Institut Supérieur d’Informatique et de Multimédia de Sfax

Auditoire: 2ème année LSI-ADBD

Chapitre 3:

Analyse en Composantes Principales (ACP)

Souhir BOUAZIZ AFFES
souhir.bouaziz@isims.usf.tn

Amal ABBES
amal.abbes@isims.usf.tn

A.U. 2023/2024

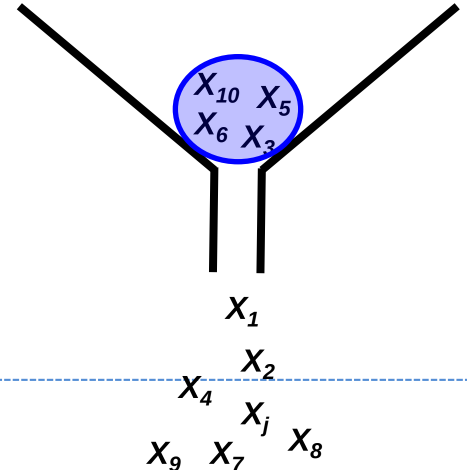
Plan

- Principe de l'ACP
  - Motivation, Applications, Situation, Objectifs, Notion de projection
- ACP et la covariance
- ACP et la corrélation
- Procédure de l'ACP à partir d'un exemple
- Procédure de l'ACP
- Combien de composantes principales?
- Typologies des individus et des variables
- Exercices

Principe de l'ACP : Motivation

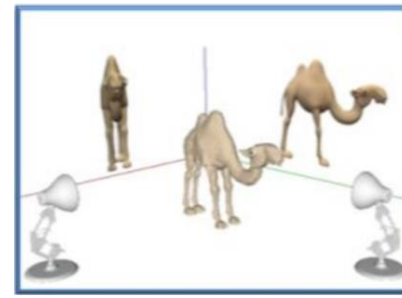
- Le but de l'ACP est de **réduire la dimensionnalité** d'un ensemble de données (échantillon) en trouvant un **nouvel ensemble de variables**, ***plus petit*** que l'ensemble de variables initiales, qui conserve néanmoins la plupart des informations de l'échantillon :
  - Simplification de la réalité
  - Concentration d'une information de départ diluée
  - Description du maximum de **variabilité** dans un espace réduit

	X_1	X_2	X_3	...
ind 1	33	12	55	...
ind 2	25	11	50	...
ind 3	29	11	43	...
...	...	...	...	...



Principe de l'ACP : Motivation

- Dessinez c'est gagné?
  - Simplifier un objet 3D (réalitée) par une représentation en 2D (plan)



Comment choisir le bon espace de projection ?

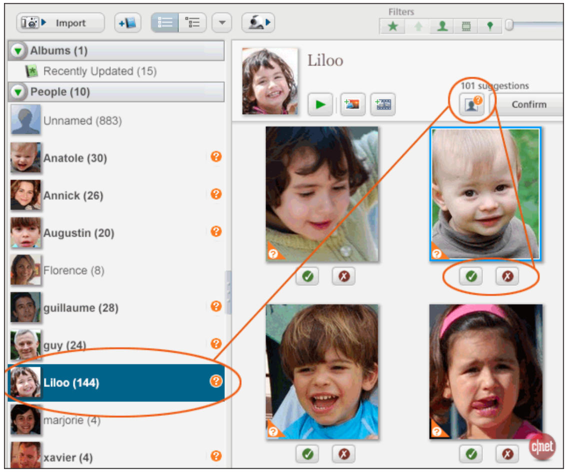
Principe de l'ACP : Intérêt

- Les données du monde réel sont constituées de nombreuses caractéristiques (variables), qui peuvent être redondantes. Lorsque nous travaillons avec ces caractéristiques, nous pouvons rencontrer plusieurs problèmes :
  - Sur-ajustement (ou *sur-apprentissage*) du modèle
  - Consommation du temps
- Pour résoudre ces problèmes, nous pouvons appliquer la réduction de la dimensionnalité aux données. Il existe deux types de réduction de la dimensionnalité :
  - Élimination de caractéristiques
  - Extraction de caractéristiques – ***ACP***

L'ACP est souvent utilisée pour réduire la dimension des données et faciliter leur exploration et leur visualisation.

Principe de l'ACP : Applications

- **Analyses explicatives ou prédictives:**
  - Réduction du nombres de variables explicatives ($X_{(j)}$) avant modélisation
  - Obtention de nouvelles variables explicatives ($CP_{(j)}$) non corrélées
- **Imagerie :**
  - Compression d'image
  - Reconnaissance faciale



Principe de l'ACP : Situation

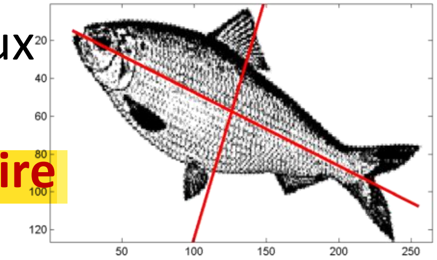
- p variables quantitatives ont été mesurées sur n individus :

	X_1	X_2	...	X_j	...	X_p
ind 1	x_{11}	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1p}
ind 2	x_{12}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2p}
...	...	...	...	...	...	...
ind i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{ip}
...	...	...	...	...	...	...
ind n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{np}

- ***Question :*** Peut-on « simplifier », « concentrer » ou « compresser » l'essentiel de l'information contenue dans ce tableau?

- **Exemple :** cas d'une image, les pixels sont représentés dans un plan et considérés comme une variable aléatoire à deux dimensions.

  - L'ACP va déterminer les deux axes qui expliquent le mieux la **dispersion** de l'objet. Elle va aussi les ordonner par **quantité d'information**, le second axe étant **perpendiculaire au premier**.

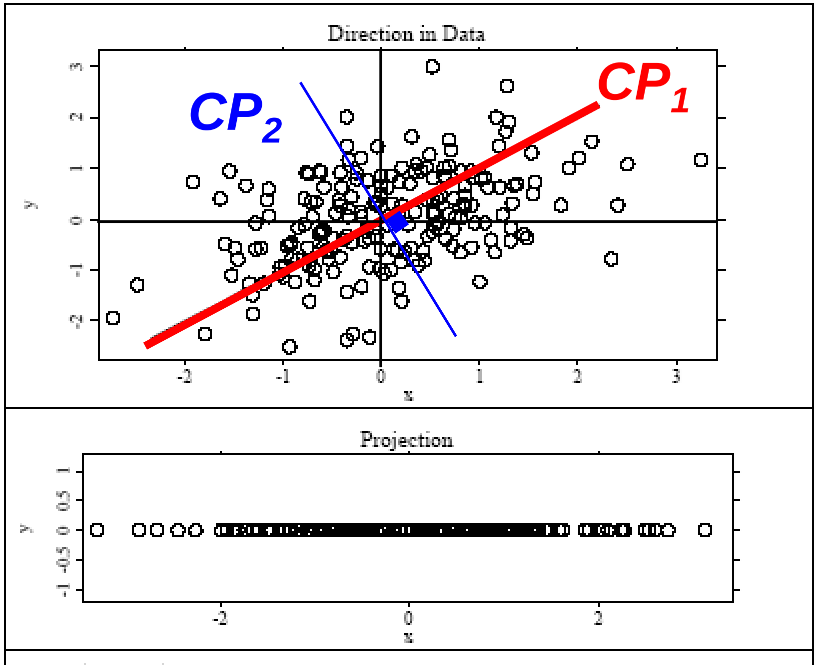


Principe de l'ACP : Objectifs

- Résumer le tableau de façon à identifier les variables ou combinaisons de variables selon lesquelles les n individus se différencient le plus
  - Transformer p variables quantitatives initiales inter-corrélées en p nouvelles variables « **Composantes Principales** » (CP)
  - Ces **Composantes Principales** sont non corrélées, et sont ordonnées par la part de l'information totale que chacun d'eux retient.
- Examiner la position des n individus le long de ces « composantes principales »
  - Typologie des individus
- Etudier les relations des p variables le long de ces « composantes principales »
  - Typologie des variables

Principe de l'ACP : Notion de projection

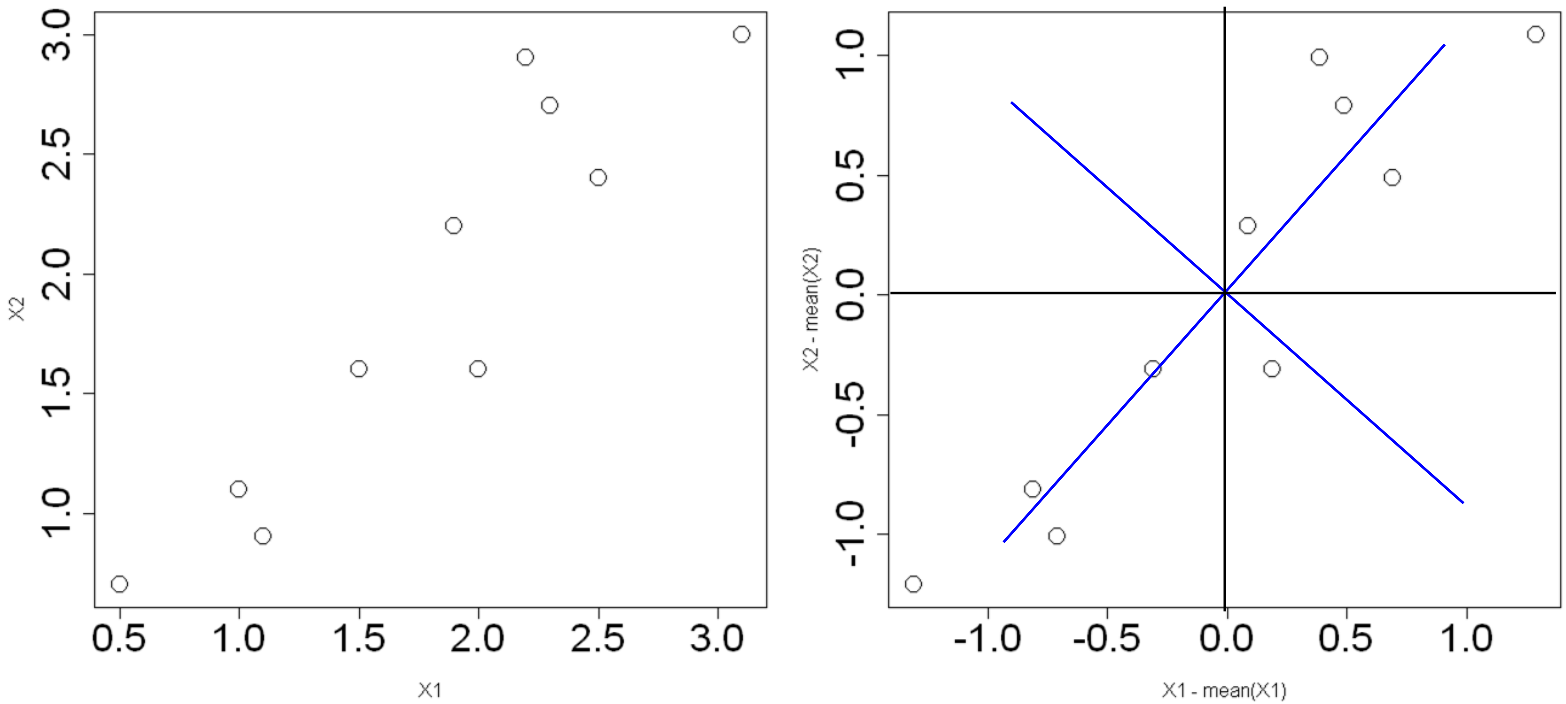
- Cas simple d'un tableau à 2 variables ($p = 2, X_{(1)}$ et $X_{(2)}$) et n individus :
  - On pourrait résumer ce tableau par une « composante principale » CP_1
  - **Projection orthogonale** des individus le long de CP_1



- Orthogonalité de CP_2 par rapport à CP_1

Principe de l'ACP : Notion de projection

- Il est recommandé de toujours **centrer** les valeurs associées à chaque variable $X_{(j)}$ pour éviter le problème de la translation au cours du changement de repère
  - Utilisez la matrice de données $(X - \bar{X})$ au lieu de la matrice X



- Comment allez-vous positionner CP_1 puis CP_2 ?

