〈微分方程式入門〉

§指数関数的増大の微分方程式

▫何らかの生物集団の個体数の変化を考えたい
(例 バッタの大量発生)

▫仮定: エサも土地もたっぷりとあり、
この生物は一定の割合で子供をつくって増えていく

理想化

☆
基本法則　短かい時間間隔のあいだの
個体数の増加は、その時点での個体数と
時間間隔に比例する

このように「ことば」で表わした基本法則
から何がわかるだろうか?

- どんどん増える
- 増えるほど増加は激しくなる…

☆と全く同じ内容を数学の言葉で表わす.

時刻を表わす実変数 $t \geq 0$ (1)

時刻 t における個体数 $N(t)$

$N(t)$ tを引数とする関数

tに実数を代入すると $N(t)$ の値がきまる.

ここでは $N(t)$ は実数値をとるとする (理想化)

☆をかきかえる.

Δt でひとつの変数.

時刻 t から $t+\Delta t$ の間の個体数の

増加は $\beta N(t) \Delta t + o(\Delta t)$ (2)

比例係数 (なんらかの正の定数)

その時点での個体数

時間間隔

small order Δt (小さな補正)

よって

$$N(t+\Delta t) - N(t) = \beta N(t) \Delta t + o(\Delta t)$$ (3)

Landauの記号について

$o(\Delta t)$は、$\Delta t \to 0$ としたときに、Δtよりもずっと早くゼロに近付く量の総称

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0} \quad (1)$$

例
$$(t+\Delta t)^2 = t^2 + 2t\Delta t + o(\Delta t) \quad (2)$$

$$(t+\Delta t)^4 = t^4 + 4t^3\Delta t + o(\Delta t) \quad (3)$$

$$\sin x = x + o(x) \quad (4)$$

← テイラー展開

（教科書で「ランダウの記号」を見よ。
$O(\varepsilon^n)$ というのもある）

「数学1」でやる

微分方程式の導出

p2-(3)

$$N(t+\Delta t)-N(t)=\beta N(t)\Delta t + o(\Delta t) \quad (1)$$

両辺をΔtで割る

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=\beta N(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (2)$$

$\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{dN(t)}{dt} \qquad 0$$

微分の定ギ!!

時間微分をドット(dot)で表わす.

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt}=\beta N(t) \text{ あるいは } \dot{N}(t)=\beta N(t) \text{ がすべての } t \geqq 0 \text{ について成立}} \quad (3)$$

これが微分方程式(differential equation)の一例

$\boxed{\text{p1-㊍と全く同じ内容の数学的な表現}}$

方程式と微分方程式

(1) 普通の方程式 $x^2+x-6=0$

未知の数 x を決める関係

xに適当な値を代入してみて 左辺＝右辺 なら それが解

$x=1$　$1+1-6 \neq 0$

$x=2$　$2^2+2-6=0$

(2) 微分方程式　例 $\dot{N}(t)=\beta N(t)$

未知の関数 $N(t)$ を決める関係

微分を含んでいる

微分方程式の解 (solution) とは

(考えている範囲の) すべての t について 方程式を みたす 関数

$N(t)$に適当な関数を代入して すべての t で 左辺＝右辺 となれば それが解！

たとえ「あてかん」で求めても立派な解!!

$$\dot{N}(t)=\beta N(t)$$ すべての $t\geqq 0$ について　(1)

（βは正の定数）

の解を（あてかんで）求めてみよう.

- ともかく増加する.

  $N(t)=C+\beta t$ は？（Cは定数）　(2)

  (1)にこの形を代入

  左辺 $=\beta$, 右辺 $=\beta C+\beta^2 t$

  すべての $t\geqq 0$ について等しいはずがない.

  ダメ

- もう少し次数をふやして

  $N(t)=a+bt+ct^2$ （a,b,c定数）　(3)

  左辺 $=b+2ct$, 右辺 $=\beta a+\beta bt+\beta ct^2$　(4)

  tの1次式　　tの2次式

  等しいわけがない!

  ダメ

- 一般にtの多項式ではダメ.

$$\dot{N}(t) = \beta N(t) \qquad (1)$$

ある関数を微分すると（β倍されて）自分に戻る！

微分すると自分に戻るのは指数関数

- $N(t) = e^{t}$ として(1)に代入 (2)

  左辺 $= e^{t}$ 　右辺 $= \beta e^{t}$

  $\beta = 1$ なら 左辺＝右辺だが、βは生き物の種類や環境で決まる定数（我々がきめるのではなく、問題設定として与えられる）

- ちゃんとβを出すためには

  $N(t) = e^{\beta t}$ とすればいい (3)

  左辺 $= \beta e^{\beta t}$, 右辺 $= \beta e^{\beta t}$

  明らかにすべての $t \geq 0$ で等しい！

$N(t) = e^{\beta t}$ は(1)の解！

任意定数と一般解

解 $N(t) = e^{\beta t}$ で $t=0$ とすると $N(0)=1$

しかし $N(0)$ は(状況に応じて)様々な値をとる.

