〈座標とベクトル〉

§1次元空間と座標

1次元空間（長さが測れる）

数直線 $\mathbb{R}$ とみなせる.

位置座標 $x\in\mathbb{R}$

§2次元空間(平面)と座標

無限の平面

2点を通る直線, 2点間の長さ,

交わる直線の間の角度, ...

平面にはもともと座標などない.

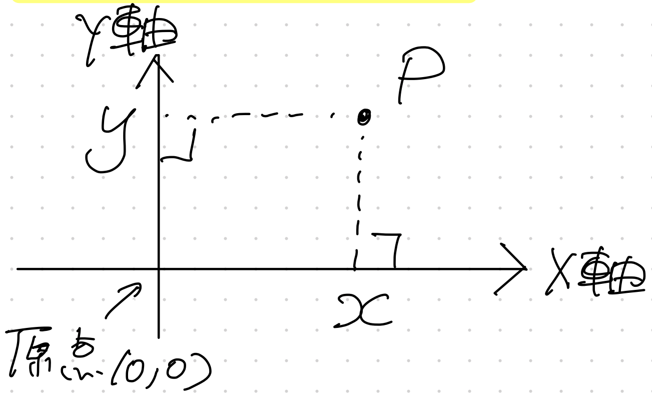
ここに座標を入れる

(座標系を設定する)

2次元のデカルト座標

▷ 原点を任意に選んで固定する.

▷ 原点を通り,互いに直交する2つの向きのついた直線(x軸, y軸)を選んで固定する.



$$\text{平面上の点 } P \longleftrightarrow \underbrace{(x, y)}_{\text{座標}} \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

1対1対応 $\mathbb{R}$ と書く.

平面を $\mathbb{R}^2$ と同一視した

$$P_1 \leftrightarrow (x_1, y_1), \quad P_2 \leftrightarrow (x_2, y_2) \quad (2)$$

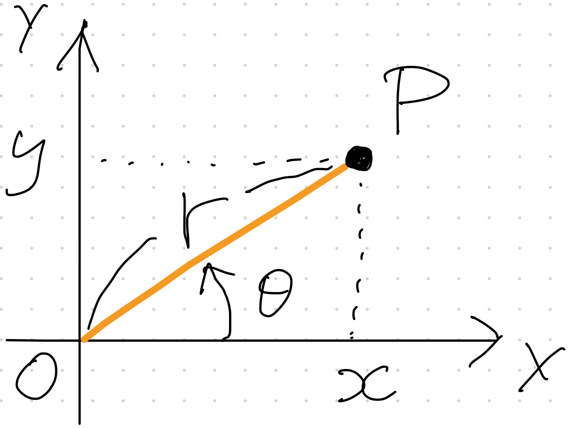
きょり

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (3)$$

ピタゴラスの定理

2次元の極座標

平面上の点Pの別の表わし方



$r \geq 0$
原点とPのキョリ

θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$
OPとx軸の角度

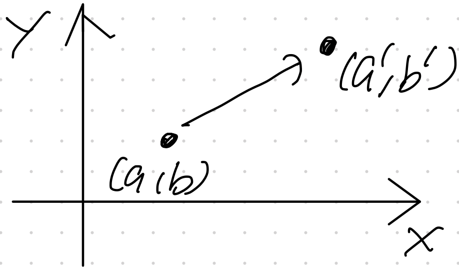
極座標も (r, θ) とかく.

◎ デカルト座標との関係

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}} \qquad (1)$$

点の移動

点(a,b)をx方向にξ, y方向にηだけ平行移動



$$(a,b) \to (a',b') \quad (1)$$

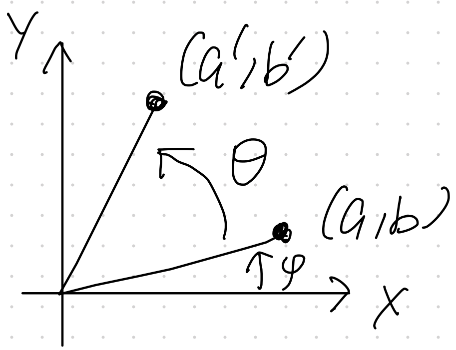
$$a' = a+\xi,\ b' = b+\eta \quad (2)$$

点の回転

回転の向き

点(a,b)を原点を中心にθだけ回転

$$(a,b) \longrightarrow (a',b') \quad (3)$$



$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases} \quad (4)$$

と表わす.