ACP et la covariance

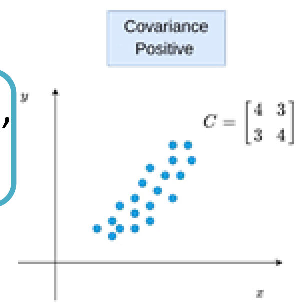
- **ACP : calculs des CPs basées sur la covariance entre variables**
- Qu'est ce que la covariance entre deux variables $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$?
  - Indique si à un écart positif de $X_{(1)}$ pour un individu i par rapport à la moyenne sur $X_{(1)}$ correspond un écart positif ou négatif de $X_{(2)}$ pour ce même individu i par rapport à la moyenne sur $X_{(2)}$

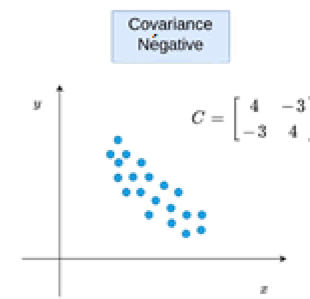
$$Cov\left(X_{(1)},X_{(2)}\right)=\frac{1}{n}<(X-\bar{X})_{(1)},(X-\bar{X})_{(2)}>=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}-\overline{X_{(1)}})(x_{i2}-\overline{X_{(2)}})$$

$$=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i1}\,x_{i2}\right)-\overline{X_{(1)}}\;\overline{X_{(2)}}$$

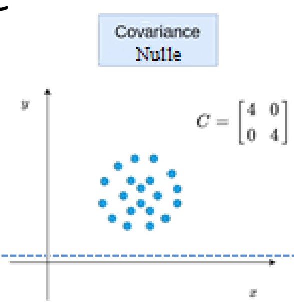
$$Cov\left(X_{(1)},X_{(1)}\right)=Var\left(X_{(i)}\right)$$

Si $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ sont centrées, **alors** $\overline{X_{(1)}}=\overline{X_{(2)}}=0$





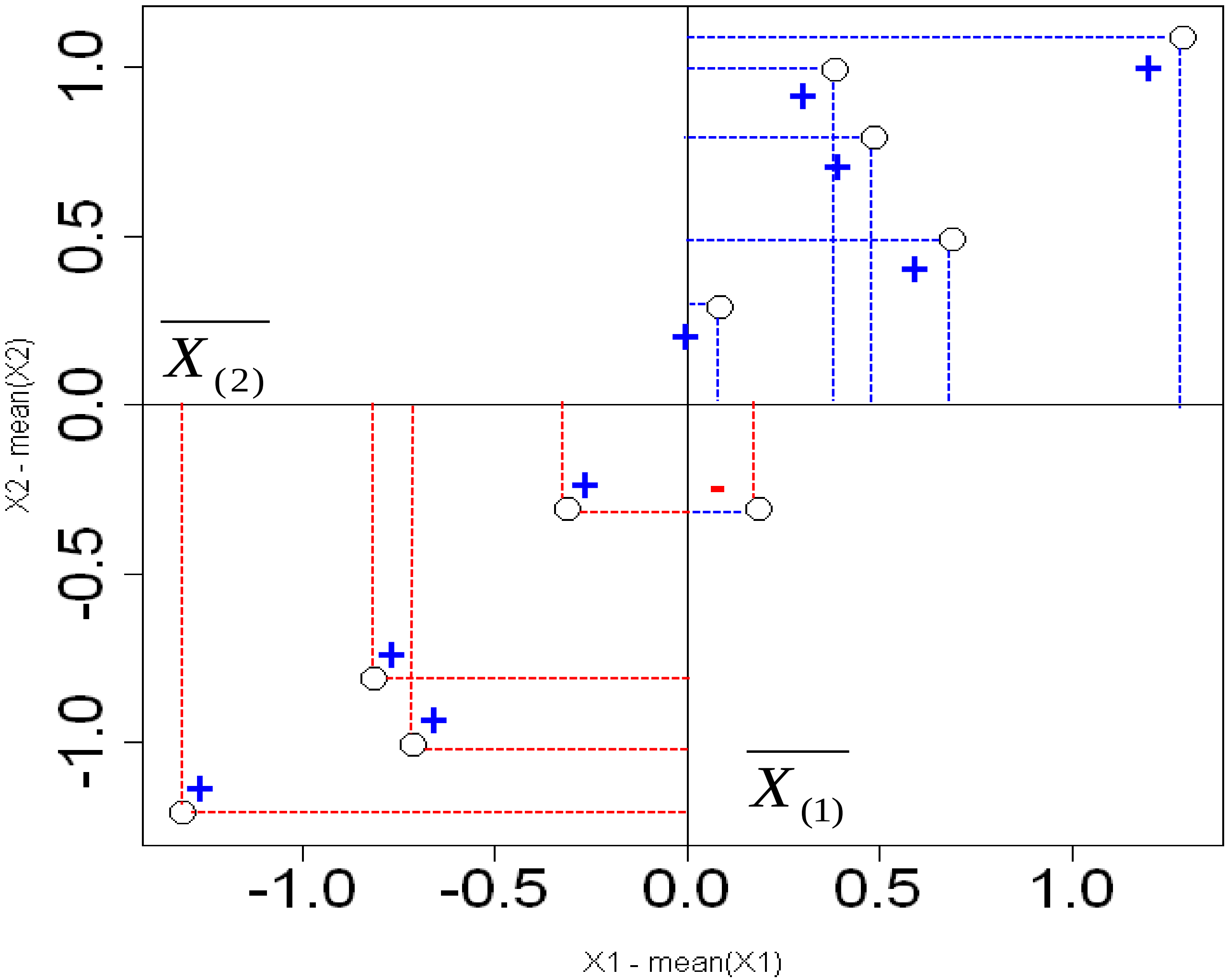
- C'est le signe de la covariance qui importe :
  - $Cov\left(X_{(1)},X_{(2)}\right)>0$: $X_{(1)}$ augmente quand $X_{(2)}$ augmente
  - $Cov\left(X_{(1)},X_{(2)}\right)<0$: $X_{(1)}$ augmente quand $X_{(2)}$ diminue



- La covariance indique **la direction de la relation linéaire** entre les variables.

ACP et la covariance

- Visualisation graphique de la covariance sur variables centrées :



$$Cov\left(X_{(1)}, X_{(2)}\right) = 0{,}5539 > 0$$

ACP et la covariance

- Pour $p > 2$, on calcule la covariance pour toutes les paires de variables possibles : Matrice $C(X)$ de covariances

$$C(X) = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X_{(1)}) & \mathrm{cov}(X_{(1)}, X_{(2)}) & \dots & \mathrm{cov}(X_{(1)}, X_{(j)}) & \dots & \mathrm{cov}(X_{(1)}, X_{(p)}) \\ \mathrm{cov}(X_{(2)}, X_{(1)}) & \mathrm{var}(X_{(2)}) & \dots & \mathrm{cov}(X_{(2)}, X_{(j)}) & \dots & \mathrm{cov}(X_{(2)}, X_{(p)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{cov}(X_{(j)}, X_{(1)}) & \mathrm{cov}(X_{(j)}, X_{(2)}) & \dots & \mathrm{var}(X_{(j)}) & \dots & \mathrm{cov}(X_{(j)}, X_{(p)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{cov}(X_{(p)}, X_{(1)}) & \mathrm{cov}(X_{(p)}, X_{(2)}) & \dots & \mathrm{cov}(X_{(p)}, X_{(j)}) & \dots & \mathrm{var}(X_{(p)}) \end{pmatrix}$$

- **Propriétés :**
  - $C(X)$ est une matrice carré de taille $p \times p$
  - $C(X)$ est une matrice symétrique

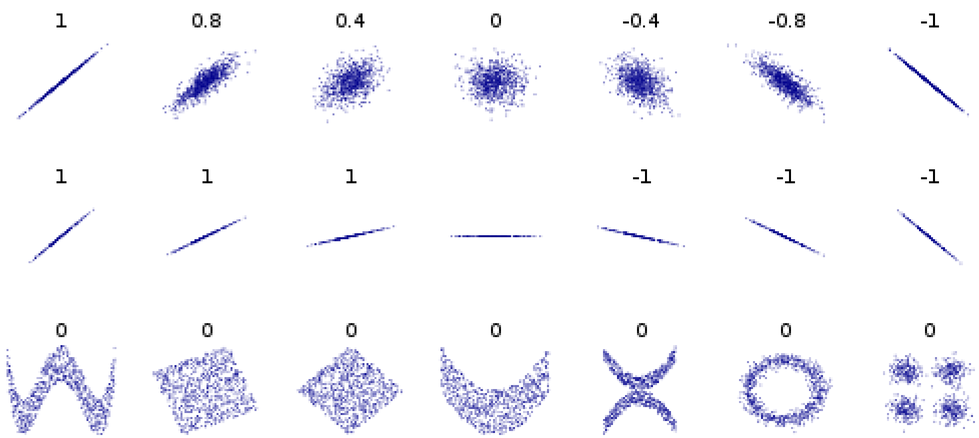
ACP et la corrélation

- **Corrélation = covariance « standardisée » : réduction**
- Comprise entre -1 et 1, la corrélation mesure à la fois l'**intensité** et la **direction** de la **liaison linéaire** entre deux variables $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$

$$r(X_{(1)}, X_{(2)}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_{(1)}, X_{(2)})}{\sigma(X_{(1)})\,\sigma(X_{(2)})}$$

$$r(X_{(1)}, X_{(1)}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_{(1)}, X_{(1)})}{\sigma(X_{(1)})\,\sigma(X_{(1)})}$$

$$= \frac{\mathrm{Var}(X_{(1)})}{\mathrm{Var}(X_{(1)})} = 1$$



ACP et la corrélation

- Si l'ACP (non-normée) est basée sur la matrice de covariances, l'**ACP normée** est basée sur la matrice de corrélations :

$$R(X) = \begin{pmatrix} 1 & r(X_{(1)}, X_{(2)}) & \dots & r(X_{(1)}, X_{(j)}) & \dots & r(X_{(1)}, X_{(p)}) \\ r(X_{(2)}, X_{(1)}) & 1 & \dots & r(X_{(2)}, X_{(j)}) & \dots & r(X_{(2)}, X_{(p)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(X_{(j)}, X_{(1)}) & r(X_{(j)}, X_{(2)}) & \dots & 1 & \dots & r(X_{(j)}, X_{(p)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(X_{(p)}, X_{(1)}) & r(X_{(p)}, X_{(2)}) & \dots & r(X_{(p)}, X_{(j)}) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- **Propriétés :**
  - $R(X)$ est une matrice carré de taille $p \times p$
  - $R(X)$ est une matrice symétrique
  - $R(X)$ possède une diagonale de 1

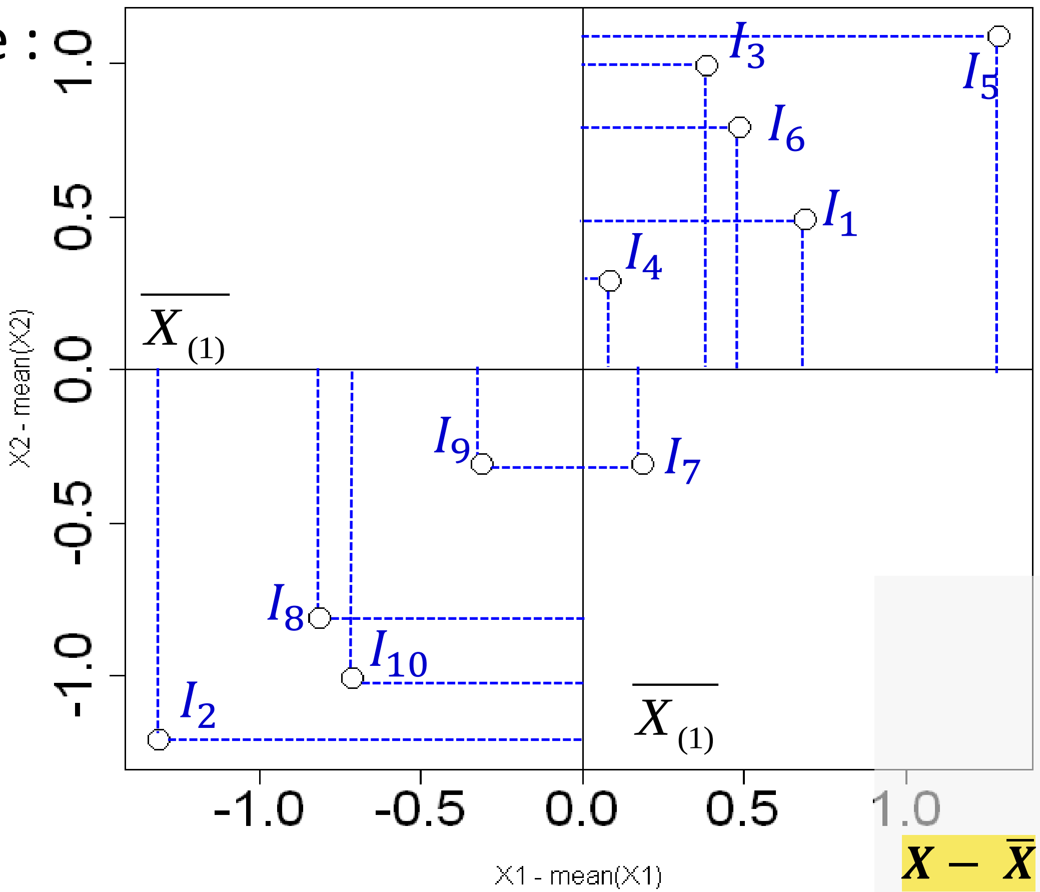
ACP et la corrélation

- S'il est recommandé de toujours « **centrer** » ses donnés en **ACP**, la question de les « **réduire** » (**ACP normée**) dépend de vos données :
  - Si vos données sont toutes dans la même unité de mesure et varient dans des gammes de valeurs identiques : l'ACP non-normée suffit
  - Si vos données sont dans des unités de mesure différentes et varient dans des gammes de valeurs différentes : l'ACP normée est recommandée

