

〈量子力学における角運動量〉

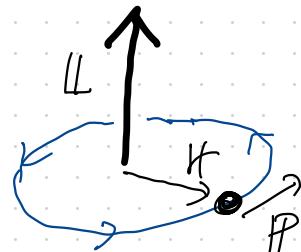
1

○軌道角運動量と交換関係

3次元の1粒子の角運動量

► 古典 位置 \mathbf{r} 運動量 \mathbf{p}

$$\text{角運動量 } \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1)$$



► 量子力学 $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ (2)

$$\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} \quad (3)$$

$$(\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z)$$

$$\begin{cases} \hat{l}_x = \hat{y} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_y \\ \hat{l}_y = \hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_z \\ \hat{l}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x \end{cases} \quad (4)$$

$\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ は自己共役演算子

△交換関係

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= [\hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y, \hat{z}\hat{P}_x - \hat{x}\hat{P}_z] \\
 &= [\hat{y}\hat{P}_z, \hat{z}\hat{P}_x] = \hat{y}\hat{P}_x [\hat{P}_z, \hat{z}] \quad \text{---} i\hbar \\
 &\quad - [\hat{y}\hat{P}_z, \hat{x}\hat{P}_z] = 0 \\
 &\quad - [\hat{z}\hat{P}_x, \hat{z}\hat{P}_x] = 0 \\
 &\quad + [\hat{z}\hat{P}_x, \hat{x}\hat{P}_z] = \hat{P}_x \hat{x} [\hat{z}, \hat{P}_z] \quad \text{---} i\hbar \\
 &= i\hbar \{-\hat{y}\hat{P}_x + \hat{x}\hat{P}_y\} \\
 &= i\hbar \hat{L}_z \quad (1)
 \end{aligned}$$

他も同様互の2

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z \\
 [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{L}_x \\
 [\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar \hat{L}_y
 \end{aligned}$$

The diagram shows three perpendicular axes labeled X, Y, and Z. Blue arrows indicate the direction of rotation for each axis: a clockwise arrow around the X-axis, a counter-clockwise arrow around the Y-axis, and a counter-clockwise arrow around the Z-axis.

$$\begin{aligned}
 \text{また } [\hat{L}_\alpha, \hat{P}^2] &= 0 \quad (3) \quad \alpha = x, y, z \\
 [\hat{L}_\alpha, \hat{P}^2] &= 0 \quad (4) \text{ も成立}
 \end{aligned}$$

§ 一般の角運動量演算子の固有値と固有状態

(3)

$$\hat{J} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z) \quad (1)$$

- $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ は自己共役
- これらは以下に交換関係をみたす

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z, [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x, [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y \quad (2)$$

このように \hat{J} を(一般の)角運動量演算子と言ふ。

軌道角運動量 L はひとつの値。

これは一般的な性質だけ あるいは 特殊なものか?

▶ \hat{J}_z と \hat{J}^2 の交換関係

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \quad (1)$$

$$[\hat{J}_z, (\hat{J}_x)^2] = [\hat{J}_z, \hat{J}_x] \hat{J}_x + \hat{J}_x [\hat{J}_z, \hat{J}_x] \\ = i\hbar (\hat{J}_y \hat{J}_x + \hat{J}_x \hat{J}_y) \quad (2)$$

$$[\hat{J}_z, (\hat{J}_y)^2] = [\hat{J}_z, \hat{J}_y] \hat{J}_y + \hat{J}_y [\hat{J}_z, \hat{J}_y] \\ = -i\hbar (\hat{J}_x \hat{J}_y + \hat{J}_y \hat{J}_x) \quad (3)$$

$$[\hat{J}_z, (\hat{J}_z)^2] = 0 \quad (4)$$

$$\hat{J}^2 = (\hat{J}_x)^2 + (\hat{J}_y)^2 + (\hat{J}_z)^2 \quad (5)$$

自己共役

$$[\hat{J}_z, \hat{J}^2] = 0 \quad (6)$$

昇降演算子

$$\hat{J}_{\pm} := \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y \quad (1)$$

自己共役 \Rightarrow は(1)！ $(\hat{J}_{\pm})^{\dagger} = \hat{J}_{\pm}$ (2)

P4-(6) と 同様に $\rightarrow \hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ は \neq 等！

$$[\hat{J}_x, \hat{J}^2] = 0, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}^2] = 0 \quad (4) \quad \text{左の式}$$

