における実験結果は完全に同じ

$|\varphi\rangle$ と $|\xi\rangle$ は同じ物理的状態を表わす

$\hat{A}$の固有値が縮退している場合

$k < l$ について $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_l$ (1) とする

これらが縮退

・状態 $|\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |\psi_j\rangle$ (2)

で$\hat{A}$を測定したとき a_kが得られる

確率 $\sum_{j=k}^{l} |\alpha_j|^2$ (3)

・測定後の状態

$$|\varphi\rangle \longrightarrow \left(\sum_{j=k}^{l} |\alpha_j|^2\right)^{-1/2} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j |\psi_j\rangle \quad (4)$$

測定結果に対応する部分を切り出した

射影演算子 $\hat{P} = \sum_{j=l}^{k} |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ (5) を使えば

$$|\varphi\rangle \rightarrow \frac{\hat{P}|\varphi\rangle}{\|\hat{P}|\varphi\rangle\|} \quad (6)$$

§期待値とゆらぎ

設定

$\|\varphi\|=1$

$|\varphi\rangle$を用意 → $\hat{A}$を測定 → 結果を記録.

というプロセスを何度もくり返す.

- 測定結果の期待値とゆらぎは確率のルールで求められる.

- a_jが得られる確率は

$$p_j=|\alpha_j|^2=|\langle\psi_j|\varphi\rangle|^2=\langle\varphi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\varphi\rangle \tag{1}$$

期待値

$$\langle\hat{A}\rangle_\varphi := \sum_{j=1}^{\infty} a_j p_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \langle\varphi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\varphi\rangle$$

$$= \langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle \tag{2}$$

スペクトル分解 part3-p27(2)

$$\hat{A}=\sum_{j=1}^{\infty} a_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \tag{3}$$

ゆらぎ（標準偏差）

$\hat{A}$の測定結果は $\langle \hat{A} \rangle_\varphi$ のまわりで

どれくらいバラつくか？

$\langle \hat{A} \rangle_\varphi$ のこと

$\bar{a} = \sum_j a_j P_j$ と書くと (1)

期待値からのずれは $a_j - \bar{a}$ (2)

ゆらぎを

$$\sigma_\varphi[\hat{A}] := \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} (a_j - \bar{a})^2 P_j} \quad (3)$$

と定ギ"

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_j - \bar{a})^2 P_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 P_j - \bar{a}^2 \quad (4)$$

さらに $\hat{A}^2|\psi_j\rangle = a_j^2|\psi_j\rangle$ より (1)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 p_j = \langle \hat{A}^2 \rangle_\varphi = \langle \varphi | \hat{A}^2 | \varphi \rangle \quad (2)$$

よって

$$\sigma_\varphi[\hat{A}] = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle_\varphi - \{\langle \hat{A} \rangle_\varphi\}^2}$$

$$= \sqrt{\langle \varphi | \hat{A}^2 | \varphi \rangle - \langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle^2} \quad (3)$$

また $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\varphi$ (4) とかけば

$$\sigma_\varphi[\hat{A}] = \sqrt{\langle \varphi | (\Delta\hat{A})^2 | \varphi \rangle} \quad (5)$$

§不確定性原理

$\hat{A}, \hat{B}$ 自己共役演算子

$$\boxed{[\hat{A}, \hat{B}] = i\lambda} \quad (\text{ただし } \lambda \in \mathbb{R}) \qquad (1)$$

だったとする。

(注 $[\hat{A}, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger$
$= \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\hat{A}, \hat{B}]$)

(2)

定理 任意の状態 $|\varphi\rangle$ (もちろん $\|\varphi\| = 1$)

について

$$\boxed{\sigma_\varphi[\hat{A}]\,\sigma_\varphi[\hat{B}] \geq \frac{|\lambda|}{2}} \qquad (3)$$

(不確定性関係)

が成り立つ

基本的な例

1次元 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ (1)

どんな状態 $|\varphi\rangle$ においても

$$\sigma_\varphi[\hat{x}]\,\sigma_\varphi[\hat{p}] \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2)$$

$\hat{x}$ と $\hat{p}$ がどちらも確定するような状態はあり得ない。

$\sigma_\varphi[\hat{x}]$

$|\varphi\rangle$ での $\hat{x}$ の測定を繰り返したときのゆらぎ

$\sigma_\varphi[\hat{p}]$

$|\varphi\rangle$ での $\hat{p}$ の測定を繰り返したときのゆらぎ

$\hat{x}$ と $\hat{p}$ をいっしょに測るのではない!

