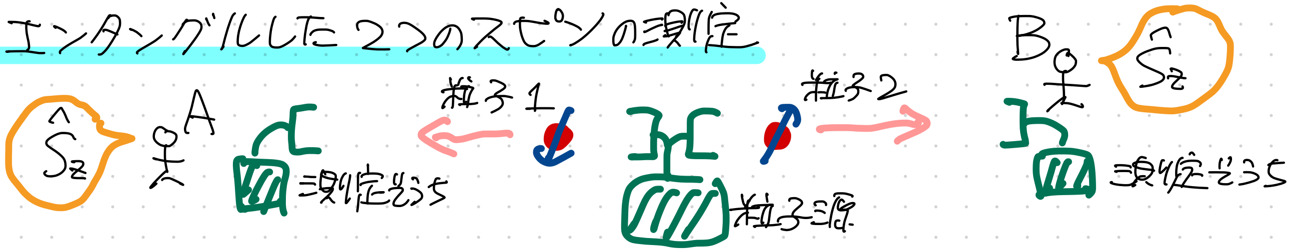
＜「隠れた変数」とベルの不等式の破れ＞

§エンタングルした２つのスピンの測定



粒子源から２つの粒子を反対方向にうち出す

スピンの状態　(1)　$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$

A,B：粒子1,2のスピンのz成分を測定 ⟹
- 確率$\frac{1}{2}$で　Aが↑　Bが↓
- 確率$\frac{1}{2}$で　Aが↓　Bが↑

測定結果は完全に相関

- ▶ 測定しなければ状態は $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ と $|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$ の重ね合わせのまま
- ▶ 測定結果は確率的に決まる。
  ここでの確率は（我々の無知を表わすのでなく）本質的な確率
- ▶ AとBが遠く離れていても測定結果は完全に相関

- 測定しなければ状態は $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ と $|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$ の重ね合わせのまま
- 測定結果は確率的に決まる
  ここでの確率は（我々の無知を表わすのでなく）本質的な確率
- AとBが遠く離れていても測定結果は完全に相関

これは普通の考え方ではない!!

普通の考え方

- 物理量の値（たとえば ↑ or ↓）は測定しなくても決まっている
  我々は測定前は物理量の値を知らないだけ（測定して知る）
  （日常的なできごと（裏返したトランプ, …）はすべてそう）
- 物理現象は局所的なはず → 影響は空間を有限のスピードで伝わっていく!
  遠く離れたA, Bの測定結果が影響し合うのはおかしい!!

古典物理学（Newton力学, 電磁気, 相対論, …）にはこの考え方が通用する.

「普通の考え方」が正しいなら, 量子力学の記述は不完全
（Eistein, Padolsky, Rosen 1935）

A, B：粒子1, 2 のスピンのz成分を測定 ⇒ { 確率$\frac{1}{2}$で Aが↑ Bが↓ / 確率$\frac{1}{2}$で Aが↓ Bが↑ }

この実験結果を「普通の考え方」で解釈できるか → Yes.