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_{\pm}] = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [\hat{J}_z, \hat{J}_{\pm}] &= [\hat{J}_z, \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y] \\ &= [\hat{J}_z, \hat{J}_x] \pm i [\hat{J}_z, \hat{J}_y] \\ &= i\hbar \hat{J}_y \pm i (-i\hbar \hat{J}_x) \\ &= \pm \hbar (\hat{J}_x \pm i \hat{J}_y) \\ &= \pm \hbar \hat{J}_{\pm} \quad (6) \end{aligned}$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_{\pm}] = \pm \hbar \hat{J}_{\pm} \quad (7)$$

△ \hat{J}^2 と \hat{J}_z の同時固有状態

\hat{J}^2 と \hat{J}_z は自己共役 $\Rightarrow [\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$ (1)

同時正交化可能 \rightarrow 同時固有状態を $|\Psi_{\lambda, \mu}\rangle$

$$\hat{J}^2 |\Psi_{\lambda, \mu}\rangle = \lambda |\Psi_{\lambda, \mu}\rangle \quad (2)$$

$$\hat{J}_z |\Psi_{\lambda, \mu}\rangle = \mu |\Psi_{\lambda, \mu}\rangle \quad (3)$$

$$\|\Psi_{\lambda, \mu}\| \approx 1$$

固有値 λ, μ は 実数。

交換関係式 $\hat{J}_x \hat{J}_z - \hat{J}_z \hat{J}_x = i\hbar \hat{J}_y$, λ, μ は 強い結合のため $\lambda, \mu \geq 0$!

- $\lambda \geq 0$ である。

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda \langle \Psi_{\lambda, \mu} | \Psi_{\lambda, \mu} \rangle = \langle \Psi_{\lambda, \mu} | \hat{J}^2 | \Psi_{\lambda, \mu} \rangle \\ &= \langle \Psi_{\lambda, \mu} | (\hat{J}_x)^2 | \Psi_{\lambda, \mu} \rangle + \langle \Psi_{\lambda, \mu} | (\hat{J}_y)^2 | \Psi_{\lambda, \mu} \rangle \\ &\quad + \langle \Psi_{\lambda, \mu} | (\hat{J}_z)^2 | \Psi_{\lambda, \mu} \rangle \\ &= \|\hat{J}_x |\Psi_{\lambda, \mu}\rangle\|^2 + \|\hat{J}_y |\Psi_{\lambda, \mu}\rangle\|^2 + \|\hat{J}_z |\Psi_{\lambda, \mu}\rangle\|^2 \\ &\geq 0 \quad (4) \quad \|\hat{A}|\Psi\rangle\|^2 = \langle \Psi | \hat{A}^\dagger \hat{A} |\Psi\rangle \end{aligned}$$

□ μ の上げ下げ

固有状態 $|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle$ が存在とする。 $||\Psi_{\lambda,\mu}||=1$

$\hat{J}_{\pm}|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle$ もう1つ状態 (重複するゼロかも)

$$\hat{J}^2(\hat{J}_{\pm}|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle) = \hat{J}_{\pm} \hat{J}^2 |\Psi_{\lambda,\mu}\rangle = \lambda (\hat{J}_{\pm}|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle) \quad (1)$$

$[\hat{J}_z, \hat{J}_{\pm}] = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda |\Psi_{\lambda,\mu}\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{J}_z(\hat{J}_{\pm}|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle) &= (\hat{J}_{\pm} \hat{J}_z \pm \hbar \hat{J}_{\mp}) |\Psi_{\lambda,\mu}\rangle \\ &= (\mu \pm \hbar) (\hat{J}_{\pm}|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle) \end{aligned} \quad (2)$$

$[\hat{J}_z, \hat{J}_{\pm}] = \pm \hbar \hat{J}_{\pm}$

よってもし $\hat{J}_{\pm}|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle \neq 0$ なら

$$\hat{J}_{\pm}|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle = (\text{定数}) |\Psi_{\lambda, \mu \pm \hbar}\rangle \quad (3)$$

