Optimisation de la frontière efficiente en gestion de portefeuille

Note de synthèse

Encadré par :
Frédéric HAMEL

Réalisé par :
Islem GARAOUCH
Hamdi BEL HADJ HASSINE
Sandra DJUFFO DJOUDA

1 Objectif

Dans ce projet, on s'intéresse au problème d'optimisation de portefeuille. On se positionne du côté de l'investisseur et on essaye de construire un portefeuille efficient à partir d'un certain nombre d'actifs choisis au préalable, en utilisant différentes méthodes statistiques.

La problématique que l'on souhaite résoudre est la suivante : Étant donné les rendements historiques de p actifs, quelle serait la méthodologie pour déterminer les pondérations $(x_i)_{i\in[[1,p]]}$ des actifs afin de constituer un portefeuille qui maximise le rendement espéré à risque donné, ou minimise le risque espéré à rendement donné.

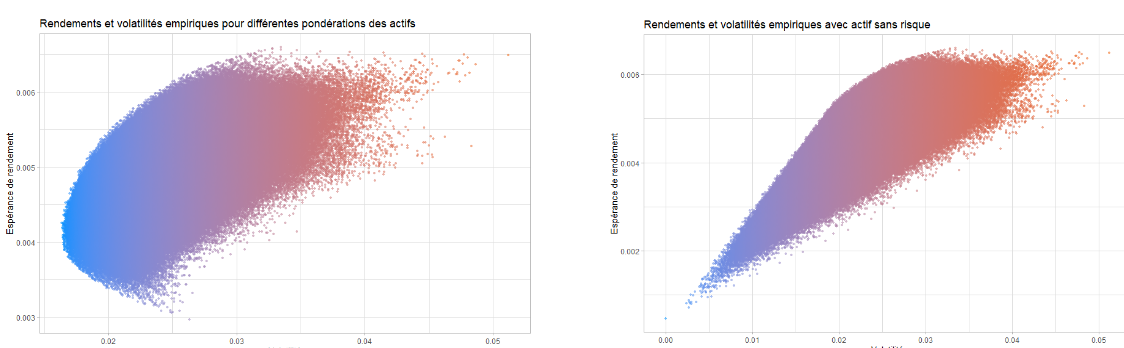
Pour ce faire, on considère dans cette étude les données historiques des principales actions françaises : celles composant l'indice CAC40 auxquelles on ajoute un actif sans risque (OAT de 10 ans). Une étude préliminaire des rendements hebdomadaires de ces 40 actions a permis de réduire la liste des actifs retenus à 15 afin de simplifier l'évaluation du portefeuille. Les critères de sélection des actifs étaient principalement : l'analyse de la stationnarité des rendements, l'analyse du ratio de Sharpe des actifs, l'analyse de l'indépendance entre les actifs et finalement, l'analyse de la normalité des rendements des actifs.

2 Modélisation statistique

Le modèle de Markowitz

Dans une première approche pour construire les portefeuilles optimaux, nous nous plaçons dans le cadre des hypothèses de Markowitz et nous cherchons à déterminer les portefeuilles minimisant la volatilité à espérance de rendement fixée.

Une simulation des pondérations sans vente à découvert $X \in \{k.10^{-1}, k \in [[0..10]]\}^{15}$ tels que $\sum_{i=1}^{15} X_i = 1$ permet de visualiser les rendements et volatilités possibles, où chaque point est un portefeuille, et la frontière gauche en forme d'hyperbole représente la frontière efficiente. On voit ici la nécessité d'ajouter l'actif sans risque dans notre portefeuille ; on obtient des volatilités plus faibles pour les mêmes rendements comme le montrent les deux figures suivantes :



(a) Sans actif sans risque

(b) Avec actif sans risque

FIGURE 1 – Simulation des rendements et volatilités sur l'espace des pondérations des actifs

L'approche de Markowitz nous permet d'obtenir les poids du portefeuille tangent (qui définit la frontière efficiente), dont nous analysons les caractéristiques notamment la sensibilté et la stabilité.

On constate que les poids du portefeuille varient considérablement selon la période d'estimation des paramètres. Cela provient de la variation à long terme des rendements entre périodes haussières et périodes baissières,et indique que cette approche moyenne-variance est sensible à la longueur de la période d'estimation. Quant à la stabilité des poids estimés sur une fenêtre glissante des données, la variation des poids dans le temps est modérée. Cette méthode est donc convenable pour constituer un portefeuille d'investissement à moyen ou long terme.

Optimisation Moyenne-CVaR

L'indicateur CVaR est souvent utilisé comme mesure de risque altenative à la mesure simpliste de la variance permettant ainsi d'adapter l'optimisation moyenne-variance de Markowitz.

