

NOM :

Janvier 2023

PRÉNOM :

BLOC :



Examen de Mathématiques 1 :

1^{ère} année Bachelier en Informatique de Gestion

BINV1090 – Mathématiques 1

Date : 17 janvier 2023

Durée de l'examen : 2 heures

Nombre de questions : 5

1. **Sauf avis contraire, toute réponse doit être justifiée.**
2. Si vous n'écrivez pas proprement et lisiblement, votre réponse recevra un zéro.
3. Écrire au crayon est autorisé si le point 2 ci-dessus est respecté.
4. Vous pouvez avoir à votre disposition 10 feuilles recto/verso respectant les conditions suivantes : vos nom et prénom doivent être indiqués, les feuilles doivent être manuscrites, reliées sur toute la longueur de manière à ne pas pouvoir en détacher sans l'arracher et le contenu ne fait pas l'objet de miniaturisation.
5. Pour les questions sur machine, vous devez travailler **sur le U** : . En effet, si vous travaillez ailleurs vos fichiers seront perdus.
6. Les points communiqués en regard des questions sont indicatifs. Des lacunes graves entraîneront l'échec au présent examen.
7. **Mettez vos noms et prénoms au début de chaque question !**

Question 1	/10
Question 2	/10
Question 3	/10
Question 4	/10
Question 5	/10
TOTAL	/50

NOM :

Janvier 2023

PRÉNOM :

BLOC :

Question 1 (10 pts)

a) Dans l'univers des habitations unifamiliales, on dispose des prédicats suivants :

- $jardin(x)$: x possède un jardin ;
- $identiques(x,y)$: les plans de x et y sont identiques.

À l'aide de ceux-ci, traduisez la phrase suivante sous forme d'une expression mathématique :

« S'il existe au maximum une habitation avec jardin, alors toutes les autres habitations ont des plans identiques. »

$$[\forall x \forall y ((jardin(x) \wedge jardin(y)) \Rightarrow (x = y))] \Rightarrow [\forall x \forall y ((\neg jardin(x) \wedge \neg jardin(y)) \Rightarrow identique(x, y))]$$

b) Corriger la table de vérité ci-dessous pour qu'elle soit complète, correcte et cohérente.

Vous devez indiquer les corrections directement dans le tableau ci-dessous (barrer chaque valeur fausse et indiquer la valeur correcte) !

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee r$	$\neg((p \wedge q) \vee (p \vee r))$	$((r \vee p) \Rightarrow q) \wedge p$
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0 1	1	0 1	0	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0 1	1 0	0
1	1	0 1	1	1	0	0 1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0 1	0

Question 2 (10 pts)

Démontrez par récurrence que $7^{2n} - 4$ est divisible par 3 pour tout naturel n .

1) Pas Initial : $n = 0$: $7^{2 \cdot 0} - 4 = 7^0 - 4 = 1 - 4 = -3 = 3 \cdot (-1) = 3 \cdot p$ avec $p = -1 \in \mathbb{Z}$ OK

2) Pas de récurrence :

a. Hypothèse : Pour $n = k$ fixé : $\exists p \in \mathbb{Z} : 7^{2k} - 4 = 3p$ ou encore $7^{2k} = 3p + 4$.

b. Thèse : Pour $n = k + 1$ fixé : $\exists q \in \mathbb{Z} : 7^{2(k+1)} - 4 = 3q$

c. Démonstration

$$\begin{aligned}
 7^{2(k+1)} - 4 &= 7^{2k+2} - 4 \\
 &= 7^2 \cdot 7^{2k} - 4 \\
 &= 49 \cdot 7^{2k} - 4 \\
 &= 49 \cdot (3p + 4) - 4 \\
 &= 49 \cdot 3p + 49 \cdot 4 - 4 \\
 &= 147p + 196 - 4 \\
 &= 147p + 192 \\
 &= 3 \cdot (49p + 64) \\
 &= 3 \cdot q
 \end{aligned}$$

**Avec $q = 49p + 64 \in \mathbb{Z}$
OK**

$$\begin{aligned}
 7^{2(k+1)} - 4 &= 7^{2k+2} - 4 \\
 &= 7^2 \cdot 7^{2k} - 4 \\
 &= 49 \cdot 7^{2k} - 4 \\
 &= 49 \cdot (3p + 4) - 4 \\
 &= 49 \cdot 3p + 49 \cdot 4 - 4 \\
 &= 147p + 196 - 4 \\
 &= 147p + 192 \\
 &= 3 \cdot (49p + 64) \\
 &= 3 \cdot q
 \end{aligned}$$