(3) より $\pm \hbar$ あるのは $-\hbar$

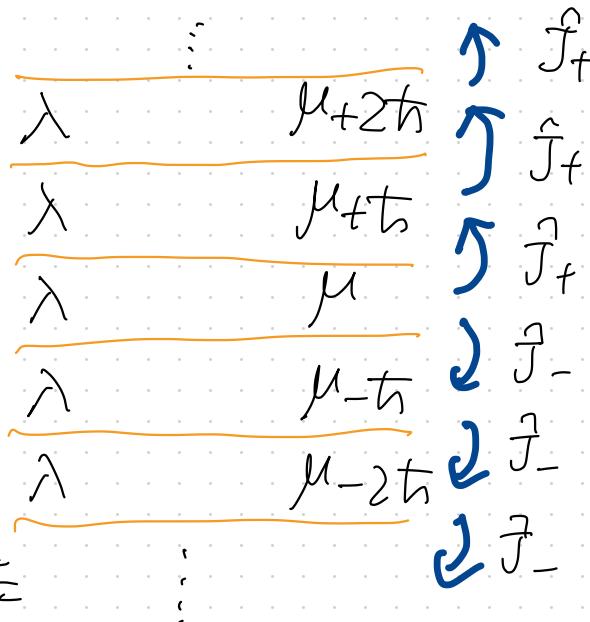
つまり

 J^2 の固有値 J_z の固有値

$|\Psi_{\lambda, \mu}\rangle \rightarrow$

これがい

あると仮定した



上にも下にも 続くのか？

実はつながります！

9

$$\|\hat{A}|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|A^\dagger A|\psi\rangle$$

$$\|\hat{J}_+|\psi_{\lambda,\mu}\rangle\|^2 = \langle\psi_{\lambda,\mu}|\hat{J}_-\hat{J}_+|\psi_{\lambda,\mu}\rangle \quad (1)$$

 \approx^2

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) \quad i\hbar\hat{J}_z$$

$$= (\hat{J}_x)^2 + (\hat{J}_y)^2 + i[\hat{J}_x, \hat{J}_y]$$

$$= (\hat{J}_x)^2 + (\hat{J}_y)^2 - \hbar\hat{J}_z^2 \quad \hat{J}^2 \in \hat{J}_z^2$$

$$= \hat{J}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z + \hbar) \quad \text{左端!} \quad (2)$$

よし2

$$\|\hat{J}_+|\psi_{\lambda,\mu}\rangle\|^2 = \langle\psi_{\lambda,\mu}|(\hat{J}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z + \hbar))|\psi_{\lambda,\mu}\rangle$$

$$= (\lambda - \mu(\mu + \hbar)) \underbrace{\langle\psi_{\lambda,\mu}|\psi_{\lambda,\mu}\rangle}_{(3)}$$

左端 ≥ 0 の λ は 0 以上

$$\mu(\mu + \hbar) \leq \lambda \quad (4)$$

$$\mu(\mu + h) \leq \lambda \quad (1)$$

- λ を止めたとき、 μ には許された最大値がある。

μ_{\max} とする

$|\Psi_{\lambda, \mu_{\max}}\rangle$ という状態はある。 $\|\Psi_{\lambda, \mu_{\max}}\| = 1$

したがって

$|\Psi_{\lambda, \mu_{\max}+h}\rangle$ という状態はなし (ホタルの図)

$$\text{5,2 } \hat{J}_+ |\Psi_{\lambda, \mu_{\max}}\rangle = 0 \quad (2)$$

— もうX上には上げられない！

$$\|\hat{J}_+ |\Psi_{\lambda, \mu_{\max}}\rangle\|^2 = 0 \quad (3)$$

$$\text{p9-(3)} \rightarrow \underbrace{\{\lambda - \mu_{\max} (\mu_{\max} + h)\}}_{< 0} \underbrace{\|\Psi_{\lambda, \mu_{\max}}\|}_{= 1}^2$$

$$\text{5,2 } \lambda = \mu_{\max} (\mu_{\max} + h) \quad (4)$$

11

- $\|\tilde{J}_-|\Psi_{\lambda,\mu}\rangle\|^2$ を求めよ 同じ考慮

入を止めたとき、 M には最小値 M_{\min} があり

$$\lambda = \mu_{\min} (\mu_{\min} - t_0) \quad (1)$$

P10-(4)とおしゃべり

$$\mu_{\max}(\mu_{\max} + t_h) = \mu_{\min}(\mu_{\min} - t_h) \quad (2)$$

$$\mu_{\max} \geq \mu_{\min} \in \mathcal{M}_{\text{reg}}(\mathcal{X})$$

$$\mu_{\max} = -\mu_{\min} \quad (3) \quad \text{or} \quad 21.$$

(x) 5/11

$$\mu_{\max} \downarrow t_h \quad T_2(2) \quad \mu_{\max} - \mu_{\min} = \square t_h \quad (4)$$