On procède de la même manière que pour le modèle de Markowitz ; on trace la frontière efficient en utilisant cette nouvelle mesure de risque, comme le montre la figure ci-dessous, puis on étudie le portefeuille trouvé : Les poids du portefeuille sont stables dans le temps et ne varient pas fortement, mais les portefeuilles obtenus sont les moins diversifiés parmi les méthodes étudiées, avec un poids excessif accordé à l'une des actions. Bien que cette méthode soit basée sur la minimisation de la CVaR, les backtests hors-échantillon montrent que la CVaR des portefeuilles obtenus reste élevée.

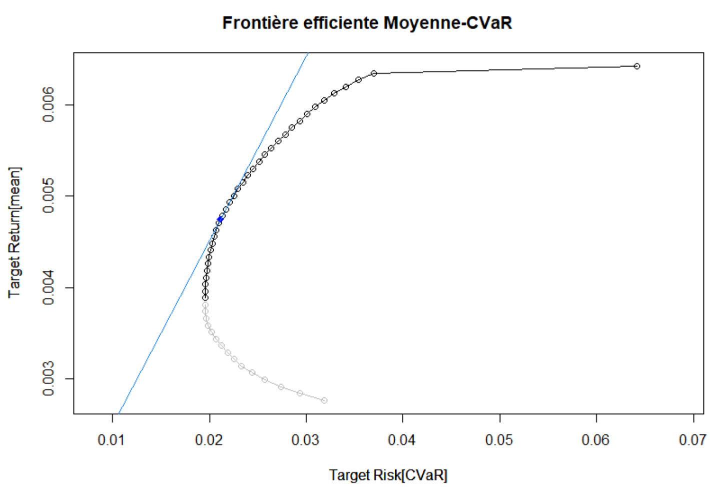


Figure 2 – Frontière efficiente Moyenne-CVaR

Modèle EWMA

Appliquée à la théorie moderne du portefeuille, la moyenne mobile exponentielle fournit une nouvelle approche pour l'estimation des espérances de rendement et de la matrice de covariance basées sur le lissage des données historiques par une moyenne mobile pondérée en accordant plus de poids aux observations les plus récentes. L'approche EWMA diffère des précedentes par l'introduction d'un paramètre λ (facteur de lissage) qui est crucial pour le calcul du rendement et de la variance. Dans le cadre de notre étude, nous choisissons la valeur de λ qui minimise l'erreur d'estimation du rendement et de la variance de la période de test. La valeur obtenue est égale à 0.985. Avec les estimations de l'espérance de rendement et de la matrice de covariance, nous avons tracé la frontière efficiente (présentée sur la fig. 3) puis généré le portefeuille optimal à partir de nos actifs ce qui nous as permis d'étudier sa stabilité au cours du temps et sa sensibilité.

D'une part, la visualisation des poids obtenus en calculant le portefeuille tangent sur une période de 2 ans et sur une période de 4 ans montre que les poids des deux périodes sont plus proches qu'avec

la méthode Markowitz standard puisque l'estimation EWMA donne plus de poids aux observations récentes. Cela montre que cette méthode est moins sensible à la période de calcul.
D'autre part, les fluctuations des poids des actifs au cours du temps sont prononcées. Les poids des actifs varient plus fortement que ceux des autres méthodes évaluées. Ce modèle est ainsi plus réactif et donc plus adapté à des investissements de court terme. On note que la majorité des poids est partagée par deux actions, mais les portefeuilles restent plus diversifiés qu'avec la méthode CVaR.

Modèle GARCH

Après l'approche EWMA, nous adaptons l'approche GARCH en prévoyant la matrice de covariance des rendements par un modèle DCC-GARCH ajusté aux rendements historiques. Ce modèle est choisi comme une méthode alternative plus avancée que le modèle EWMA pour la modélisation des covariances variables dans le temps. Elle permet notamment de capter l'effet de grappe (ou cluster), i.e. le fait stylisé que les rendements élevés (positifs ou négatifs) ont tendance à se suivre, et les rendements faibles également, créant des grappes de volatilité.

On procède de façon similaire aux modèles précédents pour étudier l'évolution des poids du portefeuille tangent au cours du temps. On remarque que les poids obtenus sont proches de ceux de l'approche standard de Markowitz. On observe quelques fluctuations à la fin de la période étudiée mais l'évolution des poids reste globalement stable et adaptée pour un portefeuille de moyen à long terme. On note cependant que le backtest de cette méthode donne un rendement modeste pour une volatilité élevée relativement aux autres méthodes.

