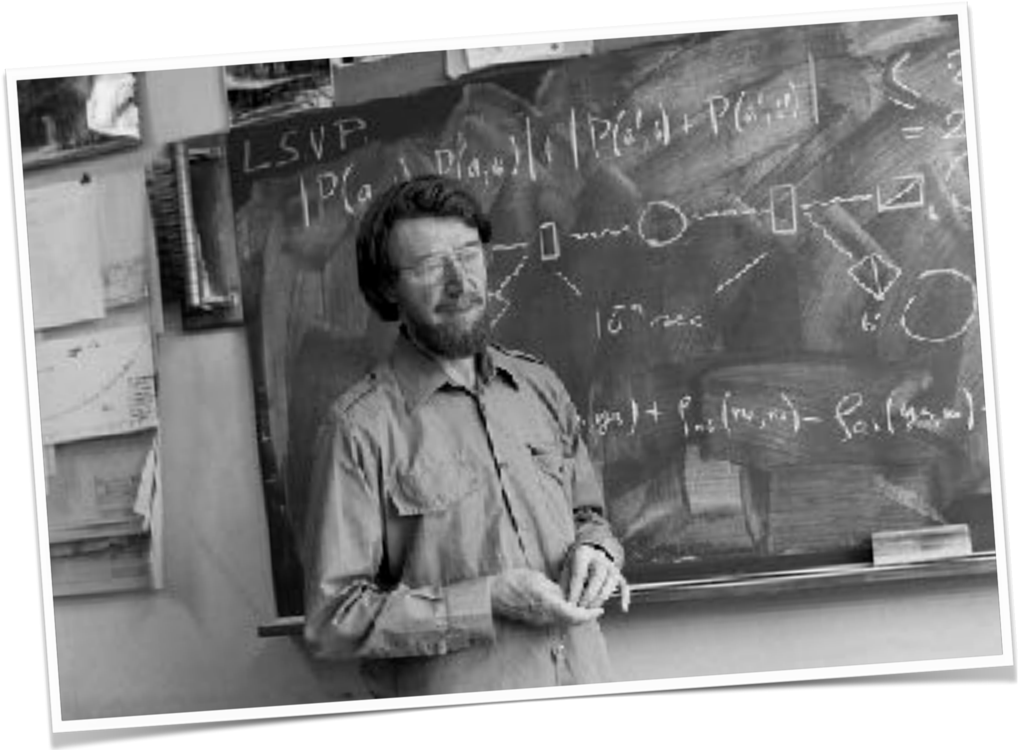

付録 Bell-CHSH 不等式の導出

田崎 晴明

写真は 1982 年のベル、CERN より

理科系一般向け講義 2022/10 @YouTube

最小の「隠れた変数」の場合

最小の隠れた変数

- 隠れた変数 $\lambda \in \{1,2,\ldots,16\}$ を指定すると A_1, A_2, B_1, B_2 を測定した際の結果 $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ が一意に定まる

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$a_1(\lambda)$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$a_2(\lambda)$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1
$b_1(\lambda)$	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1
$b_2(\lambda)$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1

- N 回の実験 → 隠れた変数の列 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$

列は完全に任意　どのような規則で決めてもいい

確率的である必要はない

$$N(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda,\lambda_j}$$ 列の中に λ が現れた回数 $$\sum_{\lambda=1}^{16} N(\lambda) = N$$

$$r(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{N}$$ 列の中に λ が現れた頻度 $$\sum_{\lambda=1}^{16} r(\lambda) = 1$$

測定量の選択と相関関数

- **A, B が測定する量をランダムに選ぶ**

  各々の $j=1,\ldots,N$ について、独立に、確率 $\frac{1}{4}$ で $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ のいずれかを選ぶ

  $S_{\alpha,\beta}$: (α,β) が選ばれた j の集まり　$N_{\alpha,\beta}$: $S_{\alpha,\beta}$ の要素の個数

$$\{1,2,\ldots,N\} = S_{1,1} \cup S_{1,2} \cup S_{2,1} \cup S_{2,2}$$

- **相関関数**

$$\langle A_\alpha B_\beta \rangle = \frac{1}{N_{\alpha,\beta}} \sum_{j \in S_{\alpha,\beta}} a_\alpha(\lambda_j)\, b_\beta(\lambda_j) = \frac{1}{N_{\alpha,\beta}} \sum_{\lambda=1}^{16} a_\alpha(\lambda)\, b_\beta(\lambda)\, N_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$N_{\alpha,\beta}(\lambda) = \sum_{j \in S_{\alpha,\beta}} \delta_{\lambda,\lambda_j}$$

