

# ミクロとマクロを 結ぶ科学

小さくてあまり面白くないさうなものが  
すごくたくさん集まると新しい面白い性質が勝手  
に生まれてくるという話

田崎 晴明

小さくて目に見えない

身の回りの普通の大きさ

# ミクロとマクロを 結ぶ科学

小さくてあまり面白くないのが  
すごくたくさん集まると新しい面白いことが  
生まれてくるという話

統計力学

田崎 晴明

# 目次

- ミクロの世界：原子と分子
- 相転移とは？
- 2次元強磁性イジング模型における相転移
- 集団の意思決定のモデル
- さまざまな相転移と統計力学
- 転移点での2次元強磁性イジング模型
- まとめ



# ミクロの世界

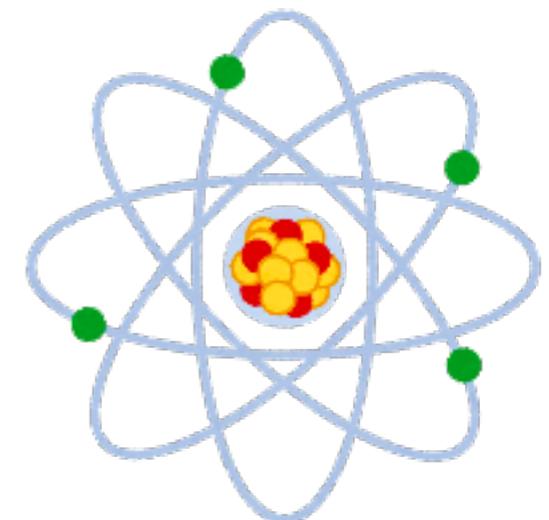
## 原子と分子

# この世界は私たちが 見た通りそのままではない

- ▶ 大地は平らに見える → 地球は丸い



- ▶ 太陽が地球のまわりをまわっているように見える  
→ 地球が静止しているわけじゃない
- ▶ 物はいろいろな材料でできている  
→ すべての物質は目に見えない分子や  
原子がたくさん集まってできている

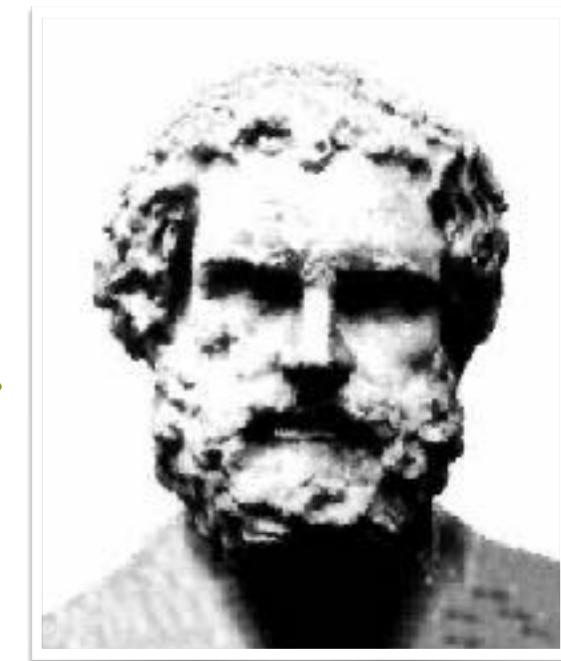


まったく当たり前ではない！！

# 初期の原子論

## ・ 古代ギリシャの原子論

物質には不可分の単位があるという考え方  
実験・観察に基づかない思弁的な原子論



*Democritus*  
(B.C. 460-370?)

## ・ 19世紀前半の原子論

化学反応についての定量的な経験事実  
を原子・分子の描像で理解



*Amedeo Avogadro*  
(1776-1856)

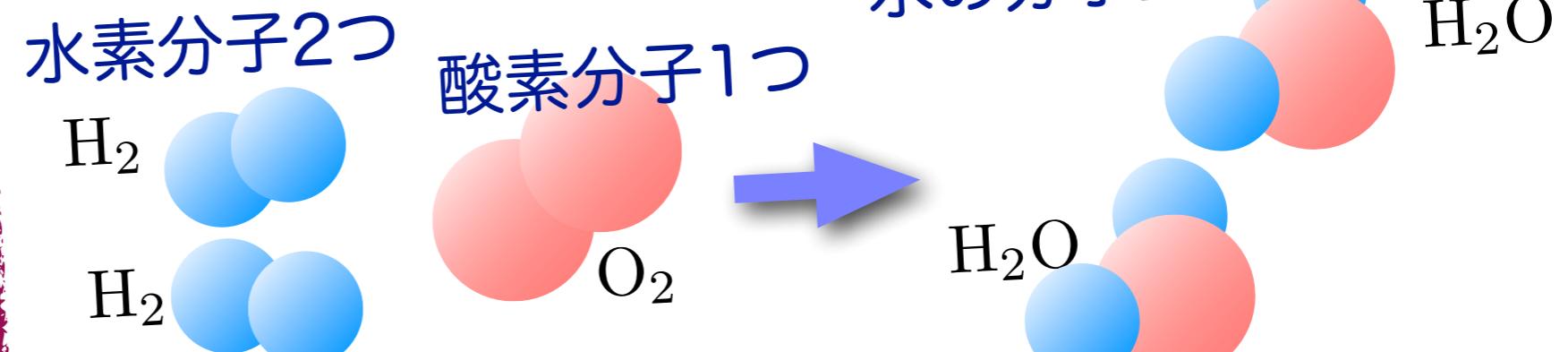


*John Dalton*  
(1766-1844)

# ナフサロの二二論

2 対 1 の体積の水素ガスと酸素ガスが  
反応すると、ちょうどすべてが水になる

物質には不可  
実験・観察に



19世紀前半

化学反応についての定量的な経験事実  
を原子・分子の描像で理解

科学的な原子論だが、原  
子や分子の大きさや個数  
はわからない



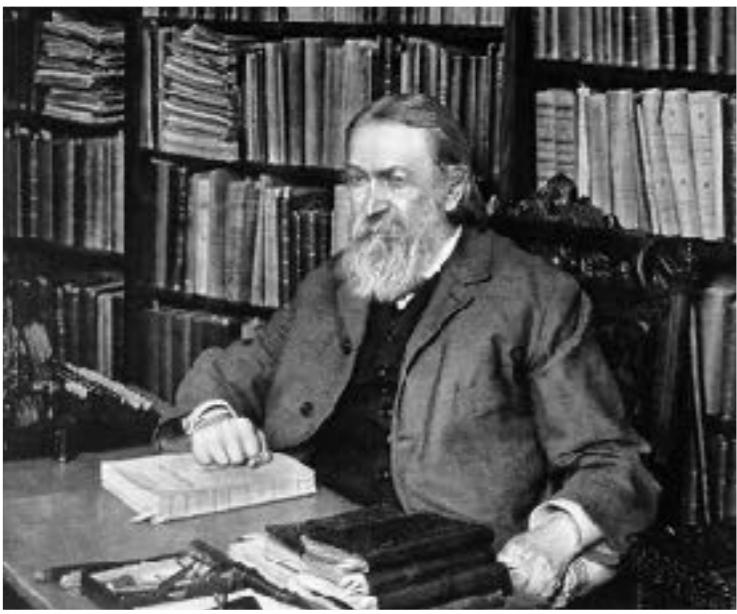
Amedeo Avogadro  
(1776-1856)



John Dalton  
(1766-1844)

Democritus  
(B.C. 460-370?)

# 19世紀後半にも論争は続く



Ernst Mach  
(1838-1916)

## 反原子論の立場

目に見えず手でも触れられない原子や分子の実在を否定

原子や分子は経験事実や実験結果を整理するための方便に過ぎない

## 原子論の立場

力学法則に従う原子や分子の存在を認め、さらにそれにもとづいてマクロな世界を理解するための理論（統計力学）を開拓



Ludwig Boltzmann  
(1844-1906)

# 原子・分子の経験的な証拠

原子・分子は顕微鏡でも見えない！

原子・分子の個数（アヴォガドロ数）を実験に基づいて評価 → 異なった方法で近い値

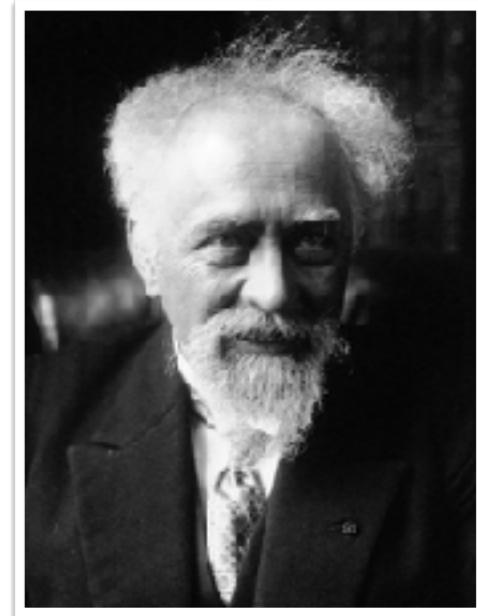
原子・分子が存在して初めて可能な現象を観察する

## • ブラウン運動の理論と実験

顕微鏡で見える程度の大きさの微小粒子が水中にあると水分子との衝突のために独特のランダムな動きをするはず



Albert Einstein  
(1879-1955)



Jean Baptiste Perrin  
(1870-1942)

この運動を観察・解析すれば  
アヴォガドロ数が評価できる

# 二二二の経験的な証拠

・分子は顕微鏡でも見えない！

（アボガドロ数）を実験に基づいて方法で近い値

直径  $0.5\text{ }\mu\text{m}$  の粒子のブラウン運動

実時間再生 ( $61 \times 53\text{ }\mu\text{m}$ )

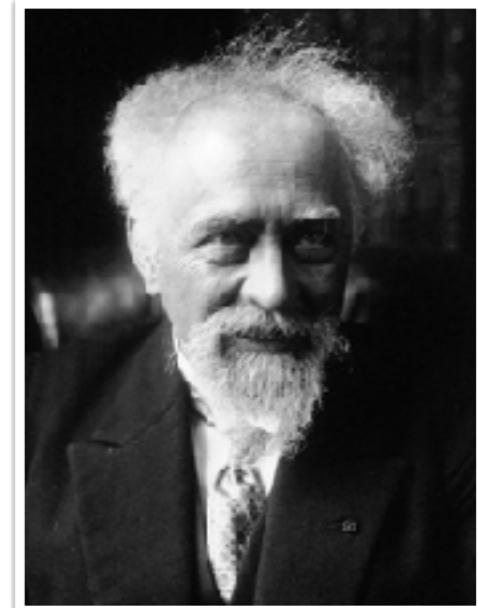
動画提供：学習院大学西坂研究室

顕微鏡で見える程度の大きさの微小粒子が水中にあると水分子との衝突のために独特のランダムな動きをするはず

この運動を観察・解析すればアボガドロ数が評価できる



Albert Einstein  
(1879-1955)



Jean Baptiste Perrin  
(1870-1942)

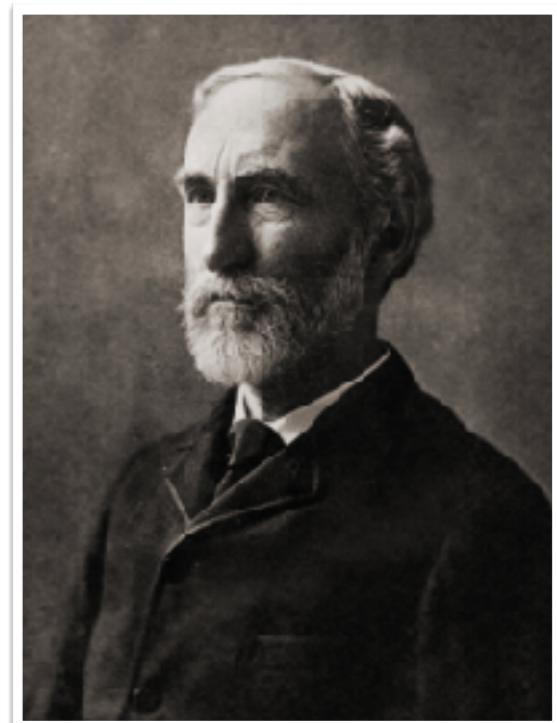


Ludwig Boltzmann  
(1844-1906)

# 統計力学へ

- ミクロな原子・分子の存在に基づいてマクロな世界を理解する
- ミクロな要素の従う基本法則に基づいてマクロな系の平衡状態の性質を導くための理論体系
- マクロな系はミクロな基本法則からは予想もできないふるまいを見せる

相転移は典型例



Josiah Willard Gibbs  
(1839-1903)

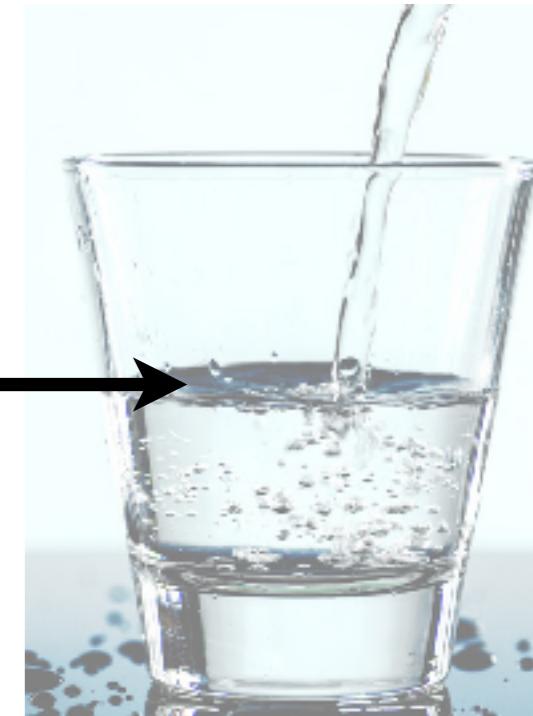
**相転移とは？**

# 水と氷の相転移

固体（氷）

0°C

液体（水）



水は（1気圧の環境では）ちょうど0度を境に固体から液体へと、とつぜん変化する

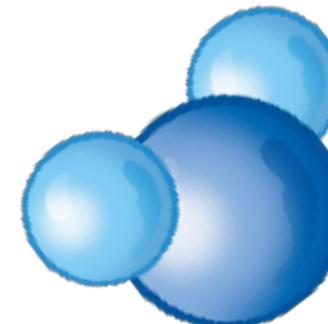
**相転移** 物理系のパラメターを変化させたとき、ある値で系の「マクロな性質」が質的に変化

物質の三態、強磁性相転移、超伝導転移、宇宙初期の真空の相転移…

# 相転移はなぜおきるのか？

□ 0度で水分子の形が変化？

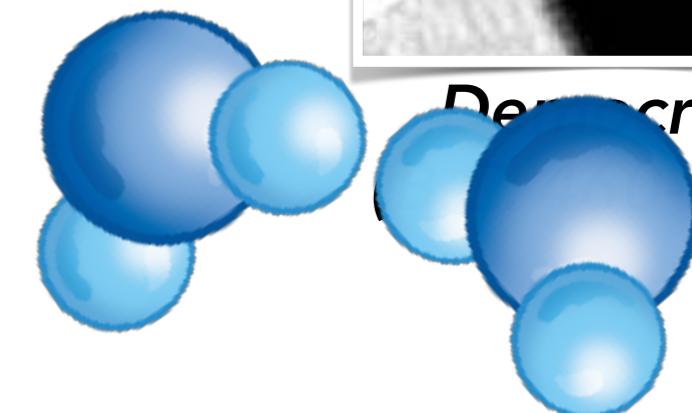
分子の形は変わらない



Democritus  
(c. 460 – c. 370?)

