Wishart分布とその性質

多変量正規分布の推定とBox-Cox変換

山北倫太郎

June 21, 2025

目次

7.1 はじめに

- $X = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ は標本行列を表す 。
- $\bar{x}$ と S は、それぞれ μ と Σ の一貫性のある不偏推定量を提供する 。
  - $n\bar{x} = X'1$
  - $(n-1)S = X'X - n\bar{x}\bar{x}'$
- 7.2節では、$x_1, \ldots, x_n$ が独立同分布で $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$ かつ $\Sigma > 0$ の場合の μ と Σ の最尤推定量が導出される 。
- $\bar{x}$ と S の同時分布に関する基本的な結果が命題7.1で証明される 。
- 7.3節では、Wishart分布の基本的な特性が研究される 。
- 7.4節では、データの多変量正規性を高めるためのBox-Cox変換が提示される 。

7.2 $\bar{x}$ と S の同時分布

- 正規性がある場合、$\bar{x}$ と S はいくつかの点で「最適」である 。
- $V = (n-1)S$ とする 。
- X の確率密度関数は様々な方法で記述できる 。

$$f(X) = (2\pi)^{-np/2}|\Sigma|^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)'\Sigma^{-1}(x_i-\mu)\right] \tag{7.1}$$

$$= (2\pi)^{-np/2}|\Sigma|^{-n/2}e^{-\frac{n}{2}\mu'\Sigma^{-1}\mu}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \Sigma^{-1}X'X + n\mu'\Sigma^{-1}\bar{x}\right]$$

$$= (2\pi)^{-np/2}|\Sigma|^{-n/2}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}[V + n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)']\Sigma^{-1}\right]$$

- $(X'X, \bar{x})$ (または $(S, \bar{x})$ のような一対一関数) は、(Σ, μ) の最小十分完全統計量である 。
- Rao-Blackwell/Lehmann-Schefféの定理により、不偏推定量の中で $(\bar{x}, S)$ は最小分散を持つ 。
- $n-1 \geq p$ の場合の最尤推定量 (MLE) $\hat{\mu}$ と $\hat{\Sigma}$ を得るには、対数尤度関数を最小化す

7.2 $\bar{x}$ と S の同時分布 (続き)

- 一般的な結果として、$\bar{x}$ は $N_p(\mu, \Sigma/n)$ に従う 。
- 標本行列 X を Z を用いて表す。$X \overset{d}{=} ZA' + 1\mu'$, ここで $Z \sim N_n^p(0, I_n \otimes I_p)$ かつ $\Sigma = AA'$ 。
- $\bar{x}$ と S_x の分布は $\bar{x}$ と S_z の分布に等しい 。
- $P = n^{-1}11'$ と $Q = I - n^{-1}11'$ は直交射影である 。
- $PZ \perp QZ$ であるため、$\bar{z} \perp S_z$ である 。
- $Q = HH'$ は直交基底を与えるため、$(n-1)S_z = Z'HH'Z = U'U$ となる 。

7.2 $\bar{x}$ と S の同時分布 (続き)

定義 7.1 Wishart分布

$W \sim W_p(m)$ ならば $W \overset{d}{=} \sum_{i=1}^m z_i z_i'$, ここで z_i は独立同分布で $N_p(0, I)$ に従う。
$V \sim W_p(m, \Sigma)$ ならば $V \overset{d}{=} AWA'$, ここで $\Sigma = AA'$ かつ $W \sim W_p(m)$。

命題 7.1

x_i が独立同分布で $N_p(\mu, \Sigma)$ に従う場合 $(i = 1, \ldots, n)$、

- $\bar{x} \sim N_p(\mu, \Sigma/n)$
- $(n-1)S \sim W_p(n-1, \Sigma)$
- $\bar{x} \perp S$

7.3 Wishart分布の性質

命題 7.2

$W \sim W_p(m)$ ならば tr $W \sim \chi^2_{mp}$。

証明

$W \sim W_p(m)$ の定義より、tr $W \stackrel{d}{=} \mathrm{tr} \sum_{i=1}^m z_i z_i' = \sum_{i=1}^m z_i' z_i$。
z_i は独立同分布で $N_p(0, I)$ に従うので、命題4.4より $z_i' z_i \sim \chi^2_p$。
系3.1より tr $W \sim \chi^2_{mp}$。

7.3 Wishart分布の性質 (続き)

補題 7.1

$Z = (z_{ij}) \in R_n^n$ が独立同分布の $N(0,1)$ に従う場合、$P(|Z| = 0) = 0$。

証明

$n = 1$ の場合は z_{11} が絶対連続分布を持つため、結果は成立する。
Z を以下のように分割する。

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12}' \\ z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

$Z_{22} \in R_{n-1}^{n-1}$ に対して結果が成立すると仮定する
と、$P(|Z| = 0) = P(|Z| = 0, |Z_{22}| \neq 0) + P(|Z| = 0, |Z_{22}| = 0)$

$$= P(z_{11} = z_{12}' Z_{22}^{-1} z_{21}, |Z_{22}| \neq 0)$$
$$= E[P(z_{11} = z_{12}' Z_{22}^{-1} z_{21}, |Z_{22}| \neq 0 | z_{12}, z_{21}, Z_{22})] = 0。$$

7.3 Wishart分布の性質 (続き)

系 7.1

$Z = (z_{ij}) \in R_n^n$ が独立同分布の $N(0,1)$ に従う場合、$P(|Z| = t) = 0, \forall t$。

証明

$P(|Z| = t) = E[P(z_{11} = z_{12}' Z_{22}^{-1} z_{21} + t/|Z_{22}|, |Z_{22}| \neq 0 | z_{12}, z_{21}, Z_{22})] = 0$。
補題7.1と系7.1は、Z が任意の絶対連続分布を持つ場合にも有効である。

命題 7.3

$W \sim W_p(m)$ かつ $m \geq p$ ならば、W は確率1で非特異である。

証明

$W \stackrel{d}{=} Z'Z$ であり、$Z' = (z_1, \ldots, z_m)$ かつ z_i は独立同分布の $N_p(0, I)$ に従う。

$\text{rank } W \stackrel{d}{=} \text{rank } Z'Z = \text{rank } Z \geq \text{rank } (z_1, \ldots, z_p)$ は確率1で p となる。