「隠れた変数」のモデル（もっとも簡単な例）

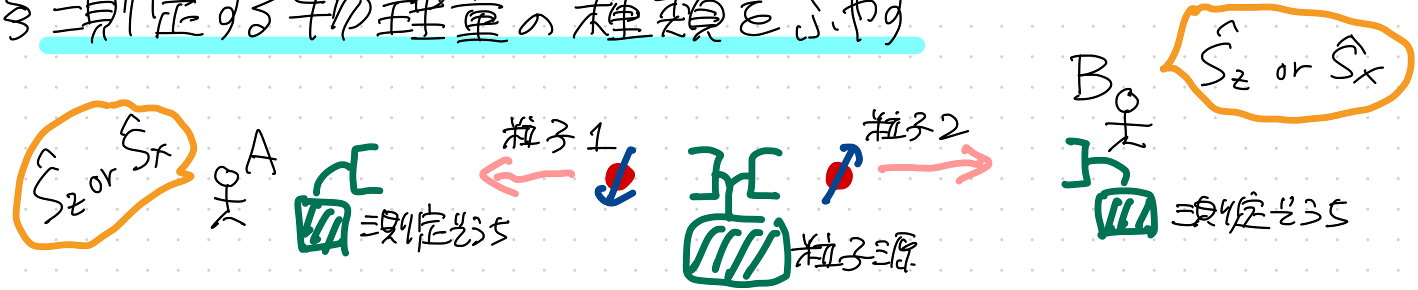
λ	粒子1 σ_z	粒子2 σ_z
1	↑	↓
2	↓	↑

- ▶ 粒子には変数 σ_z = ↑, ↓ が「書きこまれて」いる.
- ▶ $\hat{S}_z$ を測定すると変数 σ_z の値が得られる.
- ▶ 粒子が粒子源をでるときにそれぞれに σ_z が書きこまれる.
  $\lambda = 1$ のパターンが確率$\frac{1}{2}$, $\lambda = 2$ のパターンが確率$\frac{1}{2}$

- 物理量の値は測定する前から定まっている. → 「普通の考え方」
- 何らかの影響が遠くまで一瞬で伝わることはない（局所性）→ 「普通の考え方」
- 上の実験結果を再現

もっとややこしい状況を考えたらどうだろう？

§ 測定する物理量の種類をふやす



AもBも $\hat{S}_z$ あるいは $\hat{S}_x$ を測定

スピンの状態 (1) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2 - |\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2\}$

▷ AとBがどちらも $\hat{S}_z$ を測定

A	B	確率
↑	↓	1/2
↓	↑	1/2

▷ AとBがどちらも $\hat{S}_x$ を測定

A	B	確率
→	←	1/2
←	→	1/2

▷ A が $\hat{S}_z$, B が $\hat{S}_x$ を測定

まず A が測定し ↑ → 測定後の状態 $|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_1 \{ |\rightarrow\rangle_2 - |\leftarrow\rangle_2 \}$

ここで B が $\hat{S}_x$ を測定すれば 確率 1/2 で → or ←

よって

A	B	確率
↑	→	1/4
↑	←	1/4
↓	→	1/4
↓	←	1/4

(B が先に測定すると考えても全く同じ結果)

▷ A が $\hat{S}_x$, B が $\hat{S}_z$ を測定

A	B	確率
→	↑	1/4
→	↓	1/4
←	↑	1/4
←	↓	1/4

A, B ともに $\hat{S}_z$

A	B	確率
↑	↓	1/2
↓	↑	1/2

A, B ともに $\hat{S}_x$

A	B	確率
→	←	1/2
←	→	1/2

A が $\hat{S}_z$, B が $\hat{S}_x$

A	B	確率
↑	→	1/4
↑	←	1/4
↓	→	1/4
↓	←	1/4

A が $\hat{S}_x$, B が $\hat{S}_z$

A	B	確率
→	↑	1/4
→	↓	1/4
←	↑	1/4
←	↓	1/4

この結果を「普通の考え方」に基づく「隠れた変数のモデル」で解釈できるか → Yes.

- 粒子には変数 (σ_x, σ_z) が書きこまれている. (σ_x = →, ←, σ_z = ↑, ↓)
- $\hat{S}_x$ を測定すると σ_x が得られ, $\hat{S}_z$ を測定すると σ_z が得られる.
- 粒子のペアがうち出されるときに
  $\lambda = 1, 2, 3, 4$ のパターンのいずれかが
  確率 1/4 で「書きこまれる」

λ	粒子1 (σ_x, σ_z)	粒子2 (σ_x, σ_z)
1	(→, ↑)	(←, ↓)
2	(→, ↓)	(←, ↑)
3	(←, ↓)	(→, ↑)
4	(←, ↑)	(→, ↓)

注意 このモデルが正しいと言っているのではない!
このモデルでこの実験の結果は
再現できるというだけ.