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- Soit l'exemple :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} X_{(1)} & X_{(2)} \end{array} \\ X = \begin{array}{c} I_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ I_{10} \end{array} & \begin{bmatrix} 2{,}5 & 2{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}7 \\ 2{,}2 & 2{,}9 \\ 1{,}9 & 2{,}2 \\ 3{,}1 & 3 \\ 2{,}3 & 2{,}7 \\ 2 & 1{,}6 \\ 1 & 1{,}1 \\ 1{,}5 & 1{,}6 \\ 1{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}$$



- $\overline{X_{(1)}} = 1.81$
- $\overline{X_{(2)}} = 1.91$

$$\boldsymbol{X - \overline{X}} = \begin{bmatrix} 0{,}69 & 0{,}49 \\ -1{,}31 & -1{,}21 \\ 0{,}39 & 0{,}99 \\ 0{,}09 & 0{,}29 \\ 1{,}29 & 1{,}09 \\ 0{,}49 & 0{,}79 \\ 0{,}19 & -0{,}31 \\ -0{,}81 & -0{,}81 \\ -0{,}31 & -0{,}31 \\ -0{,}71 & -1{,}01 \end{bmatrix}$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **ACP non-normée → matrice de covariances**

$$C(X) = \frac{1}{n}(X - \overline{X})^t(X - \overline{X})$$

- $Var(X_{(1)}) = 0{,}5549$
- $Var(X_{(2)}) = 0{,}6449$
- $Cov(X_{(1)}, X_{(2)}) = 0.5539$

$$C(X) = \begin{pmatrix} 0.5549 & 0.5539 \\ 0.5539 & 0.6449 \end{pmatrix}$$

- Utilisation de la matrice de covariances pour changer de repère:
  - Calcul du vecteur directeur de CP_1
  - Calcul du vecteur directeur de CP_2

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- Une histoire d'algèbre linéaire et de calculs matriciels :
  - Détermination des p valeurs propres λ_j
  - Détermination des p vecteurs propres V_j
- Soit la matrice de covariances C de taille $p\ x\ p$, elle admet p valeurs propres et p vecteurs propres associés, tels que :

$$\boxed{CV_j = \lambda_j V_j}$$

- Dans notre exemple à deux variables, C admet 2 valeurs propres et 2 vecteurs propres tels que soit vérifié les égalités suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0.5549 & 0.5539 \\ 0.5539 & 0.6449 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5549 & 0.5539 \\ 0.5539 & 0.6449 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix}$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **Détermination des 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 :**
  - Calcul du déterminant de $C - \lambda I$
  - Résolution de l'équation $\det(C - \lambda I) = 0$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.5549 & 0.5539 \\ 0.5539 & 0.6449 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.5549 - \lambda & 0.5539 \\ 0.5539 & 0.6449 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(C - \lambda I) = (0.5549 - \lambda)(0.6449 - \lambda) - 0.5539^2$$

$$\lambda^2 - 1.1998\lambda + 0.0510498 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1.23532084$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1.155625 \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0.044175$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

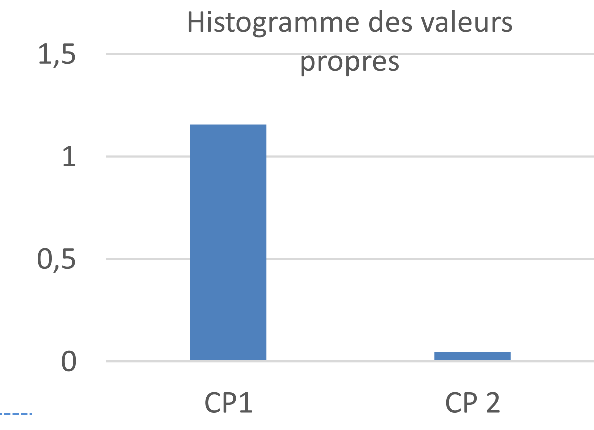
- **Détermination des 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 ...**
  - Chaque **valeur propre** représente la **variance des données** autour d'un nouvel axe ***CP*** ou « ***composante principale*** » qui est une combinaison linéaire des variables de départ

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Var}(X_{(1)}) + \mathrm{Var}(X_{(2)})$$

$$1.155625 + 0.044175 = 0.6449 + 0.5549 = 1.1998$$

	Valeur propre	Pourcentage	Pourcentage cumulé
CP_1	1,155625	96,3181	96,3181
CP_2	0,044175	3,6819	100

  - La première composante principale ou CP_1 associée à λ_1 porte ≈96% de la variance totale
  - La deuxième composante principale ou CP_2 associée à λ_2 porte ≈ 4% de la variance totale



A partir d'une seule dimension (*CP_1*), il est possible ici de résumer ≈ 96% de l'information de départ contenue dans deux dimensions ($X_{(1)}$, $X_{(2)}$)

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **Détermination des 2 vecteurs propres V_1 et V_2 :**
  - **Résolution des 2 systèmes d'équations $CV_j - \lambda_j V_j = 0$**

λ_1

$$\begin{pmatrix} 0.5549 & 0.5539 \\ 0.5539 & 0.6449 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = 1.155625 \times \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.5549 \times v_{1,1} + 0.5539 \times v_{1,2} - 1.155625 \times v_{1,1} = 0 \\ 0.5539 \times v_{1,1} + 0.6449 \times v_{1,2} - 1.155625 \times v_{1,2} = 0 \end{cases}$$

λ_2

$$\begin{pmatrix} 0.5549 & 0.5539 \\ 0.5539 & 0.6449 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = 0.044175 \times \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.5549 \times v_{2,1} + 0.5539 \times v_{2,2} - 0.044175 \times v_{2,1} = 0 \\ 0.5539 \times v_{2,1} + 0.6449 \times v_{2,2} - 0.044175 \times v_{2,2} = 0 \end{cases}$$

  - **Une solution possible : les vecteurs unitaires :**

$$v_{11}^2 + v_{12}^2 = 1 \quad \textbf{Et} \quad v_{21}^2 + v_{22}^2 = 1$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **Détermination des 2 vecteurs propres V_1 et V_2 ...**
  - Prenons cette équation (1ère équation du 1er système)

$$0.5549\times v_{1,1}+0.5539\times v_{1,2}-1.155625\times v_{1,1}=0$$

$$\longrightarrow 0.5539\times v_{1,2}-0.600725\times v_{1,1}=0 \quad \longrightarrow \quad v_{1,1}=0.9220525\times v_{1,2}$$

$$\text{et on a : } v_{1,1}^2+v_{1,2}^2=1 \text{ (car vecteur unitaire)}$$

$$\longrightarrow (0,9220525\ \times v_{1,2})^2+{v_{1,2}}^2=1 \quad \longrightarrow \quad {v_{1,2}}^2=\frac{1}{1,8501808}$$

$\longrightarrow$ Une solution possible est: $v_{1,2}=0,7351787$

Et on a : $v_{1,1}=0.9220525\times v_{1,2}$

$$\longrightarrow \quad v_{1,1}=0,6778734$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **Détermination des 2 vecteurs propres V_1 et V_2 ...**
  - Prenons cette équation (1ère équation du 2ème système)

$$0.5549 \times v_{2,1} + 0.5539 \times v_{2,2} - 0.044175 \times v_{2,1} = 0$$

$$\longrightarrow 0.5539 \times v_{2,2} + 0.510725 \times v_{2,1} = 0 \quad \longrightarrow v_{2,1} = -1.0845367 \times v_{2,2}$$

$$\text{et on a : } v_{2,1}^2 + v_{2,2}^2 = 1 \,(\text{car vecteur unitaire})$$

$$\longrightarrow (-1{,}0845367 \times v_{2,2})^2 + {v_{2,2}}^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad {v_{2,2}}^2 = \frac{1}{2{,}1762199}$$

$\longrightarrow$ Une solution possible est: $v_{2,2} = 0{,}6778734$

Et on a : $v_{2,1} = -1.0845367 \times v_{2,2}$

$\longrightarrow$ $v_{2,1} = -0{,}7351786$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- Une solution possible (cf. sous la contrainte que V_1 et V_2 soient tout 2 des **vecteurs unitaires de norme égale à 1**)

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0.6778734 \\ 0.7351787 \end{pmatrix} \qquad NB : v_{1,1}^2 + v_{1,2}^2 = 1$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} -0.7351786 \\ 0.6778734 \end{pmatrix} \qquad NB : v_{2,1}^2 + v_{2,2}^2 = 1$$

$$Q = \begin{array}{c|cc} & CP_1 & CP_2 \\ \hline X_{(1)} & 0.6778734 & -0.7351786 \\ X_{(2)} & 0.7351787 & 0.6778734 \end{array}$$

Et $D = C(Y) = \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \hline 1.155625 & 0 \\ 0 & 0.044175 \end{array}$

$$\Rightarrow \boxed{C(X) = QDQ^t} \quad \textbf{Et} \quad \boxed{Y = XQ}$$

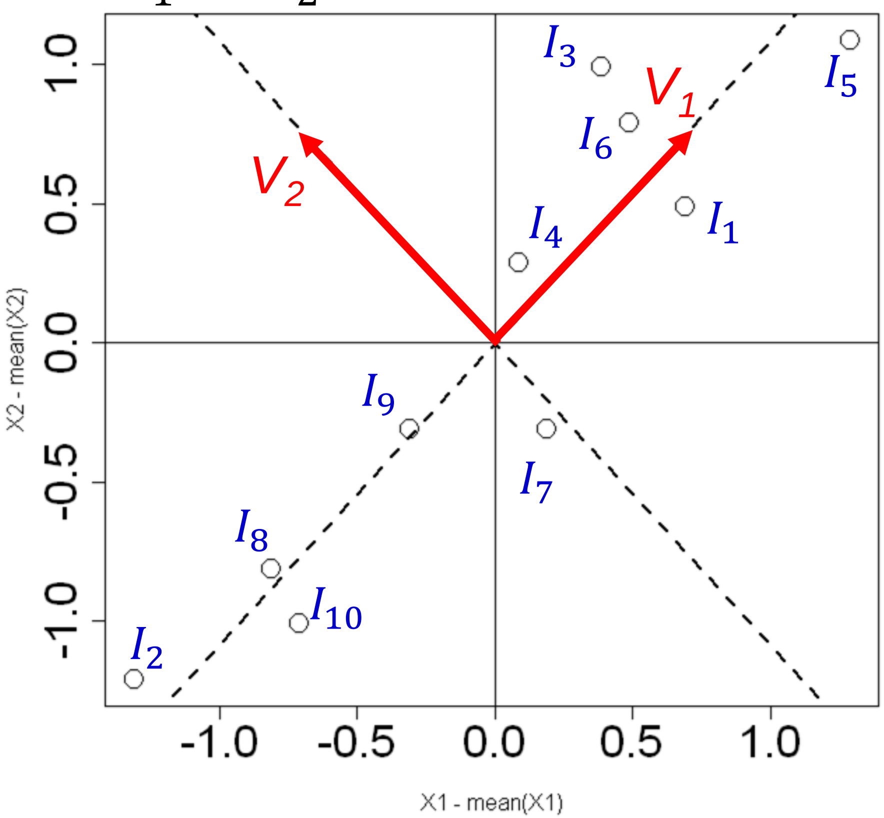
Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

