〈スピンの復習〉

大きさ$\frac{1}{2}$のスピン角運動量

§1つのスピンの状態

□スピン演算子 $\hat{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$

(1) $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar \hat{S}_z, \cdots$

行列表示

(2) $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

□スピン演算子の固有状態

(3) $\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ $\hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$ (4) $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(5) $\hat{S}_x|\rightarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\rightarrow\rangle$ $\hat{S}_x|\leftarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\leftarrow\rangle$ (6) $|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

よって

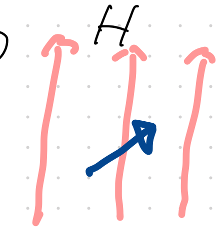
(7) $$\begin{cases} |\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\} \\ |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\} \end{cases}$$

(8) $$\begin{cases} |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle\} \\ |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle\} \end{cases}$$

§磁場中でのスピンの「回転」

スピンの磁気モーメント μ_0

x-方向の磁場H中のスピンのハミルトニアン (1) $\hat{H} = -\mu_0 H \hat{S}_x$ $\omega > 0$



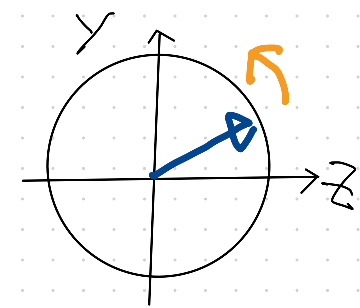
(2) $\hat{H}|\rightarrow\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|\rightarrow\rangle \qquad \hat{H}|\leftarrow\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|\leftarrow\rangle$ なので

時間発展の Sch. eq. の一般解は

(3) $|\psi(t)\rangle = \alpha e^{i\frac{\omega}{2}t}|\rightarrow\rangle + \beta e^{-i\frac{\omega}{2}t}|\leftarrow\rangle \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha e^{i\frac{\omega}{2}t} + \beta e^{-i\frac{\omega}{2}t}\right)|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha e^{i\frac{\omega}{2}t} - \beta e^{-i\frac{\omega}{2}t}\right)|\downarrow\rangle$$

簡単な解として $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とすれば



(4) $|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\omega}{2}t\,|\uparrow\rangle + i\sin\frac{\omega}{2}t\,|\downarrow\rangle$

(5) $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \Rightarrow |\psi(\frac{\pi}{\omega})\rangle = i|\downarrow\rangle \Rightarrow |\psi(\frac{2\pi}{\omega})\rangle = -|\uparrow\rangle$

(6) $|\psi(\frac{\pi}{2\omega})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ yの正方向

角振動数 ωで回転

スピン演算子の期待値

$$\langle \hat{S}_x \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | \hat{S}_x | \psi(t) \rangle = \left(\cos\frac{\omega}{2}t, -i\sin\frac{\omega}{2}t \right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2}t \\ \sin\frac{\omega}{2}t \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \hat{S}_y \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle = \left(\cos\frac{\omega}{2}t, -i\sin\frac{\omega}{2}t \right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2}t \\ \sin\frac{\omega}{2}t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ \cos\frac{\omega}{2}t \sin\frac{\omega}{2}t + \sin\frac{\omega}{2}t \cos\frac{\omega}{2}t \right\} = \frac{\hbar}{2} \sin\omega t$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle = \left(\cos\frac{\omega}{2}t, -i\sin\frac{\omega}{2}t \right) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2}t \\ \sin\frac{\omega}{2}t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ \cos\frac{\omega}{2}t \cos\frac{\omega}{2}t - \sin\frac{\omega}{2}t \sin\frac{\omega}{2}t \right\} = \frac{\hbar}{2} \cos\omega t$$

$$\left(\langle \hat{S}_x \rangle_{\psi(t)}, \langle \hat{S}_y \rangle_{\psi(t)}, \langle \hat{S}_z \rangle_{\psi(t)} \right) = \left(0, \frac{\hbar}{2}\sin\omega t, \frac{\hbar}{2}\cos\omega t \right)$$

確かにまわっている!

§スピン2つの系の状態

- 4つの直交する状態 (1) $|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2,\ |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2,\ |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2,\ |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$

  → $|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$ と略記

- 一般の状態 (2) $|\Phi\rangle = \alpha_1|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_2|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_3|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_4|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$

  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C})$

- singlet 全角運動量で0の特別な状態

(3) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\}$ spin singlet

p1-(8) →

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\{(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle)(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle) - (|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle)(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle)\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle - |\leftarrow\rangle|\rightarrow\rangle\}$$ ← 同じ形