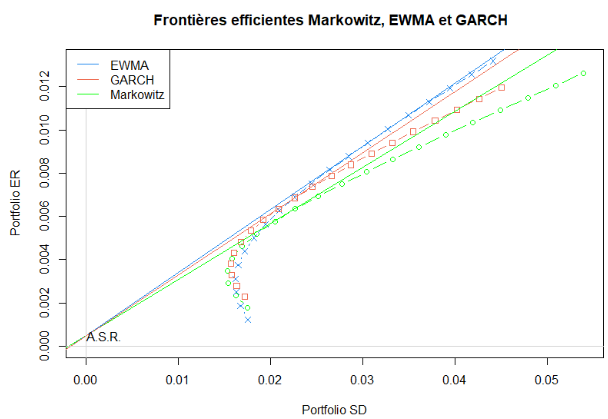


FIGURE 3 – Frontières efficientes de Markowitz, EWMA et GARCH

Les trois frontières efficientes obtenues par les estimations standard, EWMA et GARCH sont tracées en fig. 3. on remarque que celles-ci sont proches mais la frontière efficiente EWMA prévoit un risque plus faible pour le même rendement, suivie par la frontière GARCH.

Contraction linéaire

Afin de modérer les valeurs extrêmes et de rapprocher les estimations d'une valeur de référence, les méthodes de contraction ou shrinkage sont recommandées par la littérature. On applique ici une contraction linéaire en remplaçant la matrice de covariance empirique par une combinaison convexe de celle-ci et de la matrice identité.

Les estimations montrent que cette méthode conduit à un portefeuille bien diversifié avec des poids proches pour tous les actifs et stables au cours du temps. Cela s'explique par le rapprochement des variances et des covariances vers des valeurs communes pour tous les actifs ce qui favorise l'équi-répartition des poids. Malgré la simplicité de cette méthode, son backtest affiche un rendement considérablement supérieur au méthodes précédentes bien que ses mesures de risque ne montrent pas d'amélioration notable.

Portefeuille équi-réparti

Afin de mettre en perspective ces différentes méthodes, on construit un portefeuille équi-réparti qui donne le même poids pour tous les actifs.

Bien que triviale, on s'aperçoit que cette méthode fournit le meilleur rendement parmi toutes les méthodes évaluées, ce qui confirme une observation empirique assez répandue en finance de marché affirmant que les méthodes simples sont souvent aussi performantes voire meilleures que les méthodes complexes.

Le tableau suivant récapitule les résultats des backtests hors-échantillon :

Méthode	Rendement	Volatilité	$CVaR_{5\%}$
Markowitz	12.8 %	0.020	-0.044
CVaR	12.3 %	0.0196	-0.043
EWMA	12.3 %	0.0193	-0.041
GARCH	12.0 %	0.0204	-0.046
Contraction	15.7 %	0.0202	-0.042
Equi-réparti	16.15 %	0.0193	-0.040

3 Conclusion

Tout au long de ce projet, nous avons implémenté et testé différents modèles dans le but d'identifier les modèles de construction de portefeuille les plus favorables pour maximiser le rendement tout en minimisant le risque de perte. Ces méthodes diverses allaient du modèle de Markowitz, basé sur une simple optimisation moyenne variance, à des modèles de séries temporelles plus sophistiqués tels que le modèle de GARCH et le modèle EWMA. Une analyse détaillée de ces différents modèles montre qu'on obtient de meilleurs résultats avec nos données des CAC40 en adoptant le modèle EWMA ou bien la contraction linéaire. Cependant, Les approches GARCH et CVAR s'avèrent moins performantes sur nos données : L'approche CVaR n'est pas efficace pour réduire le risque de queue de distribution, et l'approche GARCH produit des résultats hors-échantillon modestes.

Ce projet nous a également permis d'établir un certain nombre de faits stylisés relatifs aux méthodes considérées : La vente à découvert amplifie les erreurs d'estimation et conduit à des résultats hors-échantillon médiocres et les méthodes les plus simples comme l'équi-répartition s'imposent comme les plus efficaces.

Cependant, ces résultats sont conditionnés par les données choisies. Une évaluation sur des actions américaines confirme que les résultats hors-échantillon sont généralisables pour des portefeuilles différents, mais une évaluation sur des périodes différentes reste nécessaire pour pouvoir généraliser les résultats obtenus. En outre, diverses autres méthodes tout aussi intéressantes peuvent être étudiées, comme les estimateurs robustes, les méthodes machine learning, la combinaison de plusieurs méthodes, et évidemment l'adaptation des modèles d'optimisation de portefeuilles habituels à une optique de mean-reversion, qui semble être une approche prometteuse.