もっと一般的な解があるはず.

定数

• 時間を測る原点をずらす $t \to t-a$

(1) $N(t) = e^{\beta(t-a)}$ として $\dot{N}(t) = \beta N(t)$ に代入

(2) 左辺 $= \beta e^{\beta(t-a)}$ 右辺 $= \beta e^{\beta(t-a)}$

これも解!!

• 同じことだが $N(t) = C e^{\beta t}$ としてもよい

(3)

定数 $C = e^{-\beta a}$

C や a は勝手な値をとれる定数

任意定数

解 $N(t) = Ce^{\beta t}$ (1) で $t=0$ とする

$$N(0) = C \qquad (2)$$

→ 時刻0で個体数 初期値.

(2)を使えば (1)は

$$N(t) = N(0)e^{\beta t} \qquad (3)$$

任意の初期値に対応する解が求まった!!

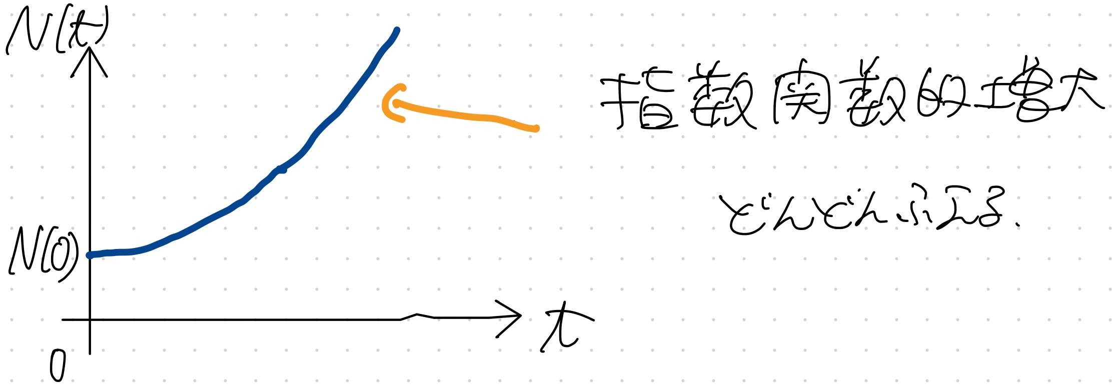
(1), (3)は微分方程式 $\dot{N}(t) = \beta N(t)$ (4)

の $\boxed{\text{一般解}}$

解のふるまい

微分方程式 $\dot{N}(t) = \beta N(t)$ (1)

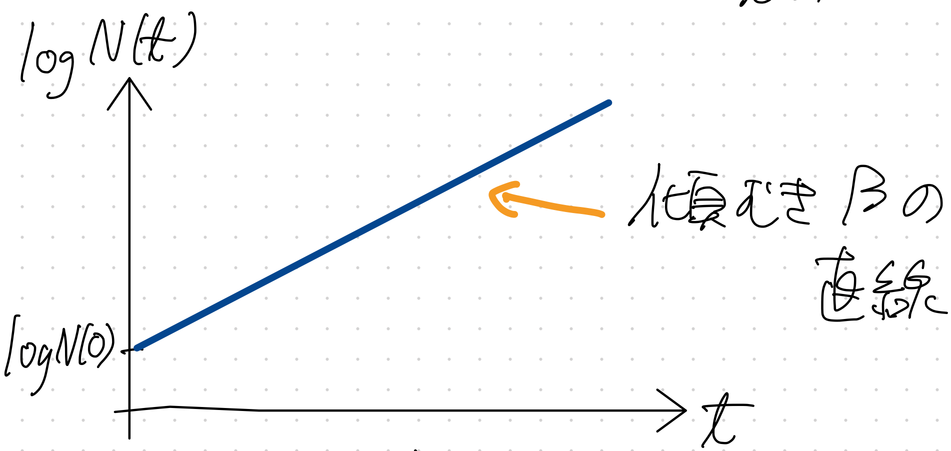
一般解 $N(t) = N(0)\, e^{\beta t}$ (2)



(2)の log をとると

$$\log N(t) = \log N(0) + \beta t \qquad (3)$$

t の1次関数.