□ 0度で水分子間の力が変化？

力は変わらない



□ 0度になったことを知って他の分子に命令を出す  
「司令塔」の分子がいる？

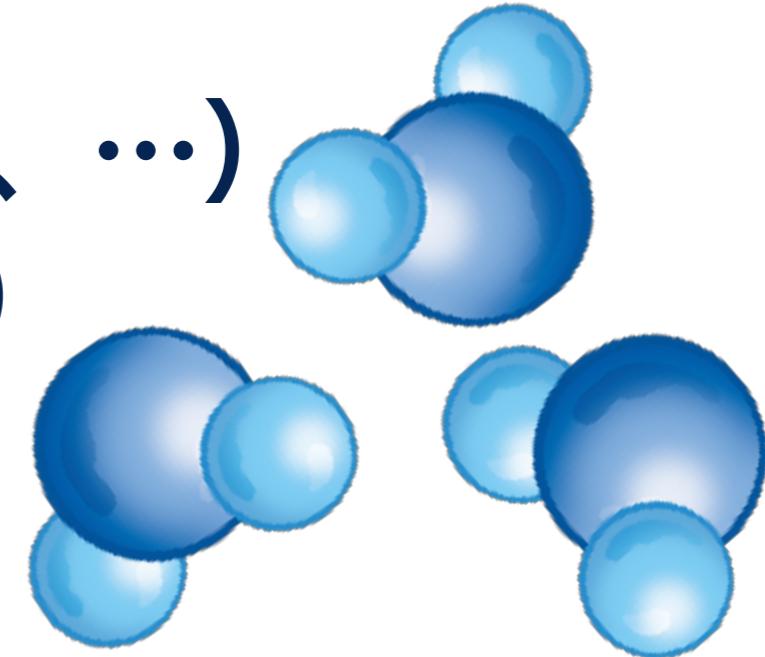
分子はみな同じ単純な構造

「温度計」を内蔵しているわけではない



# 相転移はなぜおきるのか？

- 分子の個数が少ないと（1個、2個、…）  
相転移は起きない（なだらかな変化）



相転移は、膨大な数の分子が互いに影響しあった結果、全体として生み出される「協力現象」

個々のミクロな要素（この場合は水の分子）が単純でも全体としてマクロな非自明な性質が出現する！

本当にそんなことがおきるのか？！

強磁性イジング模型を詳しく！

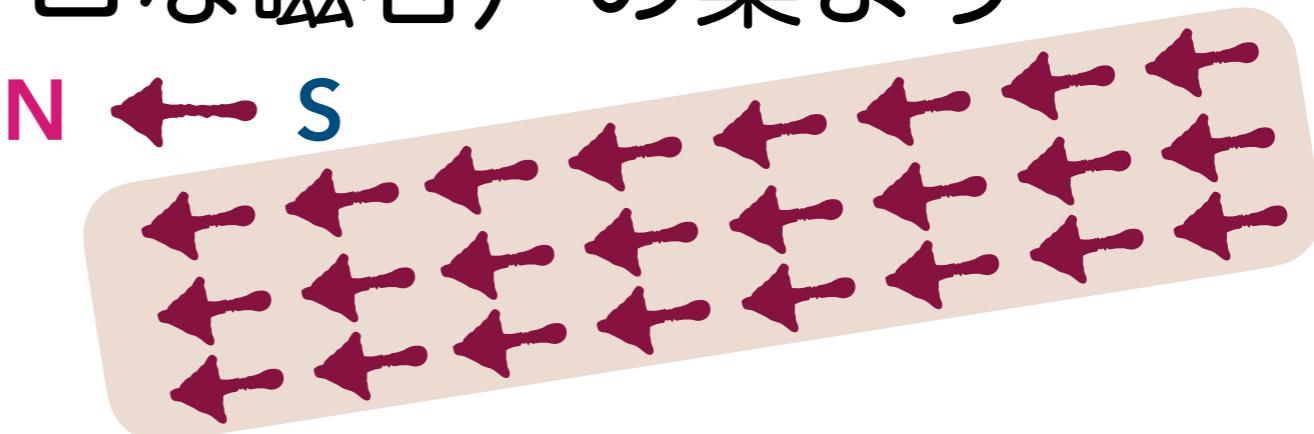
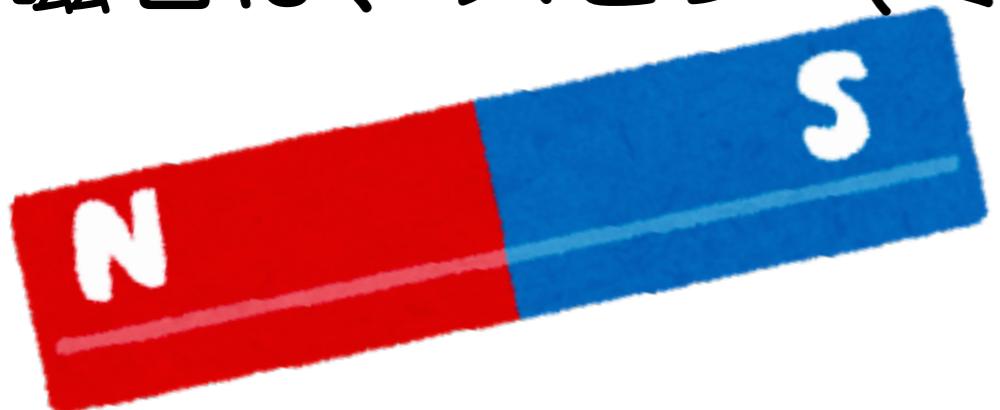


# 2次元強磁性イジング模型 における相転移

- ・ モデルの定義
- ・ ブートストラップ近似
- ・ 厳密な結果

# 強磁性イジング模型の平衡状態

磁石は、スピン（ミクロな磁石）の集まり



磁石のもっとも基本的な理論モデル

## 強磁性イジング模型

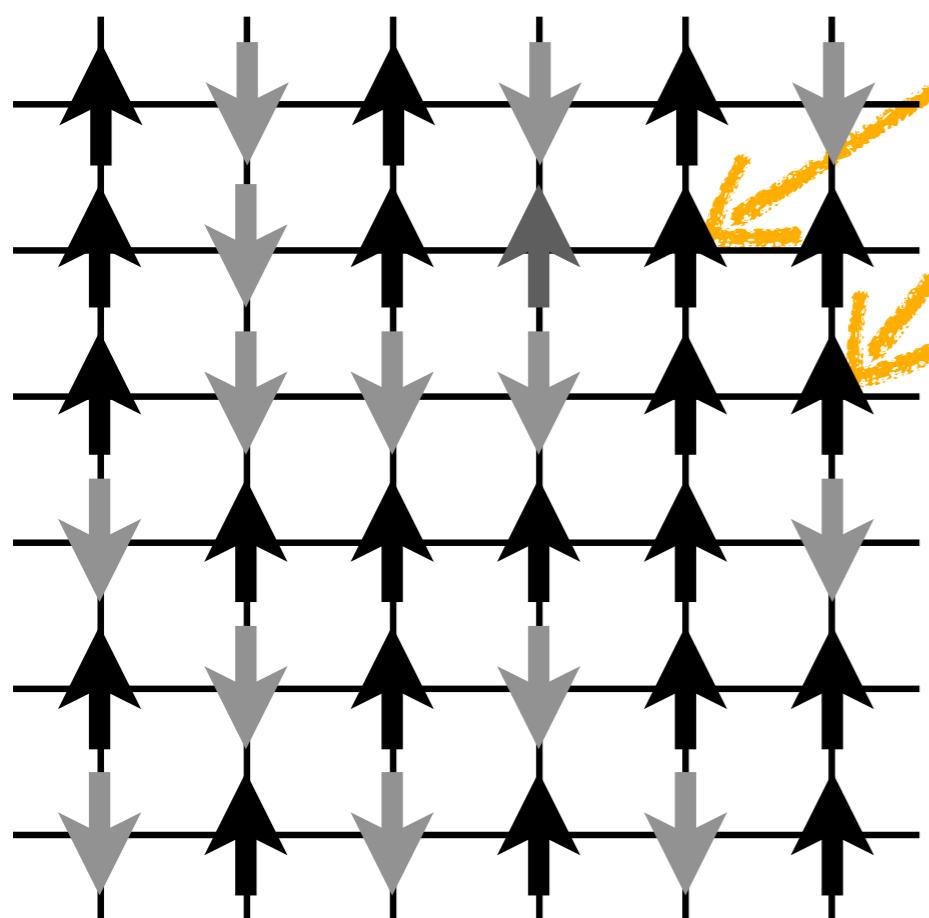
互いに同じ方向を向こうとする傾向を持った無数のスピンの集まりのモデル

強磁性イジング模型の平衡状態に注目

一定の温度のもとで、マクロな時間変化も  
マクロな流れもない、バランスした状態

# モデルの基本的な要素

正方格子（無限大）



格子点

各々の格子点には「スピン」  
(ミクロな磁石) がのっている

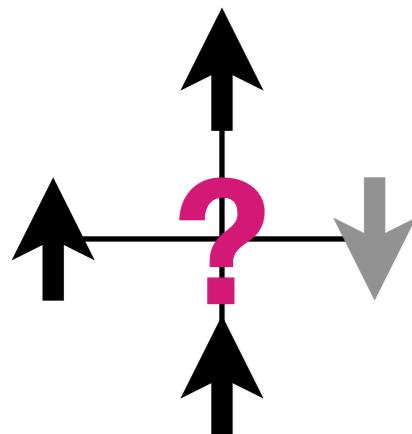
スピンは上向き↑下向き↓  
のいずれかを向いている

## スピン間の相互作用のない場合の平衡状態

各々のスピンは確率  $\frac{1}{2}$  で上向きか下向き

上向きと下向きが打ち消しあい、マクロには  
磁石の性質を示さない

# ミクロな相互作用



各々のスピンは、まわりの4つのスピンと同じ向きにそろおうとする

$A \geq 1$  どの程度そろおうとするかを決める定数

$A = 1$  だと全然そろおうとしない

$A$  が大きいほどそろおうとする

$N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$  まわりにある上・下向きスピンの数

$P_{\uparrow}, P_{\downarrow}$  注目しているスピンが上・下向きの確率

$$P_{\uparrow} = \frac{A^{N_{\uparrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}}$$

$$P_{\downarrow} = \frac{A^{N_{\downarrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}}$$

この規則をすべてのスピンに適用することで  
定数  $A$  に対応する平衡状態が定まる

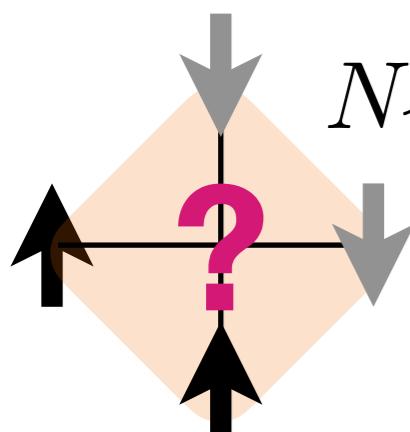
# スピン間の相互作用の例

$N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$  まわりにある上・下向きスピンの数

$P_{\uparrow}, P_{\downarrow}$  注目しているスピンが上・下向きの確率

$$P_{\uparrow} = \frac{A^{N_{\uparrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}}$$

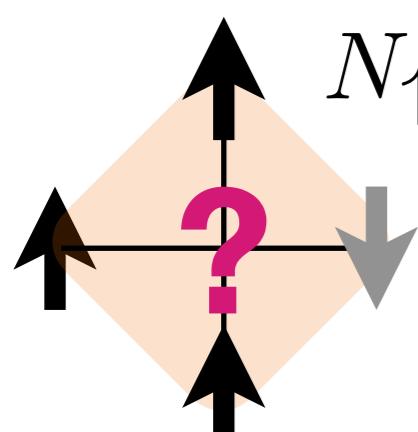
$$P_{\downarrow} = \frac{A^{N_{\downarrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}}$$



$$N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = 2$$

$$P_{\uparrow} = \frac{A^2}{A^2 + A^2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\downarrow} = \frac{A^2}{A^2 + A^2} = \frac{1}{2}$$



$$N_{\uparrow} = 3 \quad N_{\downarrow} = 1$$

$$P_{\uparrow} = \frac{A^3}{A^3 + A} = \frac{A^2}{A^2 + 1} = \frac{4}{5}$$

$$P_{\downarrow} = \frac{A}{A^3 + A} = \frac{1}{A^2 + 1} = \frac{1}{5}$$

# 定数 $A$ と温度

$N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$  まわりにある上・下向きスピンの数

$P_{\uparrow}, P_{\downarrow}$  注目しているスピンが上・下向きの確率

$$P_{\uparrow} = \frac{A^{N_{\uparrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}} \quad P_{\downarrow} = \frac{A^{N_{\downarrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}}$$

統計力学によれば  $A = e^{2J/(k_B T)}$

$J > 0$  交換相互作用定数、 $k_B$  ボルツマン定数

$T$  絶対温度

温度が低いほど  $A$  が大きい

上の規則をすべてのスピンに適用することで絶対温度  $T$  における平衡状態が定まる

条件付き確率によるカノニカル分布の特徴付け (DLR 条件)

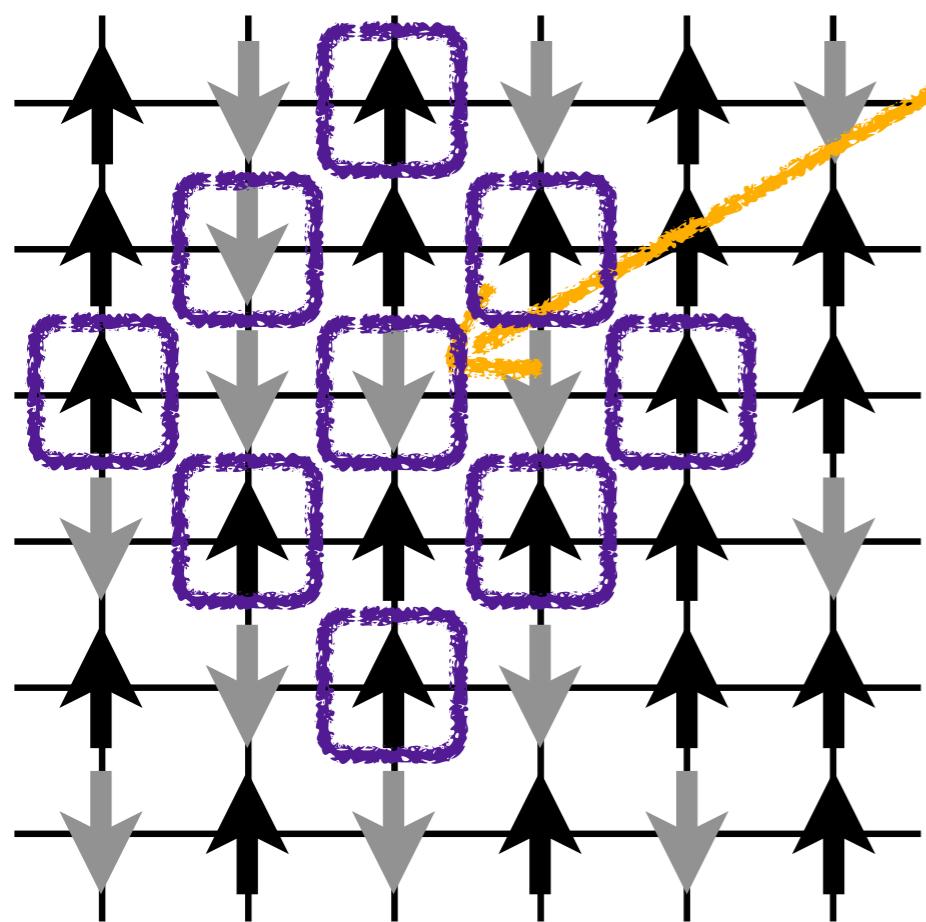
# 平衡状態はどう決まるか？

$N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$  まわりにある上・下向き спинの数

$P_{\uparrow}, P_{\downarrow}$  注目している спинが上・下向きの確率

$$P_{\uparrow} = \frac{A^{N_{\uparrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}}$$

$$P_{\downarrow} = \frac{A^{N_{\downarrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}}$$