量子力学を知ったあとも「普通の考え方」をもちつづけられるのか？

「普通の考え方」が通用！

- 様々な実験について「隠れた変数」のモデルを構成

⇓

考えられる全ての実験について量子力学と同じ結論を与える
「隠れた変数」の体系を完成させる

- 「普通の考え方」が正しければかならず成り立つ関係をみつける

⇓

それが現実で成り立つかどうかを調べる

＝

物理量の値は測定しなくても定まっている
物理現象は局所的

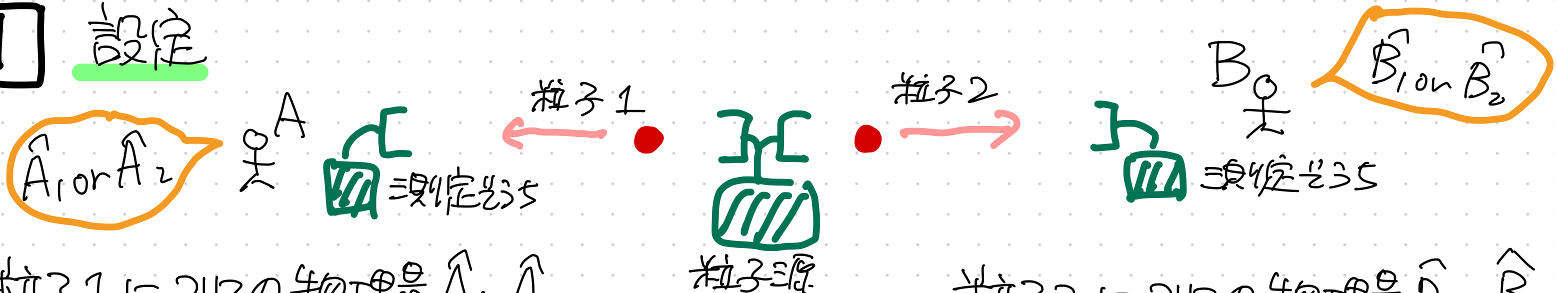
（「局所実在論」とよぶこともある）

John Bell 1964

"I am a quatum engineer, but on Sundays I have principles"（1983年の自己紹介）

§ベルの不等式

① 設定



粒子1についての物理量 $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ のどちらかを測定（結果は±1）

粒子2についての物理量 $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ のどちらかを測定（結果は±1）

どちらを測るかは、粒子をうける直前に確率1/2でランダムに決める。

（Aの選択の影響が光速で伝わったとしても Bの測定結果には影響しない
Bの選択の影響が光速で伝わったとしても Aの測定結果には影響しない）

同じ実験を何度もくり返す。 → 統計処理

相関関数 $\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle$ $(i, j = 1, 2)$

▶ 測定結果

	1	2	3	4	5	6	7	……	N
A_1	+1			−1	−1	+1		…	
A_2		−1	+1				+1	…	−1
B_1				−1			−1	…	
B_2	−1	+1	−1		+1	+1		…	+1

▶ $\hat{A}_1, \hat{B}_2$ を測った回のみ抽出

	1	2	3	4	5	…	N_{12}
A_1	+1	−1	+1	−1	−1	….	+1
B_2	−1	+1	+1	+1	−1	…	+1
A_1B_2	−1	−1	+1	−1	+1	…	+1

相関関数 → A_1B_2 の平均

(1) $$\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle = \frac{1}{N_{12}} \sum_{n=1}^{N_{12}} A_1^{(n)} B_2^{(n)}$$

▶ 同様にしてすべての i, j の組について $\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle$ を求める

(2) $$C = \langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle$$

という量に注目 → C について2つの理論を比較

「普通の考え方」にもとづく理論 と 量子力学

2 「普通の考え方」を認めれば必ず成り立つ不等式（Bellの不等式）

- 粒子対が発生する際に「隠れた変数」 $\lambda = 1, 2, \cdots, 16$ が「書き込まれる」
- λによって $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ の測定結果は完全に決まる

