〈微分方程式の解法〉

1

§ 積分するだけで解けるもの

既知関数

‖

$x(t)$：未知関数　$f(t)$：与えられた関数

$$\dot{x}(t) = f(t) \qquad (1)$$

$\dot{F}(t) = f(t)$

$f(t)$の原始関数のひとつ → $F(t)$

一般解

$$x(t) = F(t) + \underbrace{C}_{\text{任意定数}} = \underbrace{\int dt\, f(t)}_{\text{不定積分}} \qquad (2)$$

▷ 定積分を使うと

$$\frac{dx(s)}{ds} = f(s) \qquad (3)$$

$$\underbrace{\int_0^t ds\, \frac{dx(s)}{ds}}_{= x(t) - x(0)} = \int_0^t ds\, f(s) \qquad (4)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t ds\, f(s) \qquad (5)$$

これも一般解

§変数分離法

例 $\dot{N}(t) = -\gamma N(t) + \beta$ (1)

すでに2つの解き方を知っている. 3つ目!

すべてのtにおいて $N(t) = \frac{\beta}{\gamma}$ (2)

は(1)の定数解

これ以外の解を求める.

(1)をかきかえて

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\gamma \overbrace{\left\{N(t) - \frac{\beta}{\gamma}\right\}}^{\text{ゼロでない}} \qquad (3)$$

$$\frac{dN(t)}{dt}\left\{N(t) - \frac{\beta}{\gamma}\right\}^{-1} = -\gamma \qquad (4)$$

両辺をtについて不定積分

$$\int dt \frac{dN(t)}{dt}\left\{N(t) - \frac{\beta}{\gamma}\right\}^{-1} = -\int dt\, \gamma \qquad (5)$$

3

$$\int dt \frac{dN(t)}{dt}\left\{N(t)-\frac{\beta}{\gamma}\right\}^{-1} = -\int dt\, \gamma \quad (1)$$

$\|$ $N=N(t)$を新しい変数にして
$\|$ 積分の変数変換（置換積分）

$$\int dN\left\{N-\frac{\beta}{\gamma}\right\}^{-1}\Bigg|_{N=N(t)} \quad (2)$$

$\Downarrow$ $\log\left|N-\frac{\beta}{\gamma}\right|$

よって

$$\log\left|N(t)-\frac{\beta}{\gamma}\right| + C_1 = -\gamma t + C_2 . \quad (3)$$

$$\log\left|N(t)-\frac{\beta}{\gamma}\right| = C - \gamma t \quad (4)$$

$$\left|N(t)-\frac{\beta}{\gamma}\right| = e^{C} e^{-\gamma t} \quad (5)$$

$$N(t)-\frac{\beta}{\gamma} = A e^{-\gamma t} \quad (6)$$

一般解が出た！

$A=\pm e^{C}$は任意定数

▷実用的な解き方

引数を略して書く

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma N + \beta = -\gamma\left\{N - \frac{\beta}{\gamma}\right\} \quad (1)$$

Nを含む部分を左に，tを含む部分を右に．

$$\frac{dN}{N - \frac{\beta}{\gamma}} = -\gamma\, dt \quad (2)$$

← やばい式

両辺に $\int$ をつける

$$\int \frac{dN}{N - \frac{\beta}{\gamma}} = -\int \gamma\, dt \quad (3)$$

あとは積分

$$\log\left|N - \frac{\beta}{\gamma}\right| = -\gamma t + C \quad (4)$$

さいごに $N \to N(t)$

別の例

(1) $\dot{x}(t) = \alpha\{x(t)\}^2$ (α 定数)

引数省略 (2) $\dfrac{dx}{dt} = \alpha x^2$

左右に分離 (3) $\dfrac{dx}{x^2} = \alpha dt$

積分に (4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \int \alpha dt$

積分実行 (5) $-\dfrac{1}{x} = \alpha t + C$

$x \downarrow x(t)$ (6) $-\dfrac{1}{x(t)} = \alpha t + C$

$t=0$ 代入 (7) $-\dfrac{1}{x(0)} = C$

一般解! (8) $x(t) = \left\{\dfrac{1}{x(0)} - \alpha t\right\}^{-1}$

別の例

(1) $\dot{x}(t) = \alpha e^{-\beta t} \{x(t)\}^2$

(α, β 定数)

引数省略。 (2) $\dfrac{dx}{dt} = \alpha e^{-\beta t} x^2$

左右に分離 (3) $\dfrac{dx}{x^2} = \alpha e^{-\beta t} dt$

積分に (4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \int \alpha e^{-\beta t} dt$

積分実行 (5) $-\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t} + C$

$x \downarrow x(t)$ (6) $-\dfrac{1}{x(t)} = -\dfrac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t} + C$

$t=0$ 代入 (7) $-\dfrac{1}{x(0)} = -\dfrac{\alpha}{\beta} + C$ → Cを出して(6)に代入

一般解! (8) $x(t) = \left\{ \dfrac{1}{x(0)} - \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t} \right\}^{-1}$

もちろんなんでも変数分離でとけるわけではない.