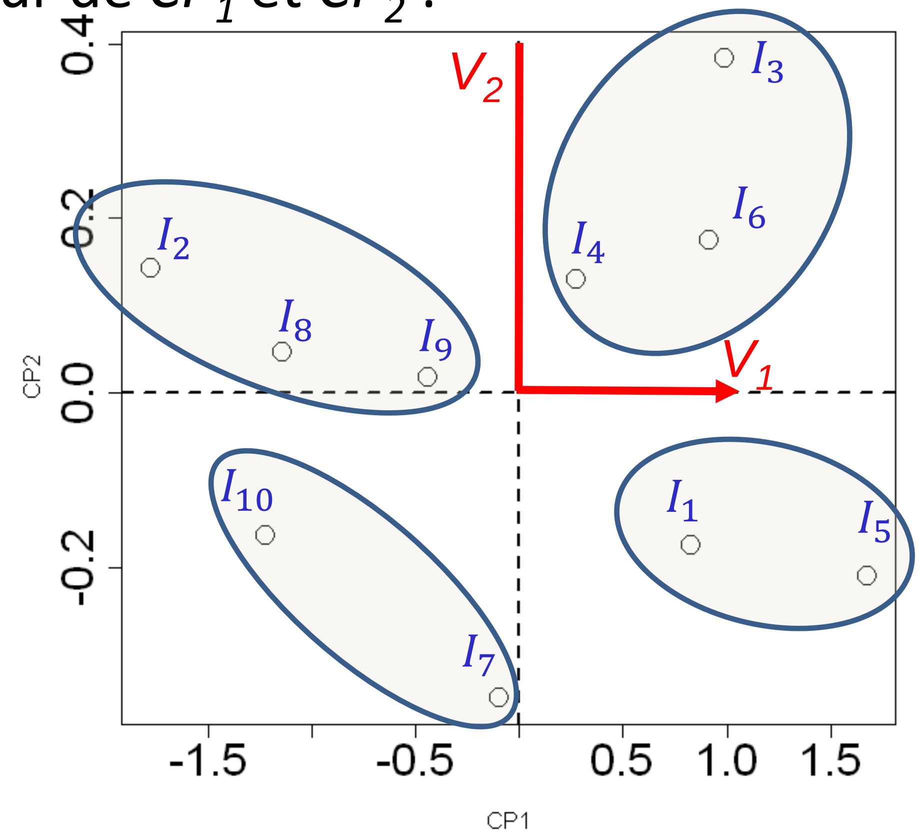
$$Y = (\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}})\, Q = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} X_{(1)} & X_{(2)} \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ I_{10} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}69 & 0{,}49 \\ -1{,}31 & -1{,}21 \\ 0{,}39 & 0{,}99 \\ 0{,}09 & 0{,}29 \\ 1{,}29 & 1{,}09 \\ 0{,}49 & 0{,}79 \\ 0{,}19 & -0{,}31 \\ -0{,}81 & -0{,}81 \\ -0{,}31 & -0{,}31 \\ -0{,}71 & -1{,}01 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} CP_1 & CP_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_{(1)} \\ X_{(2)} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}6778734 & -0{,}735186 \\ 0{,}7351787 & 0{,}6778734 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} I_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ I_{10} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}828 & -0{,}175 \\ -1{,}778 & 0{,}143 \\ 0{,}992 & 0{,}384 \\ 0{,}274 & 0{,}13 \\ 1{,}676 & -0{,}209 \\ 0{,}913 & 0{,}175 \\ -0{,}099 & -0{,}35 \\ -1{,}145 & 0{,}046 \\ -0{,}438 & 0{,}018 \\ -1{,}224 & -0{,}163 \end{bmatrix} \end{array}$$

Y : matrice des **scores** des individus : matrice des valeurs des composantes principales sur les individus

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- V_1 et V_2 sont les vecteurs directeur de CP_1 et CP_2 :





- CP_1 porte 96% de l'inertie totale du nuage de point
- NB : $r(X_1, X_2) = 0.93$ mais $r(CP_1, CP_2) = 0$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- L'information (variance) portée par CP_1 est tellement importante que l'on peut se passer de CP_2 :
  - Cela revient à compresser l'information originale portée par deux dimensions sur une seule dimension avec une perte ici de 4% de l'information d'origine
  - Par analogie, une fois que l'on a vu le chameau de profil, le voir de face n'apporte pas beaucoup plus d'information...
- ***N.B.*** L'ACP non-normée est une application rare et en général, on travail avec la matrice des corrélations (ACP normée)

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **Cas de l'ACP normée sur le même jeu de données :**

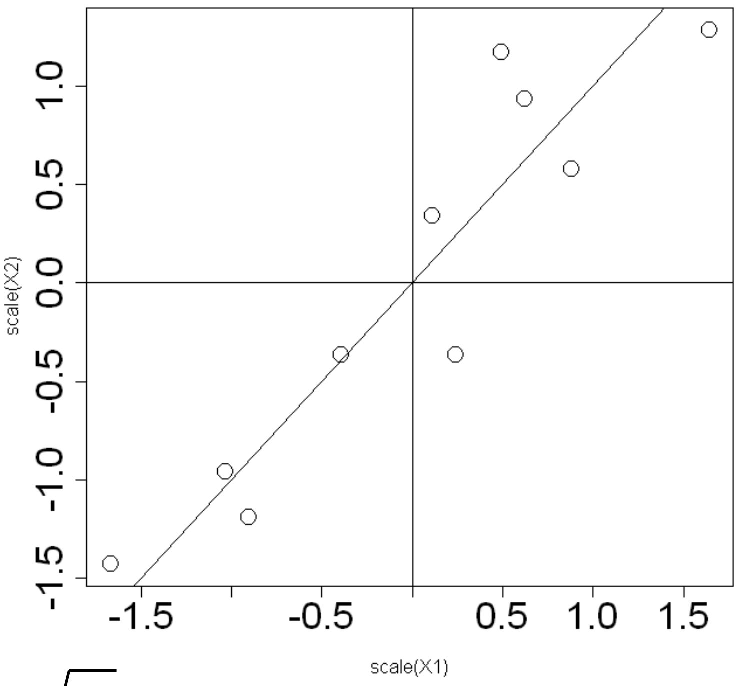
$$\mathrm{R}(X) = \frac{1}{n} Z^t Z = \begin{pmatrix} 1 & 0.93 \\ 0.93 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{R} - \lambda \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0.93 \\ 0.93 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathrm{R} - \lambda \mathrm{I}) = (1-\lambda)(1-\lambda) - 0.93^2$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 0.1351 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1.93 \qquad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0.07$$

$$\lambda_1 = 1 + r \qquad \lambda_2 = 1 - r$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **Détermination des 2 vecteurs propres V_1 et V_2 :**
  - **Résolution des 2 systèmes d'équations $CV_j - \lambda_j V_j = 0$**

λ_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.93 \\ 0.93 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = 1.93 \times \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_{1,1} + 0.93 \times v_{1,2} - 1.93 \times v_{1,1} = 0 \\ 0.93 \times v_{1,1} + v_{1,2} - 1.93 \times v_{1,2} = 0 \end{cases}$$

λ_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.93 \\ 0.93 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = 0.07 \times \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_{2,1} + 0.93 \times v_{2,2} - 0.07 \times v_{2,1} = 0 \\ 0.93 \times v_{2,1} + v_{2,2} - 0.07 \times v_{2,2} = 0 \end{cases}$$

  - **Une solution possible : les vecteurs unitaires :**

$$v_{11}^2 + v_{12}^2 = 1 \quad \textbf{Et} \quad v_{21}^2 + v_{22}^2 = 1$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **Détermination des 2 vecteurs propres V_1 et V_2 ...**
  - Prenons cette équation (1ère équation du 1er système)

$$v_{1,1} + 0.93 \times v_{1,2} - 1.93 \times v_{1,1} = 0$$

$$\longrightarrow \; 0.93 \times v_{1,2} - 0.93 \times v_{1,1} = 0 \quad \longrightarrow \quad v_{1,1} = v_{1,2}$$

$$\text{et on a : } v_{1,1}^2 + v_{1,2}^2 = 1 \text{ (car vecteur unitaire)}$$

$$\longrightarrow \; {v_{1,2}}^2 + {v_{1,2}}^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad {v_{1,2}}^2 = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ Une solution possible est: $$v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\longrightarrow \; v_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- **Détermination des 2 vecteurs propres V_1 et V_2 ...**
  - Prenons cette équation (1ère équation du 2ème système)

$$v_{2,1} + 0.93 \times v_{2,2} - 0.07 \times v_{2,1} = 0$$

$$\longrightarrow 0.93 \times v_{2,2} + 0.93 \times v_{2,1} = 0 \longrightarrow v_{2,1} = -v_{2,2}$$

$$\text{et on a} : v_{2,1}^2 + v_{2,2}^2 = 1 \,(\text{car vecteur unitaire})$$

$$\longrightarrow (-v_{2,2})^2 + {v_{2,2}}^2 = 1 \longrightarrow {v_{2,2}}^2 = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ Une solution possible est: $v_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\longrightarrow v_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- Une solution possible (cf. sous la contrainte que V_1 et V_2 soient tout 2 des **vecteurs unitaires de norme 1**)

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix}$$

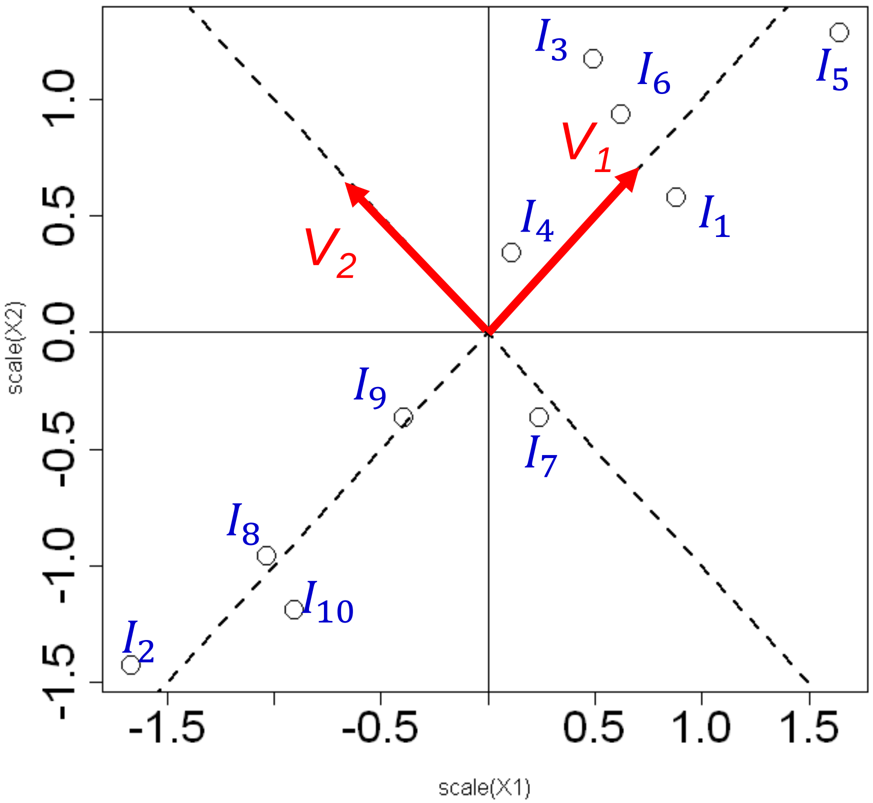
$$v_{1,1}^2 + v_{1,2}^2 = 1 \qquad v_{2,1}^2 + v_{2,2}^2 = 1$$

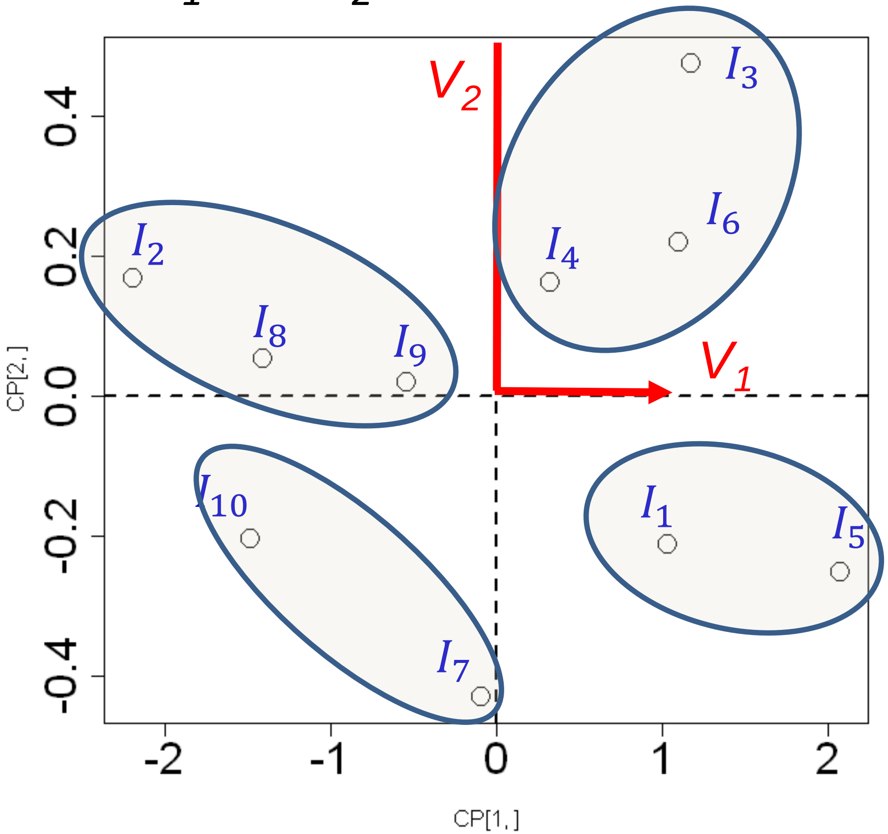
Y : matrice des **scores** des individus

$$Y = Z\,Q = \begin{bmatrix} 0{,}926 & 0{,}61 \\ -1{,}759 & -1{,}506 \\ 0{,}524 & 1{,}233 \\ 0{,}121 & 0{,}361 \\ 1{,}732 & 1{,}357 \\ 0{,}658 & 0{,}984 \\ 0{,}255 & -0{,}386 \\ -1{,}087 & -1{,}009 \\ -0{,}416 & -0{,}386 \\ -0{,}953 & -1{,}258 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}707 & -0{,}707 \\ 0{,}707 & 0{,}707 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} I_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ I_{10} \end{array} \begin{bmatrix} 1{,}086 & -0{,}223 \\ -2{,}309 & 0{,}178 \\ 1{,}242 & 0{,}501 \\ 0{,}341 & 0{,}17 \\ 2{,}184 & -0{,}264 \\ 1{,}161 & 0{,}23 \\ -0{,}093 & -0{,}453 \\ -1{,}482 & 0{,}056 \\ -0{,}567 & 0{,}021 \\ -1{,}563 & -0{,}215 \end{bmatrix}$$