すると

$$\begin{cases} a' = r\cos(\varphi+\theta) \\ b' = r\sin(\varphi+\theta) \end{cases} \quad (5)$$

5

$$\begin{cases} a' = r\cos(\varphi+\theta) \\ b' = r\sin(\varphi+\theta) \end{cases} \quad (1)$$

加法定理より

$$a' = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta$$

$$= \cos\theta\, a - \sin\theta\, b \quad (2)$$

$$b' = r\cos\varphi\sin\theta + r\sin\varphi\cos\theta$$

$$= \sin\theta\, a + \cos\theta\, b \quad (3)$$

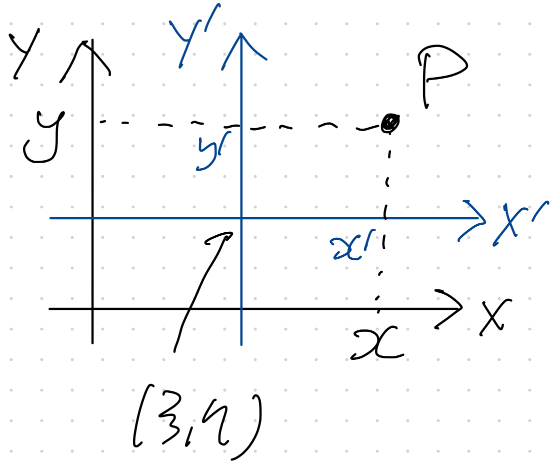
$$\boxed{\begin{aligned} a' &= \cos\theta\, a - \sin\theta\, b \\ b' &= \sin\theta\, a + \cos\theta\, b \end{aligned}} \quad (4)$$

座標変換 (考え方)

もともと平面に座標はなかった．

様々な座標がありうる．

- デカルト座標系 → (x, y)
- $(3, 4)$ に原点のあるもうひとつのデカルト座標系 → (x', y')



平面上の点 P ⟷ もとの座標系 ⟷ (x, y)

平面上の点 P ⟷ 新しい座標系 ⟷ (x', y')

(x, y) ⟷ (x', y')：1対1対応 ⇒ 座標変換

$$x' = x - 3, \quad y' = y - 4 \qquad (1)$$

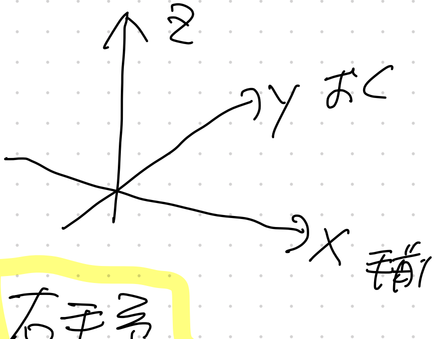
§3 3次元空間と座標

3次元の空間に座標を入れよう!

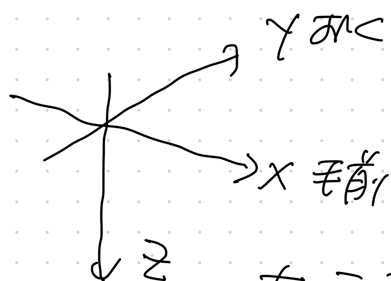
デカルト座標

- 原点を任意に選んで固定する.
- 原点を通り, 互いに直交する3つの向きのついた直線(x軸, y軸, z軸)を選んで固定する

3つの軸の配置のしかたは2通りある.

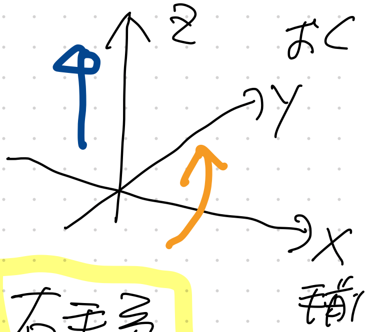


右手系



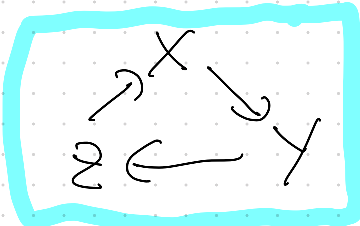
左手系

どちらでもいいが
右手系を使うのが習慣.



