



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg  
*Hamburg University of Applied Sciences*

# Überschallgeschwindigkeit im freien Fall - Ermittlung der nötigen Absprunghöhe mittels Simulation

Andreas Krohn

Hausarbeit im Rahmen der Vorlesung  
Modellierung technischer Systeme  
WS2012/13 - 11.01.2012

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2 Modellierung</b>	<b>4</b>
2.1 Gravitation . . . . .	5
2.2 Luftwiderstand . . . . .	6
2.3 Gesamtmodell . . . . .	7
<b>3 Simulation</b>	<b>7</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>9</b>
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>10</b>
<b>Literatur</b>	<b>12</b>

## 1 Einführung

Die Raumfahrt ist der Versuch der Beherrschung komplexer Technologie. Dennoch geschehen Unfälle, die gerade in der Start- und Landephase für Gerät und Astronauten katastrophal enden. Die letzten Unglücke mit umgekommenen Personen waren die Space Shuttles Columbia im Jahre 2003 und Challenger im Jahre 1986. Im Falle der Challenger gibt es Stimmen, die behaupten, dass die Crew mit einem Rettungssystem hätte überleben können. Ein Rettungsszenario wäre Ausstieg, freier Fall bis in dichtere Atmosphärenschichten und Landung mittels Fallschirm. Gesteigertes Interesse an der Sicherheit gibt es angesichts der zunehmenden privaten Raumfahrt und der Vision Privatpersonen als Touristen in den Orbit zu transportieren.

(a) Joseph Kittinger<sup>1</sup>(b) Felix Baumgartner<sup>2</sup>

Abbildung 1: Absprung

Der Fallschirmsprung aus der Stratosphäre wurde unter anderem im Rahmen des Projekts *Excelsior* [1] bereits in den Jahren 1959 und 1960 getestet. Hierbei lag der Fokus allerdings mehr auf Rettungsstrategien für die Besatzungen hoch fliegender Jets. Grundlegend wurde hierbei bereits die Machbarkeit von Fallschirmsprüngen aus einer Höhe von  $30\text{ km}$  bewiesen. Der damalige Springer Joseph Kittinger führte drei Sprünge durch. Es gibt umstrittene Behauptungen, dass er beim letzten Sprung aus  $31.333\text{ m}$  Höhe die Schallmauer durchbrochen hat. Seit 2009 ist Kittinger am Red Bull Projekt beteiligt und half beratend beim Brechen seiner eigenen Rekorde mit.

Der Getränkehersteller Red Bull hat in den letzten Jahren ein Projekt finanziert, dass in den medienwirksamen Sprung des Österreichers Felix Baumgartners am 14.10.2012 mündete [2]. Er stieg in einer Kapsel mittels Heliumballon in eine Höhe von  $39.045\text{ m}$  auf (geplant waren

<sup>1</sup>Bildquelle: <http://stratocat.com.ar/fichas-e/1960/HMN-19600816.htm>

<sup>2</sup>Bildquelle: <http://www.redbullstratos.com/gallery/>

mindestens 35.576m) und sprang. Der Sprung stellte neue Rekorde auf, zum Beispiel das diesmal anerkannte Durchbrechen der Schallmauer ohne Flugzeug im freien Fall [3]. Weiterhin wurde erneut der Beweis erbracht, dass der Sprung aus derartigen Höhen möglich und dieser Weg als Rettungsstrategie denkbar ist und medizinische Daten gesammelt.

Um die Frage zu klären, welche Absprunghöhe nötig ist, um die Schallmauer zu durchbrechen, soll das Experiment simuliert werden. Dabei soll untersucht werden, wie der Sprung aus unterschiedlichen Höhen verlaufen wäre und welche Faktoren dabei eine Rolle spielen. Weiterhin wird gezeigt, welche Geschwindigkeit bei einem ungebremsten Fall auf Höhe der Erdoberfläche erreicht wird.

In Kapitel 2 wird auf die Modellierung des Sprungs eingegangen, wirkende Kräfte und gewählte Parameter beschrieben. Das Kapitel 3 beschreibt den Aufbau der Simulation, Kapitel 4 wertet die Ergebnisse aus.

## 2 Modellierung

Das Experiment besteht grob aus drei Phasen:

- Aufstieg im Ballon
- Absprung und freier Fall
- Gebremster Fall am Fallschirm und Landung

Der Aufstieg wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet. Interessanter ist der Fall - vor allem der ungebremste Abschnitt von Absprung bis zum Öffnen des Fallschirms. Um dies zu simulieren, müssen relevante Kräfte und Größen berücksichtigt werden.

