



RAPPORT DU PROJET DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

---

# OPTIMISATION DE LA FRONTIERE EFFICIENTE EN GESTION DE PORTEFEUILLE

---

Encadré par :  
Frédéric HAMEL

Réalisé par :  
Islem GARAOUCH, Sandra DJOUDA, Hamdi BELHADJ HASSINE

## **Remerciement**

Nous tenons à remercier M. Frédéric Hamel pour son accompagnement tout au long de ce projet et pour ses remarques très pertinentes sur les différents choix que nous étions amenés à effectuer. Nous remercions également M. Chrisrian Francq pour l'examen du présent rapport et la participation à la soutenance en vue d'évaluer ce travail. En outre, nous exprimons notre reconnaissance à l'ensemble de l'équipe pédagogique mettant en place ce projet de statistique appliquée, qui nous a permis d'orienter notre réflexion sur ce sujet particulièrement intéressant et enrichissant.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Étude théorique</b>	<b>2</b>
2.1	Le modèle de Markowitz . . . . .	2
2.2	Optimisation Moyenne-CVaR . . . . .	4
2.3	Modèle EWMA . . . . .	4
2.4	Modèle GARCH . . . . .	6
2.5	Contraction linéaire de la variance . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Données utilisées</b>	<b>8</b>
3.1	Choix des données . . . . .	8
3.2	Étude statistique des rendements . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Approche empirique</b>	<b>10</b>
4.1	Construction de la frontière efficiente de Markowitz . . . . .	10
4.2	Optimisation Moyenne-CVaR . . . . .	14
4.3	Estimations par EWMA . . . . .	15
4.4	Estimation de la variance par GARCH . . . . .	17
4.5	Contraction linéaire . . . . .	18
4.6	Diversification maximale : portefeuille équi-réparti . . . . .	19
4.7	Backtest sur de nouvelles données . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>23</b>

# 1 Introduction

De par la forte croissance de la valorisation des marchés boursiers dans le monde ayant dépassé les 70.000 milliards d’euros, les montants de plus en plus élevés gérés par les fonds d’investissements, mais aussi la généralisation des investissements boursiers pour le public, la problématique de construction du portefeuille devient particulièrement pertinente.

De nombreuses approches ont été développées depuis les années 1950 pour répondre à cette problématique et plusieurs théoriciens se sont penchés sur l’analyse et la modélisation de paramètres de mesure de la performance des portefeuilles. À cet effet, Markowitz est considéré comme le premier à modéliser la relation « Risque / Rentabilité » en développant la Théorie moderne du portefeuille (1952), pilier historique de la modélisation des portefeuilles financiers.

Dans le cadre de ce projet de statistique appliquée, on se propose de construire un portefeuille optimal à partir d’un panel d’actifs financiers sélectionnés au préalable. Nos critères d’optimalité reposent sur la dualité rendement/risque qui représente le dilemme auquel sont confrontés la majorité des investisseurs : Les titres ayant les meilleurs rendements sont souvent les plus risqués lorsque la tendance devient baissière. On se propose alors d’étudier les méthodologies permettant, étant donné un panel d’actifs, de déterminer les portefeuilles maximisant le rendement espéré sous condition de risque majoré.

La première partie de ce travail sera consacrée à la présentation de la théorie de Markowitz, sa résolution d’après la méthode de Merton<sup>1</sup> ainsi qu’à son application empirique. La deuxième partie visera ensuite à remédier aux limites de cette théorie en adaptant ses paramètres, notamment la modélisation de la volatilité grâce aux modèles EWMA et GARCH et la mesure de risque à l’aide de la CVaR dans le but d’aboutir à des résultats plus satisfaisants.

Pour ce faire, on constitue dans un premier temps une base de données des rendements historiques d’un panel d’actifs financiers sur laquelle on travaillera au cours de ce projet. Dans un second temps, une étude statistique des rendements des actifs a été effectuée, permettant de réduire le nombre des actifs retenus à 15. Diverses méthodes sont ensuite étudiées afin de construire un portefeuille ayant un rapport rendement-risque optimal.

**Problématique générale :** Étant donné les rendements historiques de  $p$  actifs, fournir une méthodologie pour déterminer les pondérations  $(x_i)_{i \in [[1, p]]}$  de ces actifs pour constituer un portefeuille qui maximise le rendement espéré à risque donné, ou minimise le risque espéré à rendement donné.

## 2 Étude théorique

Cette section présente les éléments théoriques derrière la méthodologie suivie dans le projet. La première méthode étudiée s'inscrit dans le cadre de la théorie moderne du portefeuille et utilise l'approche moyenne-variance de Markowitz pour maximiser le rendement à risque donné où le risque est défini par la volatilité du portefeuille, calculée par l'écart-type de ses rendements.

De nouvelles méthodes sont ensuite explorées pour adapter l'approche de Markowitz dans le but d'optimiser la frontière efficiente et construire un portefeuille ayant un rapport rendement/risque maximal. Parmi celles-ci figurent la méthode CVaR pour minimiser le risque des pertes excessives, EWMA pour mieux tenir compte de la dynamique récente des rendements, GARCH pour mieux modéliser la volatilité des actifs, équi-répartition pour une diversification maximale, et contraction linéaire pour réduire les erreurs d'estimation. Les résultats empiriques obtenus sont présentés dans la partie 3.

### 2.1 Le modèle de Markowitz

La théorie moderne du portefeuille<sup>2</sup> définit une méthode de construction de portefeuilles efficients basée sur deux indicateurs : le risque et la rentabilité. La théorie de Markowitz repose sur plusieurs hypothèses fondamentales qui sont détaillées en annexe.

#### Problématique du modèle de Markowitz :

Un portefeuille efficient selon la théorie de Markowitz est un portefeuille qui minimise le risque (mesuré par la volatilité i.e. l'écart-type des rendements) pour un niveau d'espérance de rendement donné, ou de manière équivalente, celui qui maximise l'espérance de rendement pour un risque donné.

