<波と干渉>

古典的な波動方程式について. 特に音波の干渉を理解する.

§音と波動方程式

▷ 空気 : 各々の微小部分が熱平衡状態にある連続的な気体

(1) 位置 $\mathbf{r}=(x,y,z)$, 時刻 t

(2) 密度 $\rho(t,\mathbf{r})$, 圧力 $P(t,\mathbf{r})$, 速度 $\mathbf{v}(t,\mathbf{r})$

流体としての速度 (分子の速度ではない!)

▷ もとになる状態

定数

(3) $\rho(t,\mathbf{r})=\rho_0$, $P(t,\mathbf{r})=P_0$, $\mathbf{v}(t,\mathbf{r})=(0,0,0)$

▷ わずかな変動

$$
(4)\quad \begin{cases}
\rho(t,\mathbf{r})=\rho_0+\boxed{f(t,\mathbf{r})} \\
P(t,\mathbf{r})=P_0+\boxed{q(t,\mathbf{r})} \\
\boxed{\mathbf{v}(t,\mathbf{r})}
\end{cases}
$$

ゼロとは限らない

微小だとしてすべて1次までだけを残す.

f^2, $\mathbf{v}q$ など無視

2

密度の変動 $f(t, \boldsymbol{r})$ は

Laplacian $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\boxed{(1) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, \boldsymbol{r}) = (v_s)^2 \Delta f(t, \boldsymbol{r})}$$ を満たす。

(古典的)波動方程式

$$(2) \quad v_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$ 音速 (解をみるとわかる。→ P8)

$$(3) \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \cdots$$

比熱比

$\frac{5}{3}$ → 単原子分子気体

$\frac{7}{5}$ → 2原子分子気体

(C_p 定圧比熱, C_v 定積比熱)

$$(4) \quad p_0 = \frac{nRT}{V}, \quad \rho_0 = \frac{nM}{V}$$

M → モル質量

より

$$(5) \quad v_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

例 空気 N_2 0.8 O_2 0.2

$$(6) \quad \boxed{\begin{array}{l} M \simeq (28 \times 0.8 + 32 \times 0.2) \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol} \\ T \simeq 273\,\mathrm{K},\ R \simeq 8.31\,\mathrm{J/(K \cdot mol)},\ \gamma = \frac{7}{5} \end{array}}$$

→ (7) $v_s = 332$ m/s

実測は 331.5 m/s !!

§ 気体中の音波についての波動方程式の導出

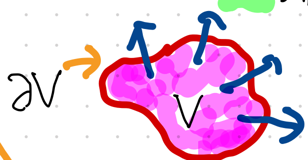
◎ 連続の式

一般に、保存する量の密度 $\rho(t,\boldsymbol{r})$ と流れ $\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})$ は

連続の式 (1) $\dfrac{\partial \rho(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})$ を満たす.

導出 (2) $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\boldsymbol{r}\in V} dv(\boldsymbol{r})\,\rho(t,\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}\in\partial V} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}\in V} dv(\boldsymbol{r})\,\operatorname{div}\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r})$

境界から入る　Vの境界(表面)　Gaussの定理



V を $\boldsymbol{r}$ にちぢめると (1) がでる.

気体の場合 (3) $\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) = \rho(t,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r}) = (\rho_0 + f(t,\boldsymbol{r}))\,\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r})$

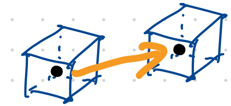
$\simeq \rho_0\,\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r})$

(1) より $\boxed{(4)\quad \dfrac{\partial \rho(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} \simeq -\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{r})}$

運動方程式

$\mathbb{x}$を中心にした $\varepsilon\times\varepsilon\times\varepsilon$ の領域内の気体

(1) $\mathbb{f} = m\,\mathbb{a}$ を使う



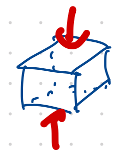
質量 (2) $m \simeq \rho(t,\mathbb{x})\,\varepsilon^3$

