Wishart分布とその性質

線形代数の基礎概念

山北倫太郎

June 21, 2025

目次

7.1 はじめに

- $X = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ は標本行列を表す。
- $\bar{x}$ と S は、それぞれ μ と Σ の一貫性のある不偏推定量を提供する。
  - $n\bar{x} = X'1$
  - $(n-1)S = X'X - n\bar{x}\bar{x}'$
- 7.2節では、$x_1, \ldots, x_n$ が独立同分布で $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$ かつ $\Sigma > 0$ の場合の μ と Σ の最尤推定量が導出される。
- $\bar{x}$ と S の同時分布に関する基本的な結果が命題7.1で証明される。
- 7.3節では、Wishart分布の基本的な特性が研究される。
- 7.4節では、データの多変量正規性を高めるためのBox-Cox変換が提示される。

7.2 $\bar{x}$ と S の同時分布

- 正規性がある場合、$\bar{x}$ と S はいくつかの点で「最適」である。
- $V = (n-1)S$ とする。
- X の確率密度関数は様々な方法で記述できる。

$$f(X) = (2\pi)^{-np/2}|\Sigma|^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)'\Sigma^{-1}(x_i-\mu)\right] \tag{7.1}$$

$$= (2\pi)^{-np/2}|\Sigma|^{-n/2}e^{-\frac{n}{2}\mu'\Sigma^{-1}\mu}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \Sigma^{-1}X'X + n\mu'\Sigma^{-1}\bar{x}\right]$$

$$= (2\pi)^{-np/2}|\Sigma|^{-n/2}\mathrm{etr}\left[-\frac{1}{2}[V + n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)']\Sigma^{-1}\right]$$

- $(X'X, \bar{x})$ (または $(S, \bar{x})$ のような一対一関数) は、(Σ, μ) の最小十分完全統計量である。
- Rao-Blackwell/Lehmann-Schefféの定理により、不偏推定量の中で $(\bar{x}, S)$ は最小分散を持つ。
- $n-1 \geq p$ の場合の最尤推定量 (MLE) $\hat{\mu}$ と $\hat{\Sigma}$ を得るには、対数尤度関数を最小化す

7.2 $\bar{x}$ と S の同時分布 (続き)

- 一般的な結果として、$\bar{x}$ は $N_p(\mu, \Sigma/n)$ に従う 。
- 標本行列 X を Z を用いて表す。$X \overset{d}{=} ZA' + 1\mu'$, ここで $Z \sim N_n^p(0, I_n \otimes I_p)$ かつ $\Sigma = AA'$ 。
- $\bar{x}$ と S_x の分布は $\bar{x}$ と S_z の分布に等しい 。
- $P = n^{-1}11'$ と $Q = I - n^{-1}11'$ は直交射影である 。
- $PZ \perp QZ$ であるため、$\bar{z} \perp S_z$ である 。
- $Q = HH'$ は直交基底を与えるため、$(n-1)S_z = Z'HH'Z = U'U$ となる 。

7.2 $\bar{x}$ と S の同時分布 (続き)

- **定義 7.1 Wishart分布:**
  - $W \sim W_p(m)$ ならば $W \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{m} z_i z_i'$, ここで z_i は独立同分布で $N_p(0, I)$ に従う 。
  - $V \sim W_p(m, \Sigma)$ ならば $V \overset{d}{=} AWA'$, ここで $\Sigma = AA'$ かつ $W \sim W_p(m)$ 。
- **命題 7.1:** x_i が独立同分布で $N_p(\mu, \Sigma)$ に従う場合 $(i = 1, \ldots, n)$、
  - $\bar{x} \sim N_p(\mu, \Sigma/n)$
  - $(n-1)S \sim W_p(n-1, \Sigma)$
  - $\bar{x} \perp S$
- Wishart分布の密度関数を明示的に得ることも可能だが、その基本的な性質を理解することが重要である 。