Soit P un portefeuille, de rendement  $r_p$ , composé de n actifs caractérisés par leurs rendements respectifs  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . On pose  $x_i$  la proportion de l'actif i dans le portefeuille P. On a alors  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Notons  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $R = (r_1, \dots, r_n)^T$ ,  $\mu = E(R)$ , et  $\Sigma = \text{Var}(R)$  la matrice de covariance des actifs.

L'espérance de rendement du portefeuille P est donnée par :

$$E(r_p) = E\left(\sum_{i=1}^n x_i r_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i) = X^T \mu$$

On a également,

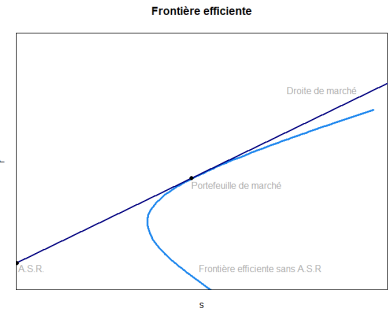
$$\text{Var}(r_p) = \text{Var}(X^T R) = X^T \Sigma X$$

Résoudre le problème de Markowitz consiste à déterminer le portefeuille P solution de :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \text{Var}(r_p) \quad \text{s.c.} \quad E(r_p) = r \text{ (niveau de rentabilité fixé) et } \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation quadratique sur un espace convexe, qu'on peut résoudre par le Lagrangien. On démontre alors<sup>1</sup> que le portefeuille minimisant la variance pour un rendement  $r$  est défini par  $X^* = rX_0^* + X_1^*$ , avec  $X_0^* = \frac{1}{d}(c\Sigma^{-1}\mu - b\Sigma^{-1}i)$  et  $X_1^* = -\frac{1}{d}(b\Sigma^{-1}\mu - a\Sigma^{-1}i)$ , où  $a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$ ,  $b = \mu^T \Sigma^{-1} i$ ,  $c = i^T \Sigma^{-1} i$ ,  $d = ac - b^2$ , et  $i = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ .

On constate alors que les poids des actifs sont des fonctions linéaires du rendement désiré. Une propriété intéressante des portefeuilles efficients est qu'ils sont tous donnés par les combinaisons linéaires de deux portefeuilles efficients quelconques. On montre également que la frontière efficiente est donnée par l'équation  $\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{d}(cr_{\text{eff}}^2 - 2br_{\text{eff}} + a)}$  définissant une hyperbole dans le plan  $(\sigma, r)$ .



En ajoutant un actif sans risque, la frontière efficiente devient alors la droite de marché passant par l'actif sans risque et tangente à la frontière hyperbolique. On montre alors que le point de tangence, appelé portefeuille de marché, présente le ratio de Sharpe maximal, et que tout portefeuille efficient (sur la droite de marché) est une combinaison linéaire de l'actif sans risque ( $r_f$ ) et du portefeuille de marché ( $r_m$ ), de rendement  $r_{\text{eff}} = \lambda r_m + (1 - \lambda)r_f = \lambda(r_m - r_f) + r_f$ , de volatilité  $\sigma_{\text{eff}} = \lambda \sigma_m$ , donc l'équation de la droite de marché est donnée par :  $r_{\text{eff}} = r_f + \frac{r_{\text{eff}} - r_f}{\sigma_m} \sigma_{\text{eff}}$

On note qu'il existe une version du problème sans vente à découvert, c'est-à-dire avec les contraintes  $x_i \geq 0 \forall i$ . Dans ce cas la résolution par Lagrangien n'est plus applicable et des approches de programmation quadratique deviennent nécessaires pour résoudre le problème d'optimisation de Markowitz.

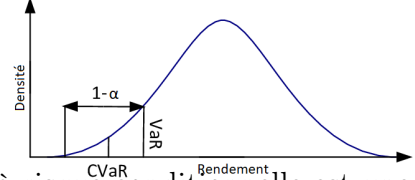
### *Les limites du modèle de Markowitz :*

La Théorie moderne du portefeuille a le mérite d'être une approche relativement intuitive pour théoriser la construction d'un portefeuille d'actifs et permet de montrer l'utilité de la diversification pour diminuer la volatilité du portefeuille. Cependant, on se rend vite compte des limites de l'approche Moyenne-Variance dans la pratique. Outre la difficulté fondamentale d'estimation des paramètres et les hypothèses restrictives du modèle comme la stationna-

rité des rendements, La modélisation de chaque actif par un rendement et une volatilité est simpliste, et les investisseurs sont souvent intéressés par des indicateurs plus avancés qui prennent en compte le risque de queue de distribution tels que la VaR et la CVaR.

## 2.2 Optimisation Moyenne-CVaR

Uryasev et Rockafellar<sup>3</sup> proposent en 1999 une méthode d'optimisation moyenne-CVaR comme alternative à l'approche moyenne-variance de Markowitz. La CVaR ou Valeur à risque conditionnelle est une mesure de risque quantifiant le risque de queue de distribution et vaut le rendement espéré dans les  $\alpha\%$  cas les plus défavorables :  $\text{CVaR}_\alpha = \mathbb{E}(r|r \leq q_\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_u du$ , où  $q_\alpha = \text{VaR}_\alpha$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi du rendement  $r$ .



Avec la même notation de la partie 2.2 ( $r_p = X^T R$ ), le problème d'optimisation moyenne-CVaR s'écrit :

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \text{CVaR}_\alpha(r_p) \quad \text{s.c.} \quad E(r_p) = r \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Dans le cas d'estimation à partir de données historiques supposées discrètes, Uryasev et Rockafellar proposent une approximation de ce problème pour qu'il soit résolvable par les méthodes de programmation linéaire, qui s'écrit :

$$\max_{X, \gamma, z_s} \gamma - \frac{1}{\alpha S} \sum_{s=1}^S z_s \quad \text{s.c.} \quad z_s \geq 0, \quad z_s \geq \gamma - f_{r_p}(s), \quad E(r_p) = r \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

où  $(f_{r_p}(s))_{s \in \{1, \dots, S\}}$  sont des réalisations possibles et équiprobables du rendement de  $r_p$  échantillonnées à partir des données historiques ou simulées par Monte Carlo.