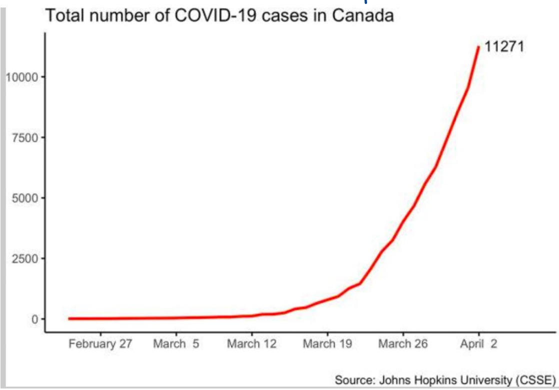


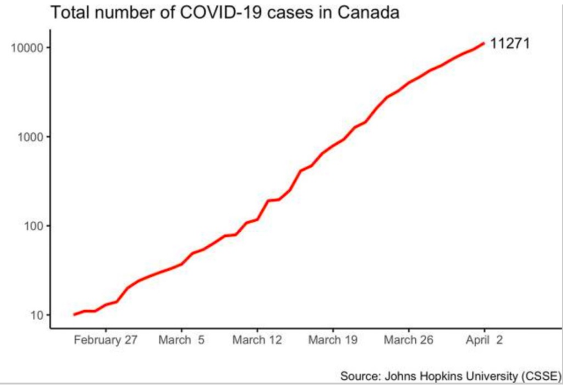
片対数プロット

通常のプロットと片対数プロット

カナダでの感染確認者総数 2020 2月〜4月

通常　　　　　　　　　　片対数

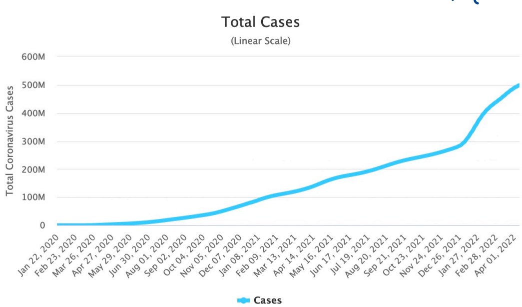


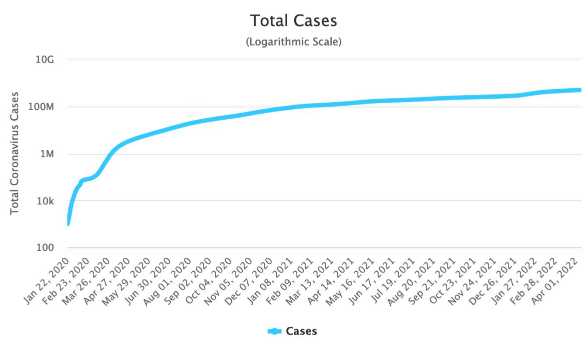


Sevi S, Aviña MM, Péloquin-Skulski G, et al. Logarithmic versus Linear Visualizations of COVID-19 Cases Do Not Affect Citizens' Support for Confinement. Can J Polit Sci. 2020;1-6. Published 2020 Apr 14. doi:10.1017/S000842392000030X

全世界の感染確認者総数 2020年1月〜2022年4月

通常　　　　　　　　　　片対数





https://www.worldometers.info/coronavirus/

倍化時間

一般解 $N(t) = N(0)e^{\beta t}$ (1)

倍化時間(doubling time) t_d を次のように定義

$$N(t_d) = 2N(0) \qquad (2)$$

一般解(1)を代入すると

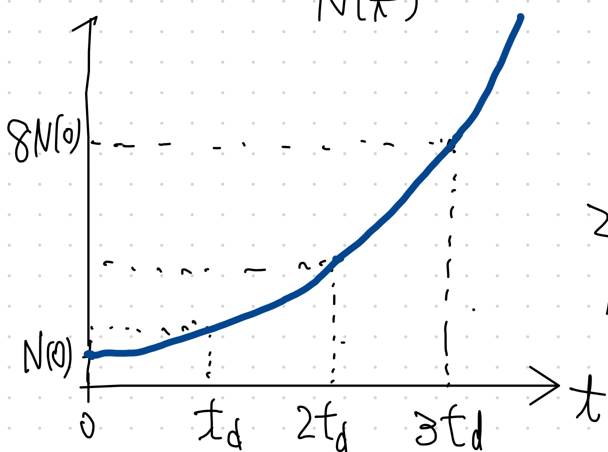
$$N(0)e^{\beta t_d} = 2N(0) \qquad (3)$$