領域も少しうごく

加速度 (3) $$\mathbb{a}(t,\mathbb{x}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\mathbb{v}(t+\Delta t,\ \mathbb{x}+\mathbb{v}(t,\mathbb{x})\Delta t) - \mathbb{v}(t,\mathbb{x})\right\}$$

$$= \frac{\partial \mathbb{v}(t,\mathbb{x})}{\partial t} + \underbrace{\mathbb{v}(t,\mathbb{x})\cdot \mathrm{grad}\,\mathbb{v}(t,\mathbb{x})}_{小} \simeq \frac{\partial \mathbb{v}(t,\mathbb{x})}{\partial t}$$

力 (4) $\mathbb{f}(t,\mathbb{x}) \simeq -\varepsilon^3\,\mathrm{grad}\,P(t,\mathbb{x})$



圧力の差が力！

よって

(5) $$\overbrace{\rho(t,\mathbb{x})\,\varepsilon^3}^{m}\ \overbrace{\frac{\partial \mathbb{v}(t,\mathbb{x})}{\partial t}}^{\mathbb{a}} \simeq \overbrace{-\varepsilon^3\,\mathrm{grad}\,P(t,\mathbb{x})}^{\mathbb{f}}$$

(6) $$\{\rho_0 + f(t,\mathbb{x})\}\frac{\partial \mathbb{v}(t,\mathbb{x})}{\partial t} \simeq -\,\mathrm{grad}\,P(t,\mathbb{x})$$

(7) $$\boxed{\rho_0\frac{\partial \mathbb{v}(t,\mathbb{x})}{\partial t} \simeq -\,\mathrm{grad}\,P(t,\mathbb{x})}$$

P3-(2) (1) $\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x) = -\rho_0 \operatorname{div} v(t,x)$

P4-(7) (2) $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = -\operatorname{grad} P(t,x)$

本当は $\simeq$ だが
微小量の2次以上はムシする
ことにして $=$ と書く。

(1)をtで微分

(2) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(t,x) = -\rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) \overset{(2)}{=} \operatorname{div} \operatorname{grad} P(t,x) = \Delta P(t,x)$

(3) $\begin{cases} \rho(t,x) = \rho_0 + f(t,x) \\ P(t,x) = P_0 + g(t,x) \end{cases}$ より

$$\boxed{(4) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x) = \Delta g(t,x)}$$

密度の変動 $f(t,x)$ と 圧力の変動 $g(t,x)$ を結ぶ式

波動方程式 p5-(4)

(1) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x) = \Delta q(t,x)$

$f(t,x)$ と $q(t,x)$ を結ぶ関係がもうひとつ必要

気体中の波の伝播

すばやい変化 → 断熱変化 → Poissonの関係 (2) $p\rho^{-\gamma} = $ 一定

γ → 比熱比

(3) $(p_0 + q)(\rho_0 + f)^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma}$

(4) $\left(1 + \dfrac{q}{p_0}\right)\left(1 + \dfrac{f}{\rho_0}\right)^{-\gamma} = 1$

$\left(1 + \dfrac{f}{\rho_0}\right)^{-\gamma} \simeq 1 - \gamma \dfrac{f}{\rho_0}$

一般に
$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + O(x^2)$

(5) $1 + \dfrac{q}{p_0} - \gamma \dfrac{f}{\rho_0} \simeq 1$

(6) $\dfrac{q}{p_0} \simeq \gamma \dfrac{f}{\rho_0}$

(7) $q(t,x) = \dfrac{\gamma p_0}{\rho_0} f(t,x)$

(1)より (8) $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x) = \boxed{\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}} \Delta f(t,x)$ 波動方程式!