Seitenwinde und mögliche Rotation werden nicht modelliert. Als Masse für Springer und Ausrüstung werden 140kg angenommen. Auf den Springer und seine Ausrüstung wirken lediglich zwei Kräfte:

$F_g$  Zur Erde hin wirkt die Gravitation.

$F_w$  Bremsend wirkt der Luftwiderstand.

Die ausschlaggebenden Größen werden im Folgenden beschrieben.

## 2.1 Gravitation

Die Gravitation wirkt zwischen dem Springer und der Erde. Allgemein wird hier das newtonsches Gravitationsgesetz angewendet.

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

Dabei ist  $G$  die Gravitationskonstante  $66.7384 \times 10^{-12} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ ,  $m_1$  und  $m_2$  die beteiligten Massen und  $r$  deren Abstand. Bis auf  $r$  (der Springer bewegt sich ja auf die Erde zu) sind hier alle Größen konstant.  $r$  ist dabei gleich dem Radius der Erde  $r_E$  plus der Höhe des Springers  $h$  vgl. Abb. 2.

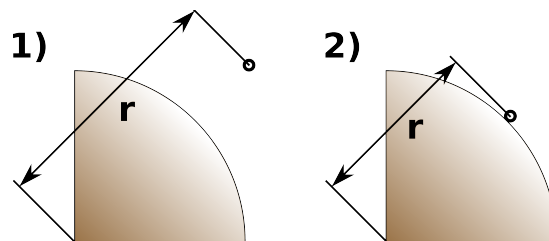


Abbildung 2:  $r$  bei 1) Absprung und 2) Landung

Als Erdradius wird der Äquatorradius  $r_E = 6378137 \text{ m}$  angenommen, als Masse des Springers  $m_S = 140 \text{ kg}$ , als Masse der Erde  $m_E = 5.9736 \times 10^{24} \text{ kg}$ . Die Kraft, die auf den Springer auf Erdniveau herrscht beträgt

$$\begin{aligned} F_{g_0} &= 66.7384 \cdot 10^{-12} \frac{140 \cdot 5.9736 \cdot 10^{24}}{6378137^2} \\ &= 1372 \text{ N} \end{aligned} \quad (2)$$

Die Challenger zerbrach in  $15 \text{ km}$  Höhe, der Sprung Baumgartners erfolgte aus knapp  $40 \text{ km}$ . Um den Effekt der Höhenänderung deutlich zu zeigen wird als zweiter Wert die Gravitationskraft in  $40 \text{ km}$  Höhe berechnet.

$$\begin{aligned} F_{g_1} &= 66.7384 \cdot 10^{-12} \frac{140 \cdot 5.9736 \cdot 10^{24}}{(6378137 + 40000)^2} \\ &= 1354.9 \text{ N} \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gravitationskraft nimmt in Absprunghöhe gegenüber der auf Erdniveau herrschenden um knapp 2% ab. Die Veränderung ist nicht groß, wird aber in der Simulation berücksichtigt.

## 2.2 Luftwiderstand

Der Fall des Springers wird durch den von der Atmosphäre verursachten Luftwiderstand gebremst. Zur Berechnung dieser Kraft wird die Formel für den Strömungswiderstand verwendet.

$$F_w = \frac{1}{2} \rho v^2 c_w A \quad (4)$$

In die Berechnung der Kraft gehen die aktuelle Geschwindigkeit  $v$ , der Strömungswiderstandskoeffizient  $c_w$ , die angeströmte Fläche  $A$  und die Dichte des umgebenden Mediums  $\rho$  ein. Die Geschwindigkeit ist das Integral der Beschleunigung, ergibt sich also zu jedem Zeitpunkt aus der Simulation. Die Wahl von  $\rho$ ,  $c_w$  und  $A$  werden im Folgenden beschrieben.