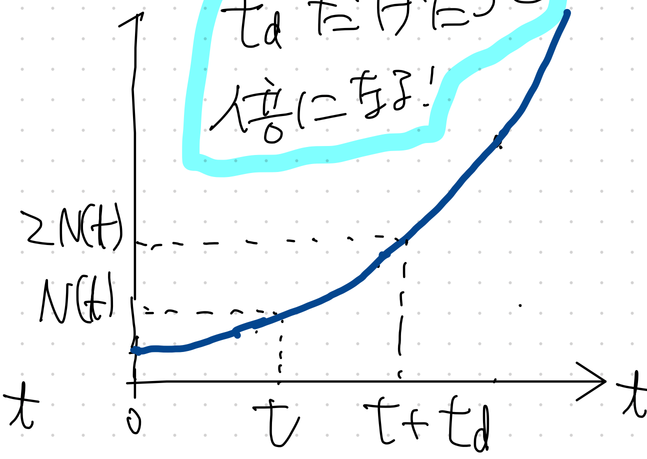
$$\therefore\ e^{\beta t_d} = 2 \qquad (4) \qquad t_d = \frac{\log 2}{\beta} \qquad (5)$$

任意の t について

$$N(t+t_d) = N(0)e^{\beta(t+t_d)} \qquad (6)$$

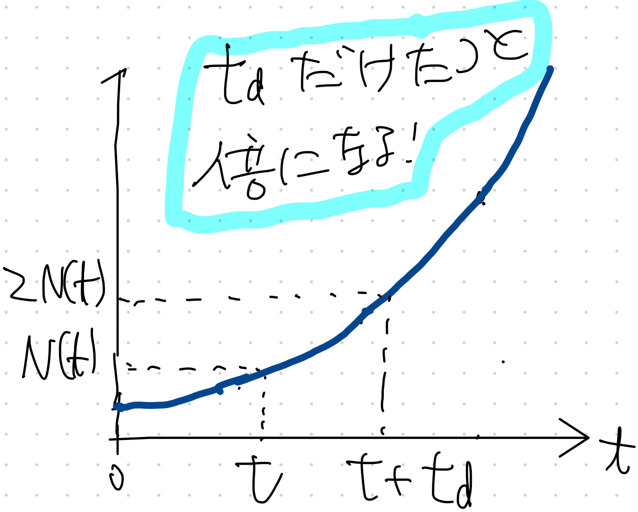
$$= \underbrace{N(0)e^{\beta t}}_{=N(t)}\underbrace{e^{\beta t_d}}_{=2} = 2N(t)$$





t_d だけたつと2倍になる!

$$N(t+t_d)=2N(t) \quad (1)$$



$$t_d=\frac{\log 2}{\beta} \quad (2)$$

基本法則☆を見ただけで このような
ふるまいがわかるだろうか?

数学のことばの力!

☆

基本法則 短かい時間間隔のあいだの
個体数の増加は、その時点での個体数と
時間間隔に比例する.

色々な微分方程式

Newton方程式

t:時刻　$x(t)$:時刻tでの粒子の位置

$$m\ddot{x}(t) = f \quad \text{(1)}$$

← 定数

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{f}{2m}t^2 \quad \text{(2)}$$

が一般解　$x(0), v(0)$は任意定数

(ここでは初期値を2つの任意定数を表わした)

(2)を(1)に代入

$$\text{左辺} = m\frac{d^2}{dt^2}\left\{x(0) + v(0)t + \frac{f}{2m}t^2\right\}$$

$$= m\frac{d}{dt}\left\{v(0) + \frac{f}{m}t\right\} = f \quad \text{(3)}$$

$$\text{右辺} = f \quad \text{(4)}$$

任意のtについて 左辺=右辺

(注 (1)は2階の微分方程式なので
一般解(2)に2つの任意定数が入る)

$$m\ddot{x}(t) = -k\,x(t) \quad (1)$$

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \theta\right) \quad (2)$$ が一般解

(A, θ は任意定数)

(2) を (1) に代入

$$左辺 = mA\frac{d^2}{dt^2}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \theta\right)$$

$$= -kA\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \theta\right) \quad (3)$$

$$右辺 = -kA\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \theta\right) \quad (4)$$

任意の t に対して 左辺 = 右辺

減衰の微分方程式

教科書(§5.2.1)ではこれを詳しくやってる → よもう!