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta t \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta t \quad (2)$$

「xを左, tを右」にはできない.

重力と空気抵抗をうける粒子

m

$\Uparrow$ 空気抵抗 $\propto (v(t))^2$

速度が大きいとほぼ2乗に比例

$\downarrow v(t)$

$\Downarrow$ 重力 mg

Newton方程式

$$m\dot{v}(t) = mg - \alpha\{v(t)\}^2 \qquad (1)$$

(α 正の定数)　$\boxed{v(t) \geq 0}$

少し変形，引数を省略

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{\alpha}\right) \qquad (2)$$

$\beta = \dfrac{\alpha}{m}$, $v_\infty = \sqrt{\dfrac{mg}{\alpha}}$ とおくと

$$\frac{dv}{dt} = -\beta\left(v^2 - (v_\infty)^2\right) \qquad (3)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta\left(v^2 - (v_\infty)^2\right) \quad (1)$$

すべてのtで$v(t) = v_\infty$は明らかに解

定数解

$v(t) \neq v_\infty$の解をみつけよう.

左右に分けて積分をつけて

$$\int \frac{dv}{v^2 - (v_\infty)^2} = -\beta \int dt \quad (2)$$

あとは積分を計算するだけ

右辺　$-\beta \int dt = -\beta t + C_1$　(3)

左辺

$$\int \frac{dv}{v^2 - v_\infty^2} = \frac{1}{2v_\infty} \int dv \left(\frac{1}{v - v_\infty} - \frac{1}{v + v_\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{2v_\infty} \log \frac{|v - v_\infty|}{|v + v_\infty|} + C_2 \quad (1)$$

よって $v \to v(t)$ として

$$\log \frac{|v(t) - v_\infty|}{|v(t) + v_\infty|} = -2 v_\infty \beta t - 2C \quad (2)$$

少しわざとらしい.

$$\frac{|v(t) - v_\infty|}{|v(t) + v_\infty|} = e^{-2(v_\infty \beta t + C)} \quad (3)$$

$$\frac{v(t) - v_\infty}{v(t) + v_\infty} = A e^{-2 v_\infty \beta t} \quad (4)$$

$$A = \boxed{\pm} e^{-2C} \quad (5)$$

$v(t)$ が v_∞ より大きいか小さいかで自動的にきまる.

$$\frac{v(t)-v_\infty}{v(t)+v_\infty}=Ae^{-2v_\infty\beta t} \quad (1)$$

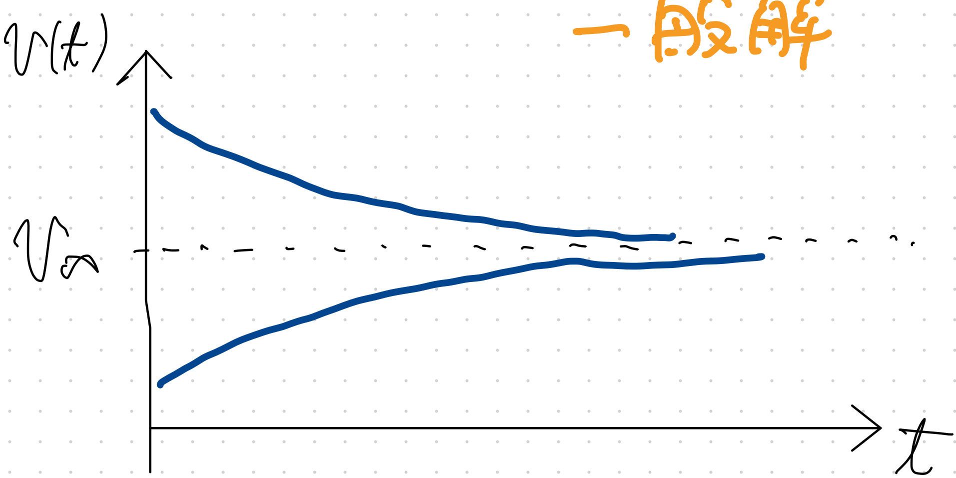
$t=0$ として $A=\dfrac{v(0)-v_\infty}{v(0)+v_\infty}$ (2)

