行列とベクトル → 線形代数　1

〈d次元の代数ベクトル〉

§定義と演算

次元　$d = 1, 2, 3, \ldots$

▷ 列ベクトル or 縦ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad (1)$$

$a_i \in \mathbb{C}$ → 複素ベクトル

a_i → $\mathbf{a}$ の i 成分

$(\mathbf{a})_i$ とも書く．

$a_i \in \mathbb{R}$ なら 実ベクトル

▷ 行ベクトル or 横ベクトル

$$\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_d) \quad (2)$$

$b_i \in \mathbb{C}$

$\boxed{\text{横 行 縦 列}}$　(行 列)

◻ 転置

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad (1) \qquad \mathbf{a}^t = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_d) \quad (2)$$

t: transpose

$$\mathbf{b} = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_d) \quad (3) \qquad \mathbf{b}^t = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \quad (4)$$

一般に

$$(\mathbf{v}^t)^t = \mathbf{v} \quad (5)$$

転置して複素共役.

◻ エルミート共役

$\dagger$: dagger

$$\mathbf{a}^\dagger = (a_1^*\ a_2^*\ \cdots\ a_d^*) \quad (6)$$

$$\mathbf{b}^\dagger = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_d^* \end{pmatrix} \quad (7)$$

一般に

$$(\mathbf{v}^\dagger)^\dagger = \mathbf{v} \quad (8)$$

3

▷ 和と定数倍

$$\mathbb{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbb{a}+\mathbb{b}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_d+b_d \end{pmatrix} \quad (2)$$

$\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha\mathbb{a}=\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_d \end{pmatrix} \quad (3)$$

▷ 線形結合

$\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \dots, \mathbb{v}_n$ ベクトル

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$

$$\alpha_1\mathbb{v}_1+\alpha_2\mathbb{v}_2+\cdots+\alpha_n\mathbb{v}_n \quad (4)$$

を $\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_n$ の線形結合という

▷ ゼロベクトル

$$\mathbb{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

▷ 自然な積

$$\mathbb{a} = (a_1 \cdots a_d) \quad (1) \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \quad (2)$$

順番が重要!

$$\underbrace{\mathbb{a}}_{\text{行ベクトル}} \underbrace{\mathbb{b}}_{\text{列ベクトル}} = (a_1\ a_2 \cdots a_d) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$$

$$:= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_d b_d$$

$$= \sum_{i=1}^{d} a_i b_i \quad (3)$$

線形性

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

$\mathbb{a}, \mathbb{b}$ 行ベクトル

$\mathbb{c}, \mathbb{d}$ 列ベクトル

$$(\alpha \mathbb{a} + \beta \mathbb{b})(\gamma \mathbb{c} + \delta \mathbb{d})$$

$$= \alpha\gamma\, \mathbb{a}\mathbb{c} + \alpha\delta\, \mathbb{a}\mathbb{d} + \beta\gamma\, \mathbb{b}\mathbb{c} + \beta\delta\, \mathbb{b}\mathbb{d} \quad (4)$$

§線形独立性と基底

「一次独立」ともいう

定義 n個の列ベクトル $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \cdots, \mathbb{v}_n$ が**線形独立**

$$\Updownarrow$$

$\alpha_i \in \mathbb{C}$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{v}_i = \mathbb{0}$ となるのは $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ のときのみ

定義 線形独立でなければ線形従属

定理 $n > d$ とする 任意のn個の(d次元)ベクトルは線形従属である.

定理 $n>d$ とする 任意の n 個の (d 次元) ベクトルは 線形従属である.

証明 次元 d についての帰納法

(i) $d=1$ 自明 v_1, v_2 $\alpha u_1+\beta v_2=0$ となる
α, β はすぐみつかる.

(ii) $d=k$ で示されたとして, $d=k+1$ の場合を示す.

ⓐ $n>k+1$ となる n について 任意の $v_1, \cdots, v_n$ をとる.

ⓑ 場合分け (1) 少くともひとつの i について $(v_i)_{k+1} \neq 0$
(2) すべての i について $(v_i)_{k+1}=0$

もし (2) なら $v_1, \cdots, v_n$ は k 次元ベクトル → 線形従属 おわり

よって 以下では (1) のみを考える.

ⓒ ベクトルの番号をつけかえて $(v_n)_{k+1} \neq 0$ としてよい

ⓓ $i=1, \cdots, n-1$ について $u_i = v_i - \dfrac{(v_i)_{k+1}}{\boxed{(v_n)_{k+1}}} v_n$ とする.
$\neq 0$

すると $k+1$ 成分は

$$(u_i)_{k+1} = (v_i)_{k+1} - \frac{(v_i)_{k+1}}{(v_n)_{k+1}} (v_n)_{k+1} = 0$$

7

ⓔ すべての $i=1,\cdots,n-1$ について $(\mathbb{u}_i)_{k+1}=0$

つまり $\mathbb{u}_1,\cdots,\mathbb{u}_{n-1}$ は k 次元ベクトル

→ $\mathbb{u}_1,\cdots,\mathbb{u}_{n-1}$ は 線形従属

⟷「すべてが同時にゼロ」ではない $\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ があり

$$\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\mathbb{u}_i=\mathbb{0}$$

ⓕ $\mathbb{u}_i=\mathbb{v}_i-\dfrac{(\mathbb{v}_i)_{k+1}}{(\mathbb{v}_n)_{k+1}}\mathbb{v}_n$ を代入すれば

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{v}_i=\mathbb{0}$$

$$\alpha_i=\beta_i \quad (i=1,\cdots,n-1)$$

$$\alpha_n=-\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\frac{(\mathbb{v}_i)_{k+1}}{(\mathbb{v}_n)_{k+1}}$$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ は「すべてが同時にゼロ」ではない

$\mathbb{v}_1,\cdots,\mathbb{v}_n$ は 線形従属

※ $n \leq d$ なら n個の線形独立なベクトルはある.