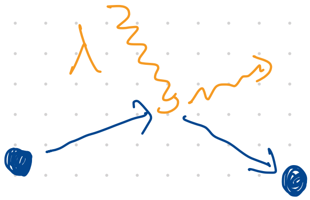
(参) Heisenbergの思考実験 1927

電子の位置を測定したい。

- 波長λの光をあてて測る。 Δxとかく $\Delta x \gtrsim \lambda$

  → 位置の測定精度 $\gtrsim \lambda$ (1)

- 波長λの光子は $p=\frac{h}{\lambda}$ (2) の運動量をもつ



→ 電子の運動量は $\frac{h}{\lambda}$ 程度変化。

$$\Delta x \, \Delta p \gtrsim h \quad (3)$$

Δpとかく $\Delta p \gtrsim \frac{h}{\lambda}$

Δx：位置の測定精度

Δp：測定による運動量の乱れ。

(3)は前ページの(2)に似ているが イミは全くちがう！

P10-(3)の証明

任意の$|\varphi\rangle$を固定 $(\|\varphi\|=1)$

$$\Delta\hat{A}=\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle_\varphi \quad (1) \qquad \Delta\hat{B}=\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle_\varphi \quad (2)$$

定数とみなす

すると $[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}]=i\lambda$ (3)

$\theta\in\mathbb{R}$に対して

$$|\xi_\theta\rangle=(\Delta\hat{A}+i\theta\Delta\hat{B})|\varphi\rangle \quad (4)$$

とする.

$$\|\xi_\theta\|^2=\langle\xi_\theta|\xi_\theta\rangle$$

$$=\langle\varphi|(\underbrace{\Delta\hat{A}}_{①}\underbrace{-i\theta\Delta\hat{B}}_{②})(\underbrace{\Delta\hat{A}}_{③}\underbrace{+i\theta\Delta\hat{B}}_{④})|\varphi\rangle$$

$$=\langle\varphi|(\Delta\hat{A})^2|\varphi\rangle+\theta^2\langle\varphi|(\Delta\hat{B})^2|\varphi\rangle$$

$$+i\theta\langle\varphi|[\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}]|\varphi\rangle$$

P9-(5)

$$=(\sigma_\varphi[\hat{A}])^2+\theta^2(\sigma_\varphi[\hat{B}])^2-\lambda\theta \quad (5)$$

$$\|\xi_\theta\|^2 = (\sigma_\varphi[\hat{B}])^2\theta^2 - \lambda\theta + (\sigma_\varphi[\hat{A}])^2$$

$$= \left\{\sigma_\varphi[\hat{B}]\theta - \frac{\lambda}{2\sigma_\varphi[\hat{B}]}\right\}^2 + \underbrace{(\sigma_\varphi[\hat{A}])^2 - \frac{\lambda^2}{4(\sigma_\varphi[\hat{B}])^2}}_{\text{ここはゼロ以上}} \qquad (1)$$

任意のθについて

$\|\xi_\theta\|^2 \geq 0$ より

$$(\sigma_\varphi[A]\,\sigma_\varphi[\hat{B}])^2 \geq \frac{\lambda^2}{4} \qquad (2)$$

$$\sigma_\varphi[\hat{A}]\,\sigma_\varphi[\hat{B}] \geq \frac{|\lambda|}{2} \qquad (3)$$

§最小不確定波束

$\alpha > 0$, x_0, k 定数

$$\varphi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} e^{ikx} \quad (1)$$

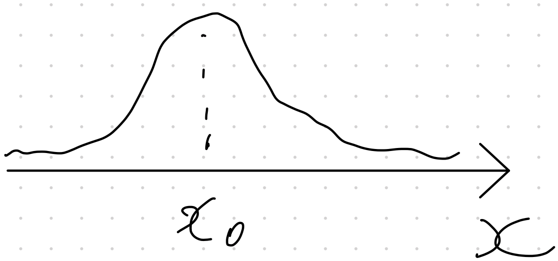
という状態 $(x \in \mathbb{R})$

ガウス型

x_0のまわりに対称

平面波

運動量 $p = \hbar k$



規格化をチェック

$$|\varphi(x)|^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha(x-x_0)^2} \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\varphi(x)|^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\overbrace{\boxed{\alpha(x-x_0)^2}}^{= y^2}} \qquad (2)$$

$$\left(y = \sqrt{\alpha}\,(x-x_0), \quad dy = \sqrt{\alpha}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2}}_{= \sqrt{\pi} \ \text{Gauss積分}} = 1 \qquad (3)$$

$\hat{x}$の期待値

$$\langle \hat{x} \rangle_\varphi = \langle \varphi | \hat{x} | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, (\varphi(x))^* \, x \, \varphi(x) \quad (1)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \underbrace{x}_{= x_0 + (x - x_0)} \, e^{-\alpha (x - x_0)^2} \quad (2)$$

$$= x_0 \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\alpha (x - x_0)^2}}_{= 1} \quad (3)$$

$$+ \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, (x - x_0) \, e^{-\alpha (x - x_0)^2}}_{= 0} \quad (4)$$

$$\boxed{= x_0} \quad (5)$$

x_0を中心に対称だから，あたり前．

$\hat{x}$のゆらぎ

$$\left(\sigma_\varphi[\hat{x}]\right)^2 = \langle(\hat{x}-x_0)^2\rangle_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(x-x_0)^2\,|\varphi(x)|^2 \quad (1)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(x-x_0)^2\,e^{-\alpha(x-x_0)^2} \quad (2)$$