**Atmosphärenmodell** Mit steigender Höhe nimmt der Luftdruck ab, da die darüberliegende Gassäule kürzer und somit leichter wird. Auch die Temperatur ist höhenabhängig. Zunächst ist die Temperatur der Erdoberfläche der ausschlaggebende Faktor. Mit zunehmender Höhe nimmt dieser Einfluss ab und die Temperatur sinkt. Ab einer bestimmten Höhe nimmt die Temperatur wieder zu, da ein immer geringerer Anteil der Einstrahlung von darüberliegenden Atmosphärenschichten blockiert wird. Die Höhe, ab der die Temperatur wieder steigt ist von vielen Faktoren wie zum Beispiel der Tages- und Jahreszeit abhängig. Nach einiger Beschäftigung mit Meteorologie, der Schichtung der Atmosphäre, Höhenformeln, virtueller Temperatur usw. [4, 5], wurde für die Simulation auf die eigene Umsetzung eines Atmosphärenmodells verzichtet.

Für die Simulation von Dichte und Temperatur wird das empirische NRLMSISE-00-Modell [6] verwendet, das in Matlab und Simulink als Funktion und Block zur Verfügung steht [7]. Es liefert abhängig von den Parametern Datum, Uhrzeit und geographische Position in einem Höhenbereich von 0 bis 100 km Werte für Dichte und Temperatur. Für die Simulation wird lediglich die Höhe variiert und die anderen Parameter mit Ort und Zeit des Baumgartner-Experiments konstant vorbelegt. Dichte und Temperatur stehen also jeweils als Funktion der Höhe zur Verfügung.

**Strömungswiderstandskoeffizient und -fläche** Der  $c_w$ -Wert eines Menschen liegt laut Zatsiorsky [8, 88] lageabhängig in einer Spanne von 0.35 bis 1.36. Die höheren Werte gelten dabei für Lagen quer zum Luftstrom, das niedere Ende des Spektrums für Lagen längs zum Luftstrom. Auch die angeströmte Fläche  $A$  ist von der Richtung des Luftstroms abhängig. Da Felix Baumgartner kurz nach dem Absprung in Rotation geriet und somit nicht kontinuierlich kopfüber längs zum Luftstrom fiel, werden für die Simulation die Werte  $c_w = 1.3$  und  $A = 0.8$  geschätzt, was in etwa dem in [9] auf Seite 59 genannten Wert  $c_w \cdot A = 1.07$  entspricht.

### 2.3 Gesamtmodell

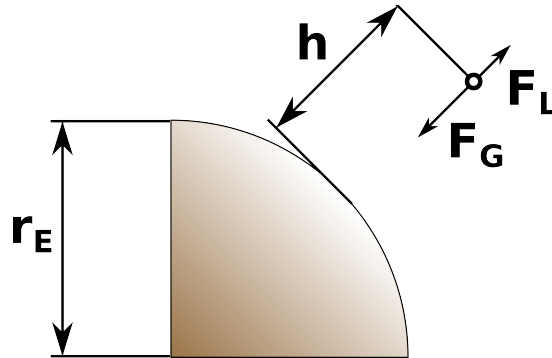


Abbildung 3: Wirkende Kräfte

Die resultierende Kraft  $F_S$  (in Richtung Höhe) auf den Springer ist die Luftreibung minus der Gravitationskraft.  $F_S$  lässt sich zerlegen in das Produkt von Beschleunigung des Springers  $a_S$  und Masse des Springers  $m_S$ . Diese Formel nach  $a_S$  umgestellt ist die für die Simulation benötigte Gesamtgleichung.

$$F_S = F_w - F_g \quad (5)$$

$$a_S m_S = F_w - F_g$$

$$a_S = \frac{F_w - F_g}{m_S} \quad (6)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 c_w A - G \frac{m_S m_E}{(r_E + h)^2}}{m_S}$$

Nach dem Absprung erfährt der Springer also voraussichtlich zunächst eine negative Beschleunigung ( $F_g \gg F_w$ ) bis die Geschwindigkeit weit genug gestiegen ist und er in dichtere Atmosphärenschichten gefallen ist und dort zunehmend abgebremst wird ( $F_g < F_w$ ).

## 3 Simulation

Die Simulation wurde mit Hilfe von Matlab und Simulink durchgeführt. Sie verfügt über die bereits besprochenen Attribute  $c_w$ -Wert, Anströmfläche  $A$  und die Masse  $m_S$ . Weiterhin kann eine Absprunggeschwindigkeit  $v_0$  und Abprunghöhe  $h_0$  angegeben werden.