$\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0} = (v_s)^2$

(Newtonは (2) ではなく $p\rho^{-1} = $ 一定 を使った(等温変化) → 音速がずれた)

§波動方程式とその解

◻ 波動方程式

$$\boxed{(☆)\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x) = (v_s)^2 \Delta f(t,x)}$$

t: 時刻　x: 位置　$f(t,x)$: 未知の実数値関数　$v_s > 0$ 定数(音速)

(☆)は音波, 弾性波, 電磁波, … のふるまいを記述

(☆)は 偏微分方程式 (PDE = partial differential equation)

◻ 線形性

- $f(t,x)$ が (☆)の解なら　$\alpha f(t,x)$ も (☆)の解　(α: 定数)

- $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ が (☆)の解なら　$\alpha f_1(t,x) + \beta f_2(t,x)$ も (☆)の解　(α, β: 定数)

注　線形なのは微小な変化を見ているから!

→ f^2 などをムシ

▷ 一方向に進む「波」

(☆) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,\mathbf{r}) = (v_s)^2 \Delta f(t,\mathbf{r})$$

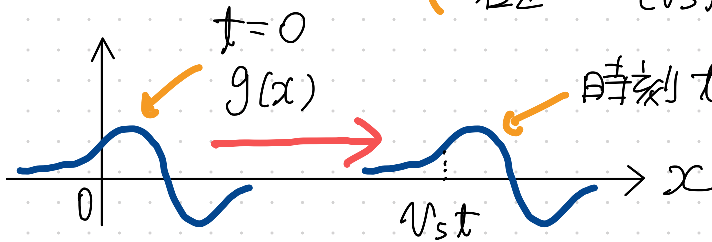
任意の1変数関数 $g(s)$ に対して (1) $f(t,\mathbf{r}) = g(x - v_s t)$ とする。

← y, z によらない

(1)を(☆)に代入、

(2)
$$\begin{cases} 左辺 = (v_s)^2\, g''(x - v_s t) \\ 右辺 = (v_s)^2\, g''(x - v_s t) \end{cases}$$

一致したので解だ！



$g(\cdot)$ で決まる任意の波形が速度 v_s で平行移動する。

(3) $f(t,\mathbf{r}) = g(-x - v_s t)$ としても(☆)の解　速度 $-v_s$ で進む

▷ 3次元への一般化

任意の単位ベクトル $\boldsymbol{\xi}$　(4) $f(t,\mathbf{r}) = g(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{r} - v_s t)$

(4)を(☆)に代入

(5)
$$\begin{cases} 左辺 = (v_s)^2\, g''(\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{r} - v_s t) \\ 右辺 = (v_s)^2\{(\xi_x)^2 g''(\cdot\cdot) + (\xi_y)^2 g''(\cdot\cdot) + (\xi_z)^2 g''(\cdot\cdot)\} = (v_s)^2\, g''(\cdot\cdot) \end{cases}$$

一致。

(4)は $\boldsymbol{\xi}$ 方向に速さ v_s で進む波　(1), (3)は $\boldsymbol{\xi} = (\pm 1, 0, 0)$ に相当。

■ 平面波解 (☆) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,\mathbf{x}) = (v_s)^2 \Delta f(t,\mathbf{x})$

(1) $g(s) = A\cos(ks+\theta)$ と選ぶ $k>0$, A, θ は定数

P8-(1)の(☆)の解は (2) $\omega = k v_s > 0$ として

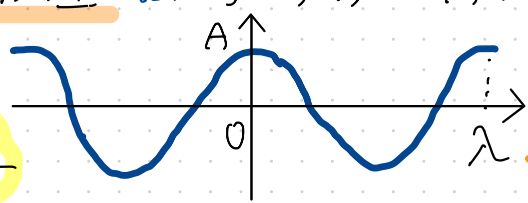
(3) $f(t,\mathbf{x}) = g(x - v_s t) = \boxed{A\cos(kx - \omega t + \theta)} = \mathrm{Re}[A e^{ikx+i\theta} e^{-i\omega t}]$

平面波解 波面(fが一定値をとる範囲)がyz面に平行な平面

$\theta = 0$ なら (4) $f(t,\mathbf{x}) = A\cos(kx - \omega t)$

x依存性 (5) $f(0,\mathbf{x}) = A\cos(kx)$

t=0に固定



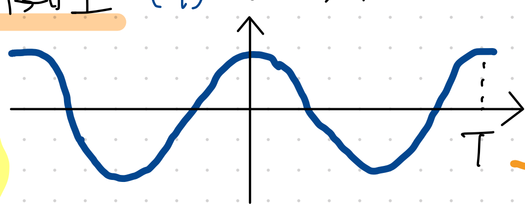
(6) $k\lambda = 2\pi$ (7) $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ 波長