$$\mu_{\min} + t_0 \text{ for } \mu_{\max} = \frac{D}{2} \text{ for } j < 5$$

5,2 j=0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, ... の1次元が12

$$\mu_{\max} = j\hbar, \quad \mu_{\min} = -j\hbar \quad (6)$$

$$\lambda = j(j+1) \hbar^2 \quad (7)$$

このセクションのまとめ ← 重要!

(2)

$\hat{J} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ 自己共役 $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z, \dots$

▶ \hat{J}^2 の固有値は $j(j+1)\hbar^2$ ($j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$) の形に限られる

「角運動量の大きさ」

▶ 各 j の \hat{J}_z の固有値は $m\hbar$
 $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_{2j+1 \text{ 個}}$ 「角運動量の
 成分」

▶ \hat{J}^2 と \hat{J}_z の同時固有状態を $|\Psi_{j,m}\rangle$ と書く。

$$\hat{J}^2 |\Psi_{j,m}\rangle = j(j+1)\hbar^2 |\Psi_{j,m}\rangle \quad (1)$$

$$\hat{J}_z |\Psi_{j,m}\rangle = m\hbar |\Psi_{j,m}\rangle \quad (2)$$

$$\langle \Psi_{j,m} | \Psi_{j',m'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (3)$$

$$||\Psi_{j,m}|| = 1 \text{ と } \text{量子力学}$$

固有値が重ねば直交する。 (part 3-p18)

$m < j$ のとき

$$|\Psi_{j,m+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}} \frac{1}{\hbar} \hat{J}_+ |\Psi_{j,m}\rangle \quad (1)$$

$m > -j$ のとき

$$|\Psi_{j,m-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}} \frac{1}{\hbar} \hat{J}_- |\Psi_{j,m}\rangle \quad (2)$$

* ~~規格化係数~~ p9-(3) ($\propto \hat{J}_-$ (= 2(1/2)の同様式))

かうすくいは出る。

多軌道角運動量量子数の表現

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}, \quad \hat{r} = (x, y, z), \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla \quad (1)$$

\hat{L} は量子力学の角運動量 \hat{J} の一つの候補。

具体的には

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$f(r)$ を r の任意の関数

$$\begin{aligned} & \hat{L}_x f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) - z \frac{\partial}{\partial y} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\hat{L}_y f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = 0 \quad (6)$$

$$\hat{L}_z f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = 0 \quad (7)$$

極座標を使うと r は関係なく！

$$(r, \theta, \varphi) \quad r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} z = r \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

(x, y, z) と (r, θ, φ) は二の実数で結び付けて
（1）とある。

任意の波動関数

$$\Psi(x, y, z) = \Psi(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad (4)$$

⇒ L_z の表現 $\exists L_z = \Psi \frac{\partial}{\partial z}$ で $\frac{\partial}{\partial z}$ 分

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} &= -r \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x} \Psi + x \frac{\partial}{\partial y} \Psi \end{aligned} \quad (5)$$

は（1）形だ。

$$\boxed{L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}} \quad (6)$$

L_x, L_y の表現

$$\Psi(x, y, z) = \Psi(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$$

今度は Ψ を θ で 分割 2 つ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r \cos\theta \cos\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial x} + r \cos\theta \sin\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial y} - r \sin\theta \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (1)$$

すでに L_x, L_y には ますまつ

$$\text{両辺に } \sin\varphi \text{ を く て } 2, (\sin\varphi)^2 = -(\cos\varphi)^2 + 1 \text{ を く て } \quad (2)$$

$$\sin\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = r \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial x} - r \cos\theta (\cos\varphi)^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$+ r \cos\theta \frac{\partial \Psi}{\partial y} - r \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

(A)

(3)

$$(B) = \frac{1}{i\hbar} L_x \quad (A) = - \left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right] \cos\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad (4)$$

"cot \theta"

よし

$$\hat{L}_x = i\hbar \left\{ \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \quad (5)$$