7.3 Wishart分布の性質

- **命題 7.2:** $W \sim W_p(m)$ ならば $\mathrm{tr}\ W \sim \chi^2_{mp}$ 。
- **証明:** $W \sim W_p(m)$ の定義より、$\mathrm{tr}\ W \overset{d}{=} \mathrm{tr}\ \sum_{i=1}^m z_i z_i' = \sum_{i=1}^m z_i' z_i$ 。
- z_i は独立同分布で $N_p(0, I)$ に従うので、命題4.4より $z_i' z_i \sim \chi^2_p$ 。
- 系3.1より $\mathrm{tr}\ W \sim \chi^2_{mp}$ 。

7.3 Wishart分布の性質 (続き)

- $V \sim W_p(m, \Sigma)$ が確率1で非特異であるかを決定するのに有用な補題は以下の通り 。
- **補題 7.1:** $Z = (z_{ij}) \in R_n^n$ が独立同分布の $N(0,1)$ に従う場合、$P(|Z| = 0) = 0$ 。
- **証明:** $n = 1$ の場合は z_{11} が絶対連続分布を持つため、結果は成立する 。
- Z を以下のように分割する 。

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z'_{12} \\ z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

- $Z_{22} \in R_{n-1}^{n-1}$ に対して結果が成立すると仮定する
  と、$P(|Z| = 0) = P(|Z| = 0, |Z_{22}| \neq 0) + P(|Z| = 0, |Z_{22}| = 0)$

$$= P(z_{11} = z'_{12} Z_{22}^{-1} z_{21}, |Z_{22}| \neq 0)$$
$$= E[P(z_{11} = z'_{12} Z_{22}^{-1} z_{21}, |Z_{22}| \neq 0 | z_{12}, z_{21}, Z_{22})] = 0。$$

7.3 Wishart分布の性質 (続き)

- 系 **7.1:** $Z = (z_{ij}) \in R_n^n$ が独立同分布の $N(0,1)$ に従う場合、$P(|Z| = t) = 0, \forall t$ 。
- **証明:** $P(|Z| = t) = E[P(z_{11} = z_{12}' Z_{22}^{-1} z_{21} + t/|Z_{22}|, |Z_{22}| \neq 0 | z_{12}, z_{21}, Z_{22})] = 0$ 。
- 補題7.1と系7.1は、Z が任意の絶対連続分布を持つ場合にも有効である 。
- **命題 7.3:** $W \sim W_p(m)$ かつ $m \geq p$ ならば、W は確率1で非特異である 。
- **証明:** $W \stackrel{d}{=} Z'Z$ であり、$Z' = (z_1, \ldots, z_m)$ かつ z_i は独立同分布の $N_p(0, I)$ に従う 。
- rank $W \stackrel{d}{=}$ rank $Z'Z =$ rank $Z \geq$ rank $(z_1, \ldots, z_p)$ は確率1で p となる 。
- したがって、rank W は確率1で p となる 。

7.3 Wishart分布の性質 (続き)

- 系 **7.2:** $V \sim W_p(m, \Sigma)$ かつ $m \geq p$ かつ $|\Sigma| \neq 0$ ならば、$|V| \neq 0$ は確率1で成立する。
- Eaton とPerlman (1973)は、標本分散行列 S が独立な観測値（必ずしも正規分布や独立同分布である必要はない）に対して確率1で非特異であることを示した。
- Wishart行列の線形変換に関する結果は以下の通りである。
- **命題 7.4:** $V \sim W_p(m, \Sigma)$ かつ $B \in R_p^q$ ならば、$BVB' \sim W_q(m, B\Sigma B')$ 。
- **証明:** $V \stackrel{d}{=} AWA'$ であり、$W \sim W_p(m)$ かつ $\Sigma = AA'$ 。
- したがって、$BVB' \stackrel{d}{=} (BA)W(BA)' \sim W_q(m, BAA'B')$ 。