Une limite commune des approches moyenne-variance et moyenne-CVaR est la sensibilité à la durée sur laquelle les estimations sont calculées : en changeant la période d'estimation, on constate que le comportement des poids composant le portefeuille de marché devient erratique, d'où l'intérêt de considérer des moyennes mobiles de type EWMA qui permettent de capter la dynamique récente du marché.

## 2.3 Modèle EWMA

Le modèle EWMA (Exponentially-Weighted Moving Average) ou moyenne mobile exponentielle a été introduit pour la première fois en 1996 par JP Morgan dans RiskMetrics<sup>4</sup>. Ce

modèle permet de faire des estimations basées sur le lissage des données historiques par une moyenne mobile pondérée.

Il s'agit ici d'une approche permettant de mesurer le rendement et la covariance des rendements des actifs en accordant plus de poids aux observations les plus récentes. Selon cette approche, les périodes de forte volatilité ont généralement tendance à être suivies par des périodes de volatilité élevée et inversement.

Considérons une suite de données  $(x_{t-1}, \dots, x_1)$ . La moyenne mobile exponentielle de paramètre  $\lambda \in ]0, 1[$  de ces observations est :

$$\text{EWMA}(x_{t-1}, \dots, x_1) = \frac{x_{t-1} + \lambda x_{t-2} + \lambda^2 x_{t-3} + \dots + \lambda^{t-2} x_1}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{t-2}} = \frac{(1 - \lambda)}{(1 - \lambda^t)} \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^{i-1} x_{t-i}$$

En considérant la suite  $(r_{t-1}, \dots, r_1)$  de rendements d'un actif financier dans le temps, cette formule donne ainsi une nouvelle approche pour calculer l'espérance des rendements qui était précédemment considérée comme une moyenne mobile pondérée par des poids égaux. La variance et la covariance des actifs sont également exprimés comme des moyenne pondérée selon les équations :

$$\sigma_t^2 = \frac{(1 - \lambda)}{(1 - \lambda^t)} \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^{i-1} (r_{t-i}^2 - \bar{r}) \text{ et } \sigma_{12,t}^2 = \frac{(1 - \lambda)}{(1 - \lambda^t)} \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^{i-1} (r_{1,t-i} - \bar{r}_1)(r_{2,t-i} - \bar{r}_2)$$

où  $\sigma_t^2$  est la valeur estimée de la variance EWMA à la date t qu'on peut utiliser pour prévoir la variance future et  $\sigma_{12,t}^2$  la covariance EWMA entre deux actifs du portefeuille à la date t et sa prévision pour les dates futures.

$\lambda$  est le facteur de décroissance ou de lissage, un poids relatif qui est appliqué aux rendements. Plus sa valeur est élevée, moins la dernière observation affecte l'estimation actuelle. La valeur de  $\lambda$  peut être estimée ou calculée selon la recommandation de RiskMetrics  $K \ln(\lambda) = \ln(to)$  avec  $to$  le niveau de tolérance et  $K$  le nombre d'observations.

Une autre manière plus simple d'écrire les équations précédentes en considérant des longues séries de données ( $t \rightarrow \infty$ ) est :

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \text{ et } \sigma_{12,t}^2 = \lambda \sigma_{12,t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{1,t-1} r_{2,t-1}$$

Ainsi, à travers ces formules, le modèle EWMA sera utilisé pour construire une matrice de covariance EWMA et calculer l'espérance des rendements qui serviront dans le processus d'optimisation moyenne-variance du portefeuille.



On note que le modèle EWMA est paramétré par une seule constante de lissage, choisie indépendamment des valeurs des séries temporelles, et pour tous les rendements. En outre ce modèle ne tient pas compte de l'hétéroscédasticité des rendements et des grappes de volatilité souvent observées en pratique. La modélisation GARCH permettrait de remédier à ces problèmes.

## 2.4 Modèle GARCH

Le modèle GARCH, introduit par Bollerslev en 1986, tient compte des variations temporelles de la volatilité. Il prend en considération la variance des rendements des périodes précédentes et les chocs aléatoires pour modéliser les rendements futurs, captant ainsi le caractère stochastique de cette variance. En plus, ils présentent une dynamique non linéaire qui permet de capter l'impact du coefficient d'asymétrie relevé dans les séries financières.

Ce modèle est largement utilisé autant dans la pratique que dans les travaux académiques. L'estimation de volatilité ainsi obtenue est perçue comme un processus générant des données réalistes par beaucoup d'institutions financières qui l'appliquent quotidiennement.

### Présentation du modèle :

Le modèle GARCH dépend principalement de deux paramètres à spécifier : le nombre de retards des carrés des chocs (p) et des variances conditionnelles (q) à considérer, d'où sa forme générale GARCH(p,q). Il s'écrit sous la forme :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

où  $r_{t-i}^2$  désigne le carré du rendement historique,  $\sigma_{t-j}^2$  désigne l'estimation historique de la variance, et  $\alpha, \beta$  sont les paramètres du modèle ajustés en fonction des données.

Le modèle GARCH(1,1) est le plus utilisé pour capter de manière efficace l'effet de grappe (ou cluster), i.e. le fait stylisé que les rendements élevés (positifs ou négatifs) ont tendance à se suivre, et les rendements faibles également, créant des grappes de volatilité.