(1) を $v(t)$ について解いて，(2) を代入。

$$v(t)=v_\infty\frac{1+Ae^{-2v_\infty\beta t}}{1-Ae^{-2v_\infty\beta t}}$$

$$=v_\infty\frac{v(0)+v_\infty+\{v(0)-v_\infty\}e^{-2v_\infty\beta t}}{v(0)+v_\infty-\{v(0)-v_\infty\}e^{-2v_\infty\beta t}} \quad (3)$$

一般解



$0 \leq v(t) < v_\infty$ の場合の解の別の書き方 12

$$|v(t) - v_\infty| = -(v(t) - v_\infty) \quad (1)$$

$$|v(t) + v_\infty| = v(t) + v_\infty \quad (2)$$ なので

P10〜(3) より

$$\frac{-(v(t) - v_\infty)}{v(t) + v_\infty} = e^{-2(v_\infty \beta t + C)} \quad (3)$$

$v(t)$ について解くと

$$v(t) = v_\infty \frac{1 - e^{-2(v_\infty \beta t + C)}}{1 + e^{-2(v_\infty \beta t + C)}}$$

$$= v_\infty \tanh(v_\infty \beta t + C) \quad (4)$$

$t=0$ として $$\frac{v(0)}{v_\infty} = \tanh(C) \quad (5)$$

$$C = \tanh^{-1}\left(\frac{v(0)}{v_\infty}\right) \quad (6)$$

$$v(t) = v_\infty \tanh\left(v_\infty \beta t + \tanh^{-1}\left(\frac{v(0)}{v_\infty}\right)\right) \quad (7)$$

▷ 双曲線関数

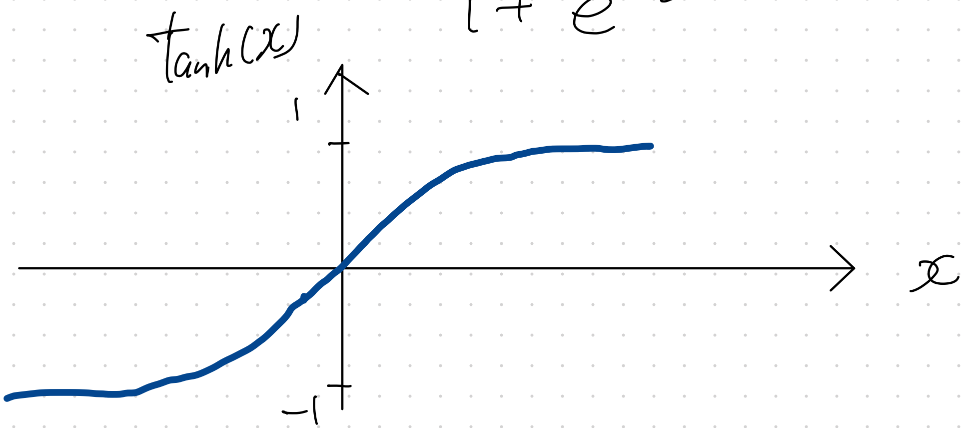
$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad (1)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad (2)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$= \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \qquad (3)$$



§線形一階常微分方程式

- 常微分方程式　変数がひとつ

↕

（偏微分方程式　変数が複数）

- 一階　微分が一階
- 線形　未知関数とその導関数の1次式　$(x(t))^2$ などがない

線形斉次　未知関数のみ

例　$\dot{x}(t) = -\gamma\, x(t)$　(1)

線形非斉次　未知関数と定数または与えられた関数

例　$\dot{x}(t) = -\gamma\, x(t) + \beta$　(2)

$\dot{x}(t) = -\gamma\, x(t) + \alpha t$　(3)

線形一階常微分方程式の一般形

- t 変数
- $x(t)$ 未知の関数 → 与えられた関数.
- $f(t), g(t)$ 既知の関数

線形斉次方程式の一般形

$$\dot{x}(t) = f(t)x(t) \quad (1)$$

線形非斉次方程式の一般形

$$\dot{x}(t) = f(t)x(t) + g(t) \quad (2)$$

線形性の話

斉次方程式　$\dot{x}(t) = f(t)\,x(t)$　(1)