\hat{L}_y は 2つとも ほぼ 同様

電流の表現(まとめ)

$$\hat{L}_x = i\hbar \left\{ \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} \quad (1)$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left\{ -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} \quad (2)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (3)$$

2,2

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$$

$$= \hbar \left\{ (i\sin\varphi + \cos\varphi) \frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta (\cos\varphi + i\sin\varphi) \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\}$$

$$= \hbar e^{i\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} \quad (4)$$

$$\hat{L}_- = \hbar e^{-i\varphi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} \quad (5)$$

3軸直角運動量の固有値と固有状態

⇒ $Y(\theta, \varphi)$ の固有方程式

同時固有状態 $|Y_{j,m}\rangle$ を求める。 $j \rightarrow l$ とする。

$$\hat{L}^2 |\Psi_{l,m}\rangle = l(l+1) \hbar^2 |\Psi_{l,m}\rangle \quad (1)$$

$$\hat{L}_z |\Psi_{l,m}\rangle = m \hbar |\Psi_{l,m}\rangle \quad (2)$$

$|\Psi_{l,m}\rangle$ に対応する三波動関数 $\Psi_{l,m}(x, y, z)$

$$\hat{L}_\alpha f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = 0 \quad (\alpha=x, y, z) \quad \text{を "Eの2" } \quad (3)$$

$$\Psi_{l,m}(x, y, z) = R(r) Y(\theta, \varphi) \quad (4)$$

と書ける状態をさがせばいい。

$$(\text{また} \hat{L}_\alpha R(r) Y(\theta, \varphi) = R(r) \hat{L}_\alpha Y(\theta, \varphi)) \quad (5)$$

$$\hat{L}^2 Y(\theta, \varphi) = l(l+1) \hbar^2 Y(\theta, \varphi) \quad (6)$$

$$\hat{L}_z Y(\theta, \varphi) = m \hbar Y(\theta, \varphi) \quad (7)$$

を満たす、 l, m, Y を求める。

△ $l=m=0$ の状態

$$Y(\theta, \varphi) = \text{const} \neq 0 \text{ たゞ} \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} Y(\theta, \varphi) = 0 \text{ たゞのとおり} \quad (2)$$

پ(8)-(6), (7) は $l=m=0$ のとき成立。 (3)

△ L_z の固有値 \rightarrow پ(8)-(7) \rightarrow پ(7)-(3)

$$\int_{\Omega} L_z Y(\theta, \varphi) = m h Y(\theta, \varphi) (= \int_{\Omega} L_z = -i h \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{ で代入})$$

$$-i h \frac{\partial}{\partial \varphi} Y(\theta, \varphi) = m h Y(\theta, \varphi) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} Y(\theta, \varphi) = i m Y(\theta, \varphi) \quad (5)$$

θ を固定して解けば

$$Y(\theta, \varphi) = \boxed{X(\theta)} e^{im\varphi} \quad \begin{array}{l} \text{「任意関数} \\ \text{を代入} \end{array} \quad (6)$$

$$Y(\theta, 0) = Y(\theta, 2\pi) \text{ たゞのとおり} \quad (7)$$

$$e^{im2\pi} = 1 \Rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

L_z の固有値は $m h$ (m は整数) \rightarrow 半奇数は $z^2 = \pm 1$

\hat{L}^2 と \hat{L}_z の固有値と固有状態

20

$m = -l, \dots, l-1, l$ たゞた(→ Jの一般論)から
 l も整数!

\hat{L}^2 の固有値 $l(l+1)\hbar^2$, $l=0, 1, 2, \dots$

各 l の l について

\hat{L}_z の固有値 mh , $m = -l, \dots, 0, 1, \dots, l-1, l$

対応する同時固有状態 $2l+1$ 個

$Y_l^m(\theta, \phi)$ 球面調和関数

l 量子数 (角運動量の大きさ)