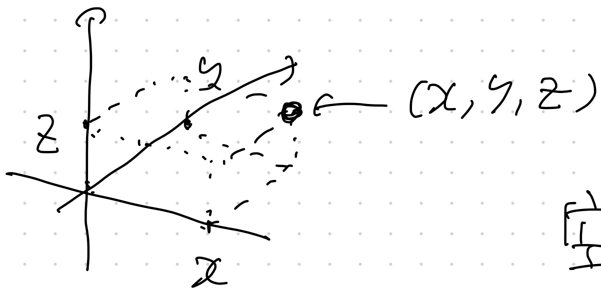
右手系

x軸からy軸にネジをまわして進む向きがz軸正方向



◁デカルト座標 $(x, y, z) \longleftrightarrow P$

$\in \mathbb{R}^3$



空間 $\longleftrightarrow \mathbb{R}^3$

◁2点間のキョリ

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1),\quad P_2 = (x_2, y_2, z_2) \qquad (1)$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad (2)$$

3次元の極座標

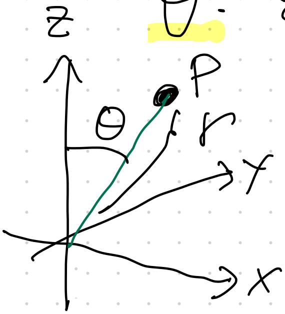
(x, y, z)

3次元空間の点Pの別の表わし方 (r, θ, φ)

r：原点とPのキョリ, $r \geq 0$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (1)$$

原点

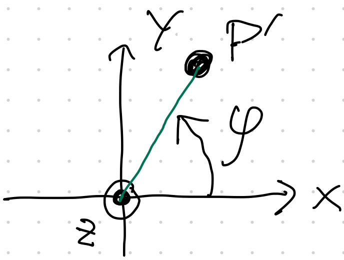


θ：z軸とOPのなす角

$$0 \leq \theta \leq \pi \qquad (2)$$

$$z = r\cos\theta \qquad (3)$$

上からみる



x軸とOP'のなす角 φ

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$x^2+y^2 = r^2 - z^2 = r^2(\sin\theta)^2 \qquad (4)$$

$$\therefore \sqrt{x^2+y^2} = r\sin\theta \qquad (5)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \end{aligned}} \qquad (6)$$

§3 3次元空間のベクトル

ベクトル vector ↔ スカラー scalar

「大きさ」と「方向」をもつ量 = 矢印

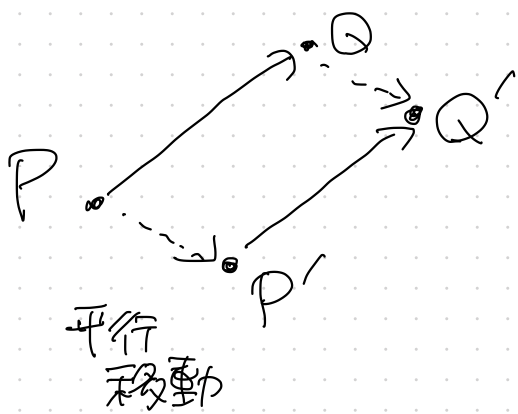
(あとで)

幾何ベクトル ↔ 代数ベクトル

P, Q 3次元空間の点

ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ PからQへ向かう矢印

ただし 始点はどこにとってもよい



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$$

11

※ 一般にベクトルを $v, a, b, \cdots$

(あるいは $\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}, \cdots$) などと書く。

※ $P=Q$ のとき $\overrightarrow{PP}=0$ ゼロベクトル

ベクトルの成分表示

デカルト座標をひとつ選ぶ

$$P=(p_x, p_y, p_z), \quad Q=(q_x, q_y, q_z) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(q_x-p_x, q_y-p_y, q_z-p_z) \quad (2)$$

一般に $v=(\underbrace{v_x}_{x\text{成分}}, \underbrace{v_y}_{y\text{成分}}, \underbrace{v_z}_{z\text{成分}})$ (3)

位置ベクトル

始点 O : 原点に固定

$r=\overrightarrow{OP}$ 点Pの位置ベクトル (座標)

