〈オイラーの公式の応用〉

§複素数の指数関数

$z \in \mathbb{C}$

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (1)$$

- 指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w \qquad z, w \in \mathbb{C} \qquad (2)$$

- オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \theta \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

- 微分の公式

$\alpha \in \mathbb{C}$, t 実変数

$$\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t} \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t} \quad (1)$$

t は実変数

証明 1

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\overset{= n t^{n-1}}{\boxed{\frac{d}{dt}t^n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n-1)!}t^{n-1} \overset{n'=n-1}{=} \alpha\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n'}}{n'!}t^{n'} = \alpha e^{\alpha t}$$

証明 2

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overbrace{e^{\alpha(t+\varepsilon)}}^{= e^{\alpha t}e^{\alpha\varepsilon}} - e^{\alpha t}}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{\alpha\varepsilon}-1}{\varepsilon}e^{\alpha t}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha\varepsilon + \frac{1}{2}(\alpha\varepsilon)^2 + \cdots}{\varepsilon}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$$

§積分への応用 → 本 §4.2.5

$\alpha \in \mathbb{C}$, t 実変数

p1-(4) より
(p2-(1))

$$\int dt\, e^{\alpha t} = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + C \quad (1)$$

a, ω を実定数

$$\int dt\, e^{at} \cos(\omega t) = \mathrm{Re} \int dt\, e^{(a+i\omega)t}$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{a+i\omega} e^{(a+i\omega)t}\right] + C \quad (2)$$

$$\frac{1}{a+i\omega} e^{(a+i\omega)t} = \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} e^{at}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$= \frac{a}{a^2+\omega^2} e^{at}\cos(\omega t) + \frac{\omega}{a^2+\omega^2} e^{at}\sin(\omega t) + i(\cdots)$$

よって

$$\int dt\, e^{at}\cos(\omega t) \quad (3)$$

$$= \frac{e^{at}}{a^2+\omega^2}\{a\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)\} + C \quad (4)$$

§ 線形常微分方程式への応用

▷ 調和振動子 (理想的バネ)

$x(t)$: 時刻 t における自然長からの変位

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

実!

複素数値をとる t の関数 $z(t)$ が

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) \quad (2)$$

をみたすとする.

$$z(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{実部}} + i \underbrace{y(t)}_{\text{虚部}} \quad (3)$$

と書くと

$$\ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t) = -\omega^2 x(t) - i\omega^2 y(t) \quad (4)$$

$$\therefore \begin{cases} \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) & (5) \\ \ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t) & (6) \end{cases}$$

実関数の解がでる!

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) \quad (1)$$

解の形を $z(t) = Ce^{\alpha t}$ (2) と仮定

$C, \alpha \in \mathbb{C}$

(1)に代入

$$\alpha^2 C e^{\alpha t} = -\omega^2 C e^{\alpha t} \quad (3)$$

$$\therefore \alpha^2 = -\omega^2 \quad (4)$$

$$\alpha = \pm i\omega \quad (5)$$

実

$\alpha = i\omega$ をとり $C = A - iB$ (6) とすると

$$z(t) = (A - iB)e^{i\omega t}$$

$$= A\cos\omega t + B\sin\omega t + i(\cdots) \quad (7)$$

$x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ (8) とすれば一般解がでる!

- $\alpha = -i\omega$ としても新しい解はでない.
- 実部でなく虚部からも同じ解がでる.

注意: この方法は線形だから使える!

$$\ddot{z}(t) = a\left(z(t)\right)^2 \quad (1)$$

$z(t) = x(t) + i\,y(t)$ とすると (2)

$$\ddot{x}(t) + i\,\ddot{y}(t)$$
$$= a\left\{\left(x(t)\right)^2 - \left(y(t)\right)^2\right\} + i\,2a\,x(t)\,y(t) \quad (3)$$

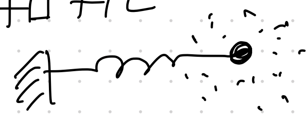
$x(t)$ と $y(t)$ がまざってしまう!

減衰振動 → 本 §5.3.4

$\omega > 0$, $\gamma > 0$ として 実関数 $x(t)$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) - 2\gamma \dot{x}(t) \qquad (1)$$

調和振動子 + 空気抵抗



複素数値関数 $z(t)$ が

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) - 2\gamma \dot{z}(t) \qquad (2)$$

をみたとする.

$x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ は (1) の解

(2) の解として

$$z(t) = C e^{\alpha t} \qquad (3)$$

の形のものを求める. $\alpha, C \in \mathbb{C}$

(2) に代入

$$\alpha^2 C e^{\alpha t} = -\omega^2 C e^{\alpha t} - 2\gamma\alpha C e^{\alpha t} \qquad (4)$$

$$\therefore\ \alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0 \qquad (5)$$

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \qquad (6)$$

8

• $\gamma > \omega$ の場合（過減衰）

P7-(6) の $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ (1) は実

$e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$ と $e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega^2})t}$