ひとつのスピニンのふるまい



まわりの4つのスピニンのふるまい



まわりの9個のスピニンのふるまい

これではきりがない…

# 2次元強磁性イジング模型 における相転移

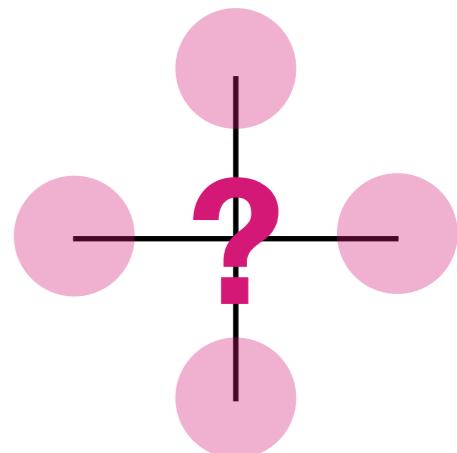
「平均場近似」ともいう、  
の定義

- ・ブートストラップ近似
- ・厳密な結果

# ブートストラップ近似

スピンの数を平均値で置き換える  $N_{\uparrow} \rightarrow \bar{N}_{\uparrow}$ ,  $N_{\downarrow} \rightarrow \bar{N}_{\downarrow}$

$$P_{\uparrow} = \frac{A^{\bar{N}_{\uparrow}}}{A^{\bar{N}_{\uparrow}} + A^{\bar{N}_{\downarrow}}} \quad P_{\downarrow} = \frac{A^{\bar{N}_{\downarrow}}}{A^{\bar{N}_{\uparrow}} + A^{\bar{N}_{\downarrow}}}$$



確率の差に注目

$$m = P_{\uparrow} - P_{\downarrow} = \frac{A^{\bar{N}_{\uparrow}} - A^{\bar{N}_{\downarrow}}}{A^{\bar{N}_{\uparrow}} + A^{\bar{N}_{\downarrow}}} = \frac{A^{\bar{N}_{\uparrow} - \bar{N}_{\downarrow}} - 1}{A^{\bar{N}_{\uparrow} - \bar{N}_{\downarrow}} + 1}$$

まわりの4つのスピンが上下を向く確率も  $P_{\uparrow}, P_{\downarrow}$

$$\bar{N}_{\uparrow} = 4P_{\uparrow} \quad \bar{N}_{\downarrow} = 4P_{\downarrow} \quad \bar{N}_{\uparrow} - \bar{N}_{\downarrow} = 4(P_{\uparrow} - P_{\downarrow}) = 4m$$

$$m = \frac{A^{4m} - 1}{A^{4m} + 1}$$

$m$  を決める方程式！

ブートストラップ方程式（自己整合方程式）

# ブートラップ近似

スピ

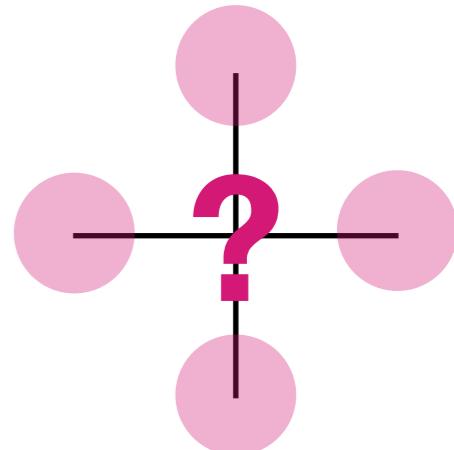


自分で自分を引っ張り上げる

平均値で直し換える

$$N_{\downarrow} \rightarrow \bar{N}_{\downarrow}$$

$$\frac{\bar{N}_{\uparrow}}{A^{\bar{N}_{\downarrow}}} \quad P_{\downarrow} = \frac{A^{\bar{N}_{\downarrow}}}{A^{\bar{N}_{\uparrow}} + A^{\bar{N}_{\downarrow}}}$$



$$m = P_{\uparrow} - P_{\downarrow} = \frac{A^{\bar{N}_{\uparrow}} - A^{\bar{N}_{\downarrow}}}{A^{\bar{N}_{\uparrow}} + A^{\bar{N}_{\downarrow}}} = \frac{A^{\bar{N}_{\uparrow} - \bar{N}_{\downarrow}} - 1}{A^{\bar{N}_{\uparrow} - \bar{N}_{\downarrow}} + 1}$$

まわりの4つのスピノンが上下を向く確率も  $P_{\uparrow}, P_{\downarrow}$

$$\bar{N}_{\uparrow} = 4P_{\uparrow} \quad \bar{N}_{\downarrow} = 4P_{\downarrow} \quad \bar{N}_{\uparrow} - \bar{N}_{\downarrow} = 4(P_{\uparrow} - P_{\downarrow}) = 4m$$

$$m = \frac{A^{4m} - 1}{A^{4m} + 1}$$

$m$  を決める方程式！

ブートストラップ方程式（自己整合方程式）

# ブートストラップ

bootstrap



$$\frac{\bar{N}_\uparrow}{\bar{N}_\downarrow + A}$$

スピ

に注目

$$m = P_\uparrow - P_\downarrow = \frac{A}{A}$$

まわりの4つのスピ

$$\bar{N}_\uparrow = 4P_\uparrow \quad \bar{N}_\downarrow =$$

$$m = \frac{A^{4m} - 1}{A^{4m} + 1}$$



ブートストラップ方程式（自己整合方程式）

# ブートストラップ方程式の解

$$m = \frac{A^{4m} - 1}{A^{4m} + 1}$$

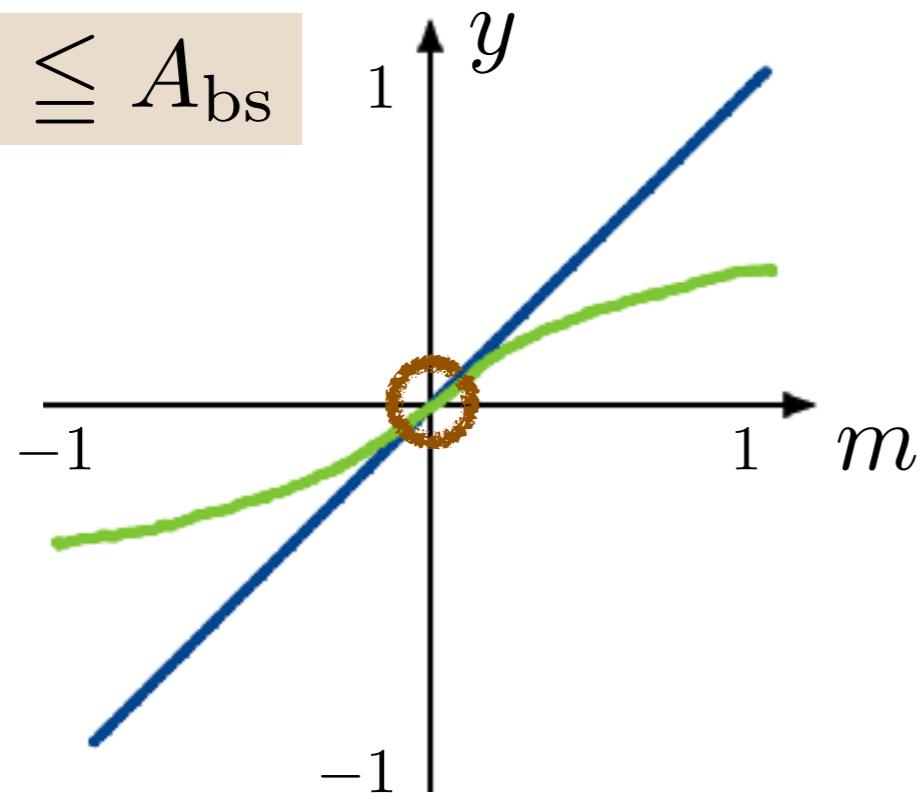
$m$  を決める方程式！

$A \geq 1$  は温度で決まる定数

$y = m$  と  $y = \frac{A^{4m} - 1}{A^{4m} + 1}$  のグラフの交点が解

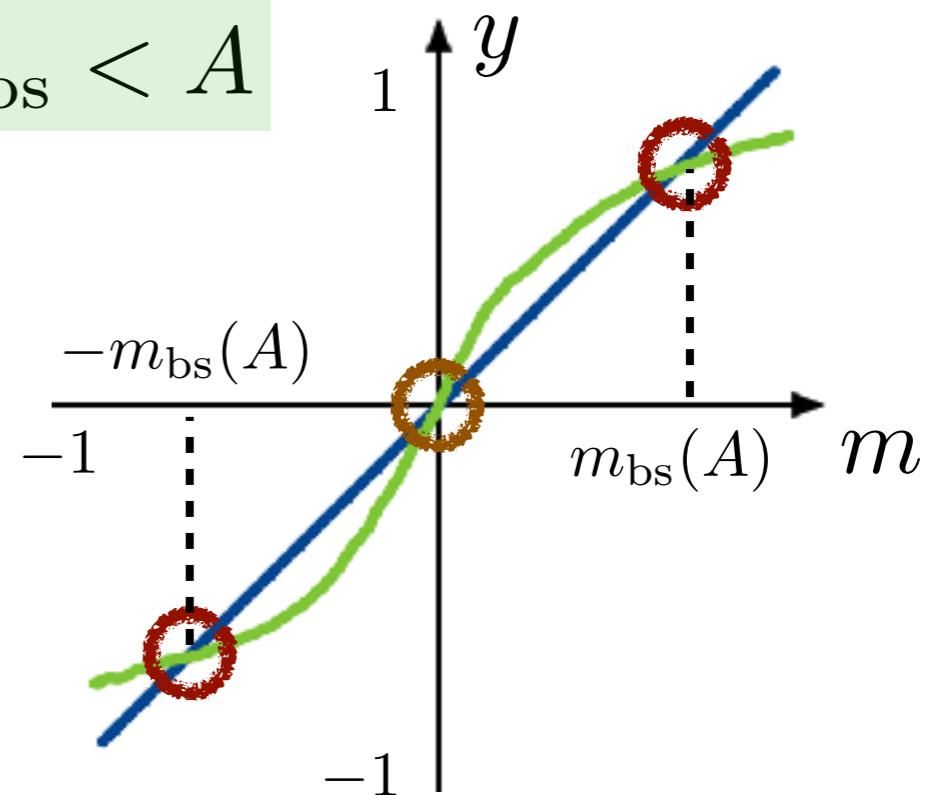
$$A_{\text{bs}} = \sqrt{e} \doteq 1.649$$

$$1 \leq A \leq A_{\text{bs}}$$



解は  $m = 0$  のみ

$$A_{\text{bs}} < A$$



解は  $m = 0, \pm m_{\text{bs}}(A)$  の3つ

# ブートストラップ近似の結論

$1 \leq A \leq A_{\text{bs}}$  解は  $m = 0$  のみ

$$m = P_{\uparrow} - P_{\downarrow}$$

$P_{\uparrow} = P_{\downarrow} = \frac{1}{2}$  上向きと下向きが打ち消しあい、  
マクロには磁石の性質を示さない

$A_{\text{bs}} < A$  物理的な解は  $m = \pm m_{\text{bs}}(A)$  の2つ

$$m = m_{\text{bs}}(A)$$

$$P_{\uparrow} = \frac{1}{2}\{1 + m_{\text{bs}}(A)\} > \frac{1}{2} \quad P_{\downarrow} = \frac{1}{2}\{1 - m_{\text{bs}}(A)\} < \frac{1}{2}$$

マクロには上向きの磁石になる！

$$m = -m_{\text{bs}}(A)$$

$$P_{\uparrow} = \frac{1}{2}\{1 - m_{\text{bs}}(A)\} < \frac{1}{2} \quad P_{\downarrow} = \frac{1}{2}\{1 + m_{\text{bs}}(A)\} > \frac{1}{2}$$

マクロには下向きの磁石になる！

$A_{\text{bs}} = \sqrt{e} \doteq 1.649$  で相転移がおきる！？

# ブートストラップ近似論

$$1 \leq A \leq A_{\text{bs}}$$

$$P_{\uparrow} =$$

ブートストラップ近似は大胆で単純な近似だが、これで相転移の本質は見える！

$A_{\text{bs}} < A$  物理的な解は  $m =$

$$m = m_{\text{bs}}(A)$$

$$P_{\uparrow} = \frac{1}{2}\{1 + m_{\text{bs}}(A)\} >$$

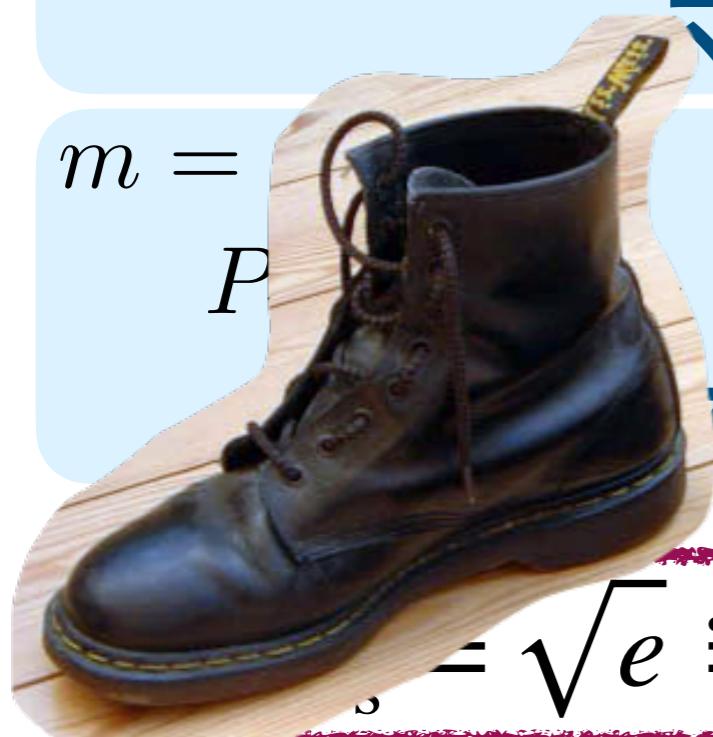
マクロには

$$m =$$

$$P_{\downarrow}$$

$$m_{\text{bs}}(A)\} <$$

マクロには



$\beta = \sqrt{e} \doteq 1.649$  で相転移がおきる！？



# 2次元強磁性イジング模型 における相転移

- モデルの定義
- ブートストラップ近似
- 厳密な結果

# 相転移についての厳密な結果

**定理** 2次元イジング模型は  $A_c = 1 + \sqrt{2} \doteq 2.414$  において相転移をおこす

$A_c > A_{\text{bs}}$  ブートストラップ近似は  
スピノンがそろう傾向を過大評価！

# 相転移についての厳密な結果

**定理** 2次元イジング模型は  $A_c = 1 + \sqrt{2} \doteq 2.414$  において相転移をおこす

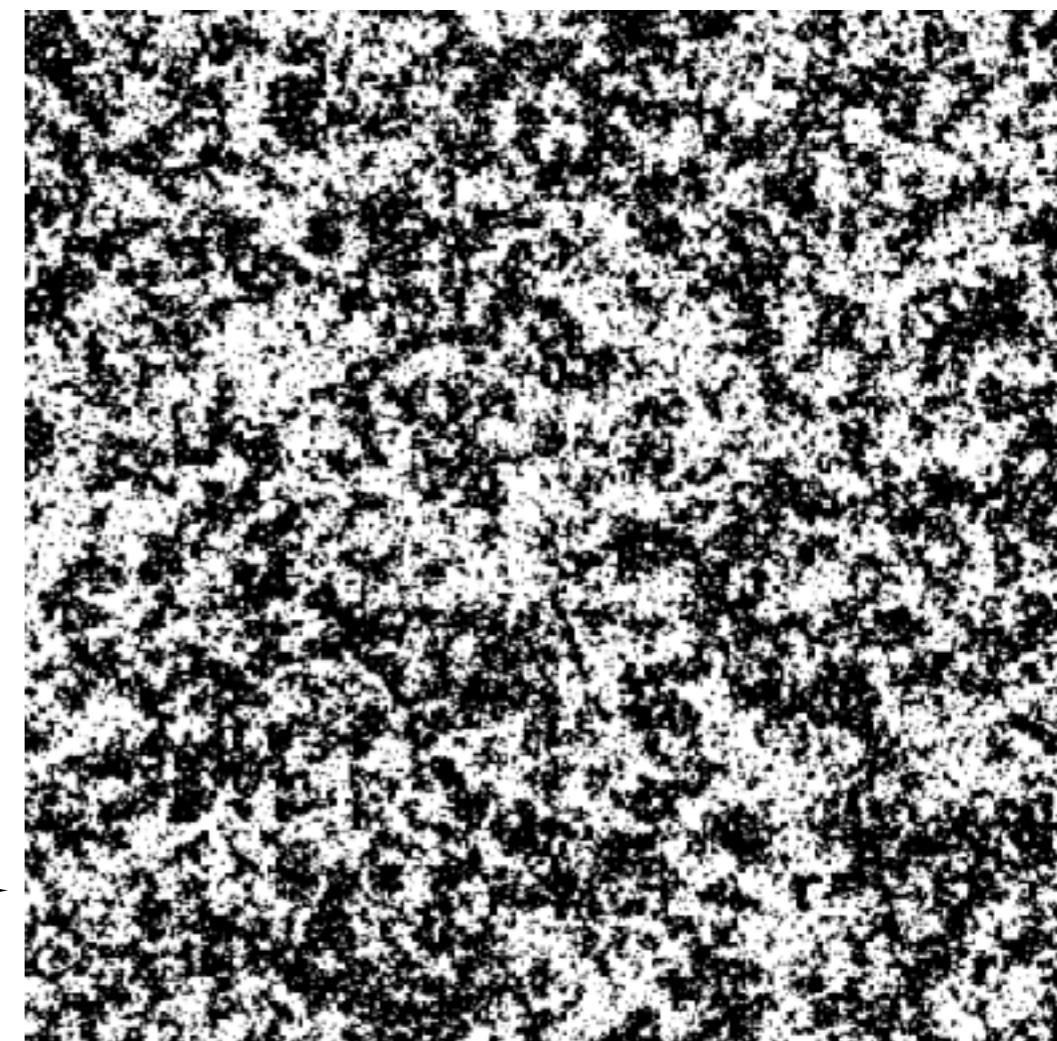
$1 \leq A \leq A_c$  平衡状態はただ一つで  $m = 0$