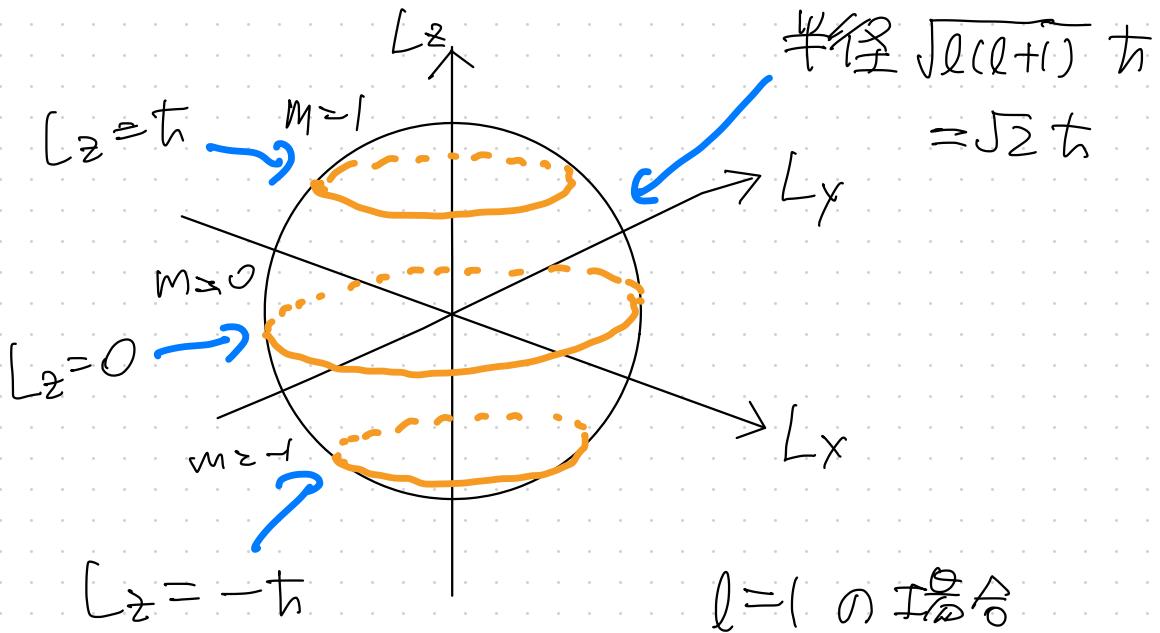
m 磁気量子数 (角運動量の z 成分)

l の昔からの呼び方

l	0	1	2	3	4	5	6	7
軌道 or 状態	s	p	d	f	g	h	i	k

$Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ は \hat{L}^2 と \hat{L}_z の確定した状態

\hat{L}_x と \hat{L}_y は またく不確定



▶ 球面調和関数

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad l=0, 1, 2, \dots, m=-l, \dots, l$$

$$\begin{cases} \int \mathbb{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) = l(l+1) h^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) & (1) \\ L_z Y_\ell^m(\theta, \varphi) = m h Y_\ell^m(\theta, \varphi) & (2) \end{cases}$$

規格化 $\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi |Y_\ell^m(\theta, \varphi)|^2 = 1 \quad (3)$

• 具体的な関数形

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (\text{規格化より}) \quad (4)$$

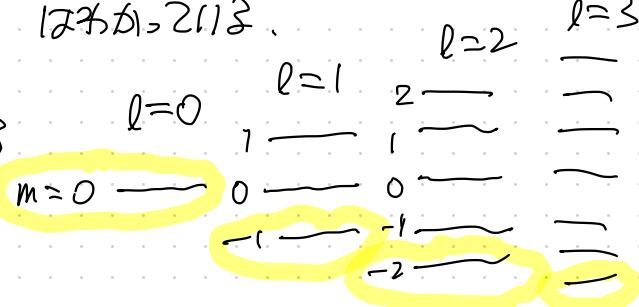
$l > 0$ のとき

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = X(\theta) e^{im\varphi} \quad [5]$$

はるかに複雑。

また $Y_\ell^{-l}(\theta, \varphi)$ を求めよ

“
 $X(\theta) e^{-il\varphi}$



$L_- Y_\ell^{-l}(\theta, \varphi) = 0$ でなく 2π で 2π にならう！

$$L_- = h e^{-i\varphi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \quad p17-[5]$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \left(X(\theta) e^{-i l \varphi} \right) = 0 \quad (1)$$

23

$$\therefore \frac{dX(\theta)}{d\theta} = l \frac{\cos \theta}{\sin \theta} X(\theta) \quad (2)$$

(変数分離法)

$$\frac{dX}{d\theta} = l \frac{\cos \theta}{\sin \theta} X \quad \frac{dX}{X} = l \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad (3)$$

$\log X + C \quad l \log \sin \theta + C'$

$$X(\theta) = \text{const.} (\sin \theta)^l \quad (4)$$

実験結果 (計算結果)

$$Y_l^{-l}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi (2^l l!)^2}} (\sin \theta)^l e^{-il\varphi} \quad (5)$$

他に $Y_l^m(\theta, \varphi)$ は?