例 $e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e^{(d)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (1)

これらの中からとった任意のn個は線形独立.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{定理 } v^{(1)}, \cdots, v^{(d)} \text{ を任意の線形独立な}\\ d\text{次元のベクトルの集まりとする. 任意のベクトル } v \text{ を}\\ \qquad v = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i v^{(i)} \qquad (2)\\ \text{と展開できる. 展開係数 } \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ は一意的}\end{array}}$

重要な定理!

証明は幾何ベクトルのときと同じ
(part3 p26)

§ 内積と正規直交基底

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 列ベクトル

$$\boxed{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{d} a_i^* b_i} \qquad (1)$$

内積の基本的な性質

$$\langle \mathbf{a}, \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \rangle = \beta \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \gamma \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \qquad (2)$$

$$\langle \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \beta^* \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \qquad (3)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle^* \qquad (4)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \sum_{i=1}^{d} |a_i|^2 \geq 0 \qquad (5)$$

絶対値 $|\mathbf{a}| := \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ (6)

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}$ は直交という (7)

(Cauchy-Schwarz 不等式

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

) (8)

正規直交基底

次元は d

d 個の列ベクトル $v^{(1)}, \dots, v^{(d)}$ が

$$\boxed{\langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle = \delta_{i,j}} \quad (i,j=1,\dots,d) \tag{1}$$

をみたすとき $\{v^{(1)}, \dots, v^{(d)}\}$ を正規直交基底という

- $v^{(1)}, \dots, v^{(d)}$ は線形独立
- 任意のベクトル v を

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i v^{(i)}} \tag{2}$$

と展開したとき $\alpha_i = \langle v^{(i)}, v \rangle$ (3)

$$\begin{aligned}
\because \langle v^{(i)}, v \rangle &= \langle v^{(i)}, \sum_{j=1}^{d} \alpha_j v^{(j)} \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \delta_{i,j} = \alpha_i
\end{aligned} \tag{4}$$

<d×d行列>

§行列の基本

▷ 正方行列とは?

d^2個の複素数を $d \times d$ の表のように並べたもの

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,d}$$

左の形をこう略記

$a_{ij} \in \mathbb{C} \rightarrow$ 複素行列 ← フツウはこっち

$a_{ij} \in \mathbb{R} \rightarrow$ 実行列

Aの i,j 成分 (i行 j列 成分)

a_{ij} を $(A)_{ij}$ とも書く

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$(A)_{11} = 1,\ (A)_{12} = 2, \ldots$

$(B)_{22} = e,\ (B)_{23} = f, \ldots$

行と列

$$\begin{array}{c} \text{第1行} \\ \text{第2行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{第1列} & \text{第2列} & & \\ & & & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \text{j列} \\ \text{i行} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

列ベクトルを使った表現

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{dj} \end{pmatrix} \text{として} \quad A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_d)$$

特別な行列

ゼロ行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

単位行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(I)_{ij} = \delta_{ij} \quad (3)$$

§行列の演算

▷**和** $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$ (1)

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ とか‥ (2)

▷**定数倍** $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij}$ (3)

例 $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ (4)

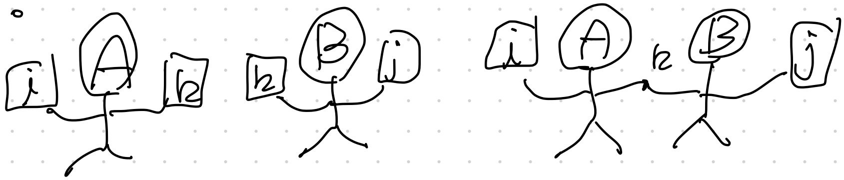
▷**積** A, B $d \times d$ 行列　AB も $d \times d$ 行列.

$$\boxed{(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{d} (A)_{ik} (B)_{kj}} \quad (5)$$

$(i, j = 1, \cdots, d)$

この形は「自然」だから頭にいれよう!

- AB は行列だから2つの「足」(添字)がある
- A, B は行列だから,あわせて 4つの「足」がある
  2つが余分!



積を図形的にみる

自然な積 (p4-(3))

1行　1列

$(AB)_{11}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

1行　2列

$(AB)_{12}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

2行　1列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & \bullet \end{pmatrix}$$

$(AB)_{21}$

2行　2列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$(AB)_{22}$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj}$$ と一致.

3×3でも…

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

$$1\times 0 + 2\times 1 + 3\times 0 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & 7 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

$$1\times 1 + 2\times 0 + 3\times 2 = 7$$

同様に計算して

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 16 & 15 \\ 8 & 25 & 24 \end{pmatrix}$$

- 具体的な計算には図形的方法を使う
- 証明などには定義 p14-(5) を使う.

▷ 行列の積の性質

- ゼロ行列 $OA = AO = O$ (1)
- 単位行列 $IA = AI = A$ (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3)$$

証明 $$(IA)_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \underbrace{(I)_{ik}}_{=\delta_{ik}} (A)_{kj} = (A)_{ij} \quad (4)$$

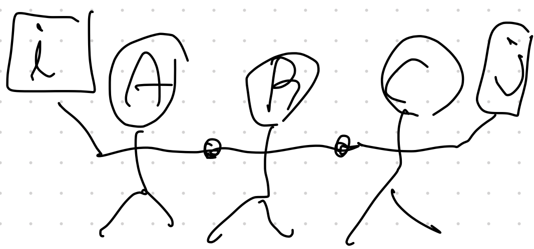
- 結合則 $(AB)C = A(BC)$ (5)

証明

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k} (AB)_{ik}(C)_{kj} = \sum_{k,l} (A)_{il}(B)_{lk}(C)_{kj} \quad (6)$$

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{k} (A)_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k,l} (A)_{ik}(B)_{kl}(C)_{lj} \quad (7)$$

よって ABC と書いてよい



$$A^n = \underbrace{A \cdots\cdots A}_{n\text{個}} \quad (8)$$

- 線形性

$$(\alpha A+\beta B)C=\alpha AC+\beta BC \quad (1)$$

$$A(\beta B+\gamma C)=\beta AB+\gamma AC \quad (2)$$

- 非可換性

一般には AB と BA は異なる!