$$m = P_\uparrow - P_\downarrow$$

$$P_\uparrow = P_\downarrow = \frac{1}{2}$$

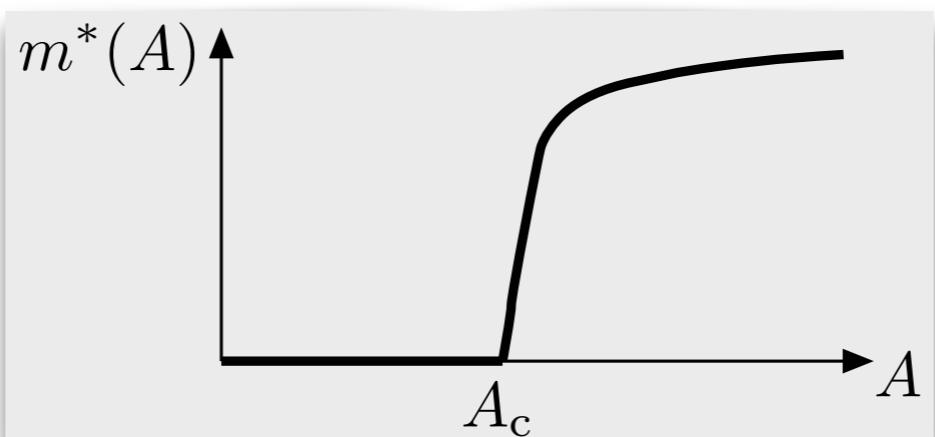
近くのスピンドゥしは同じ  
向きにそろうが、マクロに  
は、上向きと下向きが打ち  
消しあい、磁石にならない

上向き=黒点、下向き=白点  
 $512 \times 512$  個の спин



# 相転移についての厳密な結果

$A_c < A$  平衡状態は2つあり、それぞれで  $m = \pm m^*(A)$

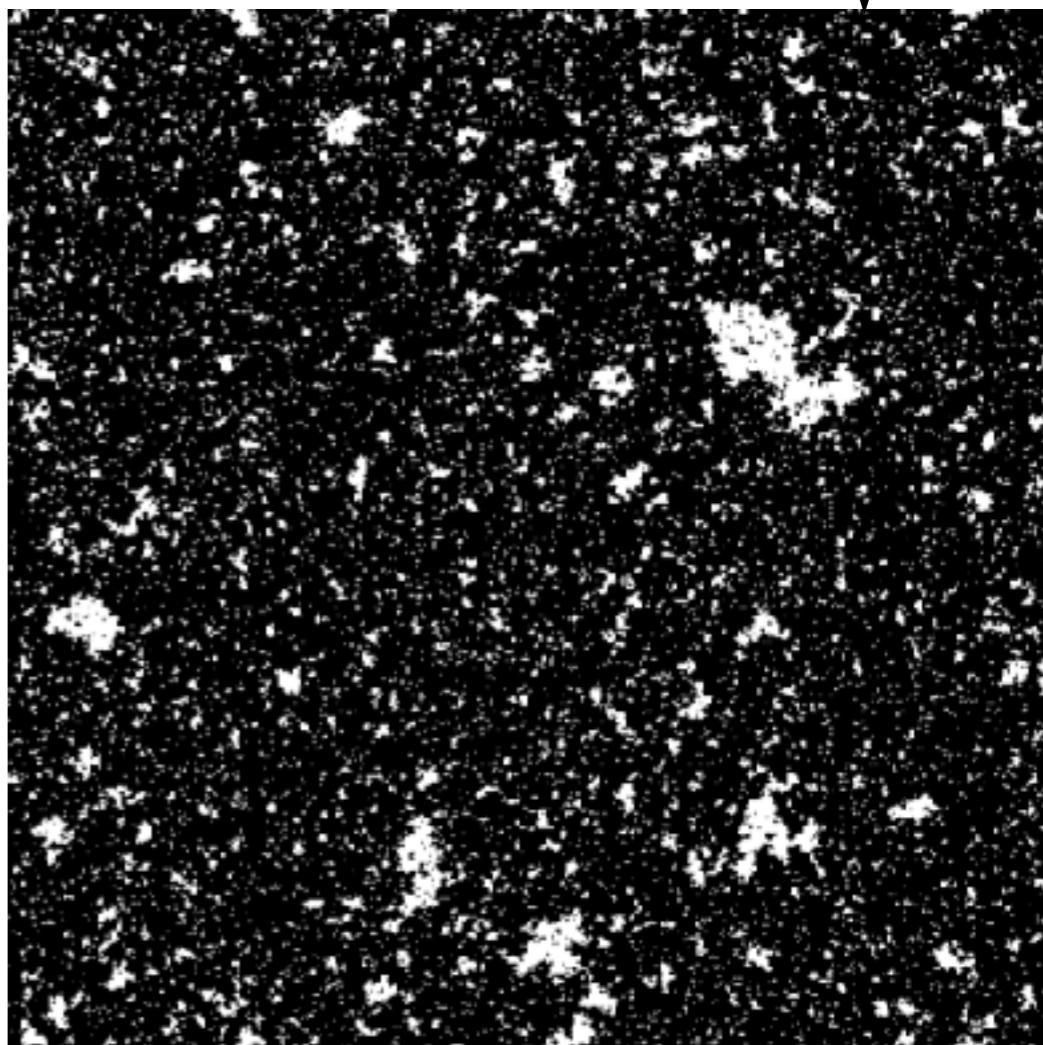


$$m = P_{\uparrow} - P_{\downarrow}$$
$$m^*(A) > 0$$

上向き=黒点、下向き=白点  
512 × 512 個のスピン

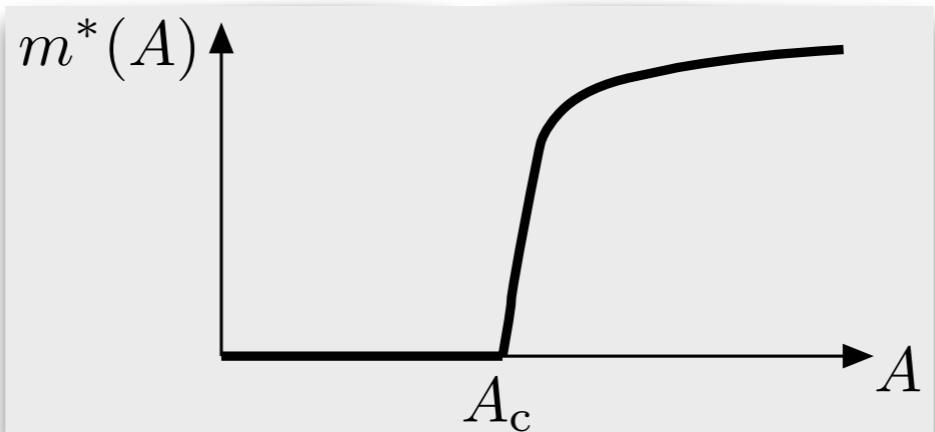
$$m = m^*(A)$$
$$P_{\uparrow} = \frac{1}{2} \{1 + m^*(A)\} > \frac{1}{2}$$
$$P_{\downarrow} = \frac{1}{2} \{1 - m^*(A)\} < \frac{1}{2}$$

マクロには上向きの磁石になる！



# 相転移についての厳密な結果

$A_c < A$  平衡状態は2つあり、それぞれで  $m = \pm m^*(A)$



$$m = P_\uparrow - P_\downarrow$$
$$m^*(A) > 0$$

上向き=黒点、下向き=白点  
512 × 512 個のスピン

$$m = m^*(A)$$

$$P_\uparrow = \frac{1}{2} \{1 + m^*(A)\} > \frac{1}{2}$$

$$P_\downarrow = \frac{1}{2} \{1 - m^*(A)\} < \frac{1}{2}$$

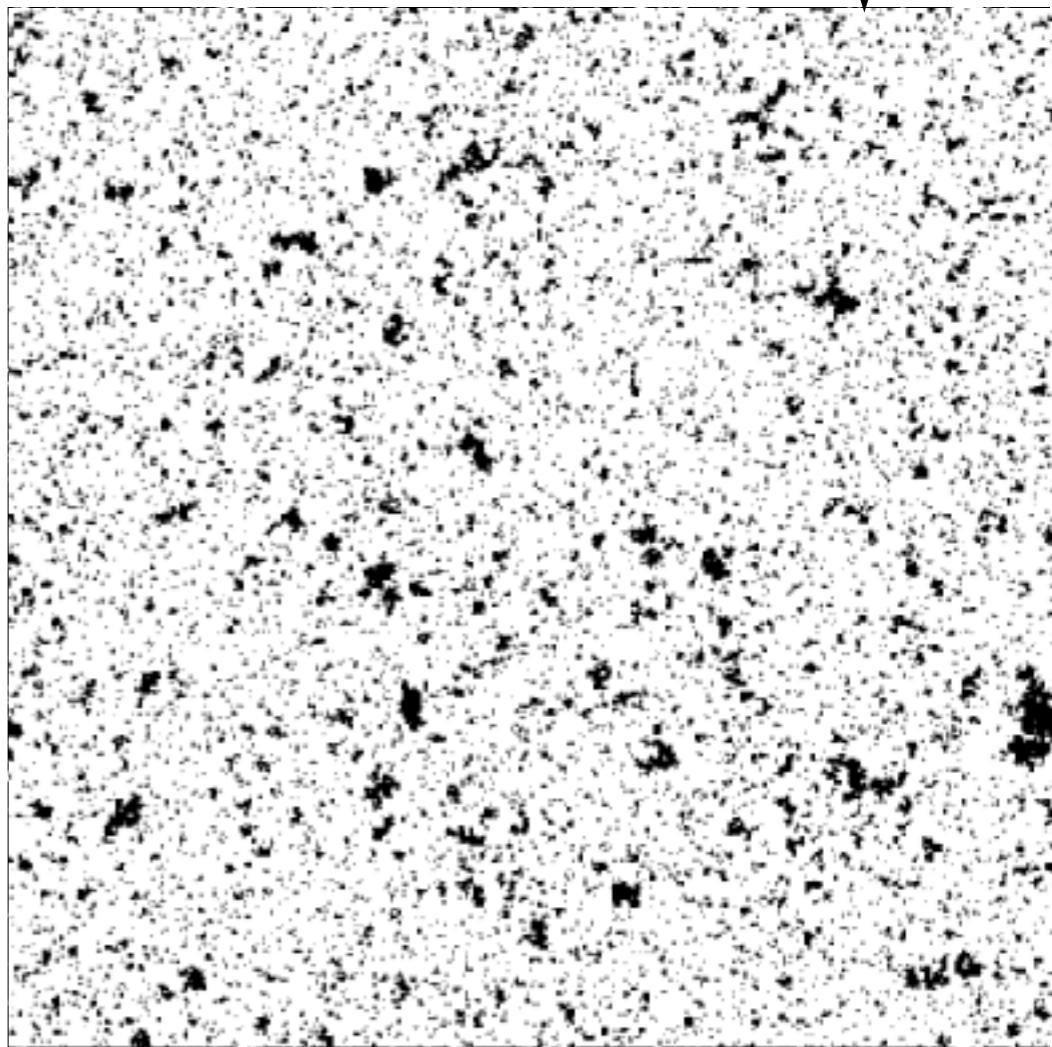
マクロには上向きの磁石になる！

$$m = -m^*(A)$$

$$P_\uparrow = \frac{1}{2} \{1 - m^*(A)\} < \frac{1}{2}$$

$$P_\downarrow = \frac{1}{2} \{1 + m^*(A)\} > \frac{1}{2}$$

マクロには下向きの磁石になる！



# イジング模型の相転移

$N_{\uparrow}, N_{\downarrow}$  まわりにある上・下向き спинの数

$P_{\uparrow}, P_{\downarrow}$  注目している спинが上・下向きの確率

$$P_{\uparrow} = \frac{A^{N_{\uparrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}} \quad P_{\downarrow} = \frac{A^{N_{\downarrow}}}{A^{N_{\uparrow}} + A^{N_{\downarrow}}}$$

各々のスピノンはまわりの4つのスピノンに（ほどほどに）合わせようとするだけ

膨大な数のスピノンが全体として  $A$  が  $A_c = 1 + \sqrt{2}$  のときに相転移をおこす！

統計力学によって相転移が理解できる！

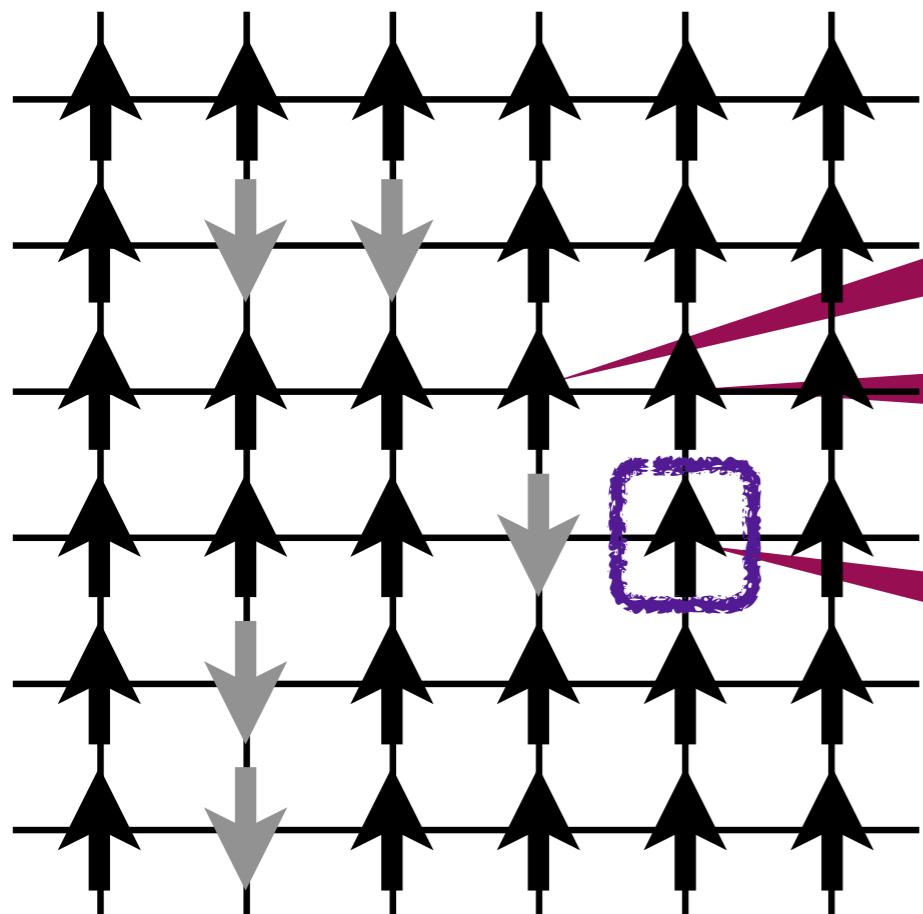
$A$  が  $A_c$  より大きいときには上向き・下向きの対称性を破った平衡状態が出現！！