**Avec $q = 49p + 64 \in \mathbb{Z}$
OK**

NOM :

Janvier 2023

PRÉNOM :

BLOC :

Question 3 (10 pts)

1) Soient les ensembles $A = \{\{2,1\}, 1, P(P(\{1\}))\}$ et $B = \{1, \{2\}, \emptyset\} \oplus P(\{1,2\})$

a) Que vaut $|A|$?

$$|A| = 3$$

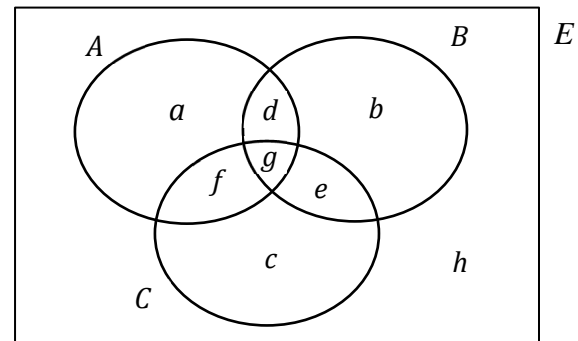
b) Donnez B et $B - A$ en extension

$$B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$$
$$B - A = \{\{1\}\}$$

c) Donnez un ensemble C tel que $C \cup A = A$ et $C \in B$

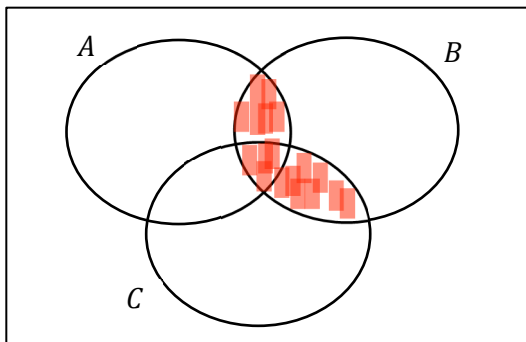
$$C = \{1\}$$

2) Soient A, B, C des sous-ensembles d'un Univers E . Sur le diagramme de Venn ci-contre, les minuscules a, b, c, \dots, h désignent les cardinaux des zones correspondantes. Pour chaque affirmation ci-dessous, commencez par hachurer la zone correspondante des ensembles de mandés sur le diagramme de Venn et, ensuite, dites ce qu'on peut dire à propos des cardinaux a, b, c, \dots, h si l'affirmation est vraie.

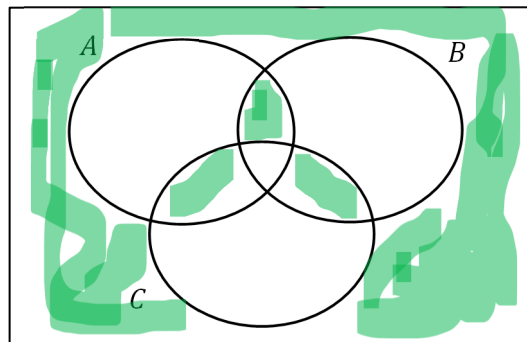


a) $|B \cap (C \cup A)| = |A \oplus B \oplus \bar{C}|$

Sur le diagramme de Venn ci-dessous, hachurez la zone correspondante à $B \cap (C \cup A)$



Sur le diagramme de Venn ci-dessous, hachurez la zone correspondante à $A \oplus B \oplus \bar{C}$



Interprétation de l'affirmation en terme des cardinaux :

$$d + g + e = d + f + e + h \Rightarrow g = f + h$$

NOM :

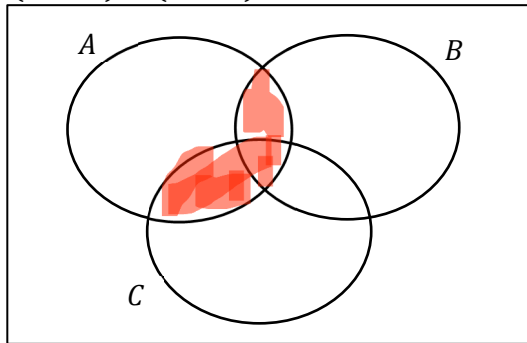
Janvier 2023

PRÉNOM :