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \quad (4)$$

交換子 $[A,B]:=AB-BA$ (5)

例

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2+AB-BA$$

$$=A^2-B^2+[A,B] \quad (6)$$

行列の転置

行と列をいれかえる. $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$ (1)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad (2)$$

- 基本的な性質

$$(A^t)^t = A \quad (3)$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (4)$$

証明

$$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k (A)_{jk}(B)_{ki}$$

$$= \sum_k (A^t)_{kj}(B^t)_{ik} = \sum_k (B^t)_{ik}(A^t)_{kj}$$

$$= (B^t A^t)_{ij} \quad // \quad (5)$$

▷ 行列のエルミート共役

転置して各成分の複素共役

$$(A^\dagger)_{ij} = ((A)_{ji})^* \quad (1)$$

例
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad (2)$$

• 基本的な性質

$$(\alpha A + \beta B)^\dagger = \alpha^* A^\dagger + \beta^* B^\dagger \quad (3)$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (4)$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A \quad (5)$$

§ 行列とベクトルの積

▷ 行列と列ベクトルの積

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,d} \quad (1) \qquad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \quad (2)$$

$A\mathbb{b}$ は列ベクトル $\boxed{(A\mathbb{b})_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} b_j}$ (3)

「自然な積」になっている。

$$\begin{array}{cc} & \text{1列} \\ \text{1行} & \end{array}$$

$$A\mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1d}b_d \\ \vdots \\ \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A(\alpha\mathbb{a} + \beta\mathbb{b}) = \alpha A\mathbb{a} + \beta A\mathbb{b} \quad (5)$$

$$(\alpha A + \beta B)\mathbb{v} = \alpha A\mathbb{v} + \beta B\mathbb{v} \quad (6)$$

▷内積との組み合わせ

u, v ベクトル, A 行列

$$\langle u, Av \rangle = \sum_{i,j=1}^{d} (u_i)^* a_{ij} v_j \in \mathbb{C} \quad (1)$$

↑ Aをuとvで「はさんで」つくった数.

$$\langle e^{(i)}, Ae^{(j)} \rangle = a_{ij} \quad (2)$$

(p8-(1) 参照)

$$\langle u, Av \rangle = \langle A^\dagger u, v \rangle \quad (3)$$

証明

$$\text{右辺} = \sum_j \left((A^\dagger u)_j \right)^* v_j = \sum_j \left(\sum_i (A^\dagger)_{ji} u_i \right)^* v_j$$

$$= \sum_{i,j} u_i^* \left((A^\dagger)_{ji} \right)^* v_j = \sum_{i,j} u_i^* (A)_{ij} v_j$$

$$= \text{左辺} \quad // \quad (4)$$

▷ 行ベクトルと行列の積

$$\mathbb{a} = (a_1\ a_2 \cdots a_d) \quad (1)$$ 行ベクトル

$$B = (b_{ij})_{i,j=1,\cdots,d} \quad (2)$$ 行列

$$(\mathbb{a}B)_j = \sum_{i=1}^{d} a_i b_{ij} \quad (3)$$

$$(a_1\ a_2 \cdots a_d)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{2d} & \cdots & b_{dd} \end{pmatrix} = (a_1 b_{11} + \cdots + a_d b_{d1}\ \ \bullet \cdots \bullet) \quad (4)$$

▷ 列ベクトルと行ベクトルの積 → クロネッカー積

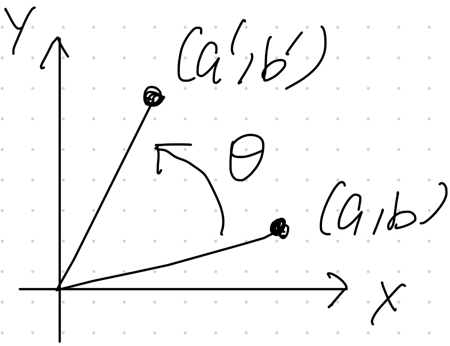
$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad (5) \qquad \mathbb{b} = (b_1\ b_2 \cdots b_d) \quad (6)$$

$\mathbb{a}\mathbb{b}$ は $d \times d$ 行列 $(\mathbb{a}\mathbb{b})_{ij} = a_i b_j$ (7)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}(b_1 \cdots b_d) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix} \quad (8)$$

§回転行列

✎2次元での回転 (part3 p4~5)



part3−P5−(4)

$$\begin{cases} a' = \cos\theta\, a - \sin\theta\, b & (1) \\ b' = \sin\theta\, a + \cos\theta\, b & (2) \end{cases}$$

(1), (2) をまとめて

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{= O_\theta} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (3)$$

と書ける

O_θ $\boxed{\text{回転行列}}$

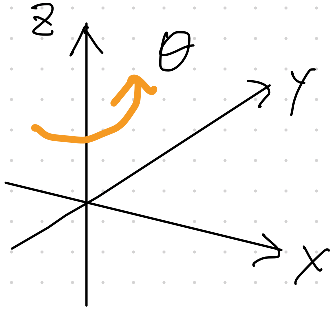
$$O_\theta O_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = O_{\theta+\varphi} \quad (4)$$

まずφ回転して 次にθ回転.