対称性の自発的破れ

# 対称性の自発的破れ

もともと上向きと下向きは完全に対等

$A$  が  $A_c$  より大きいときの平衡状態（の一つ）



まわりがだいたい上向きなので  
自分も上向き

まわりがみんな上向きなので  
自分も上向き

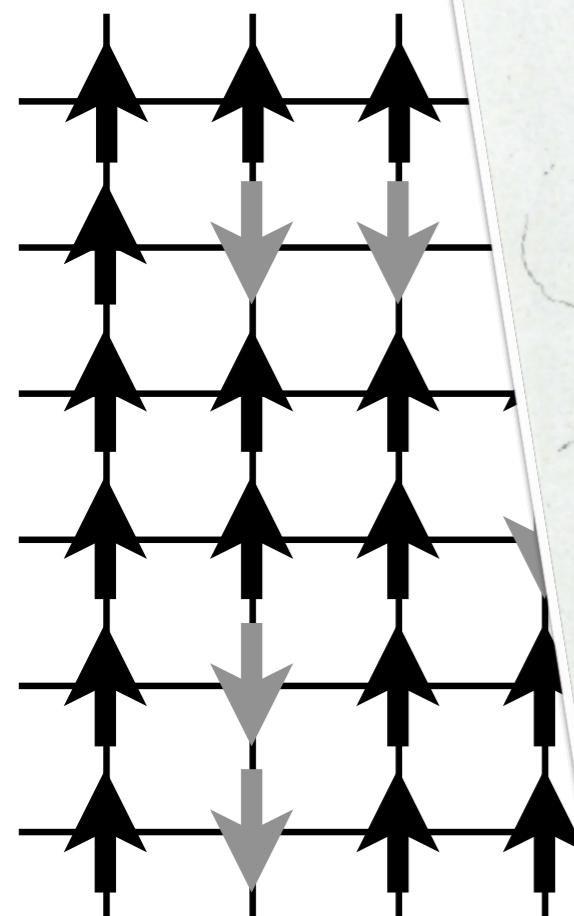
まわりがだいたい上向きなので  
自分も上向き

上向のスピントちがお互いに支え合って対称性を破り、全体として上を向いている

# 対称性の自證的破れ

もともと

$A$  が  $A_c$  の



に對等

態 (の一つ)

いたい上向きなので  
も上向き

的な上向きなので  
も上向き

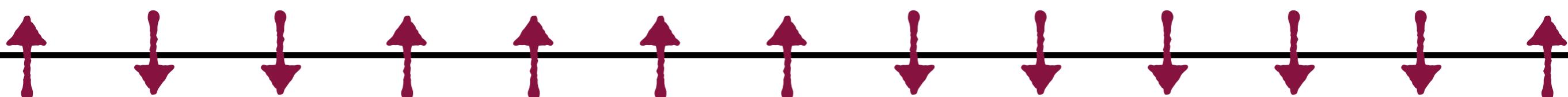
たい上向きなので  
上向き

上向のスピノンたちがお互いに支え合って対称性を破り、全体として上を向いている

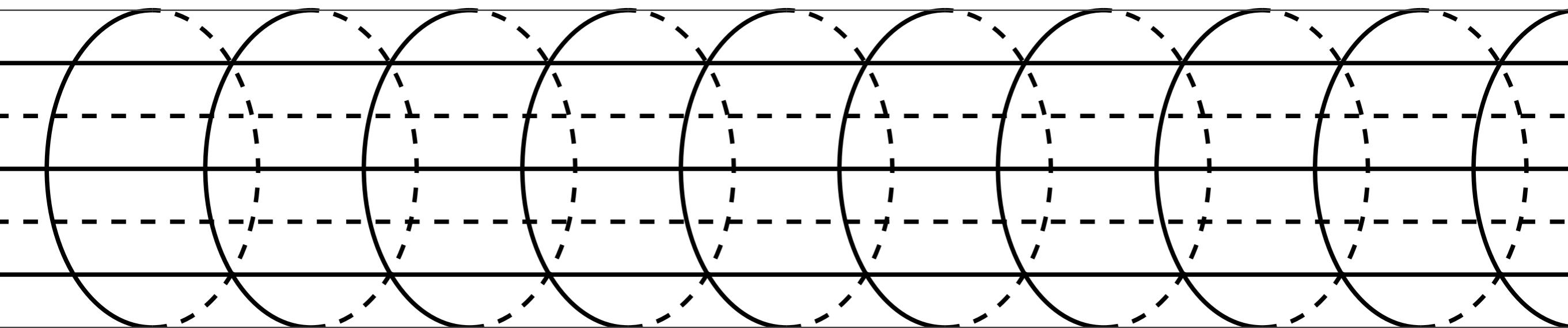
# 次元の重要性

相転移、対称性の自発的破れが生じるためには格子が2次元であることが本質的

1次元強磁性イジング模型では相転移はない！



Aがどんなに大きくても対称性の自発的破れは生じない



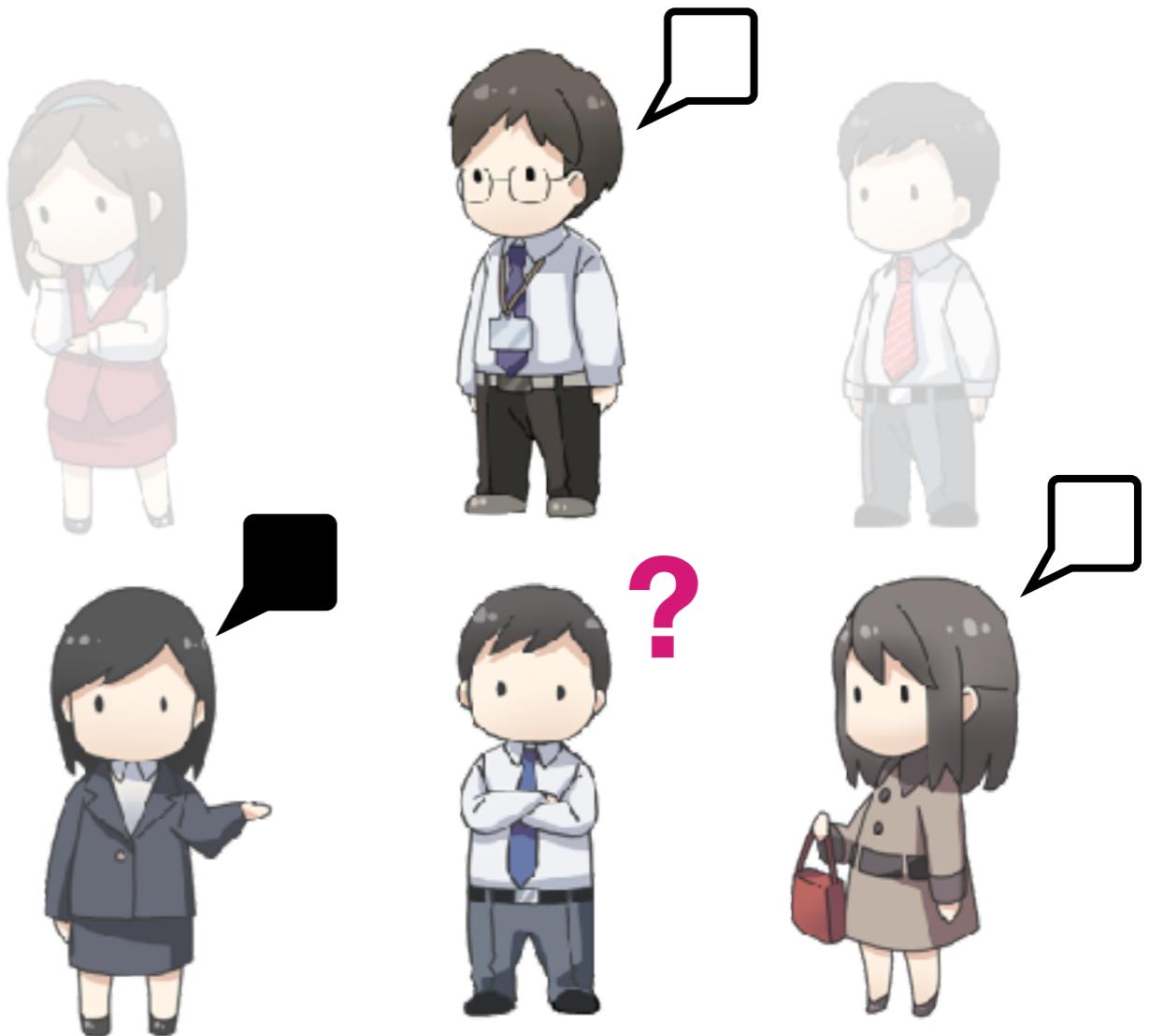
ブートストラップ近似の範囲では、この格子は2次元と同じだが、相転移は生じない

# ちょっと軽い話題 集団の意思決定のモデル

実はイジング模型

# 白か黒かの意見を決める

まったく優劣のつかない  
二つの選択肢のどちらか  
を選ばなくてはならない



各々の人がまわりの4人  
の意見に（イジング模型  
と同じ確率ルールで）  
合わせようとする



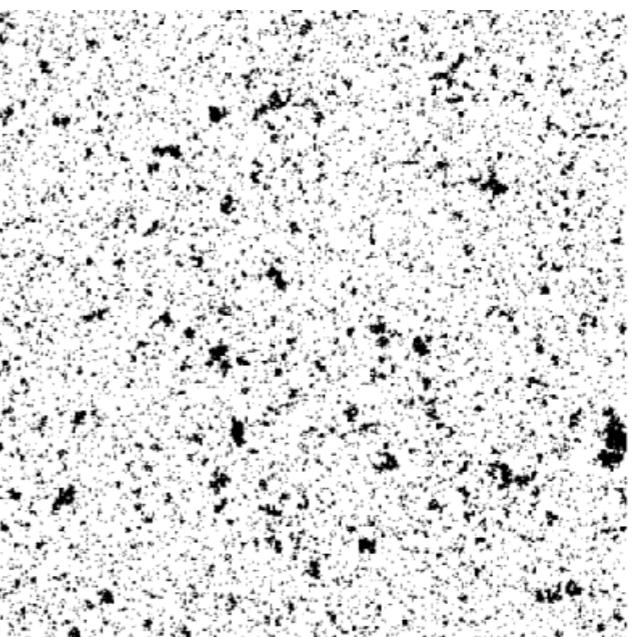
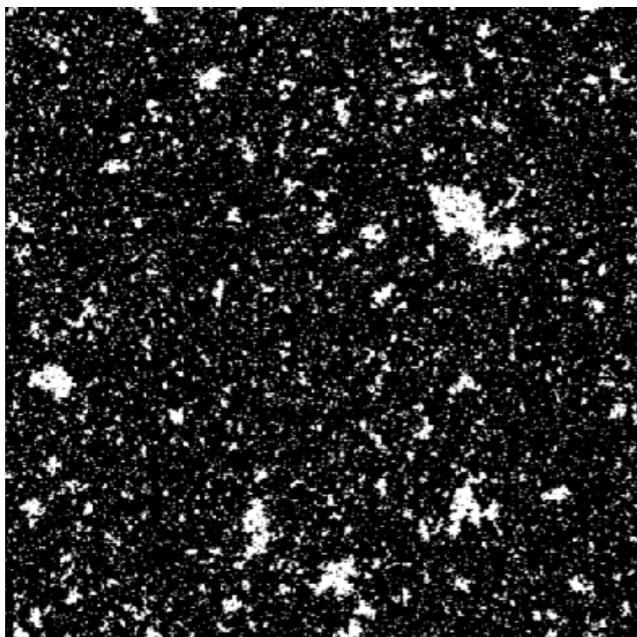
# 長い時間の後の状況

$A \leq A_c$  人々の意見はまとまらず、白と黒が半々



白と黒にまったく優劣がなくとも、  
集団の相互作用で一方が選ばれてしまう  
**対称性の自発的破れ**

$A > A_c$  人々の大部分が白あるいは黒に意思統一

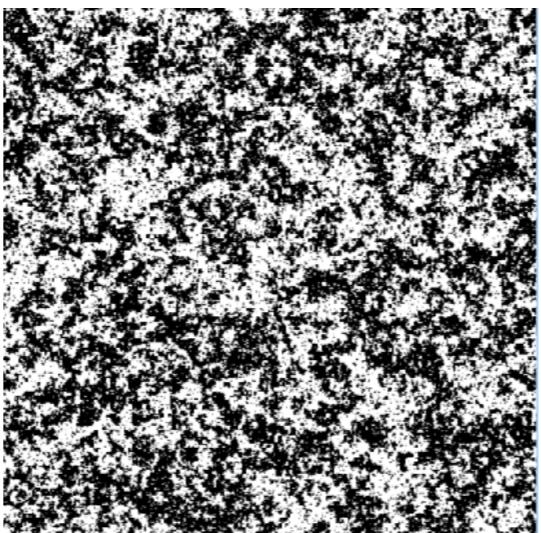


# さまざまな相転移 と統計力学 秩序状態と無秩序状態

# イジング模型での相転移

高温

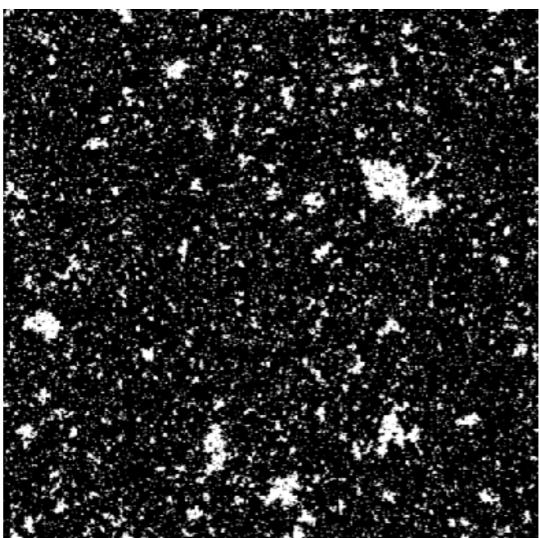
$A < A_c$  スピンは全体としてはバラバラ



無秩序状態

低温

$A > A_c$  スpinは全体としてそろう



秩序状態

対称性の自発的破れ

統計力学で完全に理論的に理解できる

# 現実的な強磁性体での相転移

高温

数多くのスピン (=小さな磁石) の集まり

スピンの向きはバラバラ (マクロには磁石ではない)



無秩序状態

秩序状態



対称性の自発的破れ

低温

スピンの向きがそろう (マクロな磁石)