λ	$A_1(\lambda)$	$A_2(\lambda)$	$B_1(\lambda)$	$B_2(\lambda)$
1	+1	+1	+1	+1
2	+1	+1	+1	−1
3	+1	+1	−1	+1
4	+1	+1	−1	−1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	−1	−1	−1	−1

局所性

Bが $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ のどちらを測るかの選択は $A_1(\lambda), A_2(\lambda)$ に影響しない！
Aが $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ のどちらを測るかの選択は $B_1(\lambda) B_2(\lambda)$ に影響しない！

- λはどのようなルールで決まってもよい
- N回の実験のうち λが出た回数 $N(\lambda)$ λの出現頻度 $r(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{N}$

ものすごく一般的なモデル!! → なんでも説明できそう

注意
- 「隠れた変数」はもっと複雑でもよい。$\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ の値だけが重要なので、それによって16個のグループに分けて、グループにλと名付ける。
- 局所性を守れば、確率的なルールを含めても同様に扱える。

相関関数の表式

AがÂ₁, BがB̂₂を測った回だけを抽出　$n = 1, 2, \cdots, N_{12}$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{N_{12}}$

(1) $$\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle = \frac{1}{N_{12}} \sum_{n=1}^{N_{12}} A_1(\lambda_n) B_2(\lambda_n) = \sum_{\lambda=1}^{16} A_1(\lambda) B_2(\lambda) \frac{N_{12}(\lambda)}{N_{12}}$$

測定する量 $(i, j) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ はランダムにきめるので　← 重要！

(2) $$N_{12} = \frac{N}{4} + O(\sqrt{N}),$$ (3) $$N_{12}(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{4} + O(\sqrt{N(\lambda)})$$

よって (4) $$\frac{N_{12}(\lambda)}{N_{12}} = \frac{N(\lambda)}{N} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = r(\lambda) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

Nが十分に大きければ　すべての $i, j = 1, 2$ について

(5) $$\boxed{\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = \sum_{\lambda=1}^{16} A_i(\lambda) B_j(\lambda) r(\lambda)}$$

不等式の導出

任意のλについて

(1) $A_1(\lambda)B_1(\lambda)+A_2(\lambda)B_1(\lambda)-A_1(\lambda)B_2(\lambda)+A_2(\lambda)B_2(\lambda)$

$$=\{A_1(\lambda)+A_2(\lambda)\}\underbrace{B_1(\lambda)}_{=\pm 1}-\{A_1(\lambda)-A_2(\lambda)\}\underbrace{B_2(\lambda)}_{=\pm 1}$$

$$=\boxed{\pm 2}$$

A_1	A_2	A_1+A_2	A_1-A_2
$+1$	$+1$	2	0
$+1$	-1	0	2
-1	$+1$	0	-2
-1	-1	-2	0

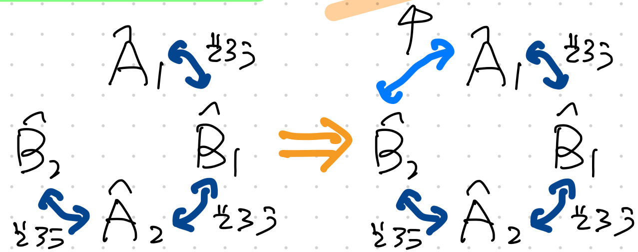
(2) $\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = \sum_{\lambda=1}^{16} A_i(\lambda)B_j(\lambda)\, r(\lambda)$ より

(3) $-2 \leq \langle \hat{A}_1\hat{B}_1\rangle + \langle \hat{A}_2\hat{B}_1\rangle - \langle \hat{A}_1\hat{B}_2\rangle + \langle \hat{A}_2\hat{B}_2\rangle \leq 2$

Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) 不等式 (Bellの不等式の改良版)

「普通の考え方」を認めればかならず成り立つ あたりまえの不等式

ここもそろう!