Die Funktion für  $a_S$  (Formel 6) wurde als Matlabfunktion (Listing 1) umgesetzt. Eine weitere Matlabfunktion (Listing 2) berechnet die Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der aktuellen Temperatur in Kelvin.

```

1 function a = beschleunigung(mS, h, p, v, cw, A)
2
3 % Erdmasse
4 mE=5.9736*10^24;
5 % Erdradius
6 rE=6378137;
7 % Gravitationskonstante
8 G=66.7384*10^-12;
9
10 a=(p/2*v^2*cw*A-G*(mS*mE)/(rE+h)^2)/mS;

```

Listing 1: Matlabfunktion Beschleunigung

```

1 function c = schallgeschwindigkeit(t)
2
3 c = 331.3*sqrt(1 + (t-273.15)/273.15);

```

Listing 2: Matlabfunktion Schallgeschwindigkeit

Bei Erreichen der Höhe 0m wird die Simulation gestoppt.

Die Werte für Höhe, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Schallgeschwindigkeit werden zur Analyse und Ausgabe in die aktuelle Workspace abgelegt.

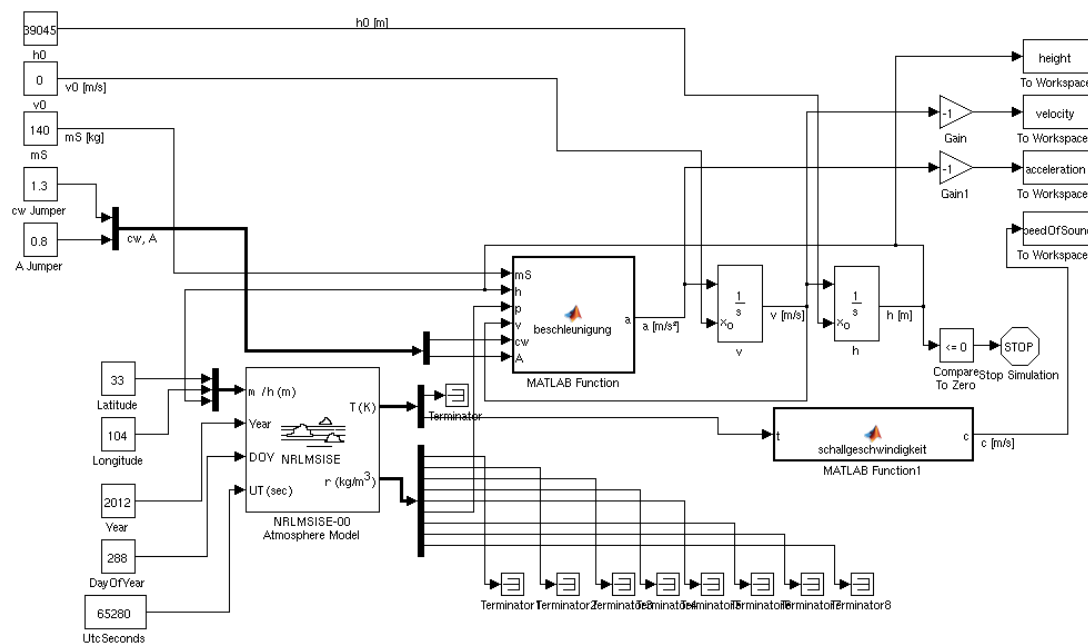


Abbildung 4: Aufbau der Simulation

Die Simulation wurde für verschiedene Absprunghöhen durchgeführt.



- Zur Kalibrierung wurde zunächst der Sprung mit  $h_0 = 39045$  durchgeführt (siehe Abb. 5).
- Zur Ermittlung der benötigten Mindesthöhe zum Durchbrechen der Schallmauer wurde die Simulation mittels Skript in Schritten á  $2000m$  für  $24000m$  bis  $40000m$  Höhe durchgeführt.