統計力学でかなりしっかりと理論的に理解できる

# 現実的な強磁性体での相転移

ネオジム磁石

強力な磁石

約 300 度で相転移

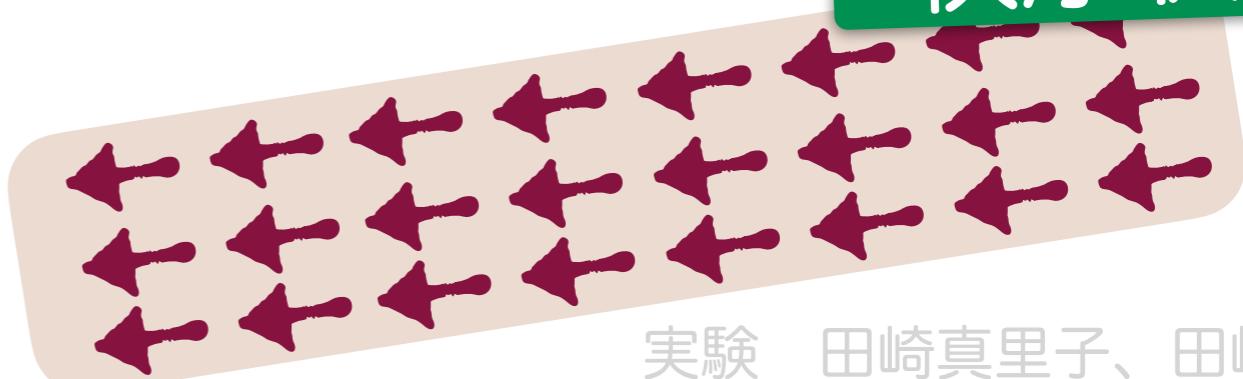


# 現実的な強磁性体での相転移

ネオジム磁石  
強力な磁石  
約 300



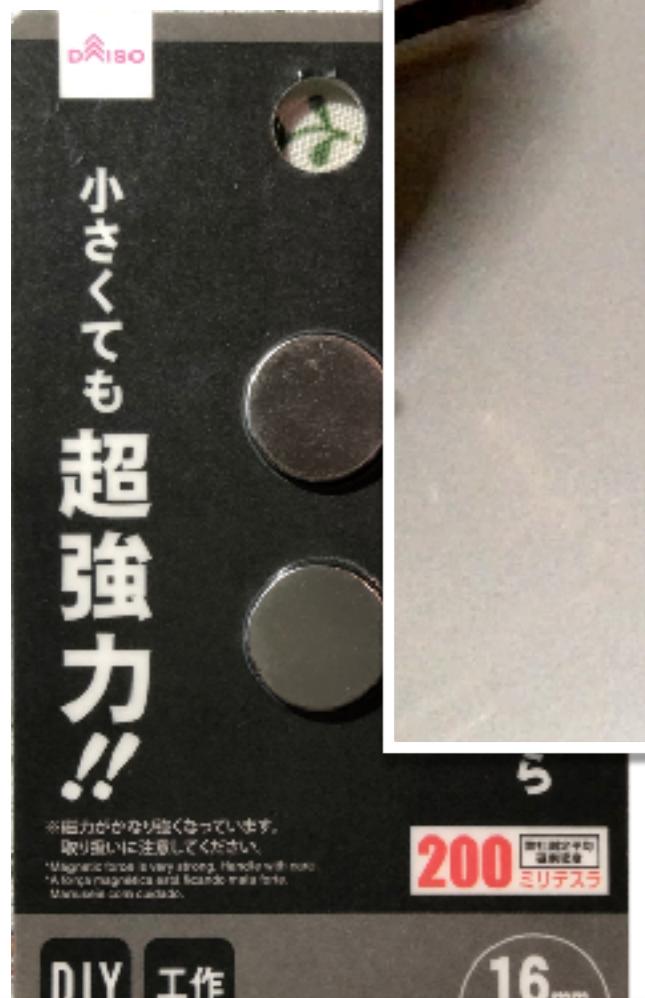
秩序状態



実験 田崎真里子、田崎晴明

# 現実的な強磁性体での相転移

ネオジム  
強力な磁石  
約 300



無秩序状態



ご家庭で実験する際は火の扱いに注意し  
念のため眼鏡を着用してください。

# 水と氷の相転移

高温

水

分子たちはバラバラに運動

無秩序状態

低温

氷

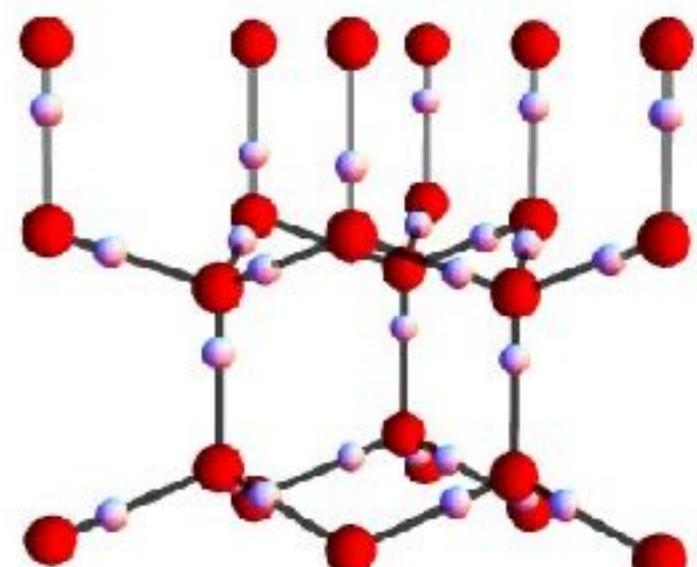
秩序状態

対称性の自発的破れ

統計力学で理論的に理解できるはず(まだ難しい)



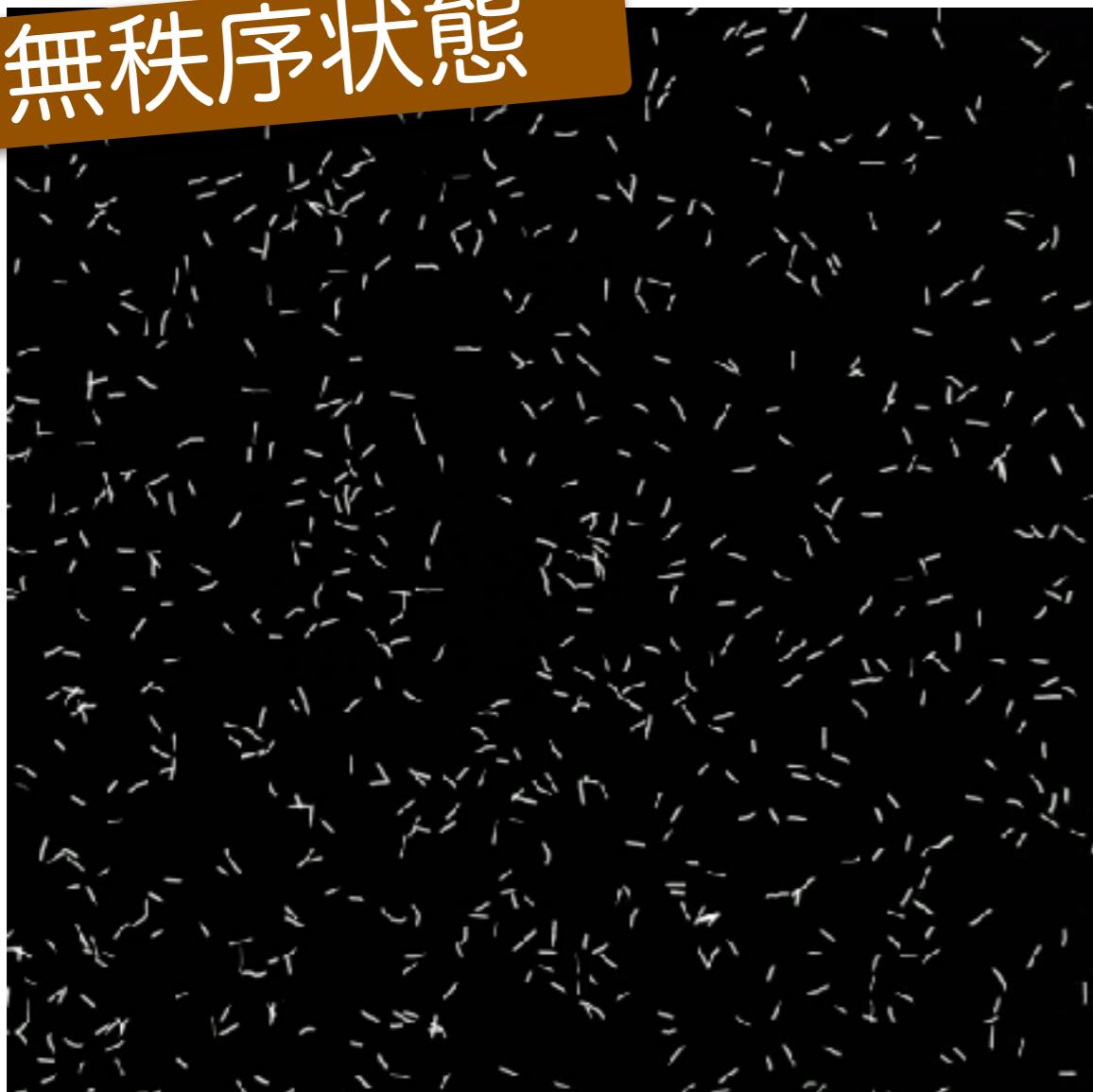
水の結晶 (六方晶)



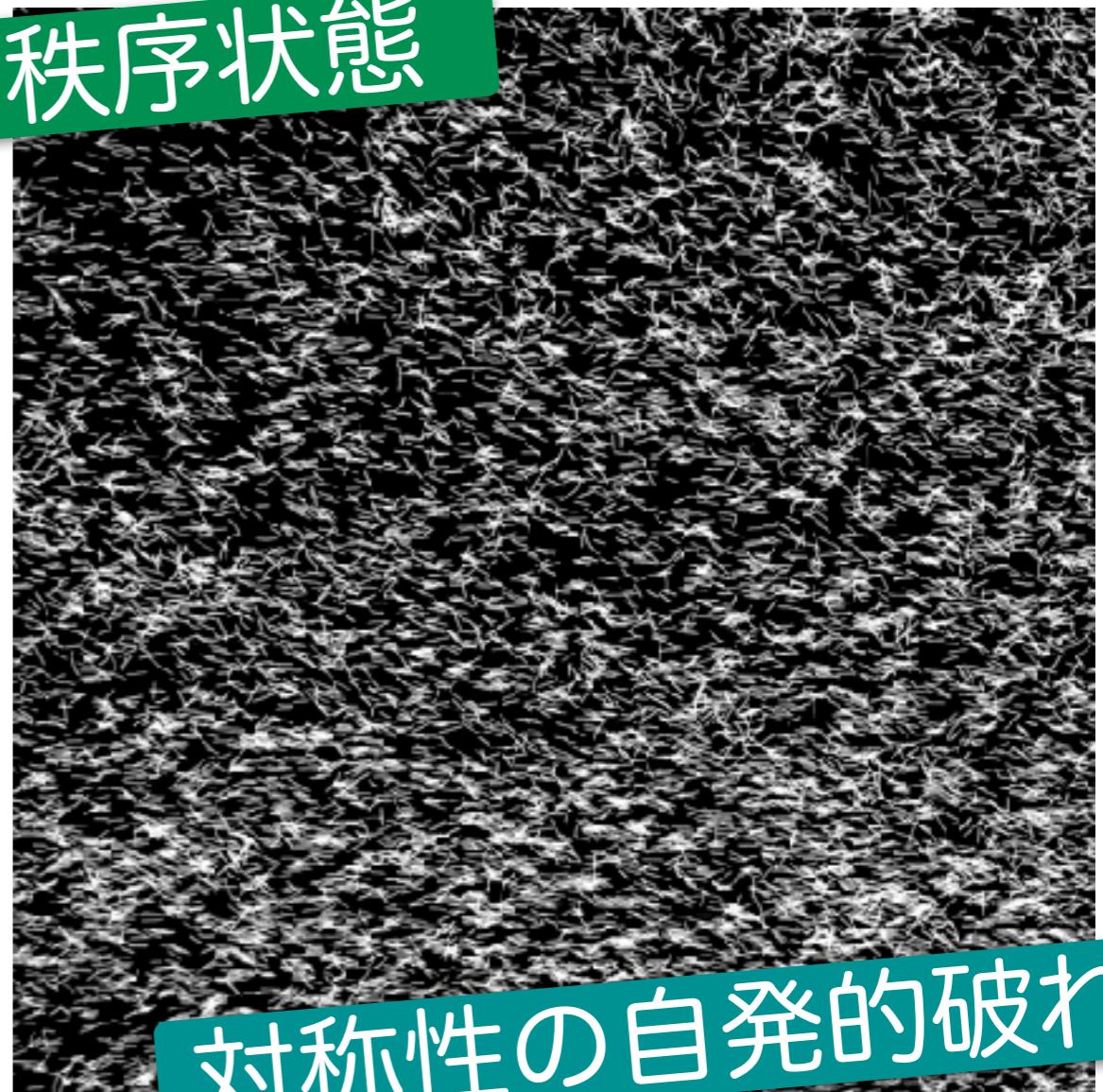
# バクテリア集団の相転移

水中を遊泳する大腸菌 (体長約 0.02 mm) の集団

無秩序状態



秩序状態



対称性の自発的破れ

Daiki Nishiguchi, Ken H. Nagai, Hugues Chaté, and Masaki Sano

Long-range nematic order and anomalous fluctuations in suspensions of swimming filamentous bacteria

Phys. Rev. E 95, 020601(R) (2017)

# バクテリア集団の相転移

PHYSICAL REVIEW LETTERS 125, 220601 (2020)

## Hohenberg-Mermin-Wagner-Type Theorems for Equilibrium Models of Flocking

Hal Tasaki

Department of Physics, Gakushuin University, Mejiro, Toshima-ku, Tokyo 171-8588, Japan

(Received 12 August 2020; accepted 22 October 2020; published 23 November 2020)

We study a class of two-dimensional models of classical hard-core particles with Vicsek type “exchange interaction” that aligns the directions of motion of nearby particles. By extending the Hohenberg-Mermin-Wagner theorem to such models, we prove that there is no spontaneous magnetization and the McBryan-Spencer bound for the correlation length holds in the limit of rotational symmetry in their

Clearly the nematic interaction  $-J(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)(\frac{\mathbf{v}_j}{|\mathbf{v}_j|} \cdot \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|})^2$  favors states in which the velocities of two nearby particles are parallel or antiparallel. Similarly the symmetry breaking field  $-h \frac{(v_j^x)^2}{|\mathbf{v}_j|^2}$  tends to align the velocities in the positive or negative x-direction. Note that the new Hamiltonian (C.1) is written in terms of the angle variables as

$$\tilde{H}_v = - \sum_{\substack{j,k=1 \\ (j < k)}}^N J(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \{ \cos(\theta_j - \theta_k) \}^2 - h \sum_{j=1}^N \{ \cos(\theta_j) \}^2. \quad (\text{C.2})$$

We then study the

バクテリア集団の相転移は通常の平衡系の統計力学では  
決して説明できない

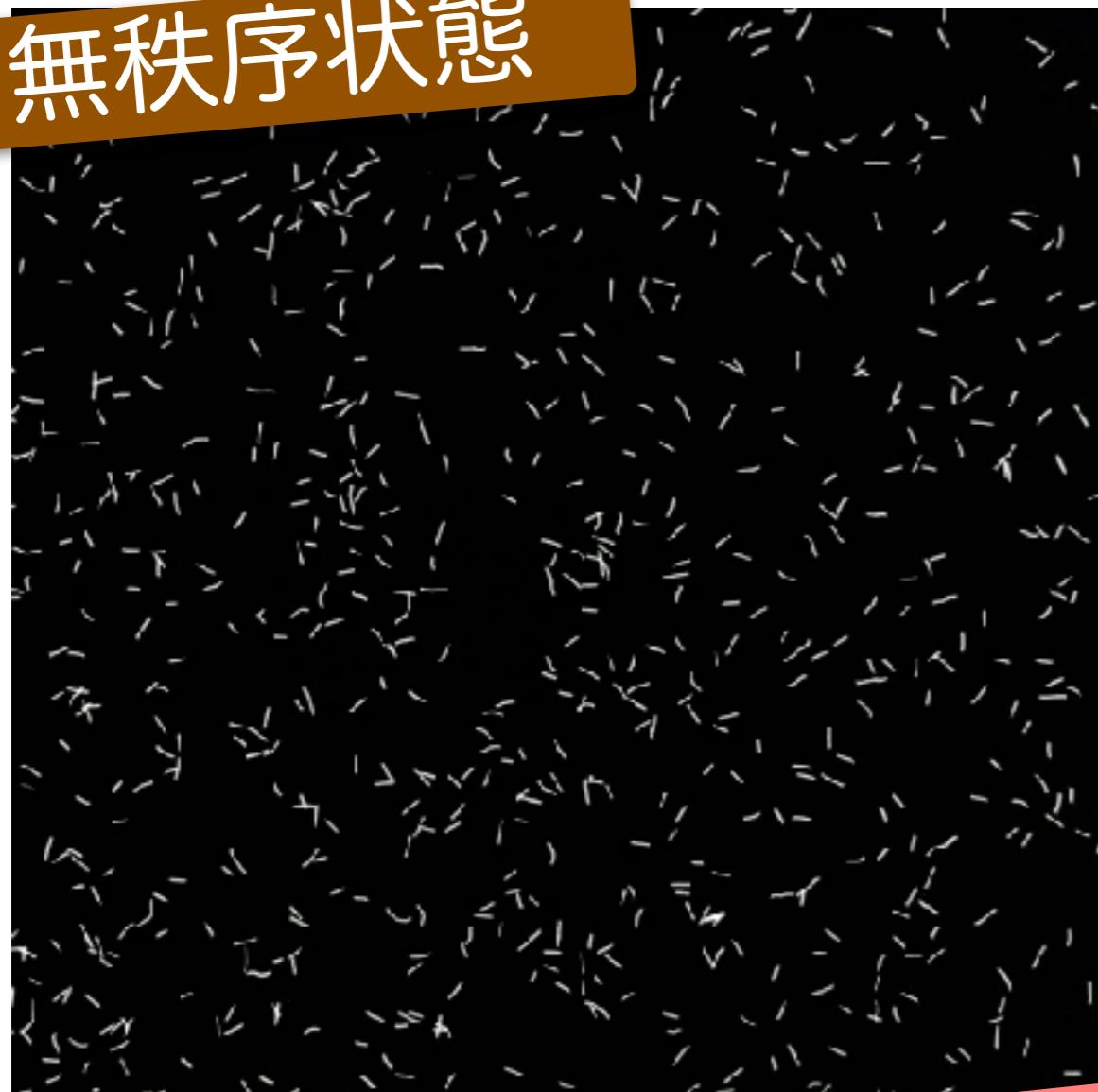
$$\lim_{h \downarrow 0} \lim_{L \uparrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle e^{2i\theta_j} \rangle_{\beta, h} = 0, \quad (\text{C.3})$$

where the particle number  $N$  may depend in an arbitrary manner on the system size  $L$ .