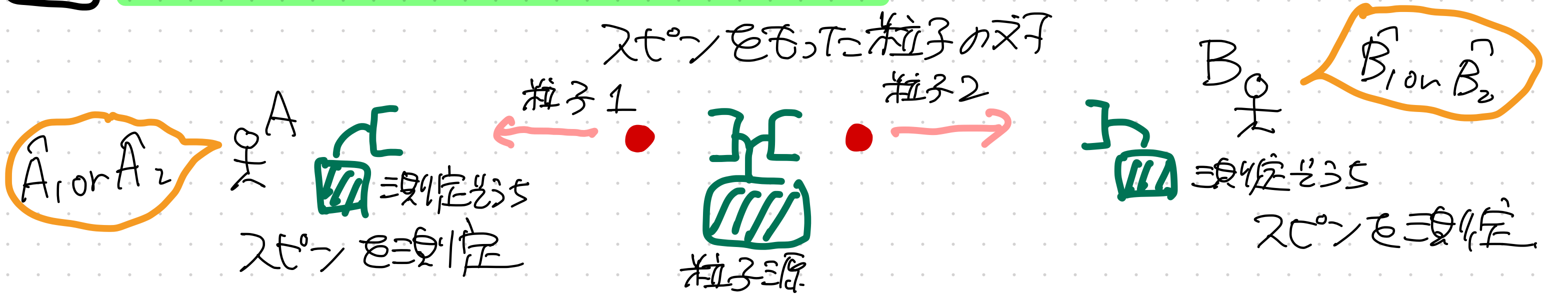


応用

(4) $\langle \hat{A}_1\hat{B}_1\rangle = \langle \hat{A}_2\hat{B}_1\rangle = \langle \hat{A}_2\hat{B}_2\rangle > \frac{2}{3}$ なら

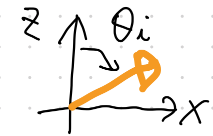
(5) $\langle \hat{A}_1\hat{B}_2\rangle \geq 3\langle \hat{A}_1\hat{B}_1\rangle - 2 > 0$

3 量子力学における具体例の解析

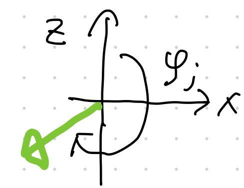


粒子対のスピン状態 (1) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$

(2) $\hat{A}_i = \frac{2}{\hbar}\{\cos\theta_i \hat{S}_z^{(1)} + \sin\theta_i \hat{S}_x^{(1)}\}$ $(i=1,2)$



(3) $\hat{B}_j = \frac{2}{\hbar}\{\cos\varphi_j \hat{S}_z^{(2)} + \sin\varphi_j \hat{S}_x^{(2)}\}$ $(j=1,2)$



$\hat{A}_i\hat{B}_j$ の測定をくり返したときの期待値

(4) $\langle \hat{A}_i\hat{B}_j \rangle = \langle \Phi_0 | \hat{A}_i\hat{B}_j | \Phi_0 \rangle$

期待値の計算

(1) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$

(2) $\langle\Phi_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}\{{}_2\langle\downarrow|{}_1\langle\uparrow| - {}_2\langle\uparrow|{}_1\langle\downarrow|\}$

(3) $\langle\Phi_0|\hat{A}_i\hat{B}_j|\Phi_0\rangle = \frac{1}{2}\{{}_2\langle\downarrow|{}_1\langle\uparrow| - {}_2\langle\uparrow|{}_1\langle\downarrow|\}\hat{A}_i\hat{B}_j\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$

$= \frac{1}{2}\{\langle\uparrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\hat{B}_j|\downarrow\rangle - \langle\uparrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\hat{B}_j|\uparrow\rangle$