ベクトルの絶対値(大きさ)

$$|\overrightarrow{PQ}| := \overline{PQ} \quad \text{(P, Q間の距離)}$$

任意の $\mathbb{v}=(v_x, v_y, v_z)$ について

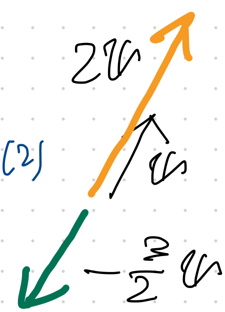
$$|\mathbb{v}| = \sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2+(v_z)^2} \qquad (1)$$

- $|\mathbb{v}| \geq 0$
- $|\mathbb{v}| = 0 \iff \mathbb{v} = \mathbb{0} = (0,0,0)$

$|\mathbb{e}| = 1$ をみたすベクトル $\mathbb{e}$ 単位ベクトル

ベクトルの定数倍

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (2)



$$\alpha\mathbb{v} = (\alpha v_x, \alpha v_y, \alpha v_z) \qquad (3)$$

方向はかえずにα倍

$$|\alpha \mathbb{v}| = |\alpha||\mathbb{v}| \qquad (4)$$

- 任意の $\mathbb{v} \neq \mathbb{0}$ について $\mathbb{e} = \dfrac{\mathbb{v}}{|\mathbb{v}|}$ は単位ベクトル (5)

平行, 垂直

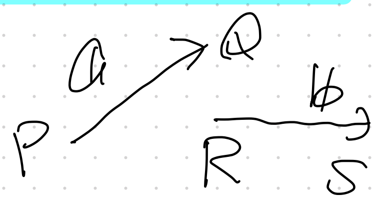
⊳ $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ で $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ なら

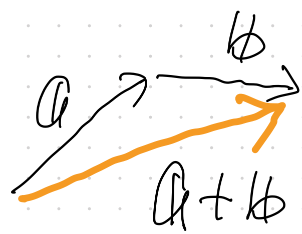
$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行　$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ と書く.

⊳ $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ で $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の角度が $\frac{\pi}{2}$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は垂直　$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ と書く.

ベクトルの和





$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ なら　(1)

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$　(2)

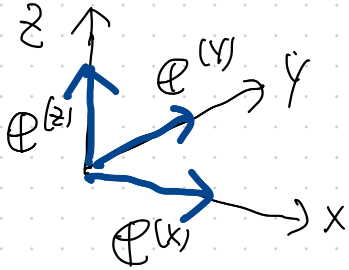
◎ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$　(3)

◎ $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$, $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$　(4)

単位ベクトルによる表現

基本的な単位ベクトル

$$e^{(x)}=(1,0,0),\ e^{(y)}=(0,1,0),\ e^{(z)}=(0,0,1) \tag{1}$$



任意のベクトル $v=(v_x, v_y, v_z)$ (2)

$$v=v_x e^{(x)}+v_y e^{(y)}+v_z e^{(z)} \tag{3}$$

と書ける.

§ベクトルの内積と外積

内積　実数 a, b について $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$　(1)

ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ について

$$|\mathbb{a}+\mathbb{b}|^2 = |\mathbb{a}|^2 + |\mathbb{b}|^2 + 2\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} \quad (2)$$

となるように内積を定義

$$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = \frac{1}{2}\left\{|\mathbb{a}+\mathbb{b}|^2 - |\mathbb{a}|^2 - |\mathbb{b}|^2\right\} \quad (3)$$

↳ 座標系のとり方に全く依存しない実数.

▷ 成分表示　$\mathbb{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbb{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (4)$$

▷ 基本的な性質

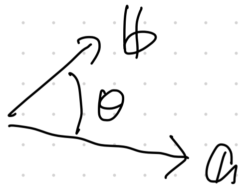
$$\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} = \mathbb{b}\cdot\mathbb{a} \quad (5)$$

$$\mathbb{a}\cdot\mathbb{a} = |\mathbb{a}|^2 \quad (6)$$

$$\mathbb{a}\cdot(\beta\mathbb{b} + \gamma\mathbb{c}) = \beta\,\mathbb{a}\cdot\mathbb{b} + \gamma\,\mathbb{a}\cdot\mathbb{c} \quad (7)$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$　　線形性

Ⅳ 三角関数との関係



ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ のなす角 θ

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = |\mathbb{a}||\mathbb{b}| \cos\theta \quad (1)$$

証明（いんちきっぽいが実は厳密）

$|\mathbb{a}| = a$, $|\mathbb{b}| = b$ と書く.