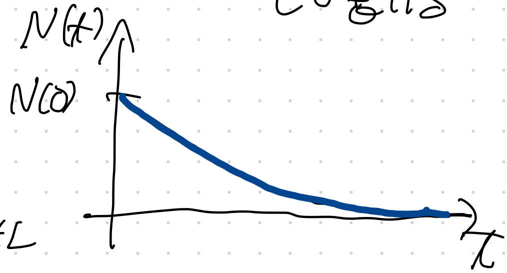
$$\dot{N}(t) = -\gamma N(t) \quad (t \geq 0) \tag{1}$$

γは正の定数

一般解 $$N(t) = Ce^{-\gamma t} \tag{2}$$

Cは任意定数

$C = N(0)$なので $$N(t) = N(0)e^{-\gamma t} \tag{3}$$ とも書ける



半減期 (half life) t_{HL}

$$N(t_{HL}) = N(0)/2 \quad \text{で定ぎ} \tag{4}$$

$$t_{HL} = \frac{\log 2}{\gamma} \tag{5}$$

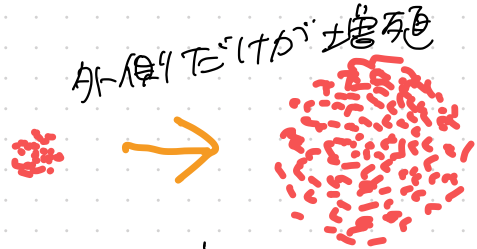
任意のtについて

$$N(t + t_{HL}) = \frac{N(t)}{2} \tag{6}$$

簡単な非線形微分方程式

$$\dot{N}(t)=\beta\sqrt{N(t)}\quad ,\ t\geq 0,\ N(t)\geq 0 \qquad (1)$$

β は正の定数



($\dot{N}(t)=\beta N(t)$ は線形微分方程式
$\dot{N}(t)=\beta\sqrt{N(t)}$ は非線形 〃)

解は？ $N(t)=e^{\alpha t}$ → ダメ (2)

$N(t)=t$ → ダメ (3)

$N(t)=t^2$ 左辺＝$2t$ 右辺 βt 近い！(4)

$N(t)=At^2$ (5)

A：これから決める定数

左辺＝$2At$ 右辺＝$\beta\sqrt{A}\,t$ (6)

$2A=\beta\sqrt{A}$ ならOK つまり $A=\dfrac{\beta^2}{4}$ (7)

解は $N(t) = \frac{\beta^2}{4} t^2$ (1)

他の解は?

- $N(t) = C \frac{\beta^2}{4} t^2$ として $C=1$ しかない! (2)

- また時間の原点をずらせばよい

$a \geqq 0$ を任意定数として

$$N(t) = \frac{\beta^2}{4}(t+a)^2 \quad (3)$$

← 一般解

解になっていることを確かめてみよう

任意定数を初期値 $N(0)$ で表わす

(3) で $t=0$ とする $N(0) = \frac{\beta^2}{4} a^2$ (4)

よって $a = \frac{2}{\beta}\sqrt{N(0)}$ (5)

一般解

$$N(t) = \frac{\beta^2}{4}\left\{t + \frac{2}{\beta}\sqrt{N(0)}\right\}^2 \quad (6)$$

非斉次の微分方程式

$$\dot{N}(t)=\beta \quad (t \geq 0) \quad \beta \text{は正の定数} \qquad (1)$$

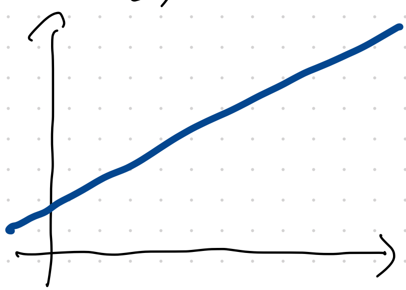
解は $N(t)=\beta t+C$ (2)

Cは任意定数

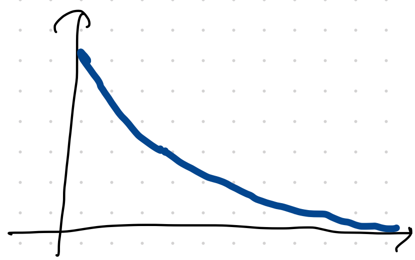
$$\dot{N}(t)=-\gamma N(t) \quad (t \geq 0) \quad \gamma \text{は正定数} \qquad (3)$$

解は $N(t)=Ce^{-\gamma t}$ (4)

(2)の$N(t)$



(4)の$N(t)$



微分方程式

非斉次項

$$\dot{N}(t)=-\gamma N(t)+\boxed{\beta} \quad (t \geq 0) \qquad (5)$$

γ, βは正定数　の解は？

$$\dot{N}(t) = -\gamma N(t) + \beta \qquad (1)$$

解き方1　変数変換

(1)は $\dot{N}(t) = -\gamma\left\{N(t) - \frac{\beta}{\gamma}\right\}$ (2) とかける

$x(t) = N(t) - \frac{\beta}{\gamma}$ とする (3)

新しい未知関数

(3)の両辺を微分して

$\dot{x}(t) = \dot{N}(t)$ だから (4)