(8) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 波数(2πあたりの波の数)

($\tilde{k} = 1/\lambda$ を波数という分野もある.)

t依存性 (9) $f(t,0,y,z) = A\cos(\omega t)$

x=0に固定



(10) $\omega T = 2\pi$ (11) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 周期

ω 角振動数 (12) $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 振動数

◻ 一般の平面波解　(☆) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,\mathbf{r}) = (v_s)^2 \triangle f(t,\mathbf{r})$

(1) $g(s) = A\cos(ks+\theta)$　$k>0$, A, θ は定数　$\mathbf{e}$ 任意の単位ベクトル

p8-(4)の(☆)の解は　(2) $\mathbf{k} = k\mathbf{e}$, $\omega = kv_s = |\mathbf{k}|v_s > 0$　として

(3) $f(t,\mathbf{r}) = g(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r} - v_s t) = \boxed{A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \theta)} = \mathrm{Re}[Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\theta}e^{-i\omega t}]$

もちろん $g(s)$ を経由しなくてもいい

(☆)の平面波解　(4) $f(t,\mathbf{r}) = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \theta)$

- 波数ベクトル $\mathbf{k}$ は任意のゼロでないベクトル
- $\mathbf{k}$ の方向に速さ $v_s = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$ で進む波
- 角振動数 ω は正にとるのが標準

$\mathbf{k}$ と ω は (5) $\omega = v_s|\mathbf{k}|$ で結ばれる

波面　f が一定値をとる領域 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ が一定値をとる $\mathbf{r}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{k}$ と直交する面

定在波

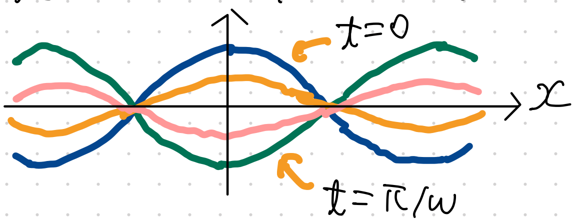
(☆) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, \mathbf{r}) = (v_s)^2 \Delta f(t, \mathbf{r})$

$k > 0$, $\omega = k v_s > 0$ とする　　$\mathbf{k} = (\pm k, 0, 0)$ に対応する平面波解

(1) $f_+(t, \mathbf{r}) = A \cos(kx - \omega t)$　　v_s で x の正方向へ

(2) $f_-(t, \mathbf{r}) = A \cos(-kx - \omega t)$　　v_s で x の負方向へ

足したものも解　(3) $f_+(t, \mathbf{r}) + f_-(t, \mathbf{r}) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t)$



$\boxed{\mathbf{r}\ 依存}$ ← 分離 → $\boxed{t\ 依存}$

$\cos kx$ の形をたもったまま振動　定在波

分離

一般の定在波　(4) $f(t, \mathbf{r}) = \cos(\omega t)\, h(\mathbf{r})$　$\omega > 0$

(4) を (☆) に代入 (5) $\begin{cases} 左辺 = -\omega^2 \cos(\omega t)\, h(\mathbf{r}) \\ 右辺 = (v_s)^2 \cos(\omega t)\, \Delta h(\mathbf{r}) \end{cases}$

Helmholtz 方程式

(6) $\Delta h(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\omega}{v_s}\right)^2 h(\mathbf{r})$

が成り立てば解になる

(6) の解の例　(7) $h(\mathbf{r}) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta)$　$\left(|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{v_s} \right)$

球対称な解

(☆) $\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,\boldsymbol{r}) = (v_s)^2 \Delta f(t,\boldsymbol{r}) \quad v_s > 0$

任意の $g(s)$ について (1) $f(t,\boldsymbol{r}) = \frac{g(|\boldsymbol{r}| - v_s t)}{|\boldsymbol{r}|}$ は(☆)の解

($\boldsymbol{r} = (0,0,0)$ は除く!)