順番に注意!!

Ⅲ 3次元での回転



3次元空間の点 (a,b,c) を

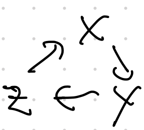
- z軸まわりに θ だけ回転

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & (1) \\ c' = c & (2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= O_\theta^{(z)}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (3)$$

$O_\theta^{(z)}$ z軸まわりのθ回転の回転行列

- y軸まわりにθ



$$\begin{cases} \begin{pmatrix} c' \\ a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} & (4) \\ b' = b & (5) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}_{= O_\theta^{(y)}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (6)$$

- x軸まわりも同様

▷ 3次元の回転行列

$$O_\theta^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$O_\theta^{(y)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$O_\theta^{(z)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

これらをかけ合わせることで3次元でのすべての回転が表わされる → 定理 7.10

注 $O_\theta^{(x)} O_\varphi^{(y)}$ と $O_\varphi^{(y)} O_\theta^{(x)}$ は一般に異なる!

↳ y軸まわりにφまわして次にx軸まわりにθ

↳ x軸まわりにθまわして次にy軸まわりにφ

問 $O_\pi^{(x)} O_\pi^{(y)}$ は? $O_\pi^{(z)}$ と比べてみよう!

問 7.2.3 a (p390) もおもしろい

§特別な行列

▷ゼロ行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (1) ▷単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ (2)

▷対角行列 $i \neq j$ なら $(A)_{ij} = 0$ (3)

$(A)_{ii} = a_i$ と書けば (4) $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_d \end{pmatrix}$ (5)

$B = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_d \end{pmatrix}$ (6) なら

$$AB = BA = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & & 0 \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_d b_d \end{pmatrix} \quad (7)$$

▷実対称行列

すべての i, j について $(A)_{ij} = (A)_{ji} \in \mathbb{R}$ (8)

▷エルミート行列

すべての i, j について $(A)_{ij} = ((A)_{ji})^*$ (9)

つまり $A^\dagger = A$ (10)

▷ユニタリー行列

$\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \ldots, \mathbf{u}^{(d)}\}$ 任意の正規直交基底

$$U = (\mathbf{u}^{(1)}\ \mathbf{u}^{(2)} \cdots \mathbf{u}^{(d)}) \quad (1)$$

と書ける行列をユニタリー行列という

● 重要な性質

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} (\mathbf{u}^{(1)})^\dagger \\ (\mathbf{u}^{(2)})^\dagger \\ \vdots \\ (\mathbf{u}^{(d)})^\dagger \end{pmatrix} (\mathbf{u}^{(1)}\ \mathbf{u}^{(2)} \cdots \mathbf{u}^{(d)})$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{u}^{(1)})^\dagger \mathbf{u}^{(1)} & (\mathbf{u}^{(1)})^\dagger \mathbf{u}^{(2)} & \cdots & (\mathbf{u}^{(1)})^\dagger \mathbf{u}^{(d)} \\ (\mathbf{u}^{(2)})^\dagger \mathbf{u}^{(1)} & (\mathbf{u}^{(2)})^\dagger \mathbf{u}^{(2)} & \cdots & (\mathbf{u}^{(2)})^\dagger \mathbf{u}^{(d)} \\ & & & \\ (\mathbf{u}^{(d)})^\dagger \mathbf{u}^{(1)} & (\mathbf{u}^{(d)})^\dagger \mathbf{u}^{(2)} & \cdots & (\mathbf{u}^{(d)})^\dagger \mathbf{u}^{(d)} \end{pmatrix} = I \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \quad (3), \qquad \langle \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \quad (4)$$

(定理 Uはユニタリー $\Leftrightarrow$ $U^\dagger U = I$ $\Leftrightarrow$ $UU^\dagger = I$)

▷直交行列

$\{v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(d)}\}$ すべて実ベクトルの正規直交基底

$$O = (v^{(1)}\ v^{(2)}\ \ldots\ v^{(d)}) \qquad (1)$$

と書ける行列を直交行列という

ユニタリー行列の場合と同様に

$$O^t O = I \qquad (2)$$

が成立

定理 Oは直交行列 $\Leftrightarrow$ $O^t O = I$ $\Leftrightarrow$ $O O^t = I$

§行列のトレース

行列の対角成分の和

$$\mathrm{Tr}[A] = \sum_{i=1}^{d} (A)_{ii} \qquad (1)$$

・基本的な性質

$$\mathrm{Tr}[0] = 0 \qquad (2)$$

$$\mathrm{Tr}[I] = d \qquad (3)$$

$$\mathrm{Tr}[\alpha A + \beta B] = \alpha \mathrm{Tr}[A] + \beta \mathrm{Tr}[B] \qquad (4)$$

$$\mathrm{Tr}[AB] = \mathrm{Tr}[BA] \qquad (5)$$

任意の列ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ について

$$\mathrm{Tr}[\mathbb{a}\mathbb{b}^\dagger] = \mathbb{b}^\dagger \mathbb{a} = \langle \mathbb{b}, \mathbb{a} \rangle \qquad (6)$$

(5)の証明　$A = (a_{ij})_{i,j=1,\cdots,d}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1,\cdots,d}$

$$\mathrm{Tr}[AB] = \sum_{i=1}^{d} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{ij} b_{ji}$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{d} (BA)_{jj} = \mathrm{Tr}[BA]$$