Ce modèle est représenté par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

Le modèle DCC-GARCH est une généralisation multivariée du modèle GARCH permettant de prévoir la covariance des variables. L'idée sous-jacente consiste à décomposer la matrice de covariance, que l'on notera par la suite  $H_t$ , en une matrice des écarts-types conditionnels notée  $D_t$  et une matrice des corrélations conditionnelles notée  $R_t$ , variables dans le temps. La dynamique du modèle peut ainsi s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} r_t = \mu_t + a_t \\ a_t = H_t^{\frac{1}{2}} z_t \\ H_t = D_t R_t D_t \end{cases}$$

avec  $r_t$  le vecteur de taille  $n \times 1$  des rendements des actifs à la date  $t$ ,  $\mu_t$  le vecteur des espérances de rendements,  $a_t$  le vecteur des rendements recentrés des actifs, et  $z_t$  un vecteur d'erreurs iid. d'espérance nulle et de variance unité.

Pour simplifier, on se référera par la suite au modèle 'DCC-GARCH' par 'GARCH'. Ce modèle est choisi comme une méthode alternative et plus avancée que le modèle EWMA pour la modélisation des covariances variables dans le temps. L'estimation de la matrice de covariance nous permettra ensuite de tracer la frontière efficiente et calculer les portefeuilles efficients. Cependant cette méthode n'échappe pas non plus aux erreurs d'estimation. Une méthode recommandée par la littérature<sup>5</sup> pour réduire ces erreurs est la méthode Shrinkage ou Contraction.

## 2.5 Contraction linéaire de la variance

La technique de contraction linéaire consiste à rapprocher l'estimateur de départ à contracter  $E$ , d'une valeur cible  $C$  par une combinaison convexe de paramètre  $\lambda$ . L'estimateur contracté est défini par :

$$S = \lambda C + (1 - \lambda)E$$

Cette technique permet de contrôler directement le compromis entre l'erreur d'estimation et l'erreur de modèle. En fait, la matrice de covariance empirique est généralement affectée par une erreur d'estimation relativement forte. Cette erreur peut être réduite en contractant la matrice de covariance empirique vers une cible structurée qui minimise l'erreur d'estimation au prix de l'ajout d'une erreur de spécification en imposant un modèle spécifique  $C$ . Un bon choix de  $\lambda$  permettrait de minimiser les deux erreurs.

La littérature indique que la matrice identité est un bon choix pour estimer la matrice de covariance, étant bien conditionnée et satisfaisant des propriétés statistiques utiles pour réduire l'erreur d'estimation<sup>5</sup>. Nous la choisirons donc comme matrice cible.

## 3 Données utilisées

### 3.1 Choix des données

Dans de cette étude, on considère les données historiques des principales actions françaises : celles cotées dans l'indice CAC40. Une étude préliminaire de ces 40 actions a permis de réduire la liste des actifs retenus à 15 afin de simplifier l'évaluation du portefeuille.

Pour récupérer les données historiques, nous avons utilisé l'API du site AlphaVantage et programmé une fonction qui automatise le téléchargement des données et structure les cours historiques dans un même Dataframe. La mesure de prix retenue est le cours de clôture ajusté (Adjusted close) permettant de tenir compte des dividendes et des éventuels fractionnements. Nous avons choisi de travailler sur les données d'une période de 4 ans s'étendant entre début 2012 et fin 2015 : Une période trop longue ralentira les calculs et simulations alors qu'une période trop courte donnera des résultats moins significatifs. Pour des besoins de backtests, les données de 2016 et 2017 seront également utilisées. En outre, nous avons choisi une périodicité hebdomadaire des cours comme compromis entre les données journalières introduisant plus de bruit et les données mensuelles qui ne tiennent pas compte des fluctuations de court terme.

Il est également intéressant de considérer un actif sans risque et d'évaluer son impact sur notre portefeuille. Pour construire un tel actif, nous avons ajouté à notre base de données un actif de volatilité nulle, c'est-à-dire à rendements constants, dont le rendement annuel est égal au taux d'intérêt d'une OAT de l'état Français (notée AAA) de maturité 10 ans (le taux retenu est celui observé au milieu de la période considérée, égal à 2.458 %).

### 3.2 Étude statistique des rendements

Pour chacun des actifs de la base de données, les rendements logarithmiques ( $\ln(P_t/P_{t-1})$ ) ont été calculés étant donné leur additivité temporelle. Nous étudions ces rendements selon la méthodologie ci-dessous afin de sélectionner des actifs du CAC40 qui nous permettront de construire un portefeuille optimal et de comprendre la loi des rendements.

#### Étape 1 : Analyse de la stationnarité des rendements

La stationnarité consiste à évaluer la stabilité des propriétés probabilistes des séries temporelles au cours du temps. En cas de non stationnarité, les estimations statistiques par les moyennes temporelles seraient inappropriées. Afin de tester la stationnarité des rendements, on applique les tests KPSS et ADF présentés en annexe.

Bien que la visualisation des rendements suggère la présence d'hétéroscédasticité (fig. 14 Annexe), les tests de racine unité (KPSS et ADF) ne permettent pas de rejeter l'hypothèse de stationnarité (ou accepter l'hypothèse de racine unité) des rendements au niveau 5%. Toutes les séries de rendements hebdomadaires des actifs du CAC40 sont donc stationnaires. Ce résultat est prévisible étant donné que la série des rendements logarithmiques correspond à la série différenciée des logarithmes des cotations, et la différenciation permet généralement de stationnariser les séries temporelles régulières.

## **Étape 2 : Analyse des ratios de Sharpe des actifs**

Le Ratio de Sharpe est un indicateur qui mesure la rentabilité d'un portefeuille d'actifs selon son risque en le comparant à l'actif sans risque. Son intérêt est d'identifier les actifs qui procurent le meilleur ratio rentabilité/volatilité. William Sharpe définit ce ratio par la formule  $S_i = \frac{E[r_i - r_a]}{\sigma_i}$  où  $r_i$  est le rendement de l'actif risqué,  $r_a$  le rendement de l'actif sans risque et  $\sigma_i$  est l'écart type de l'actif risqué.

Pour chaque actif du CAC40, nous avons calculé ce ratio annualisé. Seuls les 20 actifs ayant les meilleurs ratios ont été retenus, présentant des ratios dans les normes : entre 1.35 et 0.67.