座標系を適切にとれば

$$\mathbb{a} = (a, 0, 0), \quad \mathbb{b} = (b\cos\theta, b\sin\theta, 0) \quad (2)$$

$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}$ は座標系のとり方に依存しないので,

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = ab\cos\theta \quad (3)$$

//

よって $\theta = 0 \rightarrow \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = |\mathbb{a}||\mathbb{b}|$ (4)

$\theta = \pi \rightarrow \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = -|\mathbb{a}||\mathbb{b}|$ (5)

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = 0$ (6)

とくに

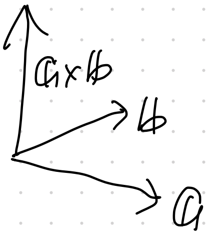
$$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}, \mathbb{b} \neq \mathbb{0}, \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = 0 \iff \mathbb{a} \perp \mathbb{b} \quad (7)$$

外積　3次元ならではの積

ベクトル × ベクトル ＝ ベクトル

▷ $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交しているとき

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方と直交



- $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ にネジを回したとき進む向き
- $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$　(1)

▷ $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行のとき

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$　(2)

▷ 外積は線形性をもつ

任意のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ について

$$\mathbf{a}\times(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}) = \beta\,\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{a}\times\mathbf{c} \quad (3)$$

これで一般の $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ が定まる.

任意の $\mathbf{a} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

$\mathbf{b} = \mathbf{b}_\perp + \mathbf{b}_\parallel$ と分解 (1)

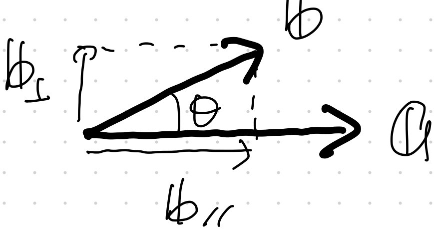
$\mathbf{b}_\perp$: $\mathbf{a}$と直交

$\mathbf{b}_\parallel$: $\mathbf{a}$に平行

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}_\parallel = \mathbf{0}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_\perp + \mathbf{b}_\parallel) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp \quad (2)$$

- $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方と直交
- 向きは $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に(小さい方の角で)ネジを回したとき進む向き

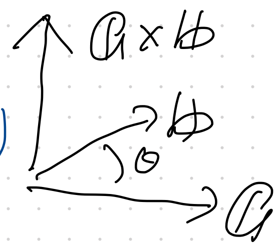


$$|\mathbf{b}_\perp| = |\mathbf{b}| \sin\theta \quad (3)$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta \quad (4)$$

つねに $0 \leq \theta \leq \pi$ ととる!



性質

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (5)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \quad (6)$$

補足 P18-(1) の分解について

$$\mathbb{e} = \frac{\mathbb{a}}{|\mathbb{a}|} \quad (1)$$

($\mathbb{a}$ と平行な単位ベクトルに)

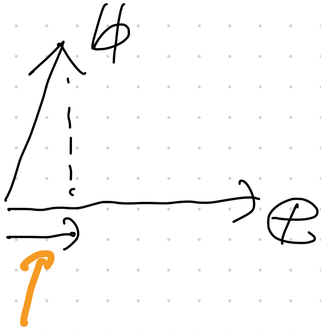
$$\mathbb{b}_{\parallel} = (\mathbb{e} \cdot \mathbb{b})\,\mathbb{e} \quad (2)$$

($\mathbb{a}$ と平行)

$$\mathbb{b}_{\perp} = \mathbb{b} - \mathbb{b}_{\parallel} \quad (3)$$

とすると

$$\mathbb{e} \cdot \mathbb{b}_{\perp} = \mathbb{e} \cdot \mathbb{b} - (\mathbb{e} \cdot \mathbb{b})(\mathbb{e} \cdot \mathbb{e}) = 0 \quad (4)$$

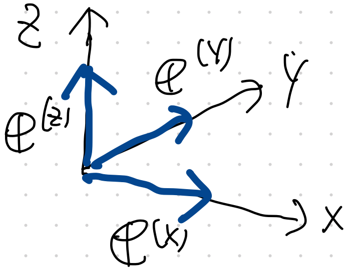


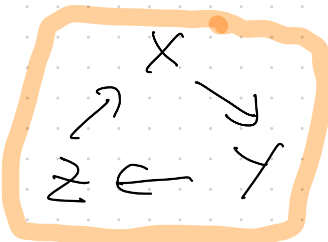
$(\mathbb{e} \cdot \mathbb{b})\,\mathbb{e}$　　$\mathbb{e}$ 方向への $\mathbb{b}$ の射影