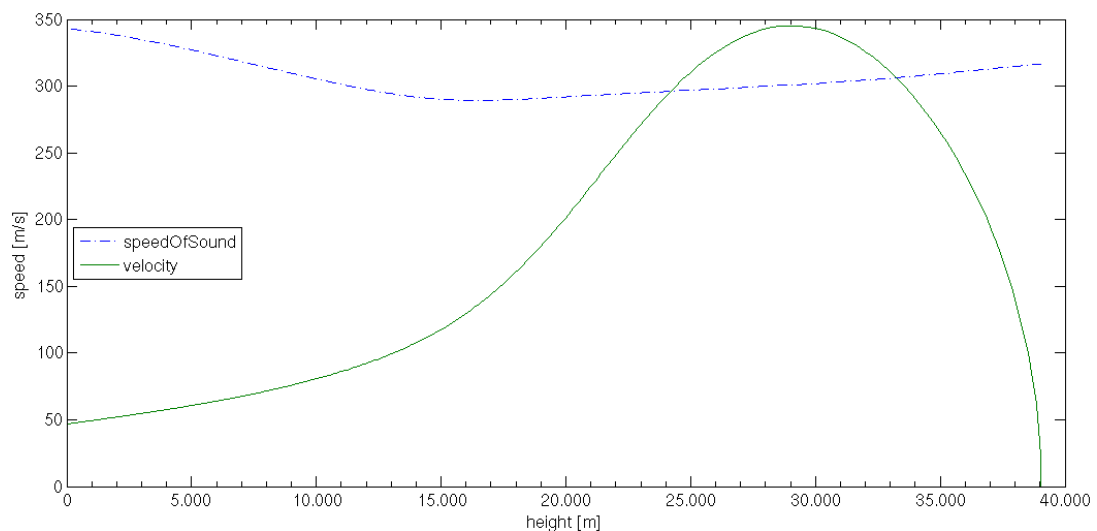


Abbildung 5: Geschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit, Sprung aus 39045m Höhe

Resultierende Geschwindigkeiten und die in der Höhe geltende Schallgeschwindigkeit wurden gegen die Höhe in einem Graph geplottet.

## 4 Auswertung

Die Auswertung erfolgte anhand der ausgegebenen Graphen. Wie in Abbildung 6 und 7 zu sehen steigt die Fallgeschwindigkeit zunächst stark an. Dabei ist das zu erreichende Maximum von der Absprunghöhe abhängig. Liegt diese über einer Höhe von knapp  $35000m$ , überschreitet die Maximalgeschwindigkeit die lokale Schallgeschwindigkeit.

Unter der Annahme, dass für Joseph Kittinger im Jahre 1960 ähnliche Parameter galten, hat er bei seinem Sprung aus  $31333m$  die Schallmauer nicht durchbrochen. War dagegen der  $c_w$ -Wert günstiger, die angeströmte Fläche  $A$  geringer oder die Absprungmasse  $m_S$  größer könnte er es dennoch geschafft haben.

Die **notige Absprunghöhe zum Durchbrechen der Schallmauer** liegt mit den gewählten Parametern bei  $35240m$ .

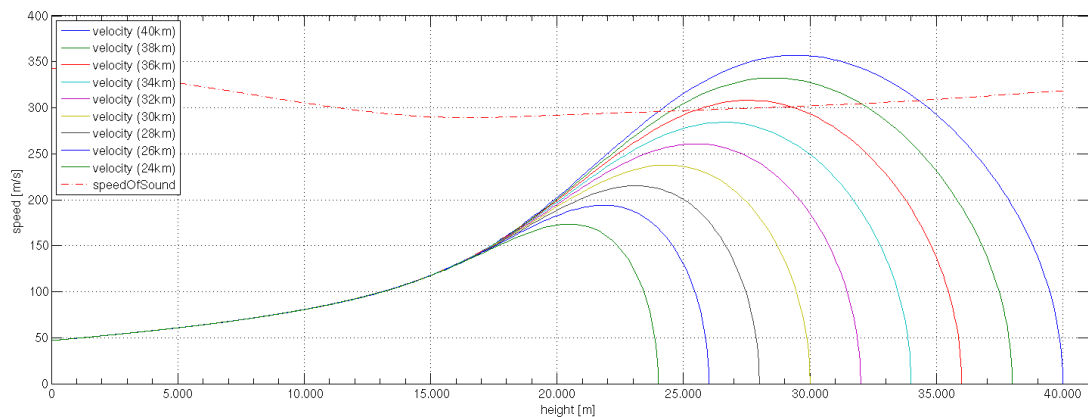


Abbildung 6: Geschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit, Sprünge 24-40km Höhe