## **Étape 3 : Analyse de l'indépendance entre les rendements**

Afin de constituer un portefeuille diversifié, il est important de prendre en compte la dépendance entre les rendements au cours du temps. En effet, les rendements d'actifs similaires (secteur d'activité, région géographique...) sont généralement corrélés. Ces corrélations sont à éviter puisque l'étude d'un portefeuille de deux actifs montre que la volatilité du portefeuille est une fonction croissante de la corrélation des actifs.

Sur les 20 actifs précédemment retenus, l'analyse des coefficients de corrélation entre les rendements met en évidence une forte dépendance entre les actifs, remarquable sur le cercle de corrélations issu de l'ACP (Fig. 15 en annexe). De plus, un test d'indépendance basé sur le critère de Hilbert-Schmidt rejette l'hypothèse d'indépendance jointe au niveau 1%. Nous retirons donc de la base les 5 actifs les plus corrélés pour retenir seulement 15 actifs.

## **Étape 4 : Analyse de la normalité des rendements des actifs**

La loi normale est souvent utilisée à des fins de modélisation étant donné les propriétés qu'elle vérifie. Pour évaluer la possibilité de modéliser les rendements par une loi normale, plusieurs tests de normalité sont applicables. Nous nous sommes intéressés aux tests de Shapiro-Wilk, de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling.

Ayant pour hypothèse nulle la normalité de la série, le test de Shapiro utilise une statistique de test basée sur les statistiques d'ordre de l'échantillon tandis que le test de Kolmogorov-Smirnov

mesure l'écart entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition théorique de la loi normale. Le test d'Anderson-Darling est assez similaire à celui de Kolmogorov-Smirnov avec comme avantage une prise en compte différente des valeurs extrêmes.

Sur les 15 actifs retenus, seuls 6 actifs ne permettent pas de rejeter l'hypothèse de normalité pour aucun des 3 tests au seuil de 5%. En effet, comme le montre le diagramme Q-Q des rendements (fig. 17 en annexe), la queue de distribution est significativement plus épaisse que celle de la loi normale. Le test de Jarque-Bera basé sur le Skewness et le Kurtosis permet de détecter 7 actifs dont la distribution n'est pas normale. Bien que les skewness soient proches de 0 (les rendements sont symétriques), le kurtosis normalisé moyen des rendements vaut 1, indiquant une distribution leptokurtique. Cela indique que la modélisation des rendements par une loi normale n'est pas une approche valide.

Pour mieux rendre compte du risque de queue de distribution, on calcule la VaR et la CVaR des rendements au niveau 5%, qui valent respectivement -0.0467 et -0,0642. On peut donc affirmer avec 95% de confiance que les rendements sont supérieurs à -0,0467. Et dans le cas (de probabilité 5%) où le rendement est inférieur à -0,0467, le rendement attendu vaut -0,0642. Ces valeurs sont relativement élevées pour des rendements hebdomadaires ; la prise en compte de ces indicateurs est donc à considérer pour construire et évaluer les portefeuilles.

## 4 Approche empirique

Cette partie présente la méthodologie suivie pour construire les portefeuilles efficients à partir des cours historiques des 15 actifs retenus. Diverses méthodes, à savoir Markowitz standard, CVaR, EWMA, GARCH, équi-répartition et contraction linéaire, sont implémentées sur nos données dans le but de les évaluer, détecter les avantages et inconvénients de chaque méthode et chercher éventuellement la méthode optimale.

### 4.1 Construction de la frontière efficiente de Markowitz

Dans une première approche pour construire les portefeuilles optimaux, nous nous plaçons dans le cadre des hypothèses de Markowitz et nous cherchons à déterminer les portefeuilles minimisant la volatilité à espérance de rendement constante. On rappelle qu'un portefeuille est défini par les pondérations des 15 actifs retenus qui le composent.

D'abord, une méthode de recherche par force brute consiste à effectuer une simulation sur l'ensemble des portefeuilles possibles et de déterminer leurs rendements et volatilités.

Une simulation des pondérations sans vente à découvert  $X \in \{k.10^{-1}, k \in [[0..10]]\}^{15}$  tels que  $\sum_{i=1}^{15} X_i = 1$  permet de visualiser les rendements et volatilités possibles, où chaque point est un portefeuille, et la frontière gauche en forme d'hyperbole représente la frontière efficiente.

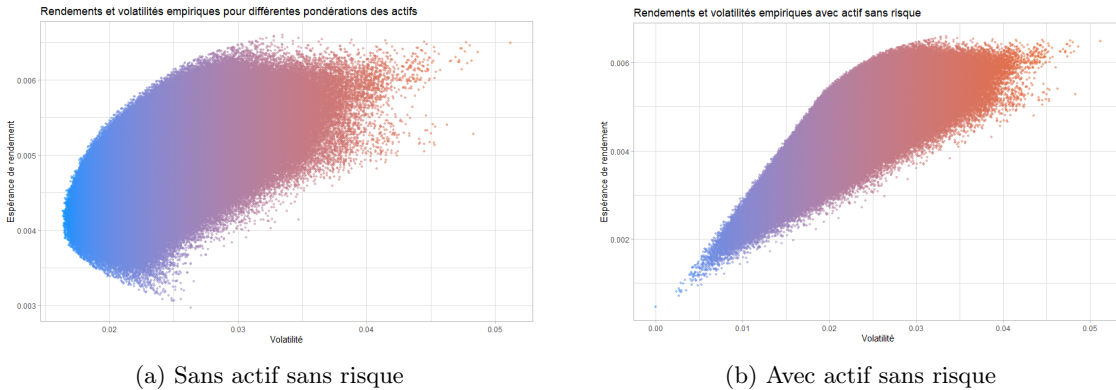


FIGURE 1 – Simulation des rendements et volatilités sur l'espace des pondérations des actifs