$(y = x - x_0)$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,y^2 e^{-\alpha y^2} \quad (3)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,y\left(-\frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dy}e^{-\alpha y^2}\right) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\,e^{-\alpha y^2}}_{=1} \quad (5)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2\alpha}} \quad (6)$$

$\hat{p}$の期待値

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (1) \qquad \hat{p}\varphi(x) = -i\hbar\varphi'(x) \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} e^{ikx} \quad (2)$$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \{-\alpha(x-x_0)+ik\} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2+ikx} \quad (3)$$

に注意して

$$\langle\hat{p}\rangle_\varphi = \langle\varphi|\hat{p}|\varphi\rangle = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*_{(x)}\, \varphi'(x) \quad (4)$$

$$= -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \{-\alpha(x-x_0)+ik\}\, e^{-\alpha(x-x_0)^2} \quad (5)$$

$$\boxed{= \hbar k} \quad (6)$$

$\leftarrow$ e^{ikx}だから当然

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \{-\alpha(x-x_0)+ik\} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2+ikx} \quad (1)$$

$\hat{p}$のゆらぎ

$\|\hat{A}|\varphi\rangle\|^2 = \langle\varphi|\hat{A}^\dagger\hat{A}|\varphi\rangle$

まず $\langle\hat{p}^2\rangle_\varphi$ を求める.

$$\langle\hat{p}^2\rangle_\varphi = \langle\varphi|\hat{p}^2|\varphi\rangle = \|\hat{p}|\varphi\rangle\|^2 \quad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left|-i\hbar\varphi'(x)\right|^2 = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left|\varphi'(x)\right|^2 \quad (3)$$

$$= \hbar^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \{\alpha^2(x-x_0)^2+k^2\} e^{-\alpha(x-x_0)^2} \quad (4)$$

$$\left(\left|-\alpha(x-x_0)+ik\right|^2 = \alpha^2(x-x_0)^2+k^2\right) \quad (5)$$

p18を見よ.

$$= \hbar^2\alpha^2 \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int dx\,(x-x_0)^2 e^{-\alpha(x-x_0)^2}}_{=\frac{1}{2\alpha}} \quad (6)$$

$$+ \hbar^2 k^2 \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int dx\, e^{-\alpha(x-x_0)^2}}_{=1} \quad (7)$$

$$= \frac{\alpha}{2}\hbar^2 + \hbar^2 k^2 \quad (8)$$

よって

$$\left(\sigma_\varphi[\hat{p}]\right)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle_\varphi - \left(\langle \hat{p} \rangle_\varphi\right)^2 \qquad (1)$$

$$\boxed{= \frac{\alpha}{2}\hbar^2} \qquad (2)$$

まとめると

$$\langle \hat{x} \rangle_\varphi = x_0, \quad \langle \hat{p} \rangle_\varphi = \hbar k \qquad (3)$$

$$\sigma_\varphi[\hat{x}] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}, \quad \sigma_\varphi[\hat{p}] = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\hbar \qquad (4)$$

特に

$$\boxed{\sigma_\varphi[\hat{x}]\,\sigma_\varphi[\hat{p}] = \frac{\hbar}{2}} \qquad (5)$$

不確定性関係が「ぎりぎり」で成立している。

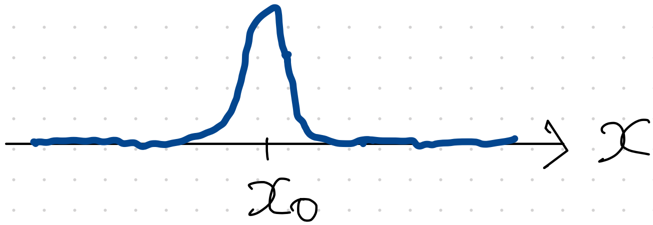
↓

$\varphi(x)$ は最小不確定波束

波束のふるまい

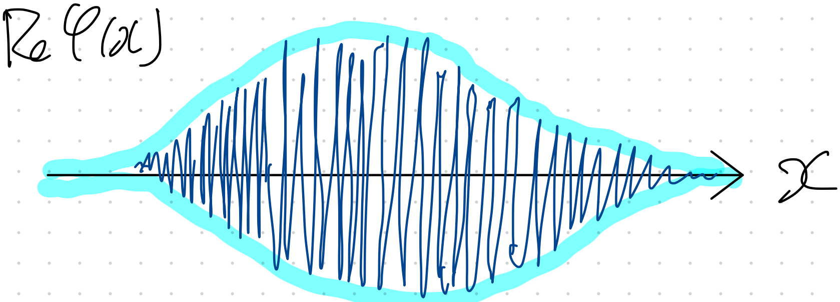
$\alpha \gg k^2$

Re $\varphi(x)$



$\hat{x}$ はほぼ x_0 , $\hat{p}$ はほとんど定まらない

$\alpha \ll k^2$



$\hat{p}$ はほぼ $\hbar k$, $\hat{x}$ はほとんど定まらない

$$\sigma_\varphi[\hat{x}] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}, \quad \sigma_\varphi[\hat{p}] = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,\hbar \qquad (4)$$