BLOC :

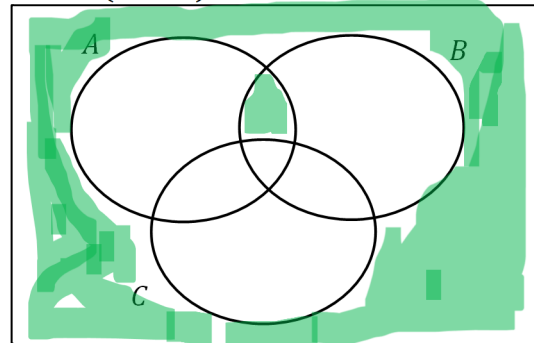
b) $(A - \bar{B}) \cup (C \cap A) \subseteq \bar{C} - (A \oplus B)$

Sur le diagramme de Venn ci-dessous, hachurez la zone correspondante à $(A - \bar{B}) \cup (C \cap A)$



E

Sur le diagramme de Venn ci-dessous, hachurez la zone correspondante à $\bar{C} - (A \oplus B)$



E

Interprétation de l'affirmation en terme des cardinaux :

$f = 0$ et $g = 0$

Question 4 (10 pts)

On vous demande d'utiliser la méthode de la bisection pour trouver une approximation avec 5 décimales exactes de la racine du polynôme $f(x) = x^3 - 3x + 1$ se trouvant dans l'intervalle $[0.1, 0.4]$.

Pour ce faire vous devez utiliser le fichier MethNum.xlsx.

Dans celui-ci vous devez

1. Calculez le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre le nombre de décimales exactes demandés.
2. Complétez le tableau déjà présent.

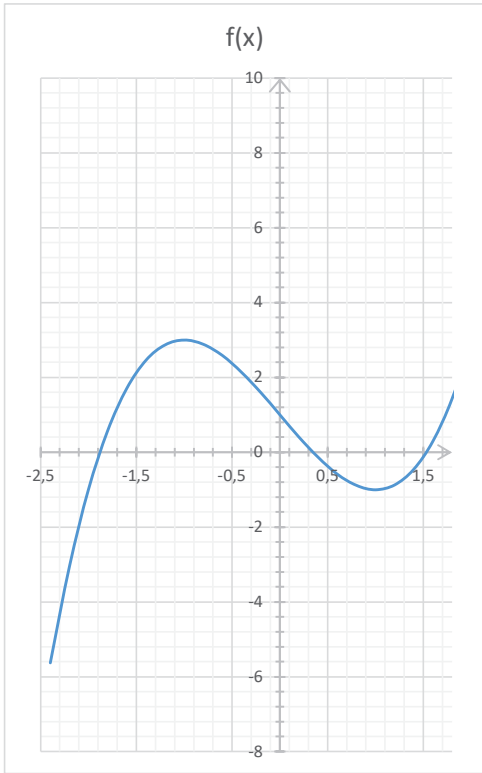
Remarques :

- Vos formules doivent être les plus générique possible (elles doivent fonctionner si on change l'intervalle et/ou le nombre de décimales exactes)
- Dans le tableau, E_n est la borne sur l'erreur absolue à l'étape n .
- Le nombre de lignes du tableau dépend du nombre d'étapes nécessaires pour atteindre le nombre de décimales exactes demandé. Il est donc possible que vous deviez en ajouter ou en supprimer.
- Pour toute éventuelle colonne ajoutée, n'oubliez pas de lui donner un titre.
- Toute valeur éventuelle provenant d'un calcul isolé doit aussi être décrite.