なにかちがうことがおきている..

(1)を(☆)に代入

(2) $\begin{cases} 左辺 = (v_s)^2 \frac{g''(|\boldsymbol{r}| - v_s t)}{|\boldsymbol{r}|} \\ 右辺 = ? \end{cases}$

球対称な関数の Laplacian についての公式　$h(r)$ 任意の1変数関数

(3) $\Delta h(|\boldsymbol{r}|) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) h(r)\Big|_{r=|\boldsymbol{r}|} = h''(|\boldsymbol{r}|) + \frac{2}{|\boldsymbol{r}|} h'(|\boldsymbol{r}|)$

(4) $\frac{\partial |\boldsymbol{r}|}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|}$

(5) $\frac{\partial}{\partial x} h(|\boldsymbol{r}|) = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|} h'(|\boldsymbol{r}|)$, (6) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(|\boldsymbol{r}|) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} h'(|\boldsymbol{r}|) - \frac{x}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{x}{|\boldsymbol{r}|} h'(|\boldsymbol{r}|) + \frac{x^2}{|\boldsymbol{r}|^2} h''(|\boldsymbol{r}|)$

(7) $\Delta h(|\boldsymbol{r}|) = \frac{3}{|\boldsymbol{r}|} h'(|\boldsymbol{r}|) - \frac{x^2+y^2+z^2}{|\boldsymbol{r}|^3} h'(|\boldsymbol{r}|) + \frac{x^2+y^2+z^2}{|\boldsymbol{r}|^2} h''(|\boldsymbol{r}|) = h''(|\boldsymbol{r}|) + \frac{2}{|\boldsymbol{r}|} h'(|\boldsymbol{r}|)$

つづき

(1) $$\Delta f(t,\mathbf{x}) = \Delta \frac{g(|\mathbf{x}|-v_s t)}{|\mathbf{x}|} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{g(r-v_s t)}{r}\Bigg|_{r=|\mathbf{x}|}$$

(2) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{g(r-v_s t)}{r}\right) = -\frac{g(r-v_s t)}{r^2} + \frac{g'(r-v_s t)}{r}$$

(3) $$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{g(r-v_s t)}{r}\right) = \frac{2g(r-v_s t)}{r^3} - \frac{2g'(r-v_s t)}{r^2} + \frac{g''(r-v_s t)}{r}$$

(4) $$\Delta f(t,\mathbf{x}) = \frac{g''(|\mathbf{x}|-v_s t)}{|\mathbf{x}|}$$

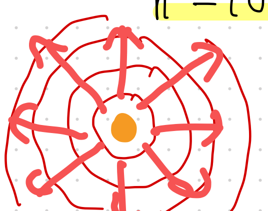
p12-(2)と比べて p12-(1)は(☆)の解.

球面波の解　(5) $g(s) = A\cos(ks+\theta)$　$k>0$, A, θ 定数

p12-(1)の(☆)の解は (6) $\omega = k v_s > 0$ として

(7) $$f(t,\mathbf{x}) = \frac{A\cos(k|\mathbf{x}|-\omega t+\theta)}{|\mathbf{x}|} = \mathrm{Re}\left[\frac{A e^{ik|\mathbf{x}|+i\theta}}{|\mathbf{x}|} e^{-i\omega t}\right]$$