$- \langle\downarrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\hat{B}_j|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\hat{B}_j|\uparrow\rangle\}$

行列表示

(4) $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

(5) $\hat{A}_i = \begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ \sin\theta_i & -\cos\theta_i\end{pmatrix}$

よって

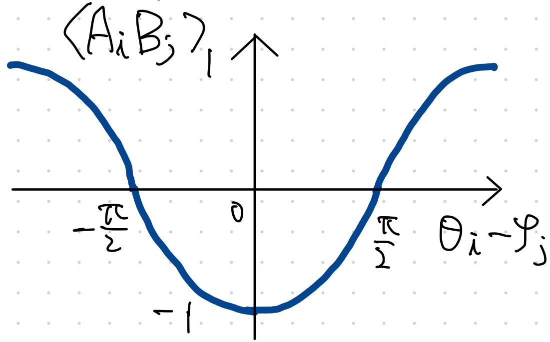
(6) $\begin{cases}\langle\uparrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle = \cos\theta_i\\ \langle\downarrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle = -\cos\theta_i\\ \langle\uparrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle = \sin\theta_i\end{cases}$

$\hat{B}_j$についても同じ

(1) $\begin{cases} \langle\uparrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle = \cos\theta_i & \langle\downarrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle = -\cos\theta_i \\ \langle\uparrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle = \sin\theta_i \end{cases}$

$\hat{B}_j$についても同じ

(2)
$$\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = \langle \Phi_0 | \hat{A}_i \hat{B}_j | \Phi_0 \rangle$$
$$= \frac{1}{2}\{ \langle\uparrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\hat{B}_j|\downarrow\rangle - \langle\uparrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\hat{B}_j|\uparrow\rangle$$
$$- \langle\downarrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\hat{B}_j|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\hat{B}_j|\uparrow\rangle \}$$
$$= \frac{1}{2}\{ -\cos\theta_i\cos\varphi_j - \sin\theta_i\sin\varphi_j - \sin\theta_i\sin\varphi_j - \cos\theta_i\cos\varphi_j \}$$
$$= -\cos(\theta_i - \varphi_j)$$



$\theta_i - \varphi_j = \pm\frac{\pi}{2}$ なら

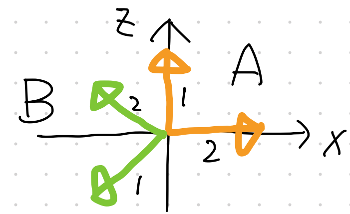
$$\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = 0$$

Aが$\hat{S}_z$, Bが$\hat{S}_x$

A	B	確率
↑	→	1/4
↑	←	1/4
↓	→	1/4
↓	←	1/4

(1) $\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = -\cos(\theta_i - \varphi_j)$

(2) $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \frac{\pi}{2},\ \varphi_1 = \frac{5}{4}\pi,\ \varphi_2 = \frac{7}{4}\pi$ と選ぶ



(3) $\langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle = -\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle = -\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle = -\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$

$\hat{A}_1 \leftrightarrow \hat{B}_1$ そろう

$\hat{B}_2 \leftrightarrow \hat{A}_2$ そろう

$\hat{A}_2 \leftrightarrow \hat{B}_1$ そろう

CHSH不等式より

(6) $\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3 - 2 > 0$

(7) $\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle = -\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \boxed{< 0}$

CHSH不等式によれば

≤ 2

よって

(8) $\underbrace{\langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{2}}$ ~ 2.8

相関関数の計算結果はCHSH不等式をみたさない。

量子力学と「普通の考え方」とは決して共存できない

理論的な考察による結論

補足（期待値の表式）

p13-(4) を使ってよい理由

$\hat{A}$: $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ のいずれか　　$\hat{B}$: $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ のいずれか

(1) $\hat{A}|\varphi_a\rangle_1 = a|\varphi_a\rangle_1 \quad (a=\pm 1)$　　$\hat{B}|\psi_b\rangle_2 = b|\psi_b\rangle_2 \quad (b=\pm 1)$

全状態を (2) $|\Phi_0\rangle = \sum_{a,b=\pm 1} C_{ab}|\varphi_a\rangle_1|\psi_b\rangle_2$ と展開

▷ まず $\hat{A}$ を測定　確率 $P_a = \sum_{b=\pm 1}|C_{ab}|^2$ で $a=\pm 1$ が得られる.