Méthode de la bisection

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

x	f(x)
-2,4	-5,624
-2,2	-3,048
-2	-1
-1,8	0,568
-1,6	1,704
-1,4	2,456
-1,2	2,872
-1	3
-0,8	2,888
-0,6	2,584
-0,4	2,136
-0,2	1,592
0	1
0,2	0,408
0,4	-0,136
0,6	-0,584
0,8	-0,888
1	-1
1,2	-0,872
1,4	-0,456
1,6	0,296
1,8	1,432
2	3
2,2	5,048
2,4	7,624



$$f(x)=x^3-3x+1 \quad \text{sur } [a,b] = [0,1 ; 0,4]$$

Nombre de décimales exactes : $d = 5$

Nombre d'étapes : n = 15

[illegible]

Méthode de la bisection

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

sur $[a,b] =$

 $[0,1]$

;

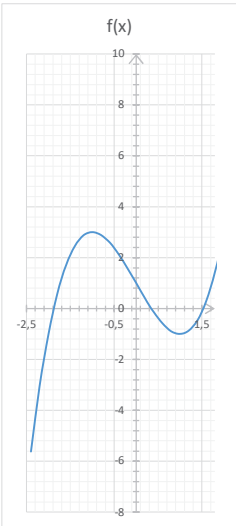
0,4

Nombre d'étapes :

d = 5

n = =ARRONDI.SUP(LOG(10^S5*(R3-P3);2);0)

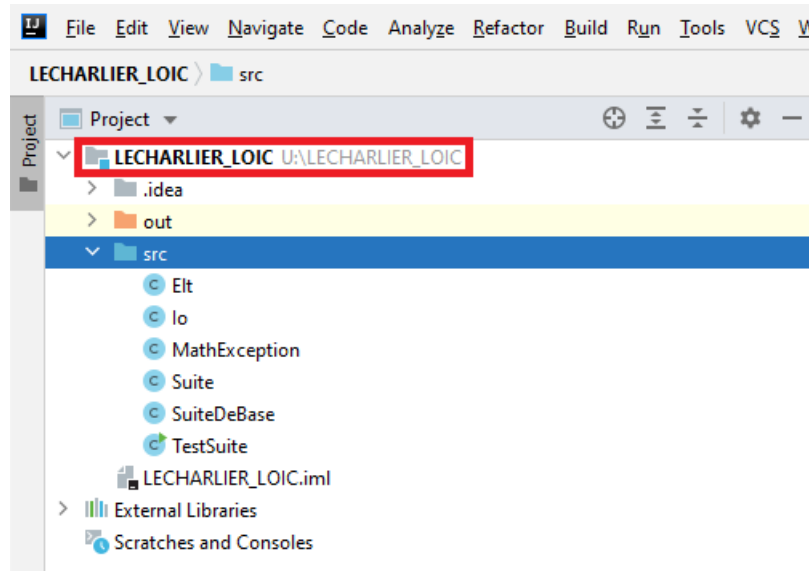
x	f(x)
-2,4	=B6^3-3*B6+1
=B6+0,2	=B7^3-3*B7+1
=B7+0,2	=B8^3-3*B8+1
=B8+0,2	=B9^3-3*B9+1
=B9+0,2	=B10^3-3*B10+1
=B10+0,2	=B11^3-3*B11+1
=B11+0,2	=B12^3-3*B12+1
=B12+0,2	=B13^3-3*B13+1
=B13+0,2	=B14^3-3*B14+1
=B14+0,2	=B15^3-3*B15+1
=B15+0,2	=B16^3-3*B16+1
=B16+0,2	=B17^3-3*B17+1
=B17+0,2	=B18^3-3*B18+1
=B18+0,2	=B19^3-3*B19+1
=B19+0,2	=B20^3-3*B20+1
=B20+0,2	=B21^3-3*B21+1
=B21+0,2	=B22^3-3*B22+1
=B22+0,2	=B23^3-3*B23+1
=B23+0,2	=B24^3-3*B24+1
=B24+0,2	=B25^3-3*B25+1
=B25+0,2	=B26^3-3*B26+1
=B26+0,2	=B27^3-3*B27+1
=B27+0,2	=B28^3-3*B28+1
=B28+0,2	=B29^3-3*B29+1
=B29+0,2	=B30^3-3*B30+1

[illegible]

Question 5 (10 pts)

On vous demande de compléter une méthode de la classe `Suite`, « héritant » de la classe `SuiteDeBase`. Pour ce faire

- 1) Ouvrez IntelliJ
- 2) Créez, **sur le U :**, un projet `NOM_PRENOM` (**avec vos nom et prénom !**)
- 3) Les classes données se trouvent dans le répertoire « Classes Java ». Faites un copier-coller de celles-ci dans le répertoire « `src` » de votre projet IntelliJ. Voici ce que vous devriez obtenir :



On vous demande de programmer la méthode ci-dessous en utilisant la technique **réursive**.