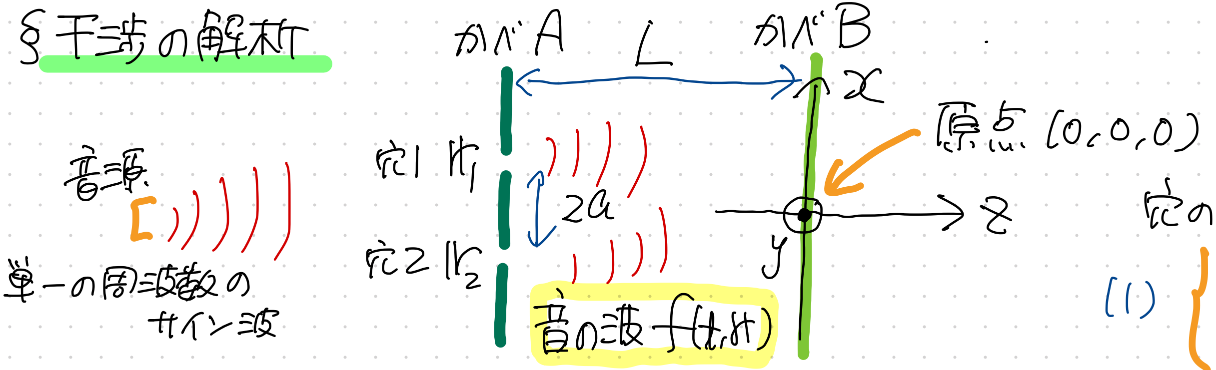
$\mathbf{x}=(0,0,0)$の点音源から外にむかう波



$\mathbf{x}_0$が音源なら　(8) $$f(t,\mathbf{x}) = \frac{A\cos(k|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|-\omega t+\theta)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}$$

定ベクトル

§干渉の解析



穴の位置

$$(1)\quad \begin{cases} r_1 = (a, 0, -L) \\ r_2 = (-a, 0, -L) \end{cases}$$

B上の点 (x,y) での音の強さ (2) $I(x,y) := \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^T dt\, \{f(t,x,y,0)\}^2$

じゅんび (3) $f(t,r) = \mathrm{Re}[\varphi(r)e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2}\{\varphi(r)e^{-i\omega t} + \varphi^*(r)e^{i\omega t}\}$

と書けるとする ($\varphi(r)$ 複素数値関数) ← 量子力学へ

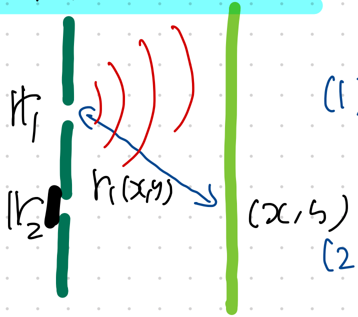
$$(4)\quad \{f(t,r)\}^2 = \frac{1}{4}\{(\varphi(r))^2 e^{-2i\omega t} + (\varphi^*(r))^2 e^{2i\omega t} + 2|\varphi(r)|^2\}$$

(5) $\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^T dt\, e^{\pm 2i\omega t} = 0$ より

これを使って $I(x,y)$ を求める

$$(6)\quad I(x,y) = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^T dt\, \frac{1}{4}\{\cdots + 2|\varphi(x,y,0)|^2\} = |\varphi(x,y,0)|^2$$

Ⅲ 穴1だけをあけた



$\mathbf{r}_1=(a,0,-L)$ を中心とする球面波

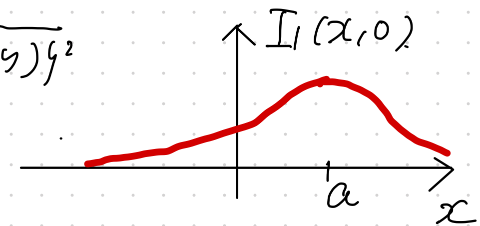
(1) $$f_1(t,\mathbf{r})=\frac{A\cos(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|-\omega t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}=\mathrm{Re}\left[\underbrace{\frac{Ae^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}_{=\varphi_1(\mathbf{r})}e^{-i\omega t}\right]$$