En ajoutant un actif sans risque au portefeuille, on constate sur la fig.b que l'on peut atteindre des volatilités moindres pour les mêmes rendements. La droite obtenue, formant la frontière gauche du nuage de points, représente alors les portefeuilles efficients. Pour chaque espérance de rendement, cette droite définit un portefeuille qui minimise la volatilité. On peut retrouver ces résultats analytiquement d'après la partie 2.2, ce qui donne la frontière efficiente suivante :

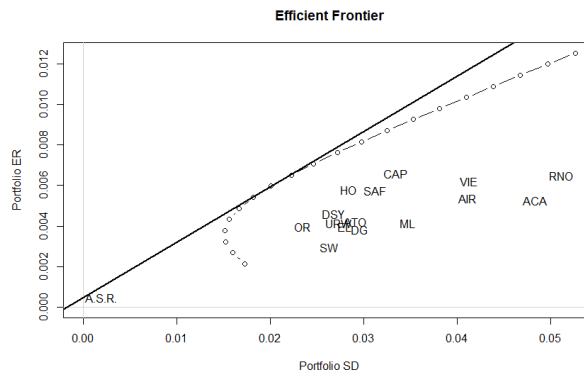


Fig. 5 : Frontière efficiente théorique

On voit bien que la diversification des actifs permet de réduire la volatilité du portefeuille et d'obtenir une volatilité inférieure à chacun de ses composants pour un rendement donné.

Puisque le portefeuille tangent (ou de marché) est celui qui définit la droite de marché, nous le considérons comme le portefeuille optimal et nous l'utiliserons pour évaluer les différentes méthodes.

**Sensibilité à la période de calcul :** L'approche de Markowitz prend en entrée le vecteur des rendements espérés des actions (calculés comme la moyenne des rendements hebdomadaires) et leur matrice de covariance empirique, et détermine en sortie les poids des actifs constituant le portefeuille. Afin d'évaluer empiriquement la sensibilité de cette méthode à la période sur laquelle la moyenne et la variance des rendements sont calculés, on trace les poids obtenus avec les données de 2 ans (2014-15) et de 4 ans (2012-15) :

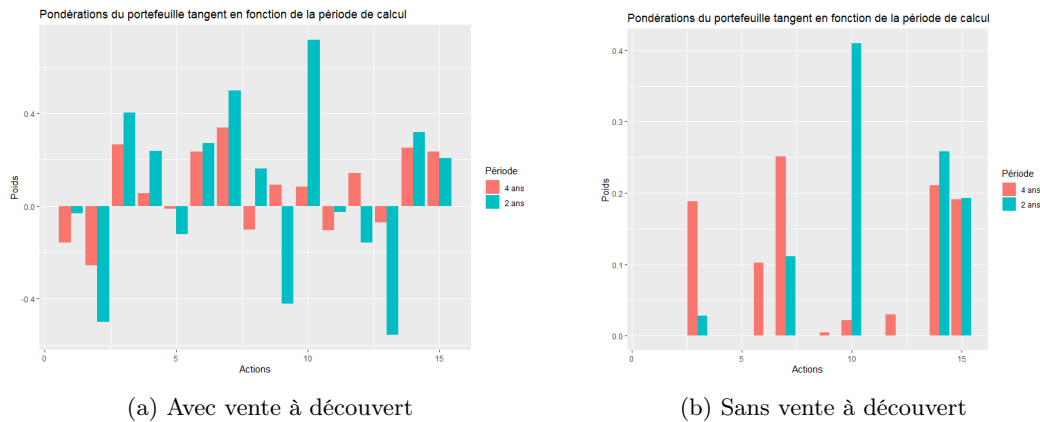


FIGURE 2 – Variation des poids obtenus selon la période de calcul

On remarque que dans les deux cas les poids varient considérablement. Cela provient de la variation à long terme des rendements entre périodes haussières et périodes baissières, et indique que cette approche moyenne-variance est sensible à la longueur de la période d'estimation des paramètres. On constate également que la contrainte de non-vàd conduit à la sélection d'un nombre réduit d'actifs : 5 pour le portefeuille de 2 ans et 8 pour le portefeuille de 4 ans. Une plus grande période permet donc de mieux diversifier les investissements.

**Stabilité :** Afin d'évaluer la stabilité dans le temps (ou la réactivité) du portefeuille tangent, on calcule les portefeuilles efficients sur une fenêtre glissante des données historiques : pour chaque semaine de 2016 à 2017 inclus on calcule la moyenne et la variance des rendements des 4 années précédant cette semaine, et on les utilise pour calculer le portefeuille tangent à chaque semaine. Cela permet d'obtenir sur la fig. 3 une visualisation de l'évolution des poids du portefeuille tangent.

On observe que dans les deux cas (avec ou sans vente à découvert) la variation des poids dans le temps est modérée. Selon ce critère, cette méthode est donc convenable pour constituer un portefeuille d'investissement à moyen ou long terme.