(2)より $\dot{x}(t) = -\gamma x(t)$ (5)

一般解は $x(t) = C e^{-\gamma t}$ (6)

よって $N(t) = C e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma}$ (7)

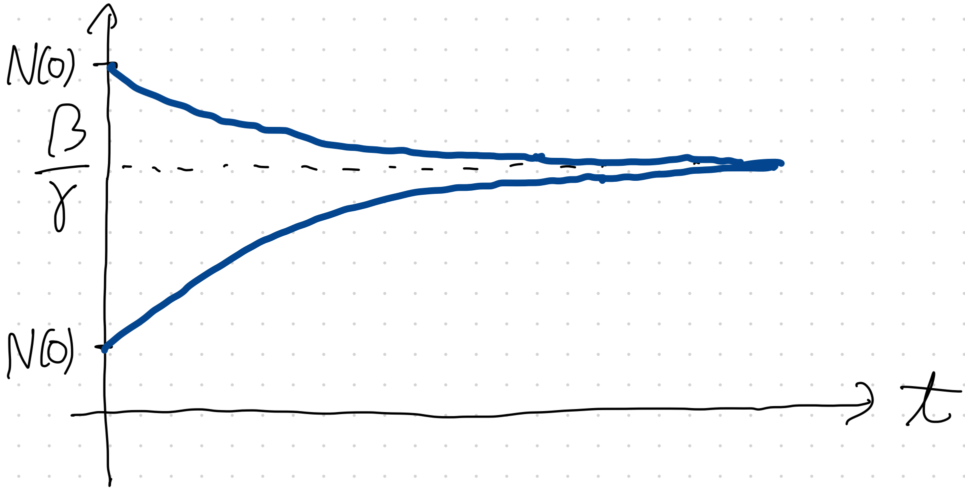
$t=0$ とすると $N(0) = C + \frac{\beta}{\gamma}$ (8)

$$N(t) = \left\{N(0) - \frac{\beta}{\gamma}\right\} e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} \qquad (9)$$

解のふるまい

$$N(t) = \left\{N(0) - \frac{\beta}{\gamma}\right\} e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} \quad (1)$$

この部分は $t \to \infty$ で消える.



かならずバランスした値 $\frac{\beta}{\gamma}$ に近づく.

$$\dot{N}(t) = -\gamma N(t) + \beta \quad (2)$$

すべての t において $\dot{N}(t) = 0$ となる解があるか? (3) 定数解

$$0 = -\gamma N(t) + \beta \quad (4) \Rightarrow N(t) = \frac{\beta}{\gamma} \quad (5)$$

たしかに定数!

解き方２ (非斉次方程式の特解と斉次方程式の一般解を利用)

$$\dot{N}(t) = -\gamma N(t) + \beta \qquad (1)$$

(A) なんでもいいので(1)の解をひとつみつける.

かんたんなのは
$$N_{ps}(t) = \frac{\beta}{\gamma} \qquad (2)$$

$$\dot{N}_{ps}(t) = -\gamma N_{ps}(t) + \beta \qquad (3)$$

ps → particular solution 特解.
特定の 解

(B) β=0とした微分方程式 (斉次の微分方程式)

$$\dot{N}_0(t) = -\gamma N_0(t) \qquad (4)$$

の一般解をだす

$$N_0(t) = \underbrace{\boxed{C}}_{\text{任意定数}} e^{-\gamma t} \qquad (5)$$

(C)
$$N(t) = N_{ps}(t) + N_0(t) \qquad (6)$$

は (1)の一般解!

なぜなら
$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &= \dot{N}_{ps}(t) + \dot{N}_0(t) \\ &= -\gamma N_{ps}(t) + \beta - \gamma N_0(t) \qquad (7) \\ &= -\gamma N(t) + \beta\end{aligned}$$

ビ分方程式の形が途中でかわる場合

α, β, t_0 正の定数

$$\dot{N}(t) = \begin{cases} -\gamma N(t) + \beta, & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\gamma N(t), & t > t_0 \end{cases} \qquad (1)$$

$0 \leq t \leq t_0$ のとき

$$N(t) = \left\{ N(0) - \frac{\beta}{\gamma} \right\} e^{-\gamma t} + \frac{\beta}{\gamma} \qquad (2)$$

$$N(t_0) = \left\{ N(0) - \frac{\beta}{\gamma} \right\} e^{-\gamma t_0} + \frac{\beta}{\gamma} \qquad (3)$$