Procédure de l'ACP à partir d'un exemple

- V_1 et V_2 sont les vecteurs directeur de CP_1 et CP_2 :





Procédure de l'ACP

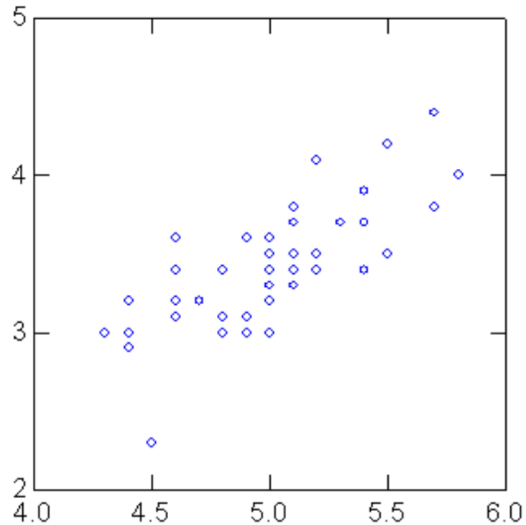
- **Étape 1: Changement de repère**
  - Utiliser les ***données centrées*** (la matrice $(X - \bar{X})$ au lieu de la matrice X) ou les ***données centrées-réduites*** (la matrice Z au lieu de la matrice X) selon vos données
  - **Ancien repère:**
    - chaque individu est représenté par un point de $\mathbb{R}^p$
    - chacun des axes de $\mathbb{R}^p$ représente une des p variables
  - **Nouveau repère:**
    - nouveaux axes (droites) passant par l'origine et p **vecteurs unitaires** et **deux à deux orthogonaux** $(CP_1, \ldots, CP_p)$
    - chacun des axes représente une **nouvelle variable,** qui est **combinaison linéaire** des anciennes variables.
    - chaque individu est représenté sur ce nouveau repère, par sa **projection orthogonale** sur ces axes

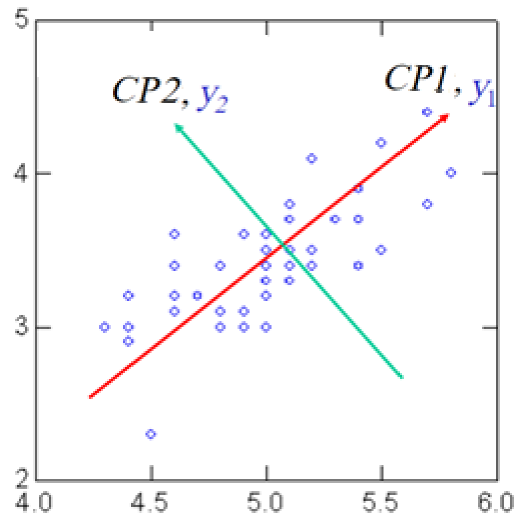
$$\boxed{Y = (X - \bar{X})Q \quad \text{ou } Y = Z\,Q}$$

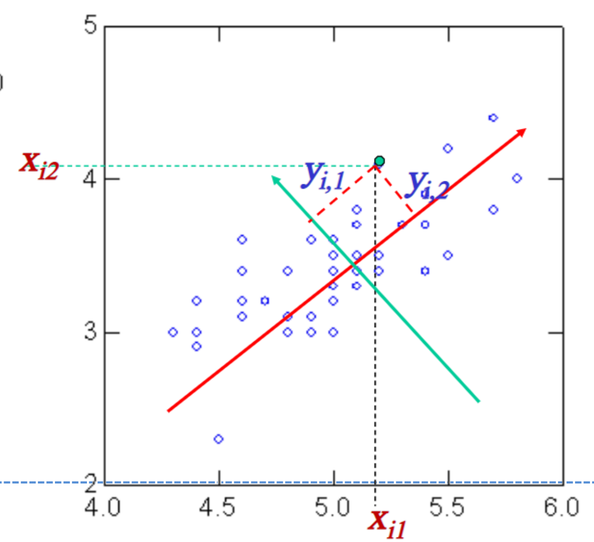
Procédure de l'ACP

Étape 1: Changement de repère ...

Plan d'origine







Procédure de l'ACP

- **Étape 2: Choix du nouveau repère**
  - **But:** trouver le nouveau repère $(CP_1, \dots, CP_p)$ tel que la quantité d'information expliquée par CP_1 soit maximale, puis celle expliquée par CP_2, etc.
  - **Mesure de la quantité d'information :**
    - Utiliser la **covariance** pour les ***données centrées*** ou la **corrélation** pour les ***données centrées-réduites***
    - Plus la variance d'une variable est grande, plus les données de cette variable sont dispersées, et plus la quantité d'information apportée est importante
    - Quantité d'information = ***variabilité totale*** des données

ACP non-normé

$$\operatorname{Tr}\big(C(X - \bar{X})\big) = \operatorname{Tr}\big(C(X)\big) = \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Var}\big(X_{(j)}\big)$$
$$= \operatorname{Tr}\big(C(Y)\big)$$

Ou

ACP normé

$$\operatorname{Tr}\big(C(Z)\big) = \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Var}\big(Z_{(j)}\big) = p \times 1$$
$$= \operatorname{Tr}\big(C(Y)\big)$$

Procédure de l'ACP

- **Étape 2: Choix du nouveau repère …**
  - **Choix du nouveau repère :**
    - Déterminer Q de sorte que la part de la variabilité totale expliquée par les données $Y_{(1)}$ de la nouvelle variable CP_1 soit maximale, puis celle expliquée par les données $Y_{(2)}$ de la nouvelle variable CP_2, etc.
    - En appliquant le **Théorème spectral** pour les matrices symétriques :

$$\boxed{C(X) = QDQ^t}$$

$$D = C(Y)$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & p \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_i & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice « *diagonale* » des valeurs propres

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_p \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} \text{Matrice des} \\ \text{covariances} \\ \text{(ou corrélation)} \end{pmatrix} \end{array}$$

C/R

Diagonalisation

$$Q$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} CP_1 & CP_2 & \dots & CP_i & \dots & CP_p \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice des vecteurs propres

Procédure de l'ACP

- **Étape 2: Choix du nouveau repère …**
  - **Choix du nouveau repère …**
    - On a donc :
      - $Var(Y_{(j)}) = \lambda_j$
      - $Cov(Y_{(i)}, Y_{(j)}) = 0 \; quand \; i \neq j$
      - $Var(Y_{(1)}) \geq \cdots \geq Var(Y_{(p)})$ $\rightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2$
    - Les colonnes $CP_1, \ldots, CP_p$ de la matrice Q décrivent les nouvelles variables, appelées les ***composantes principales***.
    - **Dans le cas des données centrées réduites (Matrice de données $\boldsymbol{Z}$), la matrice de covariance est la matrice de corrélation $\boldsymbol{R(X)}$**

$$Cov(Z_{(i)}, Z_{(j)}) = Cov\left(\frac{X_{(i)} - \overline{X_{(i)}}}{\sigma(X_{(i)})}, \frac{X_{(j)} - \overline{X_{(j)}}}{\sigma(X_{(j)})}\right) = r(X_{(i)}, X_{(j)})$$

Procédure de l'ACP

- **Étape 2: Choix du nouveau repère …**
  - **Projection des individus sur le nouveau repère:**
    - Y : matrice des **scores** des individus : matrice des valeurs des composantes principales sur les individus

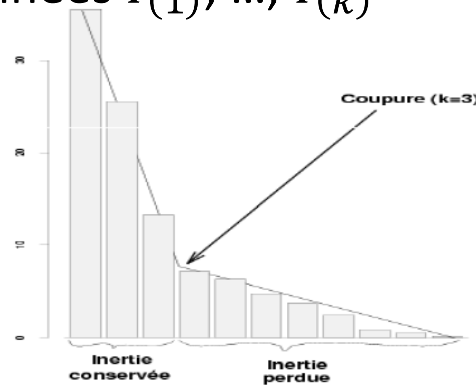
$$\boxed{Y = (X - \bar{X})\mathrm{Q} \quad \text{ou } Y = Z\,Q}$$

Procédure de l’ACP

Étape 3: Interprétation des résultats

Parts de la variabilité totale

- La part de la variabilité totale expliquée par les données $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(k)}$ des k premières nouvelles variables $(k \leq p)$, est :



$$\frac{Var\left(Y_{(1)}\right)+\cdots+Var\left(Y_{(k)}\right)}{Var\left(Y_{(1)}\right)+\cdots+Var\left(Y_{(p)}\right)}=\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}{\lambda_1+\cdots+\lambda_p}$$

- Dans la pratique, on calcule cette quantité pour $k = 2\ ou\ 3$, en utilisant le ***test du coude***
- En multipliant par 100, ceci donne ***le pourcentage de la variabilité totale expliquée par les données*** des 2 ou 3 premières nouvelles variables.
- Si ce pourcentage est raisonnable, on choisira de se restreindre aux 2 ou 3 premiers axes.

Procédure de l'ACP

- **Étape 3: Interprétation des résultats …**
  - **Saturation des variables : Corrélation entre les données des anciennes et des nouvelles variables**
    - Etant donné que les nouvelles variables sont dans un sens "artificielles", on souhaite comprendre la **corrélation** entre les données $(X - \bar{X})_{(j)}$ de la $j^{ème}$ ancienne variable et celle $Y_{(k)}$ de la $k^{ème}$ nouvelle variable.
    - La matrice de covariance $C(X,Y)$ de $(X - \bar{X})$ et Y est donnée par :

$$C(X,Y) = QD$$

Ainsi:

$$Cov\left(X_{(j)}, Y_{(k)}\right) = C(X,Y)_{jk} = q_{jk}\lambda_k$$

$$r\left(X_{(j)}, Y_{(k)}\right) = \frac{\mathrm{Cov}\left(X_{(j)}, Y_{(k)}\right)}{\sigma\left(X_{(j)}\right)\,\sigma\left(Y_{(k)}\right)} = \frac{q_{jk}\lambda_k}{\sqrt{c_{jj}\lambda_k}} = \frac{q_{jk}\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{c_{jj}}}$$

$$Avec:\ c_{jj} = Var\left(X_{(j)}\right)$$

Procédure de l'ACP

Étape 3: Interprétation des résultats …

Saturation des variables …

- **Dans le cas des données centrées réduites (Matrice de données $\boldsymbol{Z}$), la matrice de covariance est la matrice de corrélation $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X})$**

  - La corrélation entre $Z_{(j)}$ et $Y_{(k)}$ est :

$$r\left(Z_{(j)}, Y_{(k)}\right) = \sqrt{\lambda_k} q_{jk}$$

Car les coefficients diagonaux de la matrice de covariance (qui est la matrice de corrélation) sont égaux à 1

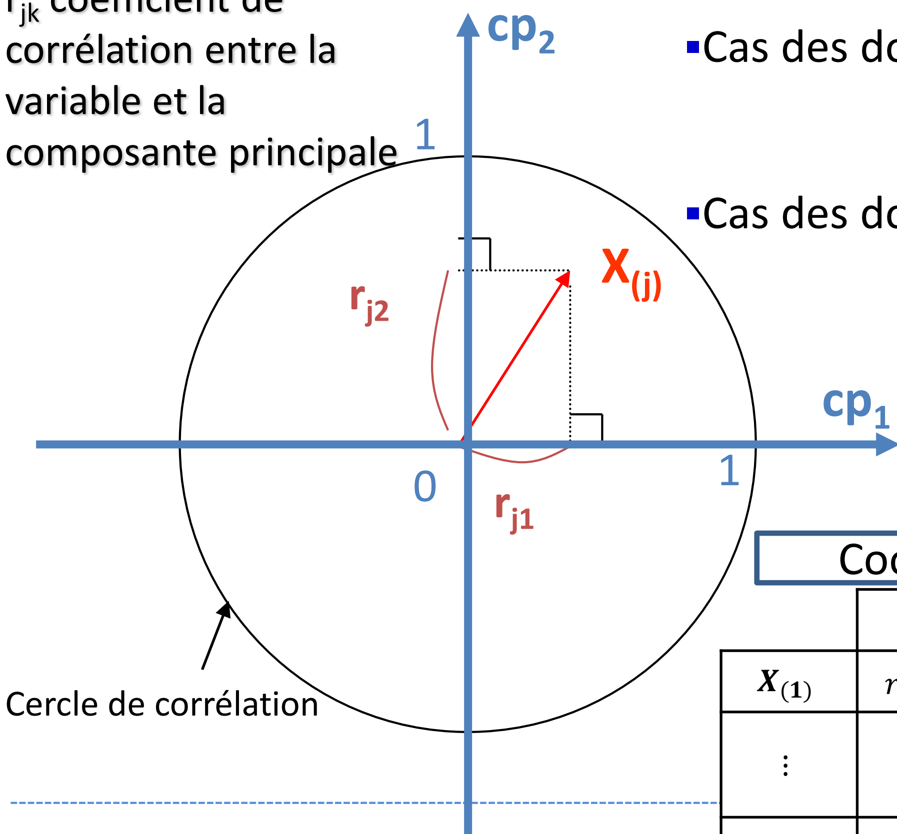
Procédure de l'ACP

Étape 3: Interprétation des résultats …

Saturation des variables …

- **Cercle de corrélation**

r_{jk} coefficient de corrélation entre la variable et la composante principale

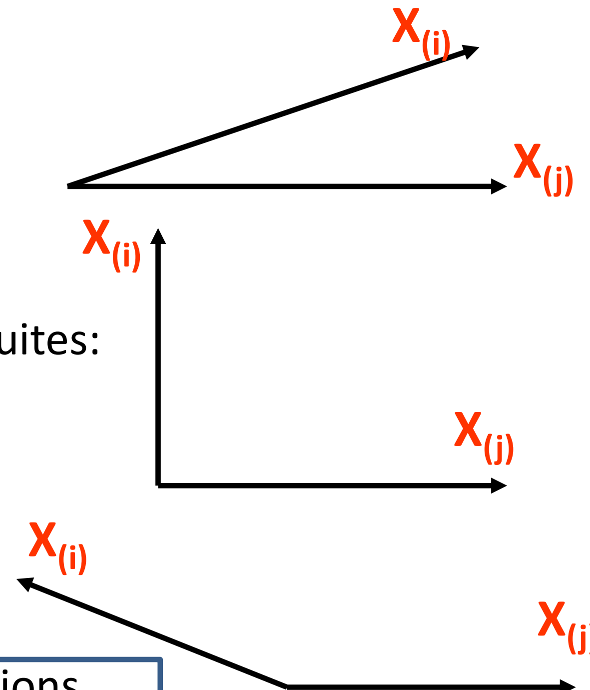


- Cas des données centrées:

$$X_{(j)} = (X - \bar{X})_{(j)}$$

- Cas des données centrées-réduites:

$$X_{(j)} = Z_{(j)}$$



Coordonnées - Corrélations

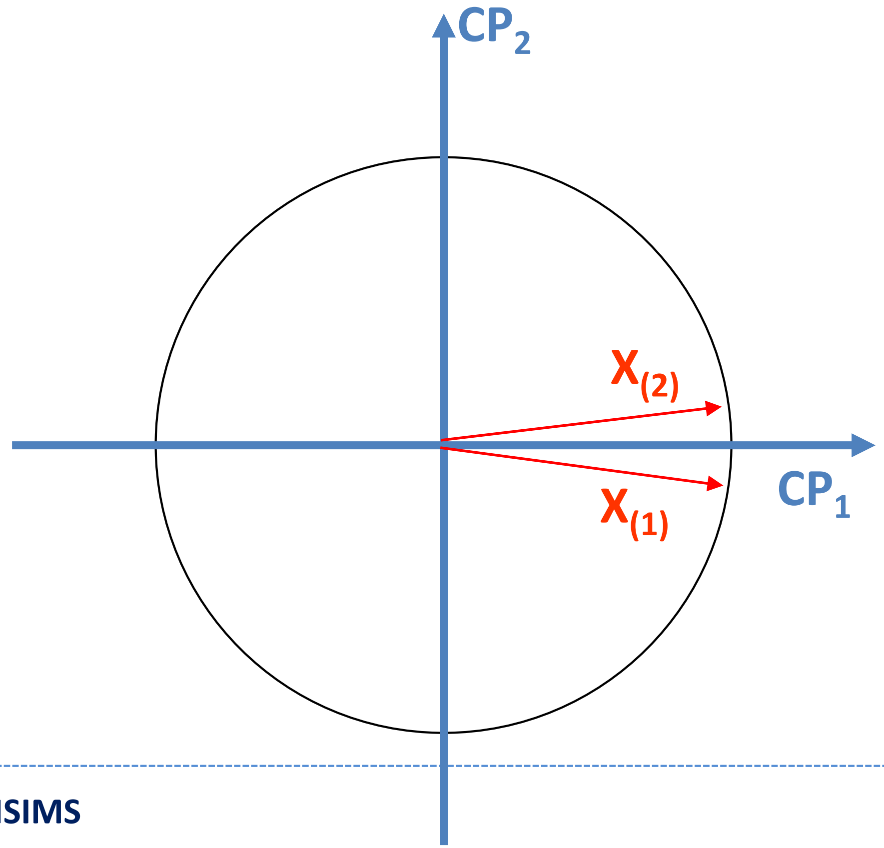
	$\boldsymbol{Y}_{(1)}$	…	$\boldsymbol{Y}_{(p)}$
$\boldsymbol{X}_{(1)}$	$r(X_{(1)}, Y_{(1)})$	…	$r(X_{(1)}, Y_{(p)})$
⋮	…	$r(X_{(j)}, Y_{(k)})$	⋮
$\boldsymbol{X}_{(p)}$	$r(X_{(p)}, Y_{(1)})$	…	$r(X_{(p)}, Y_{(p)})$

Procédure de l'ACP

Étape 3: Interprétation des résultats …

Saturation des variables …

- **Cercle de corrélation : Notre exemple**



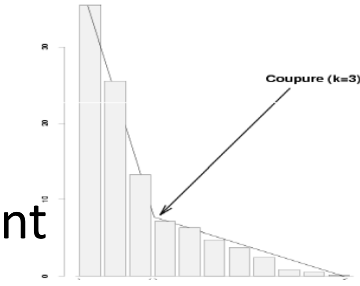
Coordonnées - Corrélations

	$Y_{(1)}$	$Y_{(2)}$
$X_{(1)}$	0,97825	-0,20743
$X_{(2)}$	0,98414	0,17742

	$Y_{(1)}$	$Y_{(2)}$
$Z_{(1)}$	0,98234	−0,18708
$Z_{(2)}$	0,98234	0,18708

Combien de composantes principales?

- L'ACP d'une matrice de données à p variables et n individus admet p valeurs propres, p vecteurs propres, et p composantes principales :
  - Conservez au moins 70-80% de la variance en cumulé
  - **Critère de Kaiser:** Conservez toute les composantes principales dont $\lambda > 1$
  - **Critère du coude:** Utilisez l'histogramme des valeurs propres (**scree plot**):
    - sur l'évolution des valeurs propres, on observe un décrochement (coude) suivi d'une décroissance régulière. On sélectionne les axes avant le décrochement



- Attention :
  - L'ACP sur une matrice de données tel que $p > n$ est impossible

Typologies des individus et des variables

- **Typologie des individus :** *projection des individus sur le plan factoriel*
  - **Courbe de score de l'ACP:** La lecture graphique de la position des individus le long des CPs permet de dresser une typologie
  - Les individus proches le long d'une CP sont des individus qui partagent les mêmes *caractéristiques* vis-à-vis des variables quantitatives étudiées

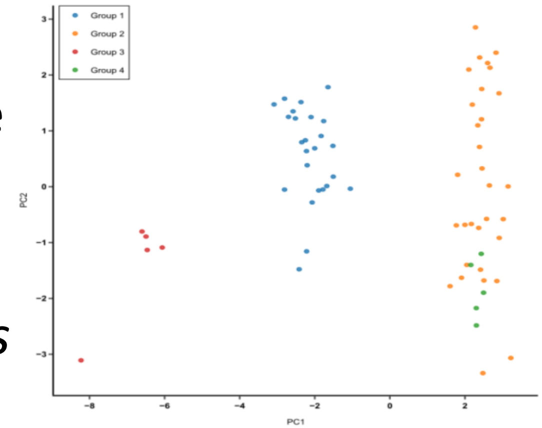
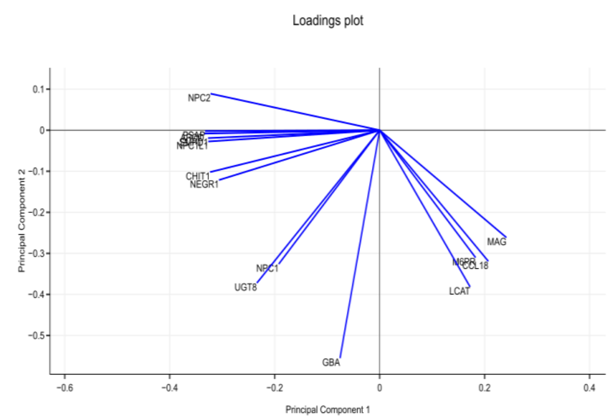


Figure 1. PCA plot.

- **Typologie des variables :** *projection des variables sur le plan factoriel*
  - **Courbe de chargement de l'ACP:** montre l'influence de chaque variable initiale sur une composante principale
  - La lecture graphique du cercle des corrélations permet de juger du poids des différentes variables de départ sur chacune des CPs



Exemple

Données initiales

$X =$

X1	X2	X3
10	20	10
2	5	2
8	17	7
9	20	10
12	22	11

$$\overbrace{X - \bar{X}}^{M} =$$

Données centrées

1.8	3.2	2
-6.2	-11.8	-6
-0.2	0.2	-1
0.8	3.2	2
3.8	5.2	3

$$\mathrm{Cov}(X) = \frac{1}{n}(X - \overline{X})^t(X - \overline{X}) =$$

	X1	X2	X3
X1	14.2	25.3	13.5
X2	25.3	46.7	24.75
X3	13.5	24.75	13.5

$$\mathrm{Cov}(X) = \frac{1}{n} M^t M$$

Exemple

	X1	X2	X3
X1	14.2	25.3	13.5
X2	25.3	46.7	24.75
X3	13.5	24.75	13.5

Matrice de covariance

$$\lambda_1 = 73.718$$
$$\lambda_2 = 0.384$$
$$\lambda_3 = 0.298$$

Valeurs propres

Remarque: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 74.4$

= trace de C

(Somme des variances dans la diagonale)

Vecteurs propres

$Q =$

$q1$	$q2$	$q3$
0.434	0.900	-0.044
0.795	-0.406	-0.451
0.424	-0.161	0.891

	Valeur propre	Pourcentage	Pourcentage cumulé
CP_1	73,718	99,083	99,083
CP_2	0,384	0,516	99,599
CP_3	0,298	0,401	100

Exemple

$$Y = (X - \bar{X})Q = M\,Q =$$

1.8	3.2	2
-6.2	-11.8	-6
-0.2	0.2	-1
0.8	3.2	2
3.8	5.2	3

X

0.434	0.900	-0.044
0.795	-0.406	-0.451
0.424	-0.161	0.891

=

y1	*y2*	*y3*
4.173	0.000	-0.259
-14.615	-0.172	-0.252
-0.352	0.100	0.973
3.739	0.900	-0.303
7.055	-0.828	-0.159

Prenant uniquement la 1$^{\text{ère}}$ composante principale:

y1
4.173
-14.615
-0.352
3.739
7.055

Exercice 1

- Soit la matrice de données X suivante :

/40

	Statistiques	Math	Cpta	G° Fi
Individu n° 1	19	14	8	18
Individu n° 2	20	12	4	4
Individu n° 3	10	10	32	38
Individu n° 4	13	17	4	4
Individu n° 5	6	8	26	24
Individu n° 6	6	3	28	32
Individu n° 7	19	16	8	20
Individu n° 8	15	18	6	6
Individu n° 9	9	2	32	30
Individu n° 10	8	7	20	20