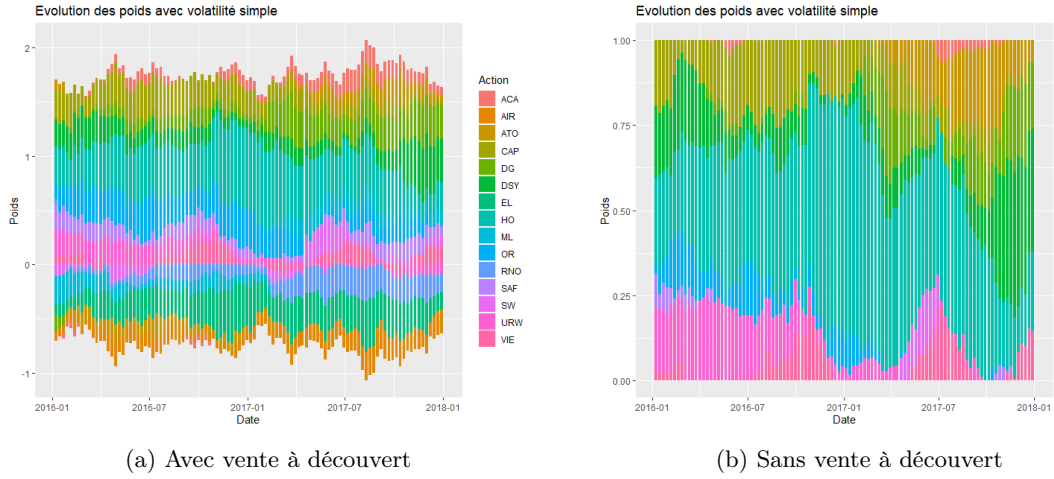


FIGURE 3 – Estimation des poids sur une fenêtre glissante des rendements

**Backtest :** Dans cette partie on s'intéresse au rendement réel du portefeuille tangent sur une période hors-échantillon. On considère un investissement d'horizon 2 ans, effectué en début 2016 suivant le portefeuille optimal calculé sur la période 2012-2015. Par analogie au lexique de machine learning, on appelle période d'entraînement la période 2012-2015 sur laquelle on calcule le portefeuille, et la période de test l'intervalle 2016-2017 sur lequel on calcule le rendement réel obtenu en investissant dans ce portefeuille.

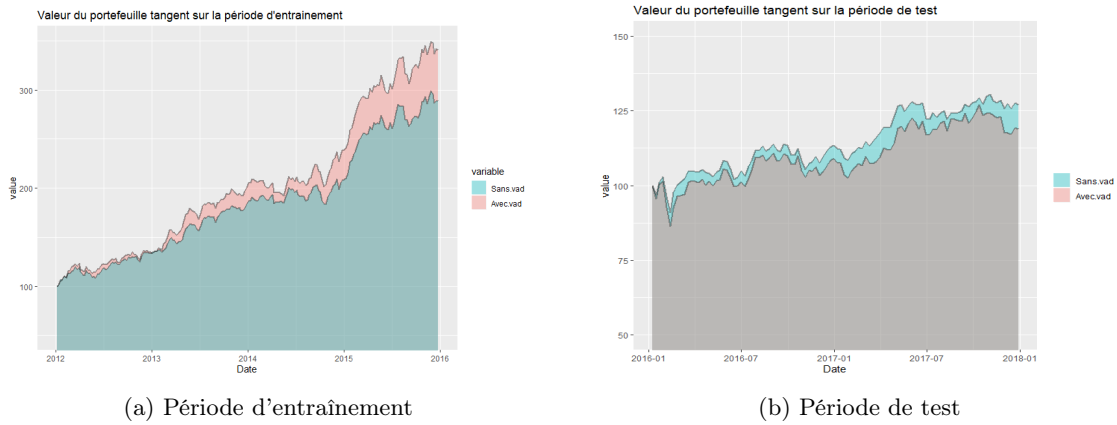


FIGURE 4 – Backtest du portefeuille tangent

Période	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Entraînement (våd)	36.0 %	0.021	-0.039
Entraînement (sans våd)	30.5 %	0.0195	-0.038
Test (våd)	9.2 %	0.024	-0.056
Test (sans våd)	12.8 %	0.020	-0.044



Le portefeuille tangent (sans  $\text{v}\hat{\text{a}}\text{d}$ ) réalise un rendement annuel de 12.8% en période de test, dépassant ainsi le rendement de l'index CAC40 sur cette période valant 11.7%. On constate cependant une large différence entre les rendements en période d'entraînement et en période de test. Cette différence est moins large sans  $\text{v}\hat{\text{a}}\text{d}$  et le rendement est plus élevé. On retrouve ici un résultat empirique souligné par Frost et Savarino<sup>6</sup>. En effet, la restriction de la  $\text{v}\hat{\text{a}}\text{d}$  permet de réduire l'impact des erreurs d'estimation sur le poids du portefeuille et éviter l'instabilité des poids dans certains cas. Considérons par exemple un portefeuille de deux actifs non corrélés, de rendements espérés égaux à 10% et de même volatilité. En appliquant le modèle de Markowitz on serait indifférent entre les combinaisons des deux actifs. Cependant une erreur d'estimation même infinitésimale des rendements, par exemple à 10.01% et 9.99%, résulte en un portefeuille efficient de poids  $(+\infty, -\infty)$  si on n'impose pas de contraintes sur les poids. On peut en déduire que l'approche sans  $\text{v}\hat{\text{a}}\text{d}$  permet d'obtenir de meilleurs portefeuilles. Cela s'est confirmé sur toutes les méthodes utilisées, pour cette raison on omettra l'approche avec  $\text{v}\hat{\text{a}}\text{d}$  dans la suite du travail.

## 4.2 Optimisation Moyenne-CVaR

L'épaisseur de la queue de distribution est un fait stylisé des rendements financiers et suggère que la volatilité simple des rendements est insuffisante pour tenir compte des risques de perte. Pour cette raison, les indicateurs VaR et CVaR sont souvent utilisés comme mesures de risque, et permettent d'adapter l'optimisation moyenne-variance de Markowitz. D'après la littérature examinant ces deux mesures de risque, notamment l'article de Pflug<sup>7</sup>, seule la CVaR vérifie les propriétés d'une mesure cohérente du risque. Puisque l'approximation de la CVaR permet également de d'obtenir un programme d'optimisation linéaire, on se restreint à cette mesure du risque.

**Choix du paramètre alpha :** Afin de choisir le niveau  $\alpha$  de la CVaR optimal pour construire la frontière efficiente, on calcule le rendement et la CVaR en période d'entraînement pour différentes valeurs de  $\alpha$ , présentés sur la fig. 18 en annexe. On obtient que les paramètres maximisant le rendement et minimisant la  $\text{CVaR}_5\%$  valent respectivement 0.4 et 0.5, mais avec de tels paramètres (contre-intuitifs) la méthode pourrait perdre son intérêt de minimisation du risque de queue de distribution. On choisit donc  $\alpha = 0.2$  comme compromis pour garder une valeur relativement faible de  $\alpha$ . Cela permet alors d'obtenir la frontière efficiente et les poids glissants tracés en fig. 5 et 6.