//

§ 2×2行列の逆行列とディターミナント

連立一次方程式と逆行列

複素定数 a, b, c, d, p, q
未知数 x, y

連立1次方程式
$$\begin{cases} ax + by = p & (1) \\ cx + dy = q & (2) \end{cases}$$

フツウに消去したりすれば とける。
$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc} \quad (3) \qquad y = \frac{-cp + aq}{ad - bc} \quad (4)$$

(1), (2) をあえて行列とベクトルで書く
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5) \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (6)$$

もし $\boxed{A^{-1}A = I}$ (7) となる行列 A^{-1} があれば
(6)の両辺に左から A^{-1} をかけて
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (8)$$
解が出る！

どんな行列はあるのか？

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \quad (1)$$ と書く

$$A^{-1}A = I \quad (2)$$ だから

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{cases} ua + vc = 1 \quad (4) & ub + vd = 0 \quad (5) \\ wa + zc = 0 \quad (6) & wb + zd = 1 \quad (7) \end{cases}$$

$ad - bc \neq 0$ (8) なら

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (9)$$ と求まる.

たしかに P31-(3),(4)の解がでる.

また $$AA^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

定理

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ は

条件 $ad-bc\neq 0$ (1) をみたすとする.

Aの逆行列を

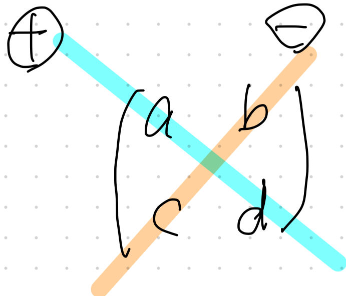
$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (2)$$

とすると

$$A^{-1}A=I \quad (3) \qquad AA^{-1}=I \quad (4)$$

が成り立つ

ディターミナント



$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (1) に対して

$$\boxed{\det[A] := ad - bc} \quad (2)$$

Aのディターミナント(determinant) or 行列式

⇓

行列を特徴づけるひとつの複素数。

$|A|$ と書くこともある(絶対値ではない!!)

$\det[\alpha A] = \alpha^2 \det[A]$ (3) に注意

決して

$\det[A+B]$ は $\det[A]+\det[B]$ ではない!!

一方,任意の A, B について

$$\det[AB] = \det[A]\det[B] \quad (4)$$

まったくあたり前ではない因数分解!!

$\det[AB] = \det[A]\det[B]$ (1) を示そう

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2) \qquad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\det[A] \neq 0$, $\det[B] \neq 0$ とする.

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (4) に注意.

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \quad (5)$$

より

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det[AB]} \begin{pmatrix} cb' + dd' & -(ab' + bd') \\ -(ca' + ac') & aa' + bc' \end{pmatrix} \quad (6)$$

一方

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{\det[B]} \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} \frac{1}{\det[A]} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det[A]\det[B]} \begin{pmatrix} d'd + b'c & -d'b - b'a \\ -c'd - a'c & c'b + a'a \end{pmatrix} \quad (7)$$

同じ!!

よって $\det[AB] = \det[A]\det[B]$

〈行列のディターミナント〉

$\det[A]$ 行列Aを特徴づけるひとつの数.

$$\det[AB] = \det[A]\det[B] \quad (1)$$

をみたす.

行列の理論の中心

§ $d=1$ のディターミナント

$$A = (a_{11}) \quad (1) \qquad \det[A] = a_{11} \quad (2)$$

§ $d=2$ のディターミナント

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\det[A] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (4)$$

$+$ $-$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

▷ d=2のディターミナントと平行四辺形の面積

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2) \quad (1)$$

さしあたって $a_{ij} \in \mathbb{R}$ とする.

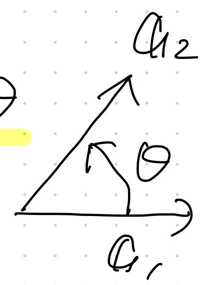
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を 2次元の幾何ベクトルと見る.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} \quad (2)$$

← $\det[A]$

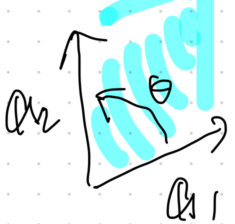
part3-p18-(4)より

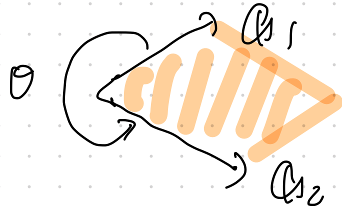
$$\det[A] = \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2| \sin\theta \quad (3)$$



$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ は $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ のつくる

平行四辺形の符号つきの面積





$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] =$ 面積 (4) $\qquad \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = -$(面積) (5)

△符号つき面積の性質

(i) 反対称性 $\det[a_1, a_2] = -\det[a_2, a_1]$ (1)

(ii) 線形性

$$\det[\alpha a_1 + \beta b_1, a_2] = \alpha \det[a_1, a_2] + \beta \det[b_1, a_2] \quad (2)$$

$$\det[a_1, \alpha a_2 + \beta b_2] = \alpha \det[a_1, a_2] + \beta \det[a_1, b_2] \quad (3)$$

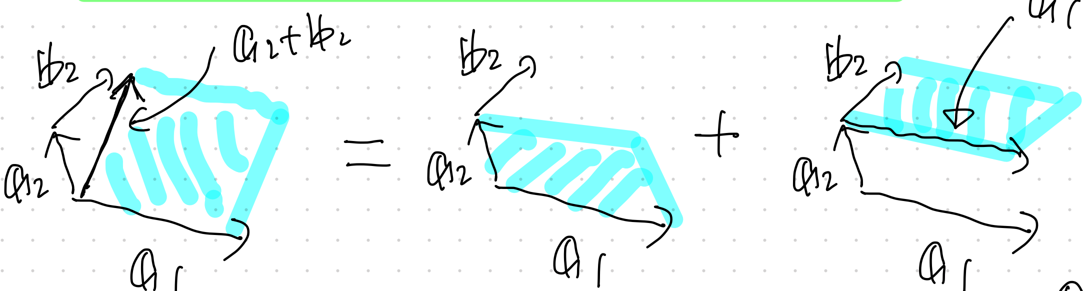
(iii)