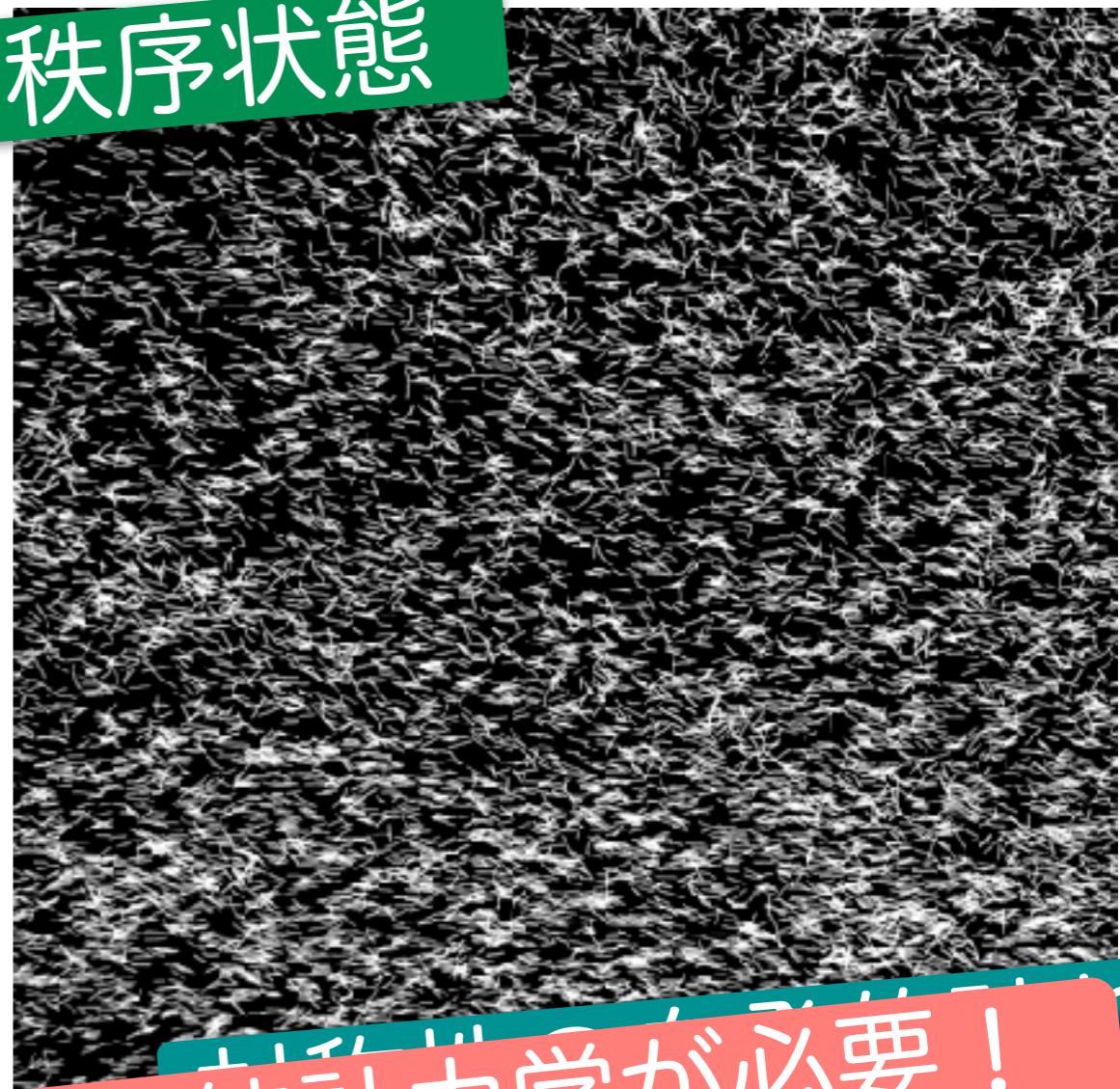
# バクテリア集団の相転移

水中を遊泳する大腸菌 (体長約 0.02 mm) の集団

無秩序状態



秩序状態



非平衡系を扱う(新しい)統計力学が必要！

Daiki Nishiguchi, Ken H. Nozaki

Long-range nonequilibrium statistical mechanics of swimming filamentous bacteria

Phys. Rev. E 90, 052701 (2014)

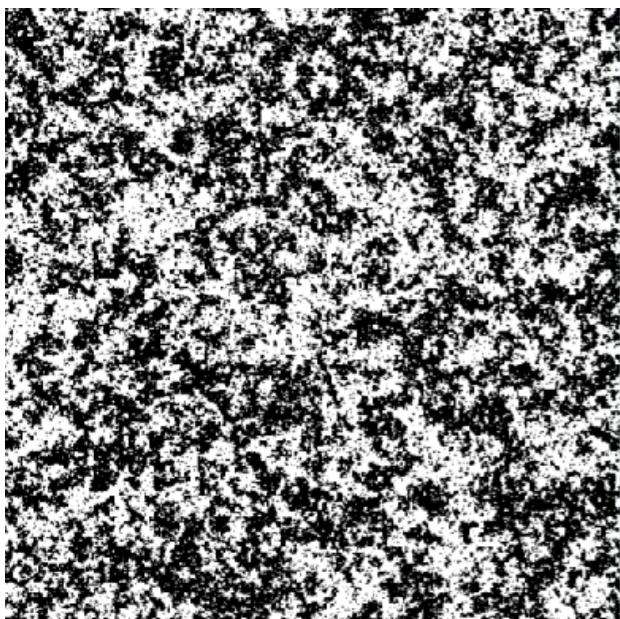
(平衡状態の) 統計力学では理解できない

転移点での  
2次元強磁性イジング模型  
臨界現象の一例

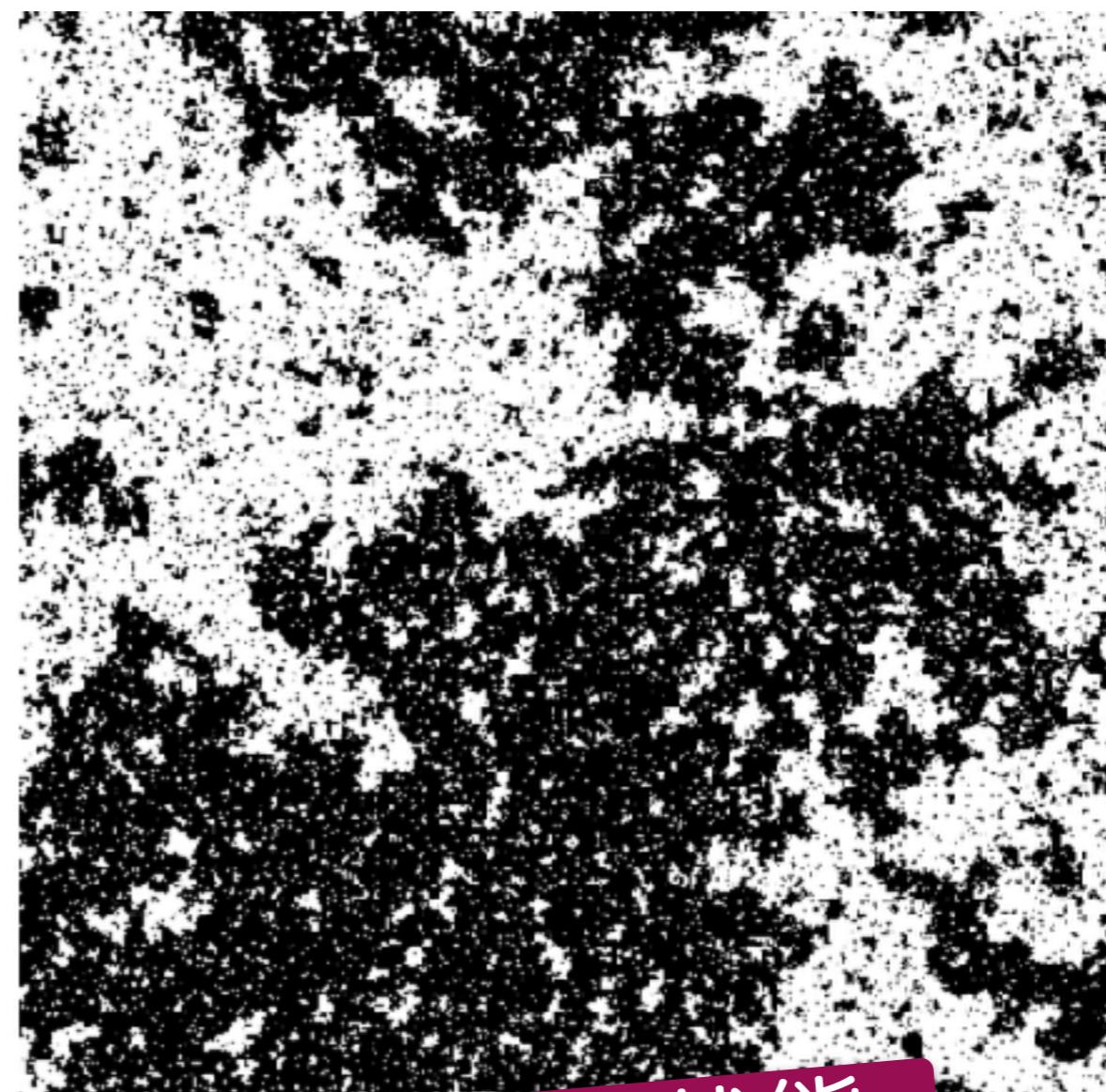
# 転移点での спинの様子

$A = A_c$  (転移点)

$A < A_c$  (高温)

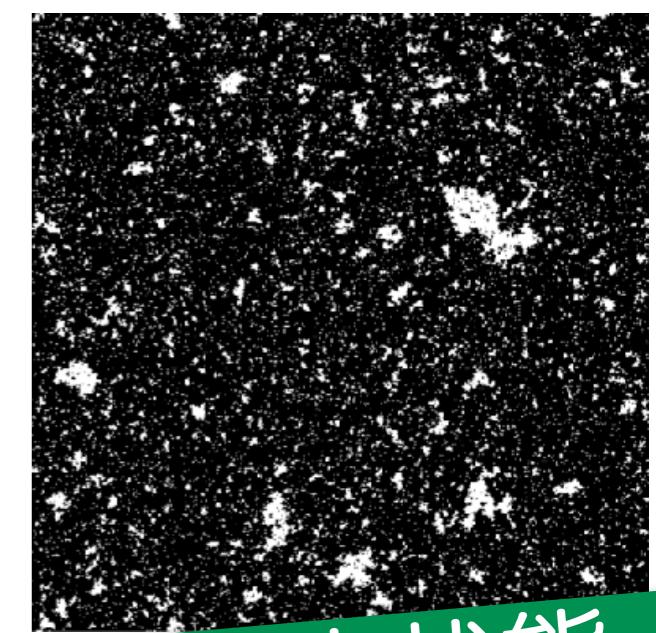


無秩序状態



臨界状態

$A > A_c$  (低温)

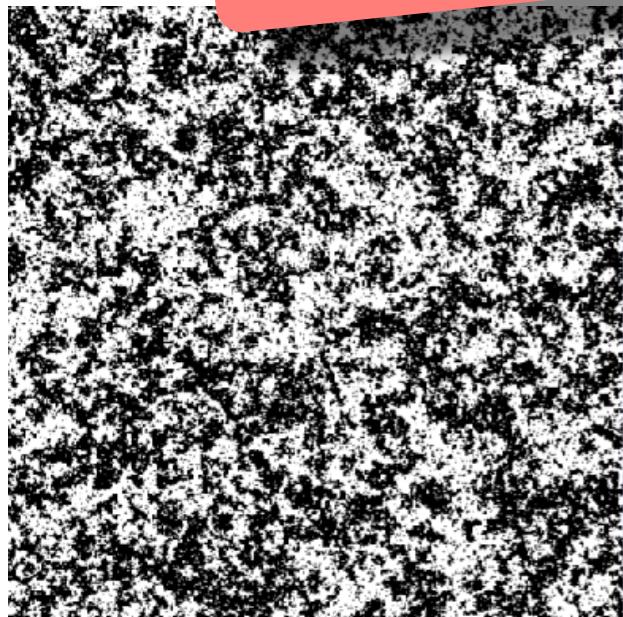


秩序状態

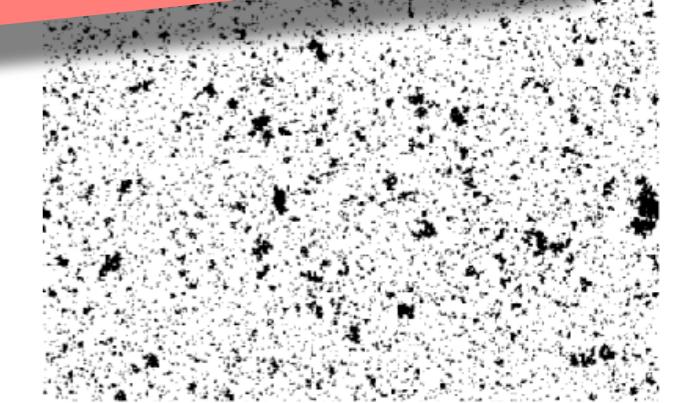
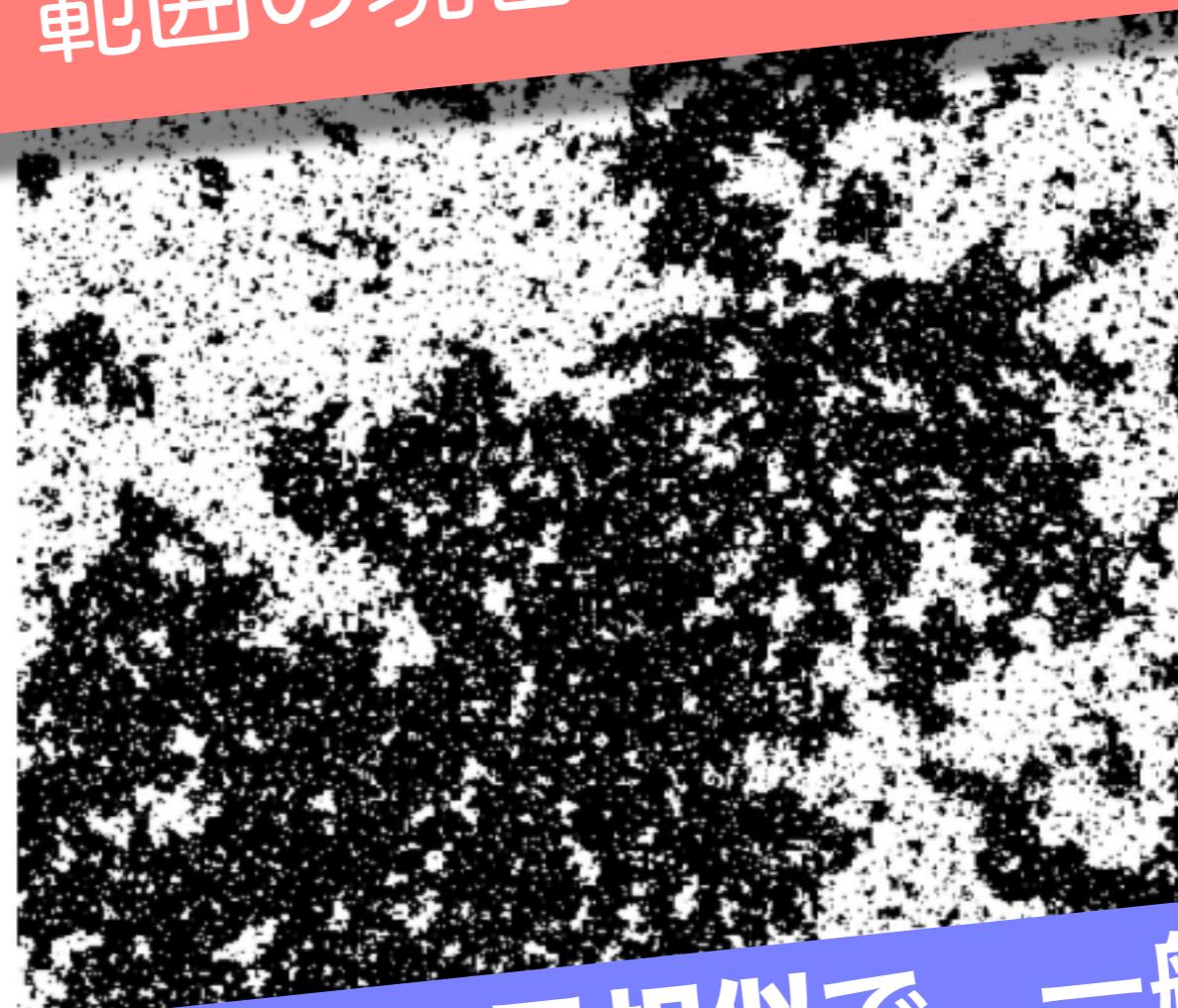
# 転移点での спинの様子

