

# Wishart分布とその性質

## 多変量正規分布の推定とBox-Cox変換

山北倫太郎

June 21, 2025

## 1 Wishart分布

## 7.1 はじめに

- $X = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$  は標本行列を表す。
- $\bar{x}$  と  $S$  は、それぞれ  $\mu$  と  $\Sigma$  の一貫性のある不偏推定量を提供する。
  - $n\bar{x} = X'1$
  - $(n-1)S = X'X - n\bar{x}\bar{x}'$
- 7.2節では、 $x_1, \dots, x_n$  が独立同分布で  $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$  かつ  $\Sigma > 0$  の場合の  $\mu$  と  $\Sigma$  の最尤推定量が導出される。
- $\bar{x}$  と  $S$  の同時分布に関する基本的な結果が命題7.1で証明される。
- 7.3節では、Wishart分布の基本的な特性が研究される。
- 7.4節では、データの多変量正規性を高めるためのBox-Cox変換が提示される。

## 7.2 $\bar{x}$ と $S$ の同時分布

- 正規性がある場合、 $\bar{x}$  と  $S$  はいくつかの点で「最適」である。
- $V = (n-1)S$  とする。
- $X$  の確率密度関数は様々な方法で記述できる。

$$\begin{aligned} f(X) &= (2\pi)^{-np/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)' \Sigma^{-1} (x_i - \mu) \right] \\ &= (2\pi)^{-np/2} |\Sigma|^{-n/2} e^{-\frac{n}{2} \mu' \Sigma^{-1} \mu} \text{etr} \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} X' X + n \mu' \Sigma^{-1} \bar{x} \right] \\ &= (2\pi)^{-np/2} |\Sigma|^{-n/2} \text{etr} \left[ -\frac{1}{2} [V + n(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)'] \Sigma^{-1} \right] \end{aligned} \quad (7.1)$$

- $(X'X, \bar{x})$  (または  $(S, \bar{x})$  のような一対一関数) は、 $(\Sigma, \mu)$  の最小十分完全統計量である。
- Rao-Blackwell/Lehmann-Schefféの定理により、不偏推定量の中で  $(\bar{x}, S)$  は最小分散を持つ。
- $n-1 \geq p$  の場合の最尤推定量 (MLE)  $\hat{\mu}$  と  $\hat{\Sigma}$  を得るには、対数尤度関数を最小化する。

## 7.2 $\bar{x}$ と $S$ の同時分布 (続き)

- 一般的な結果として、 $\bar{x}$  は  $N_p(\mu, \Sigma/n)$  に従う。
- 標本行列  $X$  を  $Z$  を用いて表す。 $X \stackrel{d}{=} ZA' + 1\mu'$ , ここで  $Z \sim N_n^p(0, I_n \otimes I_p)$  かつ  $\Sigma = AA'$ 。
- $\bar{x}$  と  $S_x$  の分布は  $\bar{x}$  と  $S_z$  の分布に等しい。
- $P = n^{-1}11'$  と  $Q = I - n^{-1}11'$  は直交射影である。
- $PZ \perp QZ$  であるため、 $\bar{z} \perp S_z$  である。
- $Q = HH'$  は直交基底を与えるため、 $(n-1)S_z = Z'HH'Z = U'U$  となる。

## 7.2 $\bar{x}$ と $S$ の同時分布 (続き)

### 定義 7.1 Wishart分布

$W \sim W_p(m)$  ならば  $W \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^m z_i z_i'$ , ここで  $z_i$  は独立同分布で  $N_p(0, I)$  に従う。

$V \sim W_p(m, \Sigma)$  ならば  $V \stackrel{d}{=} AWA'$ , ここで  $\Sigma = AA'$  かつ  $W \sim W_p(m)$ 。

### 命題 7.1

$x_i$  が独立同分布で  $N_p(\mu, \Sigma)$  に従う場合 ( $i = 1, \dots, n$ )、

- $\bar{x} \sim N_p(\mu, \Sigma/n)$
- $(n-1)S \sim W_p(n-1, \Sigma)$
- $\bar{x} \perp S$

## 7.3 Wishart分布の性質 - 補題

### 補題 7.1

$Z = (z_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が独立同分布の  $N(0, 1)$  に従う場合、 $P(|Z| = 0) = 0$ 。

$n = 1$  の場合は  $z_{11}$  が絶対連続分布を持つため、結果は成立する。  
 $Z$  を以下のように分割する。

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z'_{12} \\ z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

$Z_{22} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  に対して結果が成立すると仮定すると、

$$\begin{aligned} P(|Z| = 0) &= P(|Z| = 0, |Z_{22}| \neq 0) + P(|Z| = 0, |Z_{22}| = 0) \\ &= P(z_{11} = z'_{12} Z_{22}^{-1} z_{21}, |Z_{22}| \neq 0) \\ &= E[P(z_{11} = z'_{12} Z_{22}^{-1} z_{21}, |Z_{22}| \neq 0 | z_{12}, z_{21}, Z_{22})] = 0 \end{aligned}$$

## 7.3 Wishart分布の性質 - 系

### 系 7.1

$Z = (z_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が独立同分布の  $N(0, 1)$  に従う場合、 $P(|Z| = t) = 0, \forall t$ 。

$P(|Z| = t) = E[P(z_{11} = z'_{12}Z_{22}^{-1}z_{21} + t/|Z_{22}|, |Z_{22}| \neq 0 | z_{12}, z_{21}, Z_{22})] = 0$ 。

補題7.1と系7.1は、 $Z$  が任意の絶対連続分布を持つ場合にも有効である。



## 7.3 Wishart分布の性質 - 命題

### 命題 7.3

$W \sim W_p(m)$  かつ  $m \geq p$  ならば、 $W$  は確率1で非特異である。

$W \stackrel{d}{=} Z'Z$  であり、 $Z' = (z_1, \dots, z_m)$  かつ  $z_i$  は独立同分布の  $N_p(0, I)$  に従う。

$\text{rank } W \stackrel{d}{=} \text{rank } Z'Z = \text{rank } Z \geq \text{rank } (z_1, \dots, z_p)$  は確率1で  $p$  となる。

したがって、 $\text{rank } W$  は確率1で  $p$  となる。