(1)の２つの解　$x_1(t),\ x_2(t)$

つまり　$\dot{x}_1(t) = f(t)\,x_1(t)$　(2)

$\dot{x}_2(t) = f(t)\,x_2(t)$　(3)

任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について

$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$　(4)

$x_1(t)$ と $x_2(t)$ の線形結合

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \alpha \dot{x}_1(t) + \beta \dot{x}_2(t) \\
&= \alpha f(t)\,x_1(t) + \beta f(t)\,x_2(t) \\
&= f(t)\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} \\
&= f(t)\,x(t) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

これも (1) の解！

（非斉次の場合はもう少しややこしい）

線形斉次方程式の一般形

$$\dot{x}(t) = f(t)x(t) \tag{1}$$

これは変数分離法で解ける.

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x \tag{2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt\, f(t) \tag{3}$$

$$\log|x(t)| = \int dt\, f(t) \tag{4}$$

$$x(t) = C e^{F(t)} \tag{5}$$

C：任意定数

F(t)：f(t)の原始関数

18

§線形非斉次一階常微分方程式の解き方(1) 特解を用いる

particular solution

$x(t)$：未知関数， $f(t), g(t)$ 既知関数

$$\dot{x}(t) = f(t)x(t) + g(t) \quad (1)$$

▷対応する斉次の微分方程式の一般解を求める $x_0(t)$ ← 任意定数を含む

$$\dot{x}_0(t) = f(t)x_0(t) \quad (2)$$

▷なんでもいいので(1)の解をひとつみつける $x_{ps}(t)$

$$\dot{x}_{ps}(t) = f(t)x_{ps}(t) + g(t) \quad (3)$$

▷これらの和が(1)の一般解！！

$$x(t) = x_0(t) + x_{ps}(t) \quad (4)$$

$$\dot{x}(t) = f(t)x(t) + g(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_0(t) = f(t)x_0(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}_{ps}(t) = f(t)x_{ps}(t) + g(t) \quad (3)$$

$$x(t) = x_0(t) + x_{ps}(t) \quad (4)$$

(4)をtで微分

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \dot{x}_{ps}(t)$$

(2) (3)

$$= f(t)x_0(t) + f(t)x_{ps}(t) + g(t)$$

$$= f(t)\{x_0(t) + x_{ps}(t)\} + g(t)$$

$$= f(t)x(t) + g(t) \quad (5)$$

(1)式のもの!

$x(t)$は任意定数を含んでいる。任意の$x(0)$に対応する解が得られた。!!

例1

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta t^2 \quad (1)$$

(α, β 定数)

斉次 $\dot{x}_0(t) = \alpha x_0(t) \quad (2)$

一般解 $x_0(t) = C e^{\alpha t} \quad (3)$ 任意定数

特解 $x_{ps}(t) = a t^2 + b t + c \quad (4)$

という形の解をさがそう

(a, b, c はこれからきめる定数)

(1)に代入

左辺 $= 2at + b \quad (5)$

右辺 $= \alpha a t^2 + \alpha b t + \alpha c + \beta t^2 \quad (6)$

任意の t について 左辺＝右辺 だから

$$a = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad b = -\frac{2\beta}{\alpha^2}, \quad c = -\frac{2\beta}{\alpha^3} \quad (7)$$

任意定数

$$x(t) = \boxed{C} e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} t^2 - \frac{2\beta}{\alpha^2} t - \frac{2\beta}{\alpha^3} \quad (8)$$

例2

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta e^{\gamma t} \quad (1)$$

(α, β, γ 定数)

斉次の一般解 $x_0(t) = C_1 e^{\alpha t}$ (2)

特解として $x_{ps}(t) = a e^{\gamma t}$ (3)

という形の解をさがす. (aはこれから決める)

$$a\gamma e^{\gamma t} = \alpha a e^{\gamma t} + \beta e^{\gamma t} \quad (4)$$

$$\therefore \quad a = \frac{\beta}{\gamma - \alpha} \quad (5)$$

一般解 $x(t) = C_1 e^{\alpha t} + \dfrac{\beta}{\gamma - \alpha} e^{\gamma t}$ (6)

C_1 → 任意定数

しかし $\alpha = \gamma$ のときは??