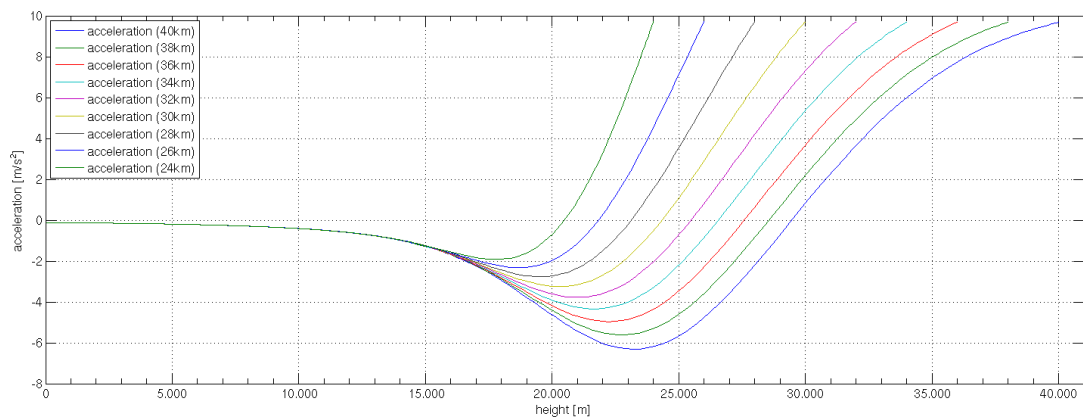


Abbildung 7: Beschleunigung, Sprünge 24-40km Höhe

Weiterhin ist zu beobachten, dass sich die Geschwindigkeit unabhängig von der Absprunghöhe ab einer Höhe von ca.  $15\text{ km}$  bei allen Sprüngen gleich entwickelt. Das **Auftreffen auf der Erdoberfläche** erfolgt bei allen simulierten Sprüngen mit einer Geschwindigkeit von knapp  $47\text{ m/s}$  oder knapp  $170\text{ km/h}$ .

## 5 Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, dass das Durchbrechen der Schallmauer im freien Fall unter den angenommenen Voraussetzungen erst ab einer Absprunghöhe von  $35240\text{ m}$  möglich ist. Dieser Wert ist mit einer gewissen Unsicherheit zu verstehen, da weder von Red Bull noch von anderer Seite eindeutige sichere Angaben für den  $c_w$ -Wert und die Anströmfläche  $A$  zu finden

waren. Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass die getroffenen Aussagen für das gewählte Atmosphärenmodell für einen Ort und einen Zeitpunkt gelten. Die Durchführung eines derartigen Sprungs bei veränderter Wetterlage oder an anderer Stelle auf dem Globus kann zu anderen Ergebnissen führen.

Die Simulation hat gezeigt, dass sich unterschiedliche Absprunghöhen nur bis zu einer Höhe von ca. 15000m auswirken. Ab dieser Höhe unterscheiden sich der Verlauf von Beschleunigung und Geschwindigkeit nur noch minimal. Der Aufprall bei Versagen der Fallschirme würde bei knapp 170km/h erfolgen. Die Bremswirkung der Atmosphäre reicht erwartungsgemäß nicht um eine sanfte Landung ohne Fallschirm zu ermöglichen.

## Literatur

- [1] US Air Force. (2013) Project Excelsior. [Online]. Available: <http://www.af.mil/information/heritage/spotlight.asp?id=123109977>
- [2] Red Bull Air Race GmbH. (2013) Red Bull Stratos. [Online]. Available: <http://www.redbullstratos.com>
- [3] Fédération Aéronautique Internationale, FAI. (2012) Felix Baumgartner's preliminary World Records claim received. [Online]. Available: <http://www.fai.org/news-of-records/36405-felix-baumgartners-preliminary-world-records-claim-received>
- [4] B. Klose, *Eine interdisziplinäre Einführung in die Physik der Atmosphäre*, ser. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [5] Prof. Dr. W. Roedel and Prof. Dr. T. Wagner, *Physik unserer Umwelt: Die Atmosphäre*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [6] Goddard Space Flight Center. (2013) NRLMSISE-00 Model 2001. [Online]. Available: <http://ccmc.gsfc.nasa.gov/modelweb/atmos/nrlmsise00.html>
- [7] The MathWorks, Inc. (2013) Implement mathematical representation of 2001 United States Naval Research Laboratory Mass Spectrometer and Incoherent Scatter Radar Exosphere. [Online]. Available: <http://www.mathworks.de/de/help/aeroblks/nrlmsise00atmospheremodel.html>
- [8] V. M. Zatsiorsky, *Kinetics of Human Motion*. Human Kinetics Pub Inc, Apr. 2002.
- [9] T. R. Bulletin. (2012, Jul.) The Red Bulletin Stratos Special DE. [Online]. Available: [http://issuu.com/redbulletin.com/docs/the\\_red\\_bulletin\\_stratos\\_special\\_de](http://issuu.com/redbulletin.com/docs/the_red_bulletin_stratos_special_de)