$S_{\alpha,\beta}$ の中に λ が現れた回数

$N \gg 1$ のとき任意の (α,β) について

$$\frac{N_{\alpha,\beta}(\lambda)}{N_{\alpha,\beta}} \simeq \frac{N(\lambda)}{N} = r(\lambda)$$

大数の法則

相関関数の表式

$$\langle A_\alpha B_\beta \rangle = \sum_{\lambda=1}^{16} a_\alpha(\lambda)\, b_\beta(\lambda)\, r(\lambda)$$

Bell-CHSH 不等式

Bell 1964, Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969

任意の $\lambda = 1,\ldots,16$ について

$$a_1(\lambda)\,b_1(\lambda) + a_2(\lambda)\,b_1(\lambda) - a_1(\lambda)\,b_2(\lambda) + a_2(\lambda)\,b_2(\lambda)$$

$$= \{a_1(\lambda) + a_2(\lambda)\}\,b_1(\lambda) - \{a_1(\lambda) - a_2(\lambda)\}\,b_2(\lambda)$$

$$= \pm 2$$

$$a_1(\lambda), a_2(\lambda), b_1(\lambda), b_2(\lambda) \in \{+1, -1\}$$

a_1	a_2	$a_1 + a_2$	$a_1 - a_2$
$+1$	$+1$	2	0
$+1$	-1	0	2
-1	$+1$	0	-2
-1	-1	-2	0

$$\langle A_\alpha B_\beta\rangle = \sum_{\lambda=1}^{16} a_\alpha(\lambda)\,b_\beta(\lambda)\,r(\lambda) \qquad \sum_{\lambda=1}^{16} r(\lambda) = 1$$ より

$$\boxed{-2 \leq \langle A_1 B_1\rangle + \langle A_2 B_1\rangle - \langle A_1 B_2\rangle + \langle A_2 B_2\rangle \leq 2}$$

より複雑な「隠れた変数」

最小の場合に帰着させる

隠れた変数から測定値が決まる場合

- 各々の粒子に隠れた変数 Λ_1 および Λ_2 が書き込まれる
- 隠れた変数は何らかの規則（決定的でも確率的でもよい）によって Λ_1' および Λ_2' に変化 $(\Lambda_1', \Lambda_2' \in \mathcal{V})$
- A が A_α を測定すると結果は必ず $\tilde{a}_\alpha(\Lambda_1') \in \{+1, -1\}$
- B が B_β を測定すると結果は必ず $\tilde{b}_\beta(\Lambda_2') \in \{+1, -1\}$

$$\tilde{a}_\alpha : \mathcal{V} \to \{+1, -1\} \quad (\alpha = 1, 2) \qquad \tilde{b}_\beta : \mathcal{V} \to \{+1, -1\} \quad (\beta = 1, 2)$$

↓

これと整合する一意的な $\lambda \in \{1, \ldots, 16\}$ をとる

$$a_\alpha(\lambda) = \tilde{a}_\alpha(\Lambda_1') \quad (\alpha = 1, 2) \qquad b_\beta(\lambda) = \tilde{b}_\beta(\Lambda_2') \quad (\beta = 1, 2)$$

測定値が確率的に決まる場合

- 各々の粒子に隠れた変数 Λ_1 および Λ_2 が書き込まれる
- 隠れた変数は何らかの規則（決定的でも確率的でもよい）によって Λ_1' および Λ_2' に変化 $(\Lambda_1', \Lambda_2' \in \mathcal{V})$
- A が A_α を測定すると、確率 $p_\alpha(\Lambda_1')$ で $+1$, 確率 $1 - p_\alpha(\Lambda_1')$ で -1 が得られる
- B が B_β を測定すると、確率 $q_\beta(\Lambda_2')$ で $+1$, 確率 $1 - q_\beta(\Lambda_2')$ で -1 が得られる

$$p_\alpha : \mathcal{V} \to [0,1] \quad (\alpha = 1,2) \qquad\qquad q_\beta : \mathcal{V} \to [0,1] \quad (\beta = 1,2)$$

↓

この確率に基づいて測定結果 (の候補) a_1, a_2, b_1, b_2 を選び、それと整合する一意的な $\lambda \in \{1,\ldots,16\}$ をとる

$$a_\alpha(\lambda) = a_\alpha \quad (\alpha = 1,2) \qquad\qquad b_\beta(\lambda) = b_\beta \quad (\beta = 1,2)$$