外積の成分表示

3つの基本的な単位ベクトル

$$\mathbf{e}^{(x)}=(1,0,0),\quad \mathbf{e}^{(y)}=(0,1,0),\quad \mathbf{e}^{(z)}=(0,0,1) \tag{1}$$





$$\mathbf{e}^{(x)}\times\mathbf{e}^{(y)}=\mathbf{e}^{(z)},\quad \mathbf{e}^{(y)}\times\mathbf{e}^{(z)}=\mathbf{e}^{(x)},\quad \mathbf{e}^{(z)}\times\mathbf{e}^{(x)}=\mathbf{e}^{(y)} \tag{2}$$

$$\mathbf{e}^{(x)}\times\mathbf{e}^{(x)}=\mathbf{0},\quad \mathbf{e}^{(y)}\times\mathbf{e}^{(y)}=\mathbf{0},\quad \mathbf{e}^{(z)}\times\mathbf{e}^{(z)}=\mathbf{0} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=(a_x,a_y,a_z)\\&=a_x\mathbf{e}^{(x)}+a_y\mathbf{e}^{(y)}+a_z\mathbf{e}^{(z)}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}&=(b_x,b_y,b_z)\\&=b_x\mathbf{e}^{(x)}+b_y\mathbf{e}^{(y)}+b_z\mathbf{e}^{(z)}\end{aligned} \tag{5}$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

$$= (\underbrace{a_x \boldsymbol{e}^{(x)}}_{①} + \underbrace{a_y \boldsymbol{e}^{(y)}}_{②} + \underbrace{a_z \boldsymbol{e}^{(z)}}_{③})$$

$$\times (\underbrace{b_x \boldsymbol{e}^{(x)}}_{④} + \underbrace{b_y \boldsymbol{e}^{(y)}}_{⑤} + \underbrace{b_z \boldsymbol{e}^{(z)}}_{⑥})$$

$$= \underset{①\,④}{a_x b_x} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(x)} \times \boldsymbol{e}^{(x)}}_{= \boldsymbol{0}} + \underset{①\,⑤}{a_x b_y} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(x)} \times \boldsymbol{e}^{(y)}}_{= \boldsymbol{e}^{(z)}} + \underset{①\,⑥}{a_x b_z} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(x)} \times \boldsymbol{e}^{(z)}}_{= -\boldsymbol{e}^{(y)}}$$

$$+ \underset{②\,④}{a_y b_x} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(y)} \times \boldsymbol{e}^{(x)}}_{= -\boldsymbol{e}^{(z)}} + \underset{②\,⑤}{a_y b_y} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(y)} \times \boldsymbol{e}^{(y)}}_{= \boldsymbol{0}} + \underset{②\,⑥}{a_y b_z} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(y)} \times \boldsymbol{e}^{(z)}}_{= \boldsymbol{e}^{(x)}}$$

$$+ \underset{③\,④}{a_z b_x} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(z)} \times \boldsymbol{e}^{(x)}}_{= \boldsymbol{e}^{(y)}} + \underset{③\,⑤}{a_z b_y} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(z)} \times \boldsymbol{e}^{(y)}}_{= -\boldsymbol{e}^{(x)}} + \underset{③\,⑥}{a_z b_z} \underbrace{\boldsymbol{e}^{(z)} \times \boldsymbol{e}^{(z)}}_{= \boldsymbol{0}}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \boldsymbol{e}^{(x)}$$

$$+ (a_z b_x - a_x b_z) \boldsymbol{e}^{(y)}$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_x) \boldsymbol{e}^{(z)}$$

$\mathbb{a} = (a_x, a_y, a_z)$ $\mathbb{b} = (b_x, b_y, b_z)$

外積の成分表示

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \qquad (1)$$

覚え方

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur] & & y \arrow[ll] \end{tikzcd} \qquad (2)$$

例 ローレンツ力

磁場 $\mathbb{B}$ 中を $\mathbb{v}$ でうごく荷電粒子

$$\mathbb{F} = q \mathbb{v} \times \mathbb{B} \qquad (3)$$

§線形独立性

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$ ← $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合