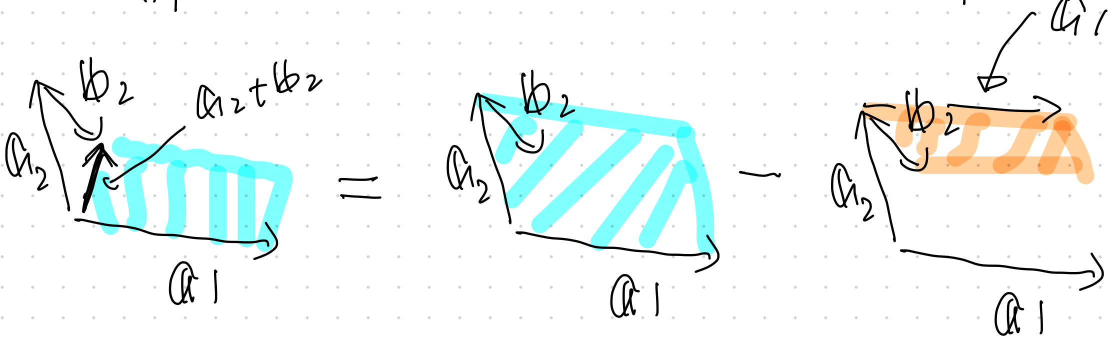
$$\det\left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \end{pmatrix}\right] = a_{11} a_{22} = a_{11} \det[(a_{22})] \quad (4)$$

1×1行列

長方形の面積=(高さ)×(底辺)

線形性のために符号は本質的!





d=2のディターミナント

本来のとおり，$a_{ij} \in \mathbb{C}$ とする．

(i), (ii), (iii) の条件（ただし (ii) で $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$）
から $\det[A]$ は一意的に決まる．

$$\mathbb{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1) \qquad \mathbb{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(iii) より $\det[\mathbb{e}^{(1)}, \mathbb{e}^{(2)}] = \det\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 1$ (3)

(i) より $\det[\mathbb{e}^{(2)}, \mathbb{e}^{(1)}] = -1$ (4)

(i) より $\det[\mathbb{a}, \mathbb{a}] = -\det[\mathbb{a}, \mathbb{a}] = 0$ (5)

よって
$$\begin{cases} \det[\mathbb{e}^{(1)}, \mathbb{e}^{(2)}] = 1 & (6) \\ \det[\mathbb{e}^{(2)}, \mathbb{e}^{(1)}] = -1 & (7) \\ \det[\mathbb{e}^{(1)}, \mathbb{e}^{(1)}] = \det[\mathbb{e}^{(2)}, \mathbb{e}^{(2)}] = 0 & (8) \end{cases}$$

基底ベクトル $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$ で展開して

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e}^{(1)} + a_{21}\mathbf{e}^{(2)} \qquad (1)$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{e}^{(1)} + a_{22}\mathbf{e}^{(2)} \qquad (2)$$

よって

$$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \det[\mathbf{a}_1, a_{12}\mathbf{e}^{(1)} + a_{22}\mathbf{e}^{(2)}] \qquad (3\text{-}1)$$

(ii)

$$= a_{12}\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{e}^{(1)}] + a_{22}\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{e}^{(2)}] \qquad (3\text{-}2)$$

$$= a_{12}\det[a_{11}\mathbf{e}^{(1)} + a_{21}\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(1)}] + a_{22}\det[a_{11}\mathbf{e}^{(1)} + a_{21}\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(2)}] \qquad (3\text{-}3)$$

$$= a_{12}a_{11}\det[\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(1)}] + a_{12}a_{21}\det[\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(1)}] + a_{22}a_{11}\det[\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}] + a_{22}a_{21}\det[\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(2)}] \qquad (3\text{-}4)$$

$$= a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \qquad (3\text{-}5)$$

← 前と同じものがでた!

▷同じことをかっこよく…

ϵ_{ij} レヴィ・チビタの記号 $(i,j=1,2)$

$$\epsilon_{12}=1,\ \epsilon_{21}=-1 \quad (1)$$

$$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0 \quad (2)$$

p39-(6),(7),(8)は

$$\boxed{\det[\mathbb{e}^{(i)},\mathbb{e}^{(j)}]=\epsilon_{ij} \quad (i,j=1,2)} \quad (3)$$

$$\det[\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2]=\det\left[\sum_{i=1}^{2}a_{i1}\mathbb{e}^{(i)},\ \sum_{j=1}^{2}a_{j2}\mathbb{e}^{(j)}\right] \quad (4\text{-}1)$$

$$\overset{\text{(ii)}}{=}\sum_{i=1}^{2}a_{i1}\det\left[\mathbb{e}^{(i)},\ \sum_{j=1}^{2}a_{j2}\mathbb{e}^{(j)}\right] \quad (4\text{-}2)$$

$$\overset{\text{(ii)}}{=}\sum_{i,j=1}^{2}a_{i1}a_{j2}\det[\mathbb{e}^{(i)},\mathbb{e}^{(j)}] \quad (4\text{-}3)$$

$$\overset{(3)}{=}\sum_{i,j=1}^{2}\epsilon_{ij}a_{i1}a_{j2}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \quad (4\text{-}4)$$

ちなみに

$$\det[\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2]=\sum_{i,j=1}^{2}\epsilon_{ij}a_{1i}a_{2j} \quad (5)$$ とも書ける.