(2) $r_1(x,y)=|(x,y,0)-\mathbf{r}_1|=\sqrt{(x-a)^2+y^2+L^2}$ とすると

(3) $$\varphi_1(x,y,0)=A\frac{e^{ikr_1(x,y)}}{r_1(x,y)}$$

P14-(6)より (4) $$I_1(x,y)=|\varphi_1(x,y,0)|^2=A^2\frac{1}{\{r_1(x,y)\}^2}$$

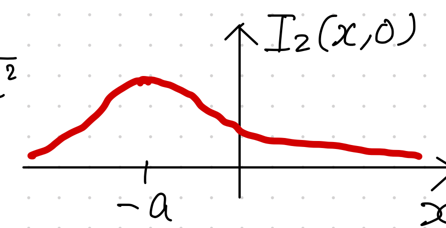
$$=\frac{A^2}{(x-a)^2+y^2+L^2}$$



Ⅲ 穴2だけをあけた

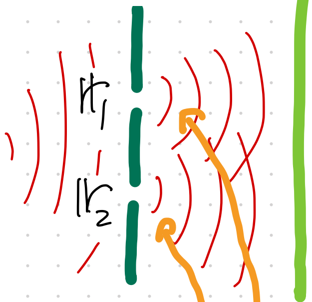
(5) $$f_2(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}[\varphi_2(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$$

(6) $$\varphi_2(x,y,0)=A\frac{e^{ikr_2(x,y)}}{r_2(x,y)}$$ (7) $r_2(x,y)=\sqrt{(x+a)^2+y^2+L^2}$



(8) $$I_2(x,y)=|\varphi_2(x,y,0)|^2=\frac{A^2}{(x+a)^2+y^2+L^2}$$

Ⅲ 穴1と穴2をあける



同位相の2つの球面波

線形性から

$$(1)\quad f_{12}(t,r) = \frac{A\cos(k|r-r_1|-\omega t)}{|r-r_1|} + \frac{A\cos(k|r-r_2|-\omega t)}{|r-r_2|}$$

$$= \mathrm{Re}\left[(\varphi_1(r)+\varphi_2(r))\, e^{-i\omega t}\right]$$

$$(2)\quad I_{12}(x,y) = |\varphi_1(x,y,0)+\varphi_2(x,y,0)|^2$$

part1-p9の「ネタばれ」と同じ形!

$$= \{\varphi_1^*(x,y,0)+\varphi_2^*(x,y,0)\}\{\varphi_1(x,y,0)+\varphi_2(x,y,0)\}$$

$$= \underbrace{|\varphi_1(x,y,0)|^2}_{=I_1(x,y)} + \underbrace{|\varphi_2(x,y,0)|^2}_{=I_2(x,y)} + \underbrace{\{\varphi_1^*(x,y,0)\varphi_2(x,y,0)+\varphi_1(x,y,0)\varphi_2^*(x,y,0)\}}_{=\Delta I(x,y)}$$

$\Delta I(x,y)$ 干渉項

ゼロではない

(1) $\Delta I(x,y) = \varphi_1^*(x,y,0)\,\varphi_2(x,y,0) + \varphi_1(x,y,0)\,\varphi_2^*(x,y,0)$

$$= \frac{1}{r_1(x,y)\,r_2(x,y)}\left\{e^{ik\{r_1(x,y)-r_2(x,y)\}} + e^{ik\{-r_1(x,y)+r_2(x,y)\}}\right\}$$

$$= \frac{2\cos\left(k\{r_1(x,y)-r_2(x,y)\}\right)}{r_1(x,y)\,r_2(x,y)}$$ ← 確かに振動する

$|x|, |y|, a \ll L$ とすると

(2) $r_1(x,y) = \sqrt{(x-a)^2+y^2+L^2} = L\sqrt{1+\frac{(x-a)^2+y^2}{L^2}} \simeq L\left\{1+\frac{(x-a)^2+y^2}{2L^2}\right\}$

$$= L + \frac{(x-a)^2+y^2}{2L}$$

(3) $r_1(x,y) - r_2(x,y) \simeq \frac{(x-a)^2+y^2}{2L} - \frac{(x+a)^2+y^2}{2L} = -\frac{2a}{L}x$

分母については単に $r_1(x,y)\,r_2(x,y) \simeq L^2$

(4) $\Delta I(x,y) \simeq \frac{1}{L^2}\cos\left(\frac{2ka}{L}x\right)$