転移点での上向きスピンドと下向きのスピンドの範囲の境目はフラクタル

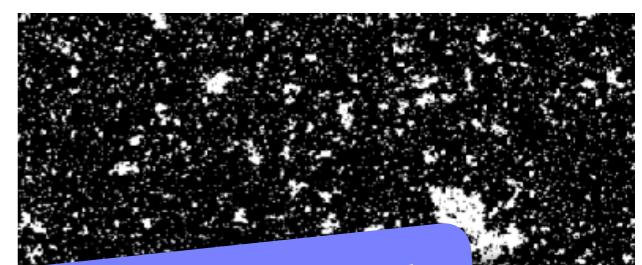
$A <$



無秩序状態



$A > A_c$  (低温)



フラクタルとは、自己相似で、一般に整数でない次元を持つ図形

秩序状態

# 自己相似性

一部を拡大すると、全体と同じ（似ている）

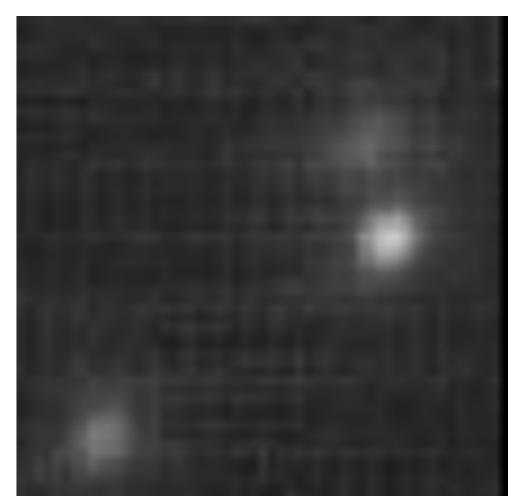


直径  $0.5 \mu\text{m}$  の粒子のブラウン運動



実時間再生  
( $61 \times 53 \mu\text{m}$ )

縮尺を 7.1 倍に拡大  
時間は 50 倍のスロー再生



1/50 スロー再生  
( $5 \times 5 \mu\text{m}$ )

# 図形の次元

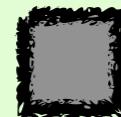
1 次元

$$1 = 1^1 \quad 2 = 2^1 \quad 3 = 3^1$$

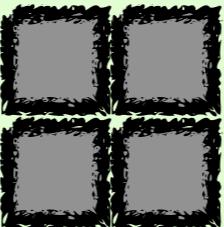
$$4 = 4^1$$

2 次元

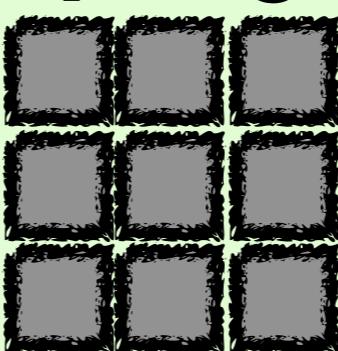
$$1 = 1^2$$



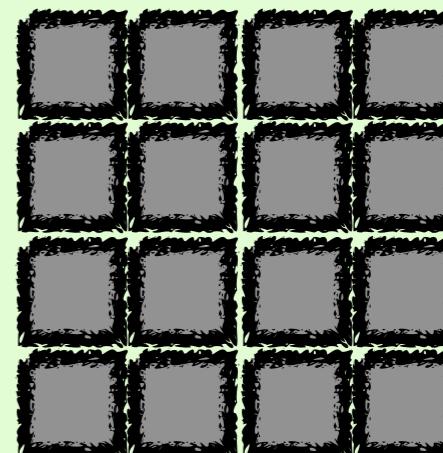
$$4 = 2^2$$



$$9 = 3^2$$



$$16 = 4^2$$



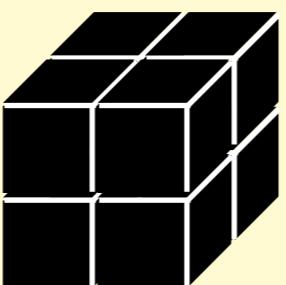
部品の個数

3 次元

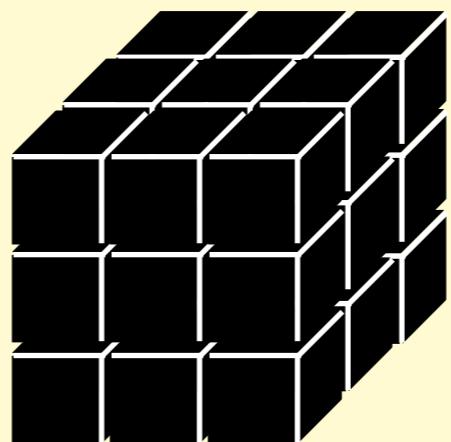
$$1 = 1^3$$



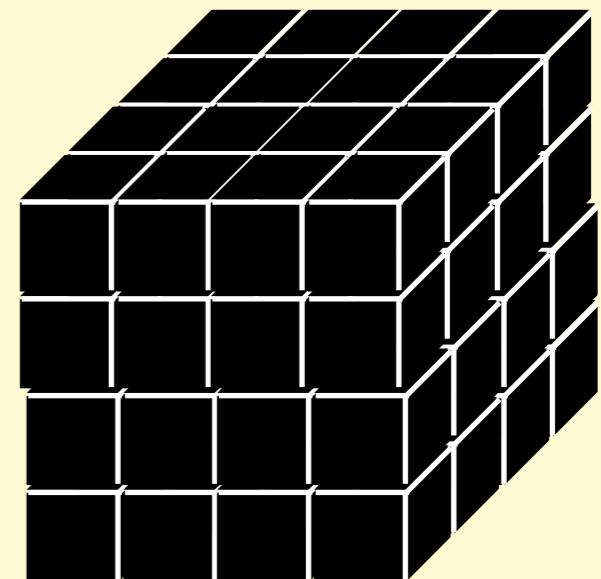
$$8 = 2^3$$



$$27 = 3^3$$



$$64 = 4^3$$



長さ

1

2

3

4

# 図形の次元

1 次元

$$1 = 1^1 \quad 2 = 2^1 \quad 3 = 3^1 \quad 4 = 4^1$$

2 次元

$$1 = 1^2 \quad 4 = 2^2 \quad 9 = 3^2 \quad 16 = 4^2$$

D 次元の図形では

$$(部品の個数) = (長さ)^D$$

3 次元

$$1 = 1^3 \quad 8 = 2^3 \quad 27 = 3^3 \quad 64 = 4^3$$

長さ

1

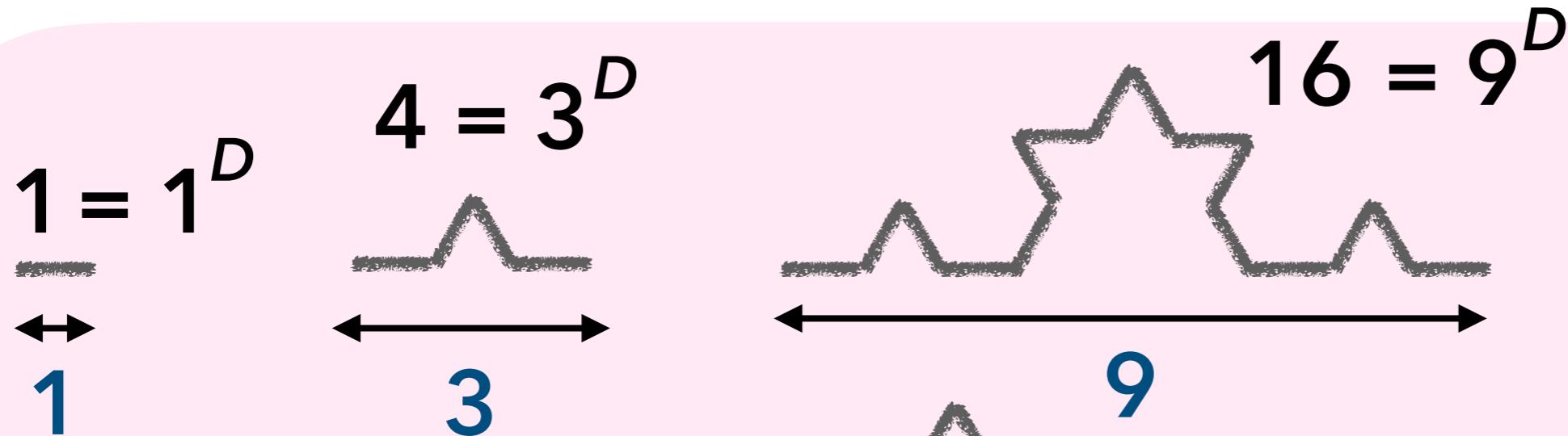
2

3

4

部品の個数

# コッホ曲線

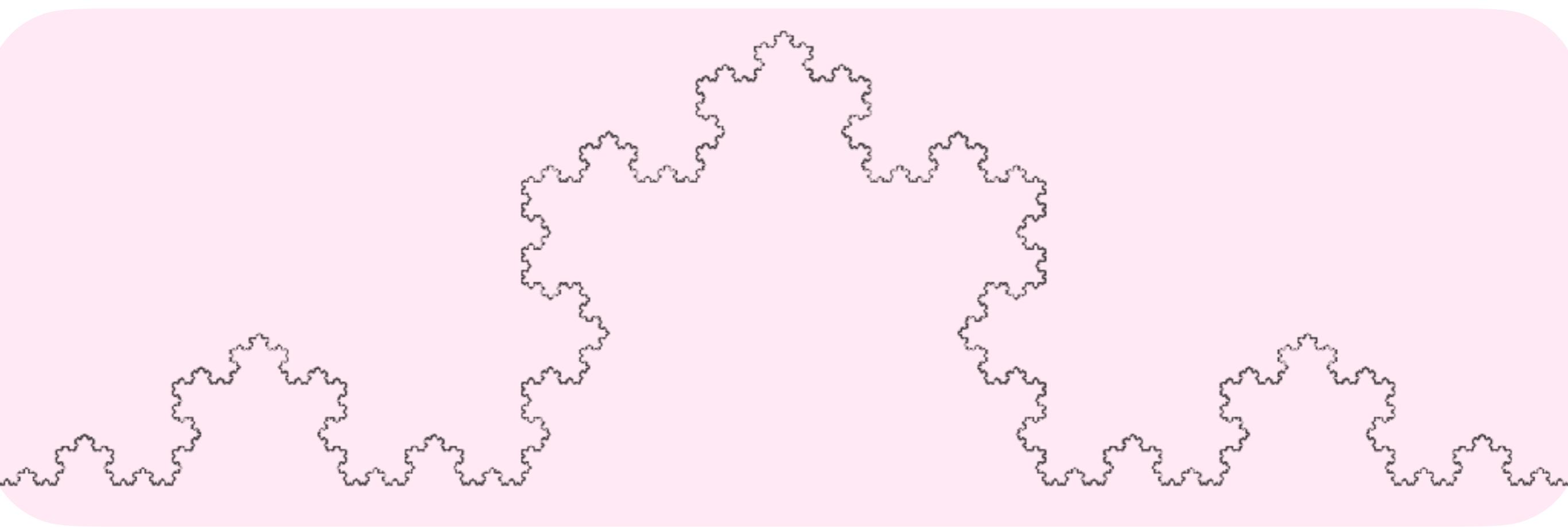


D 次元の図形では  
(部品の個数) = (長さ) $^D$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq 1.2619$$

# コッホ曲線

コッホ曲線は、次元  $D = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq 1.2619$  のフラクタル



そもそも自己相似性を持つように作ったのだから、  
一種の「やらせ」

# 転移点でのイジング模型

$A = A_c$  (転移点) での 2 次元イジング模型

の上向き、下向き спинの境界は

次元  $D = \frac{11}{8} = 1.375$  のフラクタル

各々のスピニはまわりにほどほどに  
そろおうとするだけで、自己相似な  
图形が出現する！

数学的奇跡！！！



# 菲尔兹奖得主的随机流形模型



Wendelin Werner **Fields medal 2006**

"For his contributions to the development of stochastic Loewner evolution, the geometry of two-dimensional Brownian motion, and conformal field theory"

Fields Medal – Stanislav Smirnov

Stanislav Smirnov is being awarded the 2010 Fields medal **for the proof of conformal invariance of percolation and the planar Ising model in statistical physics.**

It was predicted in the 1990's, and used in many studies, that the scaling limit of various two dimensional models in statistical physics has an unexpected symmetry, namely it is conformally invariant. Smirnov was the first to prove this rigorously for two important cases, percolation on the triangular lattice and the planar Ising model. The proof is elegant and it is based on extremely insightful ideas. It now gives the solid foundation

**Fields medal 2010**



名  
誉



Photo credit: Matteo Fieni

**Hugo Duminil-Copin**

For solving longstanding problems in the probabilistic theory of phase transitions in statistical physics, especially in dimensions three and four.

**Fields medal 2022**

[citation](#) | [video](#) | [popular scientific exposition](#) | [CV/publications](#)  
[interview](#) | [laudatio](#) | [proceedings](#) | [Plus magazine! article \(intro\)](#)

# まとめ

- 相転移は無数のミクロな要素が集まって全体として生み出されるマクロな「協力現象」の一種
- 強磁性イジング模型は磁石のもっとも基本的なモデルであり、互いに向きをそろえようとするスピニンの集まりのふるまいを記述する
- 強磁性イジング模型をはじめとする多くの物理系は秩序相と無秩序相の間で相転移する
- 強磁性イジング模型の転移点では自然にフランタル的な構造が出現する

# まとめ

- 相転移は無数のミクロをまとめて  
ミクロがあまり面白くないさうなものが  
すごくたくさん集まると、面白いマクロな  
性質が勝手に生まれてくる！
- 強磁性イジング模型をはじめとする多くの物理  
系は秩序相と無秩序相の間で相転移する
- 強磁性イジング模型の転移点では自然にフラク  
タル的な構造が出現する