§d=3のディターミナント

同じ考えで3×3行列のディターミナントを定義

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3) \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

~~一時的に~~ $a_{ij} \in \mathbb{R}$ とする.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は 3次元の縦ベクトルとみなせる.

$$\det[A] = \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$$

を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ のつくる平行六面体の「符号つき体積」と定義

◇ 符号つき体積の性質

(i) 反対称性　任意の2つをいれかえるとマイナスがつく

$$\det[a_1, a_2, a_3] = -\det[a_3, a_2, a_1] \quad (1)$$

$$= \det[a_2, a_3, a_1] \quad \text{など}$$

(ii) 線形性

$$\det[\alpha a_1 + \beta b_1, a_2, a_3] = \alpha \det[a_1, a_2, a_3] + \beta \det[b_1, a_2, a_3] \quad (2)$$

他の2つの成分についても同様

(iii)

$$\det\left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right] = \underbrace{a_{11}}_{\text{高さ}} \underbrace{\det\left[\begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right]}_{\text{底面積}} \quad (3)$$

- 再び $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とする.

(i), (ii), (iii) より

(iv) a_1, a_2, a_3 が線形従属なら $\det[a_1, a_2, a_3] = 0$

- $\det[a, a, b] = -\det[a, a, b] = 0 \quad (4)$

- 線形従属 → 少くともひとつが残り2つの線形結合

$a_1 = \alpha a_2 + \beta a_3$ なら

$$\det[a_1, a_2, a_3] = \alpha \det[a_2, a_2, a_3] + \beta \det[a_3, a_2, a_3] = 0 \quad (5)$$

▷ det[A] を求める

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_i' + \tilde{\mathbf{a}}_i \quad (1)$$

と分解

$$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \det[\mathbf{a}_1' + \tilde{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_2' + \tilde{\mathbf{a}}_2, \mathbf{a}_3' + \tilde{\mathbf{a}}_3]$$

(ii)

$$= \det[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3'] \quad (A)$$

$$+ \det[\tilde{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3'] + \det[\mathbf{a}_1', \tilde{\mathbf{a}}_2, \mathbf{a}_3'] + \det[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \tilde{\mathbf{a}}_3] \quad (B)$$

$$+ \det[\mathbf{a}_1', \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3] + \det[\tilde{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_2', \tilde{\mathbf{a}}_3] + \det[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \mathbf{a}_3'] \quad (C)$$

$$+ \det[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3] \quad (D) \qquad (2)$$

実は A, B, D はゼロ!

ゼロになる理由

Ⓐ a_i' は 1次元のベクトル

3つの 1次元ベクトルは 線形従属

$$\det[a_1', a_2', a_3'] = 0 \qquad (1)$$

Ⓑ 2つの1次元ベクトルは 線形従属

$$\det[\tilde{a}_1, a_2', a_3'] = 0 \text{ など} \qquad (2)$$

Ⓓ 3つの 2次元ベクトルは 線形従属

$$\det[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3] = 0 \qquad (3)$$

$$\det[a_1, a_2, a_3] \quad (1)$$

$$= \det[a_1', \tilde{a}_2, \tilde{a}_3] + \det[\tilde{a}_1, a_2', \tilde{a}_3] + \det[\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, a_3'] \quad (2)$$

(i)

$$= \det[a_1', \tilde{a}_2, \tilde{a}_3] + \det[a_2', \tilde{a}_3, \tilde{a}_1] + \det[a_3', \tilde{a}_1, \tilde{a}_2] \quad (3)$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right] + \det\left[\begin{pmatrix} a_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}\right] \quad (4)$$

$$+ \det\left[\begin{pmatrix} a_{13} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}\right] \quad (5)$$

(iii)

$$= a_{11} \det\left[\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right] + a_{12} \det\left[\begin{pmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{pmatrix}\right] \quad (6)$$

$$+ a_{13} \det\left[\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right] \quad (7)$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \quad (8)$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (9)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \quad (10)$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (11)$$

$$\det[a_1, a_2, a_3]$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (2)$$

「たすきがけ」のルール

$+$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$-$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 1\times1\times4 + 2\times1\times3 + 0 - 0 - 2\times2\times4 - 1\times1\times1$$

$$= -7 \quad (3)$$

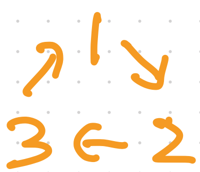
ディターミナントの規則性

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\det[A] = \overset{1}{a_{11}}\overset{2}{a_{22}}\overset{3}{a_{33}} + \overset{2}{a_{12}}\overset{3}{a_{23}}\overset{1}{a_{31}} + \overset{3}{a_{13}}\overset{1}{a_{21}}\overset{2}{a_{32}}$$

$$- \overset{1}{a_{11}}\overset{3}{a_{23}}\overset{2}{a_{32}} - \overset{2}{a_{12}}\overset{1}{a_{21}}\overset{3}{a_{33}} - \overset{3}{a_{13}}\overset{2}{a_{22}}\overset{1}{a_{31}} \qquad (2)$$

▷ $a_{1\square}\, a_{2\square}\, a_{3\square}$ の形にそろえると



右まわり　$+$

左まわり　$-$

(3)

レヴィ・チビタの記号 ϵ_{ijk}

$i, j, k = 1, 2, 3$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (1)$$

$$\det[A] = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (2)$$

すべての(i,j,k)の組み合わせ

27通りの和

（上の6項以外は全てゼロ）

50

基底ベクトルを用いて $\det[A]$ を求める

$$e^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad (1) \qquad e^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad (2) \qquad e^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad (3)$$