$t > t_0$ のとき

任意定数

$$N(t) = \boxed{C} e^{-\gamma t} \qquad (4)$$

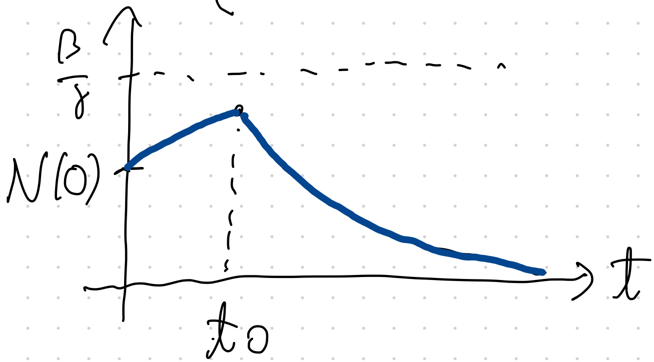
$$N(t_0) = C e^{-\gamma t_0} \qquad (5)$$

(3)と(5)が等しい!

$$C = N(0) + \frac{\beta}{\gamma} \left(e^{\gamma t_0} - 1 \right) \qquad (6)$$

一般解

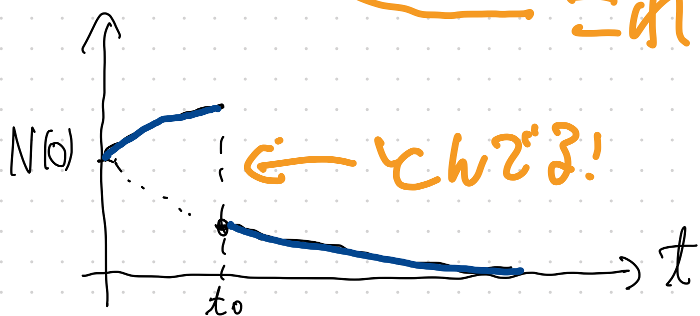
$$N(t)=\begin{cases}\left\{N(0)-\dfrac{\beta}{\gamma}\right\}e^{-\gamma t}+\dfrac{\beta}{\gamma} & (0\leq t\leq t_0)\\[2ex] \left\{N(0)+\dfrac{\beta}{\gamma}\left(e^{\gamma t_0}-1\right)\right\}e^{-\gamma t} & (t>t_0)\end{cases}\quad (1)$$



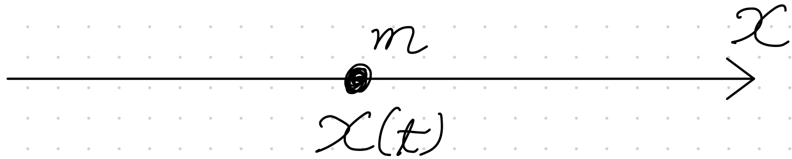
注意

$$N(t)=\begin{cases}\left\{N(0)-\dfrac{\beta}{\gamma}\right\}e^{-\gamma t}+\dfrac{\beta}{\gamma} & (0\leq t\leq t_0)\\[2ex] N(0)\,e^{-\gamma t} & (t>t_0)\end{cases}\quad (2)$$

← これはダメ!!



§ 1次元の運動



1次元を運動する質量 m の粒子

時刻 t での位置 $x(t)$, 速度 $v(t)$

- 速度の定義 $$\dot{x}(t) = v(t) \tag{1}$$
- Newton方程式 $$m\dot{v}(t) = f(\cdots) \tag{2}$$

t や $x(t)$ に依存

力が時刻 t のみに依存する場合

$$m\dot{v}(t) = \boxed{f(t)} \quad (1)$$

与えられた t の関数

$\dot{v}(t) = \dfrac{f(t)}{m}$ を解く $\rightarrow v(t)$

$\dot{x}(t) = v(t)$ を解く $\rightarrow x(t)$

例 一定の外力 $f(t) = f_0$ (定数)

$$\dot{v}(t) = \frac{f_0}{m} \quad (2)$$

$$\downarrow$$

$$v(t) = v(0) + \frac{f_0}{m}t \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = v(0) + \frac{f_0}{m}t \quad (4)$$

$$\downarrow$$

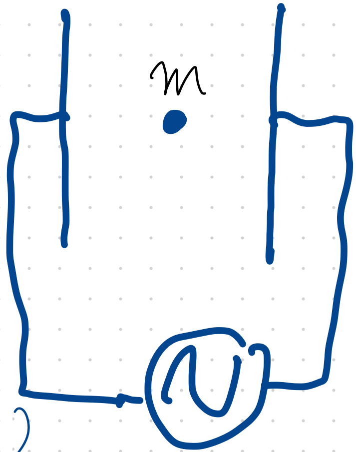
$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{f_0}{2m}t^2 \quad (5)$$