一般公式 P13-(1)

$$\langle \Psi_{l,m+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}} \frac{1}{h} \sum_{l+m} \langle \Psi_{l,m} \rangle \quad (6)$$

が便23!

$$Y_{\ell}^{m+1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}} \frac{1}{h} [+ Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}} e^{i\varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

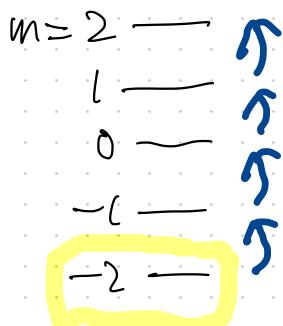
↑ p(7-(4))

(1)

$Y_{\ell}^{-l}(\theta, \varphi)$ の形を出せ, (1) を用いて

ただし 2ℓ の $m = -l, \dots, l$ ($\Rightarrow 1/2$ $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ が重複する)

$$l = 2$$



Qが小さい場合の実数形

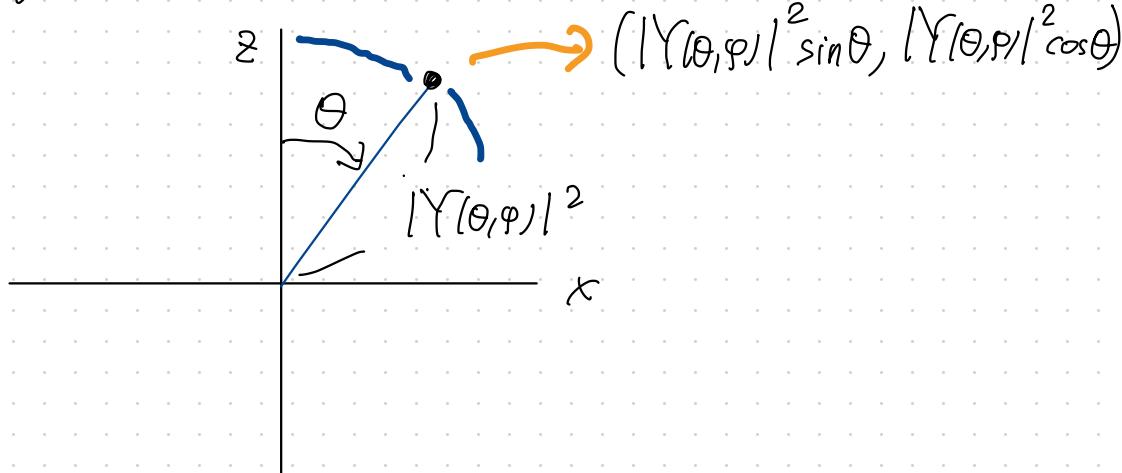
$l=0$
S軌道

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (1)$$

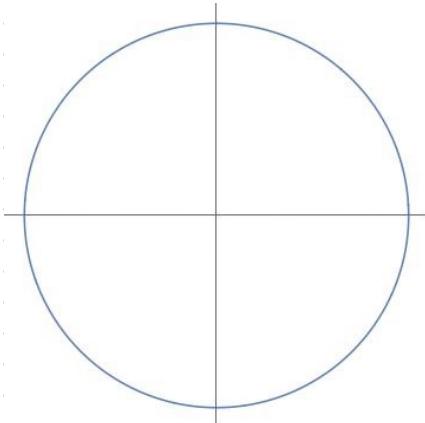
$l=1$
P軌道

$$\left. \begin{array}{l} Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi} \\ Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \end{array} \right\} \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

$|Y_e^m(\theta, \varphi)|^2$ は θ の2次に依存。



$|Y_e^m(\theta, \varphi)|^2$ を $= \alpha \sin^2 \theta + \beta \cos^2 \theta$ とおこう。

γ_0^0 

概形が先に定められて

座標の値に従って
あります

 γ_1^0 $\gamma_1^{\pm 1}$ 