Moyenne	12,5	10,7	16,8	19,6
Écart type	5,2010	5,3861	11,3208	11,3772

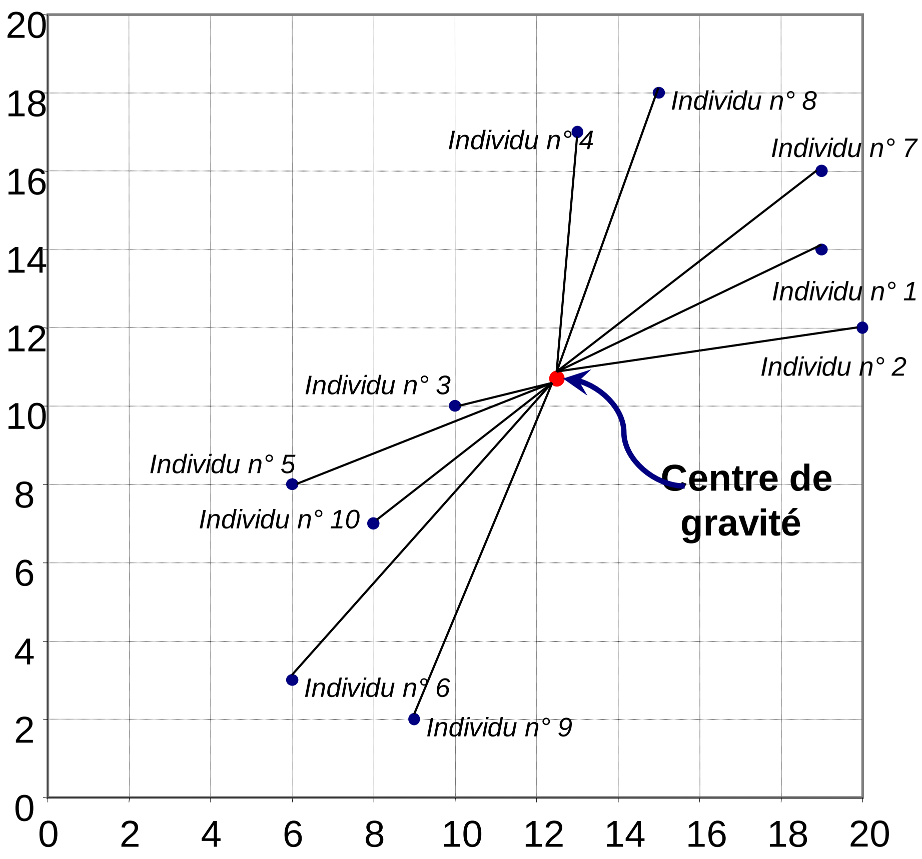
Exercice 1

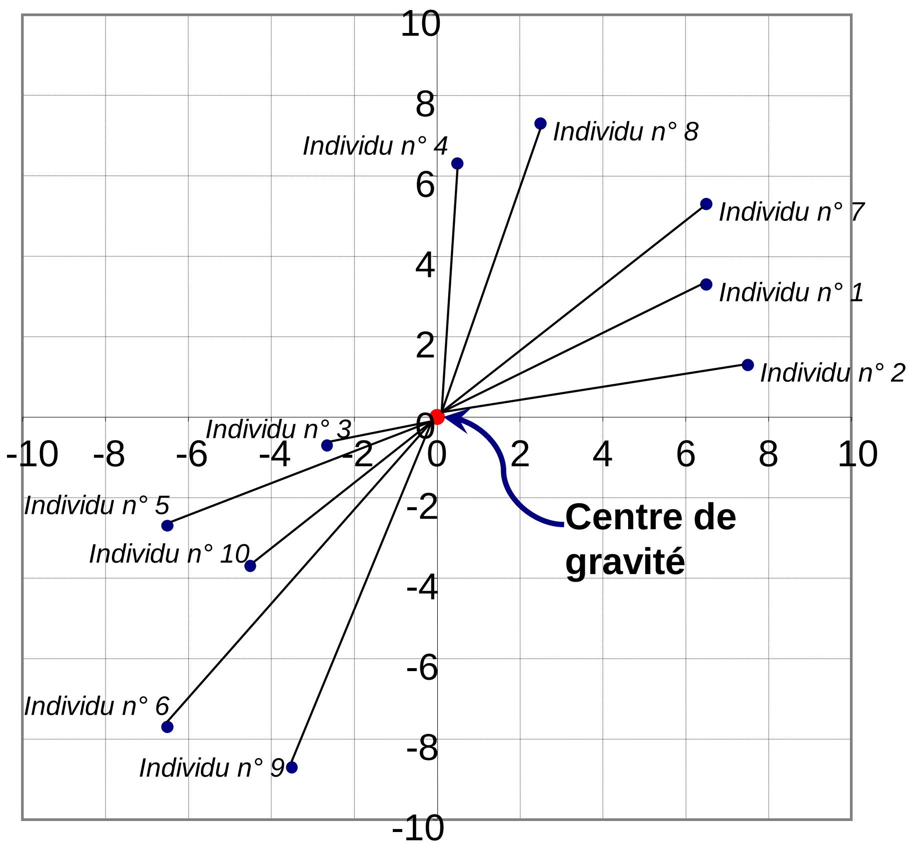
- Déterminer la matrice centrée $(X - \bar{X})$ de X :

	Statistiques	Math	Cpta	G° Fi
Individu n° 1	6,50	3,30	-8,80	-1,60
Individu n° 2	7,50	1,30	-12,80	-15,60
Individu n° 3	-2,50	-0,70	15,20	18,40
Individu n° 4	0,50	6,30	-12,80	-15,60
Individu n° 5	-6,50	-2,70	9,20	4,40
Individu n° 6	-6,50	-7,70	11,20	12,40
Individu n° 7	6,50	5,30	-8,80	0,40
Individu n° 8	2,50	7,30	-10,80	-13,60
Individu n° 9	-3,50	-8,70	15,20	10,40
Individu n° 10	-4,50	-3,70	3,20	0,40
Moyenne	0,00	0,00	0,00	0,00
Écart type	5,20	5,39	11,32	11,38

Exercice 1

- Nuage de points de la matrice X et celui de la matrice $(X - \bar{X})$





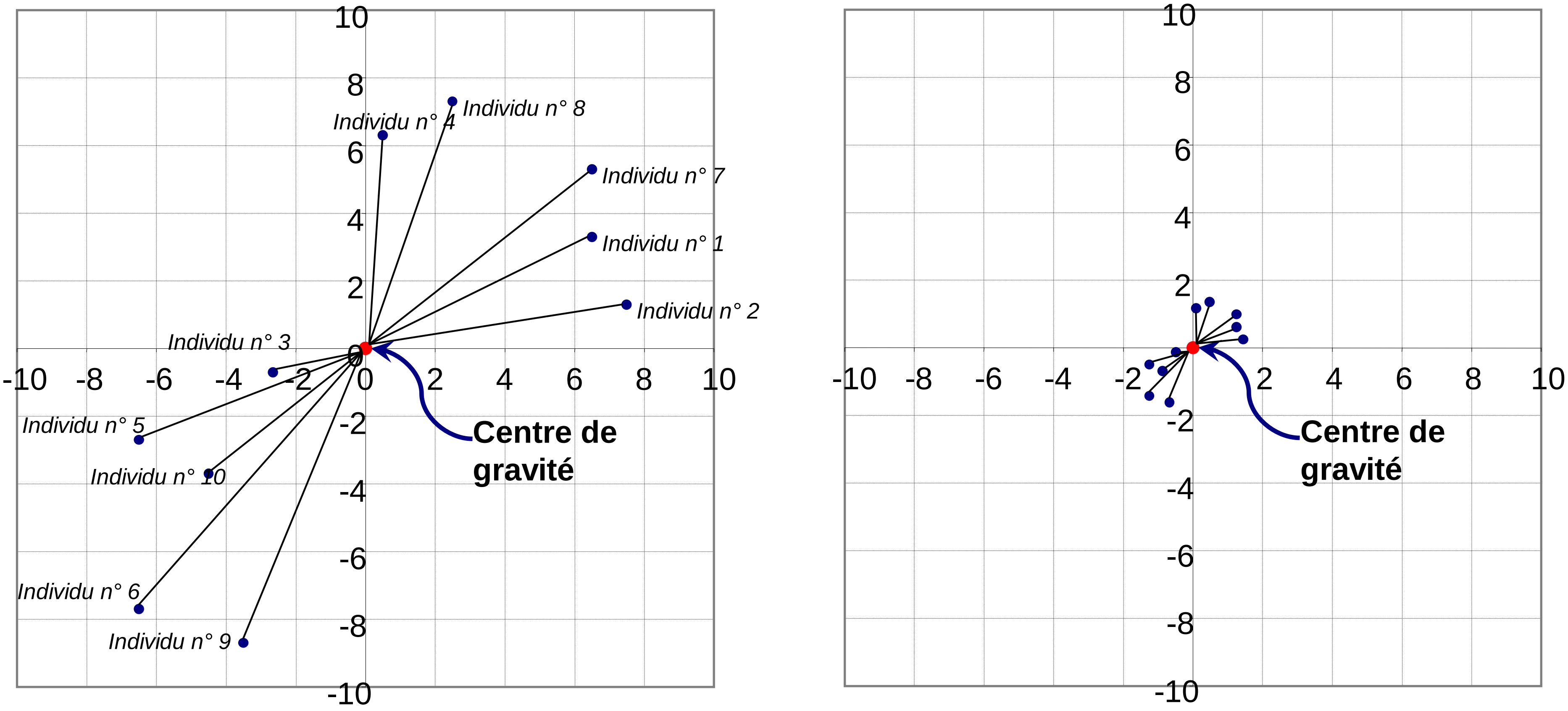
Exercice 1

- Déterminer la matrice centrée réduite (Z) de X :

	Statistiques	Math	Cpta	G° Fi
Individu n° 1	1,2498	0,6127	-0,7773	-0,1406
Individu n° 2	1,4420	0,2414	-1,1307	-1,3712
Individu n° 3	-0,4807	-0,1300	1,3427	1,6173
Individu n° 4	0,0961	1,1697	-1,1307	-1,3712
Individu n° 5	-1,2498	-0,5013	0,8127	0,3867
Individu n° 6	-1,2498	-1,4296	0,9893	1,0899
Individu n° 7	1,2498	0,9840	-0,7773	0,0352
Individu n° 8	0,4807	1,3553	-0,9540	-1,1954
Individu n° 9	-0,6730	-1,6153	1,3427	0,9141
Individu n° 10	-0,8652	-0,6870	0,2827	0,0352
Moyenne	0,00	0,00	0,00	0,00
Écart type	1	1	1	1

Exercice 1

- Nuage de points de la matrice $(X - \bar{X})$ et celui de la matrice Z



Exercice 1

- Déterminer la matrice de corrélation de Bravais-Pearson $\mathrm{R}(X)$:

$$R(X) = \frac{1}{n} Z^t Z$$

	Statistiques	Math	Cpta	G° Fi
Statistiques	**1,0000**	0,7265	-0,8186	-0,6084
Math	0,7265	**1,0000**	-0,8489	-0,7069
Cpta	-0,8186	-0,8489	**1,0000**	0,9124
G° Fi	-0,6084	-0,7069	0,9124	**1,0000**

- Résoudre: $\det(R - \lambda\, I) = 0$

$$R - \lambda\, I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0{,}7265 & -0{,}8186 & -0{,}6084 \\ 0{,}7265 & 1-\lambda & -0{,}8489 & -0{,}7069 \\ -0{,}8186 & -0{,}8489 & 1-\lambda & 0{,}9124 \\ -0{,}6084 & -0{,}7069 & 0{,}9124 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Résoudre: $\det(R - \lambda\, I) = 0$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3.3189 \\ \lambda_2 = 0.4035 \\ \lambda_3 = 0.2508 \\ \lambda_4 = 0.0268 \end{cases}$$

Exercice 1

- Interprétation des valeurs propres

A.C.P. sur données centrées-réduites

$\downarrow$

$\forall$ variable $\rightarrow$ variance = 1

$\downarrow$

Σ variance = nombre de variables

$\rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3.3189 \\ \lambda_2 = 0.4035 \\ \lambda_3 = 0.2508 \\ \lambda_4 = 0.0268 \end{cases}$$

$$\sum \lambda_i = 4$$

$\rightarrow$

$$\lambda_i \Big/ \sum \lambda_i$$

$\uparrow$

Part de l'information initiale restituée par l'axe i

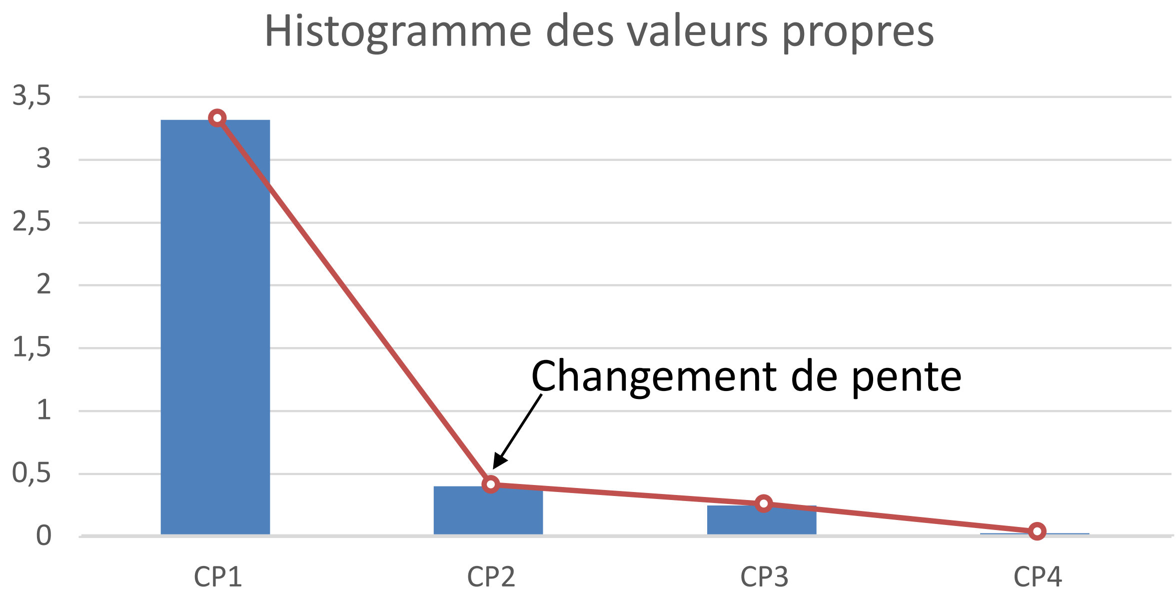
$\uparrow$

Exemple : $\lambda_1 \Big/ \sum \lambda_i = 3.3189 \big/ 4 = 0.829725 = 82.97\%$

Exercice 1

- Interprétation des valeurs propres

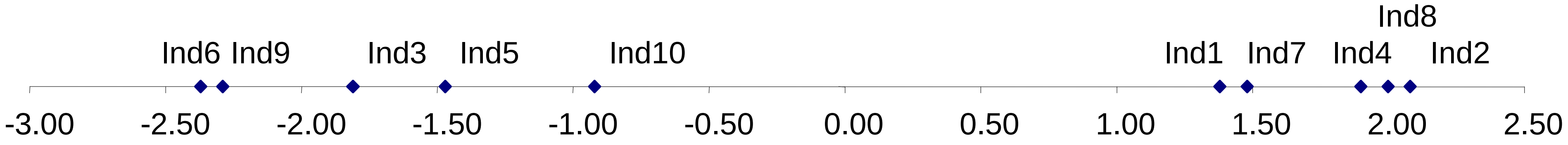
	Valeur propre	Pourcentage	Pourcentage cumulé
1	3.3189	82.9700	82.9700
2	0.4035	10.0900	93.0600
3	0.2508	6.2700	99.3300
4	0.0268	0.6700	100.0000