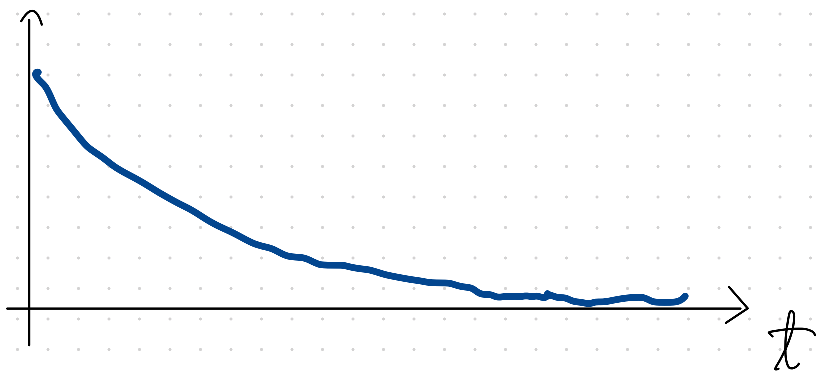
という2つの異なる解　（実部をとる必要なし）

Cは実でよい。

一般解は上の2つの解の線形結合

$$x(t) = Ae^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega^2})t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega^2})t} \quad (2)$$

A, B 任意定数（一般解）



・$\gamma < \omega$ の場合

p7-(6)は2つの複素数

$$\alpha = -\gamma \pm i\tilde{\omega} \quad (1) \qquad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad (2)$$

+の方をとり $C = A - iB$ (3) とすれば

$$z(t) = C e^{\alpha t}$$
$$= (A - iB) e^{-\gamma t} e^{i\tilde{\omega} t}$$
$$= (A - iB) e^{-\gamma t} (\cos(\tilde{\omega} t) + i \sin(\tilde{\omega} t))$$
$$= A e^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t) + B e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t) \quad (4)$$
$$+ i(\cdots)$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$$
$$= A e^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t) + B e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t) \quad (5)$$

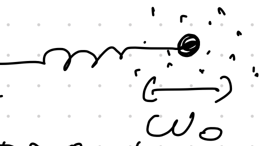
これが一般解

振動しながらげんすい

$\alpha = -\gamma - i\tilde{\omega}$

としても新しい解はでない。

強制振動

調和振動子 + 空気抵抗　例 

+ 角振動数 ω_0 で振動する外力
$f_0\cos(\omega_0 t)$

• 空気抵抗ゼロのとき

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) + \underbrace{\overset{f_0/m}{\alpha}\cos(\omega_0 t)}_{\text{非斉次項}} \qquad (1)$$

特解をさがそう

$$x_{ps}(t) = \overset{\text{あとから決める定数}}{C}\cos(\omega_0 t) \qquad (2)$$ を仮定

(1)に代入

$$\text{左辺} = -(\omega_0)^2 C\cos(\omega_0 t) \qquad (3)$$

$$\text{右辺} = -\omega^2 C\cos(\omega_0 t) + \alpha\cos(\omega_0 t) \qquad (4)$$

$$C = \frac{\alpha}{\omega^2 - (\omega_0)^2} \qquad (5)$$ と決まる.　ただし $\omega \neq \omega_0$

一般解は

$$x(t) = \underbrace{A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}_{\text{斉次方程式の一般解}} + \frac{\alpha}{\omega^2 - (\omega_0)^2}\cos(\omega_0 t) \qquad (6)$$

- 空気抵抗と外力がある場合

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) - 2\gamma \dot{x}(t) + \alpha \cos(\omega_0 t) \quad (1)$$

$\alpha > 0$

特解をさがす.

複素数値をとる $z(t)$ 　 $[x(t) = \mathrm{Re}\, z(t)]$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) - 2\gamma \dot{z}(t) + \alpha e^{i\omega_0 t} \quad (2)$$

$$z_{ps}(t) = C e^{i\omega_0 t} \quad (3)$$ という形を仮定 　 $C \in \mathbb{C}$

$$左 = -(\omega_0)^2 C e^{i\omega_0 t} \quad (4)$$

$$右 = -\omega^2 C e^{i\omega_0 t} - 2i\omega_0 \gamma C e^{i\omega_0 t} + \alpha e^{i\omega_0 t} \quad (5)$$

$$C = \frac{\alpha}{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\} + 2i\omega_0\gamma} \quad (6)$$

$$|C| = \frac{\alpha}{\sqrt{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}^2 + 4(\omega_0\gamma)^2}} \quad (7)$$ なので

ω, ω_0, γ で定まる量

極形式をつかって

$$C = \frac{\alpha}{\sqrt{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}^2 + 4(\omega_0\gamma)^2}} e^{i\varphi} \quad (8)$$

$$z_{ps}(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}^2 + 4(\omega_0 \gamma)^2}} e^{i\varphi} e^{i\omega_0 t} \quad (1)$$

よって求める特解は

$$x_{ps}(t) = \mathrm{Re}\, z_{ps}(t)$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}^2 + 4(\omega_0 \gamma)^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2)$$

斉次の方程式（外力なし）の一般解と足せば

非斉次方程式の一般解

$\gamma < \omega$ のときなら p9-(5) より

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega} t) + B e^{-\gamma t} \sin(\tilde{\omega} t)$$

$$+ \boxed{\frac{\alpha}{\sqrt{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}^2 + 4(\omega_0 \gamma)^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi)} \quad (3)$$

$\gamma t \gg 1$ ではここだけが残る.

$\omega \simeq \omega_0$ で大きくなる $=$ 共鳴