定義 n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立 ①

（「一次独立」ともいう）

$\Updownarrow$ ← 定義

$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ が成り立つのは ②

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ のときのみ

$\Updownarrow$ ← いいかえ

「すべてが同時にゼロ」でない任意の $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ③

について $\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n \neq \boldsymbol{0}$

定義 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立でなければ線形従属 ④

$\Updownarrow$

「すべてが同時にゼロ」でない $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ があって ⑤

$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$

$\Updownarrow$ → 次のページ

少くとも ひとつの i について $\boldsymbol{v}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j$ ⑥

他のベクトルの線形結合で書けてしまう

「すべてが同時にゼロ」でない $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

があって $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbb{0}$ (1)

$$\Updownarrow$$

少くともひとつの i について $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \beta_j v_j$ (2)

$\Uparrow$ は自明

$\Downarrow$ の証明

少くともひとつの i について $\alpha_i \neq 0$

$$\alpha_i v_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \alpha_j v_j \quad (3)$$

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \underbrace{\left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)}_{\beta_j} v_j \quad (4)$$

定理 $v_1, \dots, v_n$ の内の少くともひとつがゼロなら $v_1, \dots, v_n$ は線形従属

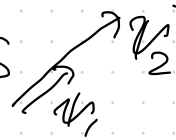
証明 仮に $v_1 = 0$ とする. $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ とすれば $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$

具体的に

$n=1$ $v_1 \neq 0 \iff v_1$ は線形独立

$n=2$ $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ とする

v_1 と v_2 が平行でない $\iff v_1, v_2$ は線形独立



$n=3$ $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$ とする.

v_1 と v_2 と v_3 が ひとつの面内に入らない

$\Updownarrow$

v_1, v_2, v_3 は線形独立

定理 3次元空間では4つ以上のベクトルはかならず線形従属

（証明はあとで一般の次元で）

基底による展開

定理 $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ を任意の線形独立な3つのベクトルとする．任意のベクトル v に対して係数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が一通りに決まり

$$v = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \alpha_3 v^{(3)} \quad (1)$$

と書ける．

証明 $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v$ は線形従属．①

「同時にゼロ」でない $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ があって

$$\beta_1 v^{(1)} + \beta_2 v^{(2)} + \beta_3 v^{(3)} + \beta_4 v = 0$$

となる．②

ここで $\beta_4 \neq 0$（∵ もし $\beta_4 = 0$ なら $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ が線形従属）③

よって $\alpha_j = -\beta_j / \beta_4$ $(j=1,2,3)$ とすれば (1) が成立．④

- 一意性 $v = \gamma_1 v^{(1)} + \gamma_2 v^{(2)} + \gamma_3 v^{(3)}$

と書けたとする．⑤ (1) より

$$(\alpha_1 - \gamma_1) v^{(1)} + (\alpha_2 - \gamma_2) v^{(2)} + (\alpha_3 - \gamma_3) v^{(3)} = 0$$

⑥

線形独立性から $\alpha_1 = \gamma_1, \ \alpha_2 = \gamma_2, \ \alpha_3 = \gamma_3$ ⑦

3つの線形独立なベクトルの集合

$\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ を基底という

($v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ は基底ベクトル)

$$v = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \alpha_3 v^{(3)} \quad (1)$$

基底 $\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ による v の展開

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 展開係数

正規直交基底

$$\mathbb{e}^{(1)}, \mathbb{e}^{(2)}, \mathbb{e}^{(3)} \text{ が } \begin{cases} |\mathbb{e}^{(i)}| = 1 \quad (i=1,2,3) & (1) \\ \mathbb{e}^{(i)} \cdot \mathbb{e}^{(j)} = 0 \quad (i \neq j) & (2) \end{cases}$$

をみたす。

正規

大きさ1で互いに直交

直交

ところで(1),(2)をまとめて

$$\boxed{\mathbb{e}^{(i)} \cdot \mathbb{e}^{(j)} = \delta_{i,j} \quad (i,j = 1,2,3)} \quad (3)$$

と書ける。

9通りの関係。

△ $\mathbb{e}^{(1)}, \mathbb{e}^{(2)}, \mathbb{e}^{(3)}$ は線形独立

証明　$\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \mathbb{e}^{(j)} = \mathbb{0}$ とする。