任意定数は2つ (初期位置 $x(0)$, 初速度 $v(0)$)

振動する外力

f_0, ω 定数

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$



$$\dot{v}(t) = \frac{f_0}{m}\cos(\omega t) \quad (2)$$

↓ ビ分するとこうなるものをさがす

$$v(t) = v(0) + \frac{f_0}{m\omega}\sin(\omega t) \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = v(0) + \frac{f_0}{m\omega}\sin(\omega t) \quad (4)$$

↓ ビ分するとこうなるものをさがす

$$x(t) = x(0) + v(0)t - \frac{f_0}{m\omega^2}\cos(\omega t) \quad (5)$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t - \frac{f_0}{m\omega^2}\cos(\omega t) \quad (1)$$

両辺で $t=0$ とすると

$$x(0) = x(0) - \frac{f_0}{m\omega^2} \quad (2)$$

おかしい！？

$$\dot{x}(t) = v(0) + \frac{f_0}{m\omega}\sin(\omega t) \quad (3)$$

↓ 微分するとこうなるものをさがす

$$x(t) = \underbrace{C}_{\text{任意定数}} + v(0)t - \frac{f_0}{m\omega^2}\cos(\omega t) \quad (4)$$

$t=0$ として $C = x(0) + \dfrac{f_0}{m\omega^2}$ (5)

∴

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{f_0}{m\omega^2}\{1 - \cos(\omega t)\} \quad (6)$$

力が速度 $v(t)$ に依存する場合

たとえば空気抵抗 $f=-\mu v(t)$ (1)

(μ は正の定数)

速度に比例する抵抗

(速度が小さいときは近似的にこうなる)

$$\dot{v}(t)=-\frac{\mu}{m}v(t) \quad (2)$$

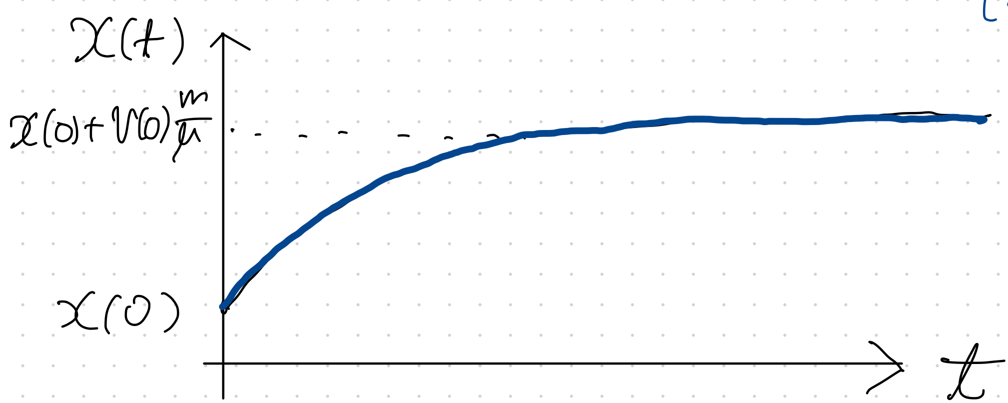
これは $v(t)$ についての微分方程式

一般解は

$$v(t)=v(0)e^{-\frac{\mu}{m}t} \quad (3)$$

よって $\dot{x}(t)=v(t)$ より

$$x(t)=x(0)+v(0)\frac{m}{\mu}\left\{1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right\} \quad (4)$$



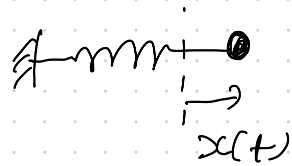
力が位置 $x(t)$ に依存する場合

例はいろいろとある.

▫たとえば 理想的なバネにつながった粒子

調和振動子 (harmonic oscilator)

$$f = -k\,x(t) \quad (1) \qquad (k\text{は正定数})$$



$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -\dfrac{k}{m}\,x(t) & (2) \\ \dot{x}(t) = v(t) & (3) \end{cases}$$

(2), (3) を別個に解くのは不可能

(3) を t で微分して (2) を代入

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}\,x(t) \quad (4)$$

2階の常微分方程式

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) \quad (1)$$

2回微分すると $-\frac{k}{m}$ がかかって元に戻る.

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ として

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \quad (2)$$

が一般解

A, B 任意定数.

A, B を $x(0), v(0)$ で表わす.

$$x(0) = A \quad (3)$$

$$v(t) = \dot{x}(t)$$
$$= -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t) \quad (4)$$

$$v(0) = \omega B \quad (5)$$

∴ 初期値で表した一般解は

$$x(t) = x(0)\cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega}\sin(\omega t) \quad (6)$$