Vous pouvez utiliser toutes les méthodes qui apparaissent dans le document joint "Memento_Suite_Java.pdf".

Si vous utilisez d'autres méthodes, vous devez donner leur code.

Vous pouvez tester vos solutions grâce à la classe `TestSuite`.

Attention ! Il est interdit d'introduire d'autres méthodes, exceptée les méthodes privées ayant les mêmes paramètres que les méthodes publiques, dans le cas d'une version réursive où il y a des exceptions à gérer.

Méthode : `auMoins2EnSuivant(Elt e)`

```
/**
 * Renvoie true si la suite courante contient au moins 2 occurrences
 * de l'Elt e qui se suivent
 * false sinon
 * Exemples :
 * -----
 * this = (1,2,2) alors auMoins2EnSuivant(null) --> IllegalArgumentException
 * this = (3,6,6,3,10) alors auMoins2EnSuivant(3) --> false
 * this = (3,9,6,3,3,12,3) alors auMoins2EnSuivant(3) --> true
 * this = () alors auMoins2EnSuivant(4) --> false
 * this = (3,8,2,6,3,3) alors auMoins2EnSuivant(3) --> true
 * this = (8,3,6,3,4,3) alors auMoins2EnSuivant(3) --> false
 * this = (8,3,3,3,4,5) alors auMoins2EnSuivant(3) --> true
 * this = (3) alors auMoins2EnSuivant(3) --> false
 * @param Elt e
 * @return true si la suite courante contient au moins 2 occurrences de e qui
 * se suivent
 * false sinon
 * @throw IllegalArgumentException en cas de paramètre invalide
 */
```

```

74
75  /* Renvoie true si la suite courante contient au moins 2 occurrences de l'Elt e
qui se suivent
76      *         false sinon
77      * Exemples :
78      * -----
79      * this = (1,2,2)         alors auMoins2EnSuivant(null) -->
IllegalArgumentException
80      * this = (3,6,6,3,10)    alors auMoins2EnSuivant(3)      --> false
81      * this = (3,9,6,3,3,12,3) alors auMoins2EnSuivant(3)      --> true
82      * this = ()             alors auMoins2EnSuivant(4)      --> false
83      * this = (3,8,2,6,3,3)   alors auMoins2EnSuivant(3)      --> true
84      * this = (8,3,6,3,4,3)   alors auMoins2EnSuivant(3)      --> false
85      * this = (8,3,3,3,4,5)   alors auMoins2EnSuivant(3)      --> true
86      * this = (3)             alors auMoins2EnSuivant(3)      --> false
87      * @param Elt e
88      * @return true si la suite courante contient au moins 2 occurrences de e qui se
suivent
89      *         false sinon
90      * @throw IllegalArgumentException en cas de paramètre invalide
91      */
92
93  public boolean auMoins2EnSuivant(Elt e) {
94      if (e==null)
95          throw new IllegalArgumentException("e est null") ;
96      return auMoins2EnSuivantBis(e) ;
97  }
98
99  private boolean auMoins2EnSuivantBis(Elt e) {
100     if (this.estVide())
101         return false ;
102     if (this.corps().estVide())
103         return false ;
104     if (this.tete().equals(e)&&this.corps().tete().equals(e))
105         return true ;
106     return this.corps().auMoins2EnSuivantBis(e) ;
107  }
108
109  public boolean auMoins2EnSuivantIt(Elt e) {
110     if (e == null)
111         throw new IllegalArgumentException("e est null") ;
112     Iterator<Elt> it = this.iterator() ;
113     Elt prec = null ;
114     while (it.hasNext()) {
115         Elt suiv = it.next() ;
116         if (suiv.equals(prec)&&suiv.equals(e))
117             return true ;
118         prec = suiv ;
119     }
120     return false ;
121  }
122
123  public boolean auMoins2EnSuivantIt2(Elt e) {
124     if (e == null)
125         throw new IllegalArgumentException("e est null");
126     Elt prec = null ;
127     for (Elt suiv:this) {
128         if (suiv.equals(prec)&&suiv.equals(e))
129             return true ;
130         prec = suiv ;
131     }
132     return false ;
133  }
134
135  }
136
137

```