両辺の $\mathbb{e}^{(i)}$ との内積 $(i=1,2,3)$

$$\begin{cases} \text{左辺} & \mathbb{e}^{(i)} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \mathbb{e}^{(j)} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \underbrace{\mathbb{e}^{(i)} \cdot \mathbb{e}^{(j)}}_{= \delta_{i,j}} = \alpha_i \\ \text{右辺} & \mathbb{e}^{(i)} \cdot \mathbb{0} = 0 \end{cases}$$

よって $i=1,2,3$ について $\alpha_i = 0$

任意の v を $v = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j e^{(j)}$ (1)

と展開

(1) と $e^{(i)}$ の内積 $(i = 1, 2, 3)$

左辺 $e^{(i)} \cdot v$ (2)

右辺 α_i (3)

よって $\alpha_i = e^{(i)} \cdot v$ $(i = 1, 2, 3)$ (4)

展開係数が簡単にもとめられる.

§ベクトル3つの積

ベクトル2つの積 $\begin{cases} \text{内積} & \text{スカラー（数）} \\ \text{外積} & \text{ベクトル} \end{cases}$

3つの積は？

スカラー三重積 $\mathbb{a} \cdot \underbrace{(\mathbb{b} \times \mathbb{c})}_{\text{ベクトル}}$ はスカラー

△成分表示は？

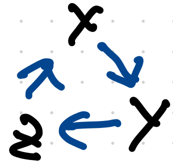
$\mathbb{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbb{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbb{c} = (c_x, c_y, c_z)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) \\
&= (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_y c_z - b_z c_y, b_z c_x - b_x c_z, b_x c_y - b_y c_x) \\
&= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z \\
&\quad + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x \\
&= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y \\
&\quad - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x
\end{aligned}
$$

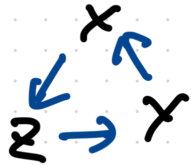
どういう~~規~~則だろう？

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$= a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y$$



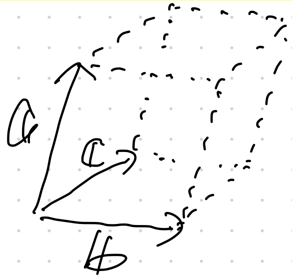
$$- a_x b_z c_y - a_y b_x c_z - a_z b_y c_x \quad (1)$$



対称性を考えれば

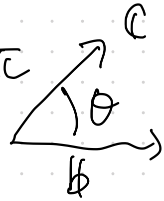
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad (2)$$

スカラー三重積の「意味」

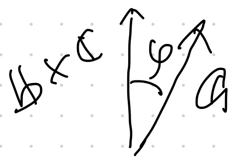


$\mathbb{a}\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c})$ は $\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}$ がつくる平行6面体の符号つき体積

▷ 底面積 $|\mathbb{b}||\mathbb{c}|\sin\theta \quad 0\leqq\theta\leqq\pi$



▷ 高さ $|\mathbb{a}|\cos\varphi \quad 0\leqq\varphi\leqq\pi$



▷ 実際に $\mathbb{a}\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c}) = |\mathbb{a}||\mathbb{b}\times\mathbb{c}|\cos\varphi$

$= \underbrace{|\mathbb{a}|\cos\varphi}_{\text{高さ}} \; \underbrace{|\mathbb{b}||\mathbb{c}|\sin\theta}_{\text{底面積}}$

負になる ← 高さ　　底面積 ← 0以上

▷ $\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}$ が $\begin{cases} \text{右手系なら} & \text{正} \to \text{面積} \\ \text{左手系なら} & \text{負} \to -(\text{面積}) \end{cases}$

どこを底面にとってもよいので、P31-(2)の対称性ももっとも！

また

$$\boxed{\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}\text{ が線形独立} \iff \mathbb{a}\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c})\neq 0}$$

ベクトル三重積

$\mathbb{a} \times \underbrace{(\mathbb{b} \times \mathbb{c})}_{\text{ベクトル}}$ はベクトル

注意:

$(\mathbb{a} \times \mathbb{b}) \times \mathbb{c}$ と $\mathbb{a} \times (\mathbb{b} \times \mathbb{c})$ は

一般には異なる!

例をつくってこのことを示してみよう.

ときに便利な公式

$$\mathbb{a} \times (\mathbb{b} \times \mathbb{c}) = \mathbb{b}(\mathbb{a} \cdot \mathbb{c}) - \mathbb{c}(\mathbb{a} \cdot \mathbb{b})$$