測定後の状態 (3) $|\Phi_a\rangle = \left(\sum_{b=\pm 1}|C_{ab}|^2\right)^{-1/2}\sum_{b=\pm 1} C_{ab}|\varphi_a\rangle_1|\psi_b\rangle_2$

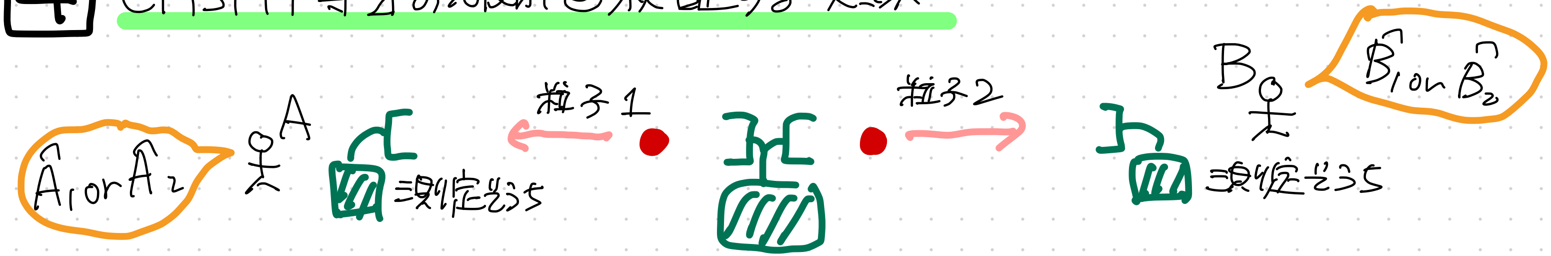
▷ 次に $\hat{B}$ を測定　確率 $\left(\sum_{b'=\pm 1}|C_{ab'}|^2\right)^{-1}|C_{ab}|^2$ で $b=\pm 1$ が得られる.

▷ よって測定結果 a, b が得られる確率は $|C_{ab}|^2$

期待値は (4) $\langle\hat{A}\hat{B}\rangle = \sum_{a,b=\pm 1} ab|C_{ab}|^2 = \langle\Phi_0|\hat{A}\hat{B}|\Phi_0\rangle$

▷ $\hat{A}$ と $\hat{B}$ を測定する順番をかえても同じ.

4 CHSH不等式の破れを検証する実験



spin-singlet $|\Psi_0\rangle$ を用いた具体例

$$C = \langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle$$

CHSH不等式 $|C| \leq 2$

- Aspect 他 1982 光子を用いた実験 $|C| > 2$ を報告.

⋮

- Hensen 他 2015 "Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometers"

エンタングルした電子スピンの状態を用いて $|C| \simeq 2.42 \pm 0.20$ を得た!

われわれの世界では CHSH不等式は成立しない.

「普通の考え方」
- 物理量の値は測定しなくても定まっている
- 物理現象は局所的　何らかの影響は空間を有限の速さで伝わっていく

「局所実在論」とよぶこともある。

▶「普通の考え方」を認めればCHSH不等式は成立
▶われわれの世界ではCHSH不等式は成立しない。

⇓

「普通の考え方」にもとづく理論では決して説明できない実験事実がある。

われわれの住んでいる世界は「普通の考え方」では記述できない!!

注意
- これで量子力学が正しいことが示されたわけではない。
（今のところ量子力学はかなり正しそうだが）
- この世界での多くの現象は「普通の考え方」で理解できる。