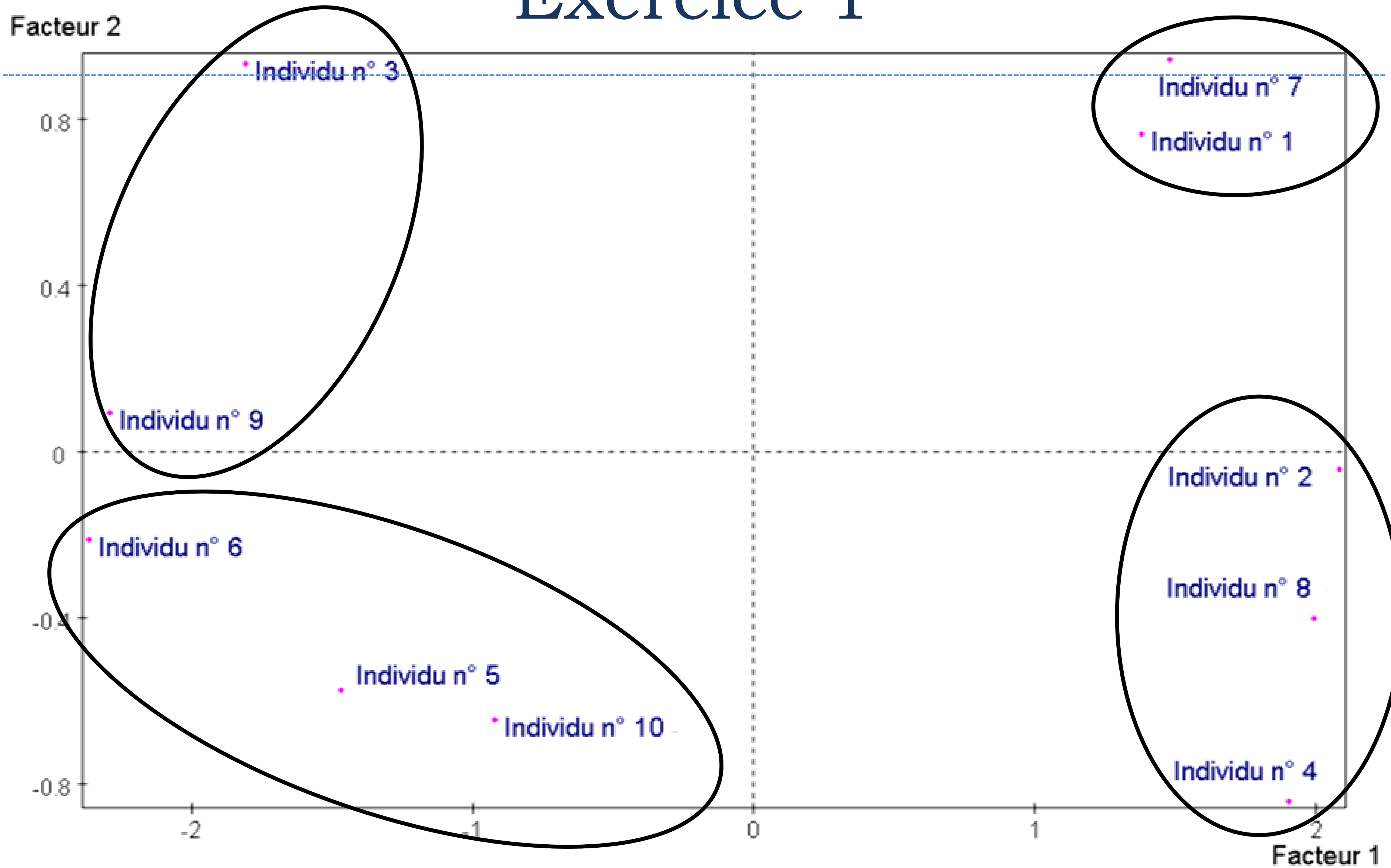
Exercice 1

- Les nouveaux coordonnées des individus

	Coordonnées			
	1	2	3	4
Individu n° 1	1.38	0.77	0.20	0.14
Individu n° 2	2.08	-0.04	0.97	-0.15
Individu n° 3	-1.81	0.93	-0.71	-0.17
Individu n° 4	1.90	-0.85	-0.43	0.04
Individu n° 5	-1.47	-0.58	-0.36	-0.07
Individu n° 6	-2.37	-0.22	0.21	0.28
Individu n° 7	1.48	0.94	-0.16	0.16
Individu n° 8	2.00	-0.40	-0.48	-0.15
Individu n° 9	-2.29	0.09	0.63	-0.21
Individu n° 10	-0.92	-0.65	0.13	0.13



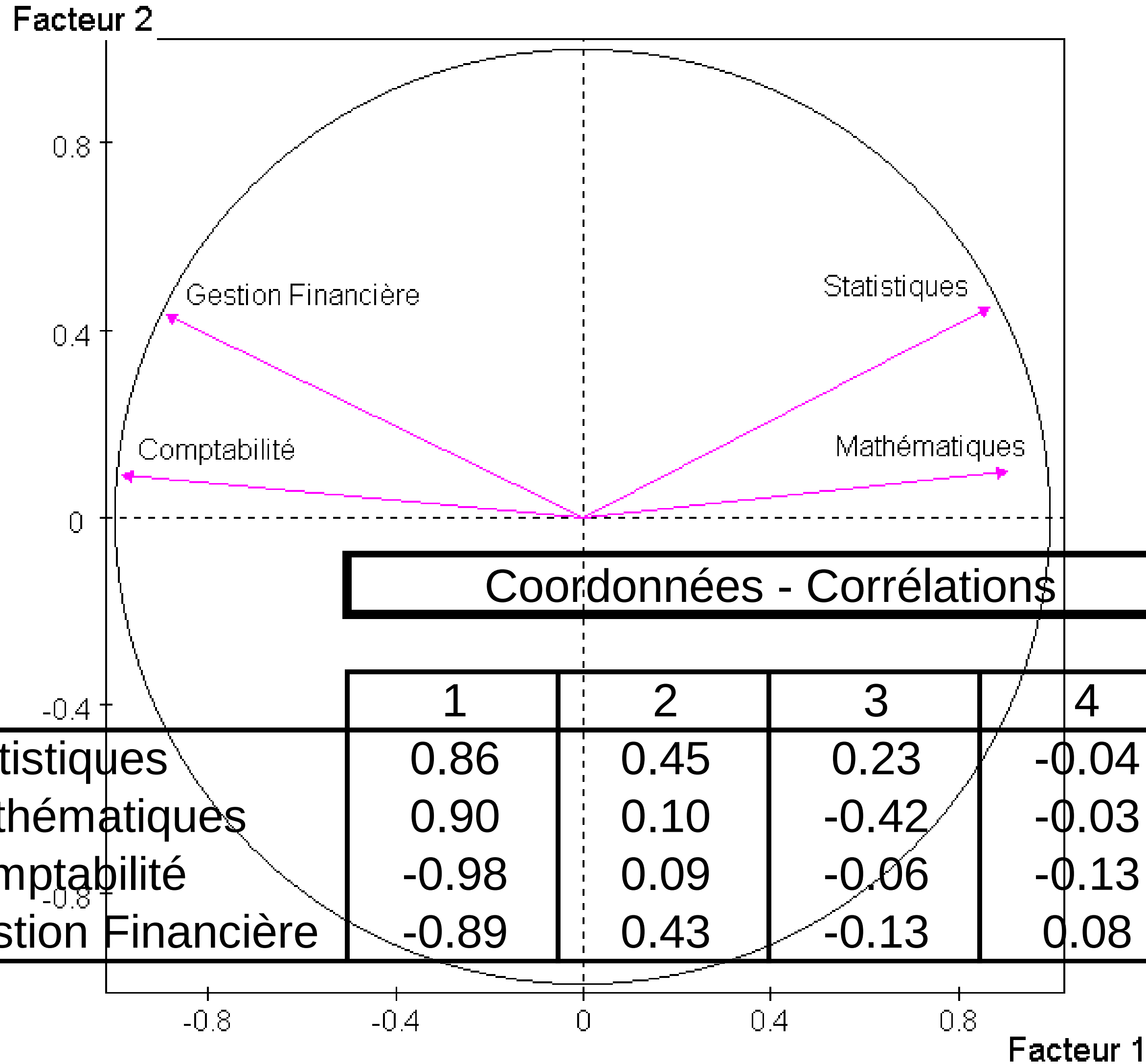
Exercice 1



Facteur 2
Individu n° 3
Individu n° 7
Individu n° 1
Individu n° 9
Individu n° 2
Individu n° 6
Individu n° 8
Individu n° 5
Individu n° 10
Individu n° 4
0.8
0.4
0
-0.4
-0.8
-2
-1
0
1
2
Facteur 1

Exercice 1

- Cercle de corrélation



Coordonnées - Corrélations

	1	2	3	4
Stat - Statistiques	0.86	0.45	0.23	-0.04
Math - Mathématiques	0.90	0.10	-0.42	-0.03
Cpta - Comptabilité	-0.98	0.09	-0.06	-0.13
G-Fi - Gestion Financière	-0.89	0.43	-0.13	0.08

Exercice 2

- Soit le tableau de données suivant :

	Informatique	**Gestion**
Noam	4	5
Jean	6	7
Li	8	0

  - Où les lignes représentent les individus (noms de quelques étudiants) et les colonnes les variables (notes en informatique et gestion).

- Ce tableau de données peut être représenté par la matrice X de données brutes :

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer la matrice $M = X - \bar{X}$ des données centrées et la matrice Z de données centrées et réduites.

Exercice 2

2) Calculer la matrice $C(X)$ des covariances de X et la matrice $R(X)$ des corrélations de X.

3) Vérifier que $\lambda_1 = 10{,}152$ et $\lambda_2 = 1{,}188$ sont deux valeurs propres associées à $C(X)$. Puis vérifier que les vecteurs unitaires :

$$V_1 = \begin{pmatrix} -0.407 \\ 0.914 \end{pmatrix} \; et \; V_2 = \begin{pmatrix} 0.914 \\ 0.407 \end{pmatrix}$$

sont les vecteurs propres de $C(X)$ associés à $\lambda_1 et \; \lambda_2$ respectivement.

4) À partir des résultats précédents, déterminer les deux composantes principales de l'ACP du nuage des individus associé au tableau X. Pour chacun de ces axes, préciser le pourcentage de la quantité d'information projetée sur l'axe considéré, et le pourcentage cumulé.

5) Déterminer la matrice des scores des individus.

6) Calculer la saturation des variables et interpréter le cercle de corrélation.

Exercice 3

- Une étude sur des fournisseurs de matériel informatique a conduit à apprécier le service, la qualité et le prix de quatre fournisseurs. Pour cela un expert a noté ces entreprises avec des notes allant de -3 à 3. Les résultats sont consignés ci-dessous :

Ent	**Service**	**Qualité**	**Prix**
E1	-2	3	-1
E2	-1	1	0
E3	2	-1	-1
E4	1	-3	2

1) Calculer le vecteur moyen des individus. Qu'en conclure?
2) Calculer la matrice $C(X)$ des covariances
3) Dans le but d'appliquer une ACP non normé, nous pouvons vérifier facilement que C admet une valeur propre nulle (λ_3). On donne aussi $\lambda_1 = \frac{61}{8}$. En déduire λ_2.

Exercice 3

4) Préciser le pourcentage de la quantité d'information projetée sur chaque composante principale, et le pourcentage cumulé. Interpréter ces résultats.

5) On donne :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,8 \\ 0,3 \end{pmatrix} \; et \; V_2 = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,11 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

les vecteurs propres de $C(X)$ associés à $\lambda_1 et \; \lambda_2$ respectivement. Déterminer la matrice des scores des individus.

6) Calculer la saturation des variables et interpréter le cercle de corrélation dans le plan factoriel (CP_1, CP_2).