(3)の仮定が正しくなかった…

§線形非斉次一階常微分方程式の解き方(2)　定数変化法

例 $\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta e^{\alpha t}$ (1)

(α, β 定数)　前ページの(1)で $\gamma = \alpha$ とした

斉次の一般解 $x_0(t) = C e^{\alpha t}$ (2)

任意定数 $C \rightarrow$ 関数 $C(t)$

(1)の解を $x(t) = \underbrace{C(t)}_{\text{新しい未知関数}} e^{\alpha t}$ (3) と書く

(1)に代入

$$\dot{C}(t) e^{\alpha t} + \alpha C(t) e^{\alpha t} = \alpha C(t) e^{\alpha t} + \beta e^{\alpha t} \quad (4)$$

$\dot{C}(t) = \beta$ (5) $\rightarrow$ $C(t) = \underbrace{C'}_{\text{任意定数}} + \beta t$ (6)

(3)に戻して

$$x(t) = (C' + \beta t) e^{\alpha t} \quad (7)$$

$C' = x(0)$ (8)

23

例 $m\dot{v}(t) = -\gamma v(t) + f_0\cos(\omega t)$ (1)

(m, γ, f_0, ω 定数)

$$\dot{v}(t) = -\frac{\gamma}{m}v(t) + \frac{f_0}{m}\cos(\omega t) \quad (2)$$

斉次の一般解 $v_0(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}$ (3)

(2)の解を

$$v(t) = C(t)e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad (4)$$

と書く。

(2)に代入

$$\dot{C}(t)e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{\gamma}{m}C(t)e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$= -\frac{\gamma}{m}C(t)e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{f_0}{m}\cos(\omega t) \quad (5)$$

$$\dot{C}(t) = \frac{f_0}{m}e^{\frac{\gamma}{m}t}\cos(\omega t) \quad (6)$$

よって

$$C(t) = \frac{f_0}{m}\int dt\, e^{\frac{\gamma}{m}t}\cos(\omega t) \quad (7)$$

$$C(t) = \frac{f_0}{m} \int dt \, e^{\frac{\gamma}{m} t} \cos(\omega t)$$

$$= \frac{f_0}{m} e^{\frac{\gamma}{m} t} \frac{\frac{\gamma}{m} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 + \omega^2} + C' \qquad (1)$$

本の(4.2.60)

よって

$$v(t) = C' e^{-\frac{\gamma}{m} t} + f_0 \frac{\gamma \cos(\omega t) + m\omega \sin(\omega t)}{\gamma^2 + (m\omega)^2} \qquad (2)$$

参考 一般形

$$\dot{x}(t) = f(t)x(t) + g(t) \qquad (1)$$

$x(t)$: 未知関数, $f(t), g(t)$ 既知関数.

こんな一般的なものも(形式的に)解ける!

▷ 斉次方程式 $\dot{x}_0(t) = f(t)x_0(t)$ (2) の一般解

$$x_0(t) = C\, e^{\int_0^t ds f(s)} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\int_0^t ds f(s) = f(t) \ (4) \text{ だから } \dot{x}_0(t) = f(t)x_0(t) \ (5) \right)$$

▷ (1)の解を

$$x(t) = \boxed{C(t)}\, e^{\int_0^t ds f(s)} \qquad (6)$$

と書く (未知関数)

$$\dot{x}(t) = \dot{C}(t)\, e^{\int_0^t ds f(s)} + f(t)\underbrace{C(t)\, e^{\int_0^t ds f(s)}}_{= x(t)} \qquad (7)$$

よって

$$\dot{C}(t)\, e^{\int_0^t ds f(s)} = g(t) \qquad (8)$$

$$\dot{C}(t)\, e^{\int_0^t ds\, f(s)} = g(t) \quad (1)$$

つまり $$\dot{C}(t) = e^{-\int_0^t ds\, f(s)} g(t) \quad (2)$$

積分するだけで解けるタイプ！

p1-(5) より

$$C(t) = C(0) + \int_0^t du\; e^{-\int_0^u ds\, f(s)} g(u) \quad (3)$$

$$x(t) = C(t)\, e^{\int_0^t ds\, f(s)}$$
$$= \left\{ C(0) + \int_0^t du\, e^{-\int_0^u ds\, f(s)} g(u) \right\} e^{\int_0^t ds\, f(s)} \quad (4)$$

$t=0$ とおれば明らかに $C(0) = x(0)$

$$\boxed{x(t) = \left\{ x(0) + \int_0^t du \left(e^{-\int_0^u ds\, f(s)} g(u) \right) \right\} e^{\int_0^t ds\, f(s)}} \quad (5)$$

一般の場合の解が書けた！！

具体的な微分方程式をとくには不便