まず

$$\det[e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}] = \det\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

(iii)

$$= 1\times\det\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = 1 \quad (4)$$

(i)より

$$\det[e^{(3)}, e^{(2)}, e^{(1)}] = -\det[e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}] = -1 \quad (5)$$ など

(iv)より

$$\det[e^{(2)}, e^{(2)}, e^{(1)}] = 0 \quad (6)$$ など

つまり

$$\det[e^{(i)}, e^{(j)}, e^{(k)}] = \epsilon_{ijk} \quad (7)$$

51

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (\mathbb{a}_1 \ \mathbb{a}_2 \ \mathbb{a}_3) \qquad (1)$$

$$\mathbb{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \mathbb{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \mathbb{a}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\mathbb{a}_1=\sum_{i=1}^{3} a_{i1}\,\mathbb{e}^{(i)} \quad \mathbb{a}_2=\sum_{j=1}^{3} a_{j2}\,\mathbb{e}^{(j)} \quad \mathbb{a}_3=\sum_{k=1}^{3} a_{k3}\,\mathbb{e}^{(k)} \qquad (3)$$

$$\det[A]=\det\left[\sum_{i=1}^{3} a_{i1}\,\mathbb{e}^{(i)},\ \sum_{j=1}^{3} a_{j2}\,\mathbb{e}^{(j)},\ \sum_{k=1}^{3} a_{k3}\,\mathbb{e}^{(k)}\right] \qquad (4\text{-}1)$$

(ii)

$$=\sum_{i=1}^{3} a_{i1}\det\left[\mathbb{e}^{(i)},\ \sum_{j=1}^{3} a_{j2}\,\mathbb{e}^{(j)},\ \sum_{k=1}^{3} a_{k3}\,\mathbb{e}^{(k)}\right] \qquad (4\text{-}2)$$

(ii)

$$=\sum_{i,j=1}^{3} a_{i1}a_{j2}\det\left[\mathbb{e}^{(i)},\ \mathbb{e}^{(j)},\ \sum_{k=1}^{3} a_{k3}\,\mathbb{e}^{(k)}\right] \qquad (4\text{-}3)$$

(ii)

$$=\sum_{i,j,k=1}^{3} a_{i1}a_{j2}a_{k3}\det[\mathbb{e}^{(i)},\mathbb{e}^{(j)},\mathbb{e}^{(k)}] \qquad (4\text{-}4)$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,a_{i1}a_{j2}a_{k3} \qquad (4\text{-}5)$$

◎ det[A]の2つの表式？

P49-(2) $\det[A] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k}$ (1)

P51-(4) $\det[A] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{i1}\, a_{j2}\, a_{k3}$ (2)

(1)と(2)は同じ？

一般に a_{ij} と a_{ji} は等しくない！

(3-1) $a_{\square 1}\, a_{\square 2}\, a_{\square 3}$ の形

(2)より

$$\det(A) = \overset{1}{a_{11}}\,\overset{2}{a_{22}}\,\overset{3}{a_{33}} + \overset{2}{a_{21}}\,\overset{3}{a_{32}}\,\overset{1}{a_{13}} + \overset{3}{a_{31}}\,\overset{1}{a_{12}}\,\overset{2}{a_{23}}$$

$$- \overset{3}{a_{31}}\,\overset{2}{a_{22}}\,\overset{1}{a_{13}} - \overset{2}{a_{21}}\,\overset{1}{a_{12}}\,\overset{3}{a_{33}} - \overset{1}{a_{11}}\,\overset{3}{a_{32}}\,\overset{2}{a_{23}}$$

(3-2) $a_{1\square}\, a_{2\square}\, a_{3\square}$ の形

$$= \overset{1}{a_{11}}\,\overset{2}{a_{22}}\,\overset{3}{a_{33}} + \overset{3}{a_{13}}\,\overset{1}{a_{21}}\,\overset{2}{a_{32}} + \overset{2}{a_{12}}\,\overset{3}{a_{23}}\,\overset{1}{a_{31}}$$

$$- \overset{3}{a_{13}}\,\overset{2}{a_{22}}\,\overset{1}{a_{31}} - \overset{2}{a_{12}}\,\overset{1}{a_{21}}\,\overset{3}{a_{33}} - \overset{1}{a_{11}}\,\overset{3}{a_{23}}\,\overset{2}{a_{32}}$$

= (1)の形 (3)

深い理由は「数学4」で！

(1)と(2)は等しい ← 「当たり前」ではない！

⊳ まとめとこれからの課題

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1) \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

$$\det[A] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (2\text{-}1)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{i1} a_{j2} a_{k3} \quad (2\text{-}2)$$

ここから ただちに $\det[A^t] = \det[A]$ (3)

⊳ $\det[AB] = \det[A]\det[B]$ (4) は成り立つのか?

⊳ 一般の d の場合はどうなるのか?

$$d=2 \quad \det[A] = \sum_{i,j=1}^{2} \epsilon_{ij}\, a_{1i} a_{2j} = \sum_{i,j=1}^{2} \epsilon_{ij}\, a_{i1} a_{j2} \quad (5)$$

だった...

ϵ_{ijkl} などを使う? → 置換 「数学4」

〈おまけ〉

§レヴィ・チビタの記号と外積

3次元の幾何ベクトル $\mathbb{a}$, $\mathbb{b}$

$x \to 1$, $y \to 2$, $z \to 3$ として

$\mathbb{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbb{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (1)

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ と書く.

もちろん

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \quad (2)$$

外積については

$$(\mathbb{a} \times \mathbb{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (3)$$

これを使うと

$$\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) = \sum_{i=1}^{3} a_i (\mathbb{b} \times \mathbb{c})_i = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad (4)$$