**Stabilité :** Les poids des portefeuilles sont stables dans le temps et ne varient pas fortement, mais les portefeuilles obtenus sont les moins diversifiés parmi les méthodes testées, avec un poids excessif pour l'action Thalès (HO).

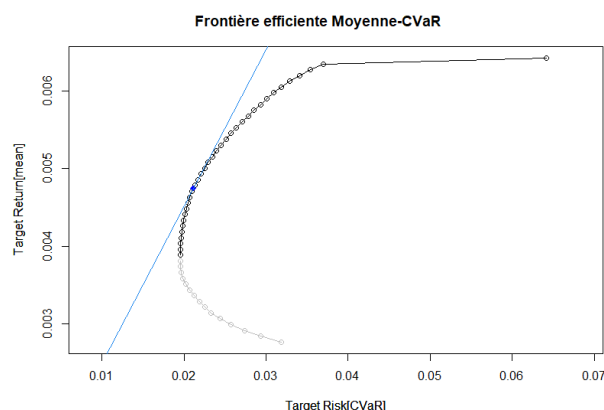


FIGURE 5 – Frontière efficiente Moyenne-CVaR

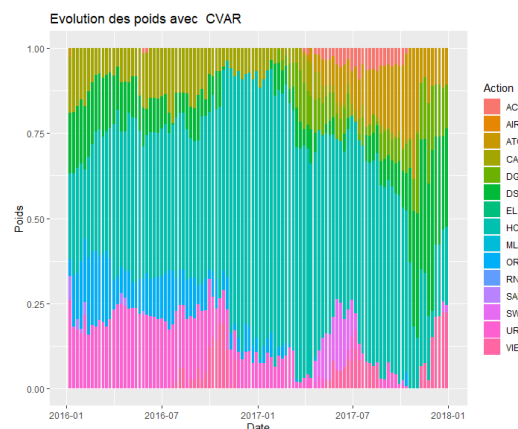


FIGURE 6 – Backtest du portefeuille tangent

**Backtest :** Les résultats du backtest sont résumés ci-dessous :

Période	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Entraînement	30.0 %	0.0193	-0.037
Test	12.3 %	0.0196	-0.043

TABLE 1 – Résultats du backtest du portefeuille tangent

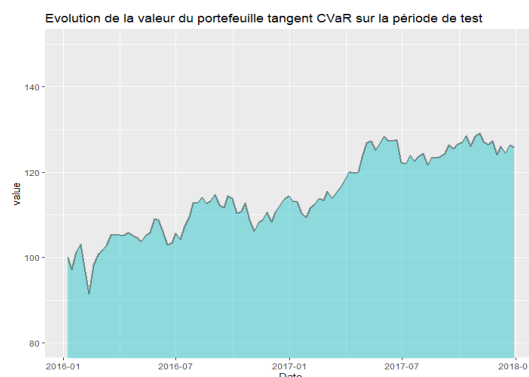


FIGURE 7 – Valeur du portefeuille en période de test

On soulève ici également une différence considérable entre la période d'entraînement et la période de test, qui représente une limite des approches dérivées de Markowitz à savoir la forte dépendance des portefeuilles de la bonne estimation des paramètres. L'estimation est toujours plus proche des données d'entraînement ce qui explique la différence observée. On note ici que les résultats du backtest en période de test sont proches des résultats obtenus par l'approche Markowitz standard, avec un rendement légèrement inférieur. Cependant la valeur de la CVaR reste élevée, cette méthode ne s'avère pas efficace pour réduire ce risque.

### 4.3 Estimations par EWMA

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus à la suite de l'estimation des espérances de rendement et de la matrice de covariance par EWMA. Comme précisé précé-

demment, l'approche EWMA introduit un paramètre  $\lambda$  (facteur de lissage) qui est crucial pour le calcul du rendement et de la variance.

**Détermination du paramètre  $\lambda$  :** on choisit ici la valeur de lambda qui minimise l'erreur d'estimation du rendement et de la variance de la période de test, tracées en fig. 19. On retient donc  $\lambda = 0.985$ . Cette valeur est proche de la valeur 0.981 déduite de la formule  $K \ln(\lambda) = \ln(to)$  recommandée par RiskMetrics<sup>4</sup> avec  $to$  le niveau de tolérance (pris égal à 2%) et  $K$  le nombre d'observations (208).

**Sensibilité à la période de calcul :** La visualisation des poids obtenus en calculant le portefeuille tangent sur une période de 2 ans et sur une période de 4 ans montre que les poids des deux périodes sont plus proches qu'avec la méthode Markowitz standard puisque l'estimation EWMA donne plus de poids aux observations récentes. Cela montre que cette méthode est moins sensible à la période de calcul.



**Stabilité :** Comme on peut le remarquer sur la figure 8 ci dessous, avec le modèle EWMA, les fluctuations des poids des actifs au cours du temps sont prononcées. Les poids des actifs varient plus fortement que ceux des autres méthodes évaluées. Ce modèle est ainsi plus réactif et donc plus adapté à des investissements de court terme. On note que la majorité des poids est partagée par les deux actions HO et ATO, mais les portefeuilles restent plus diversifiés qu'avec la méthode CVaR.

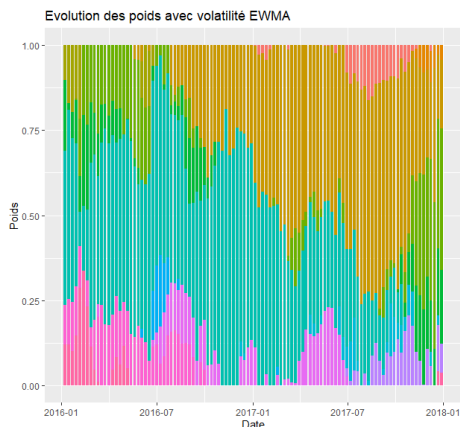


FIGURE 8 – Estimation des poids sur une fenêtre glissante des rendements

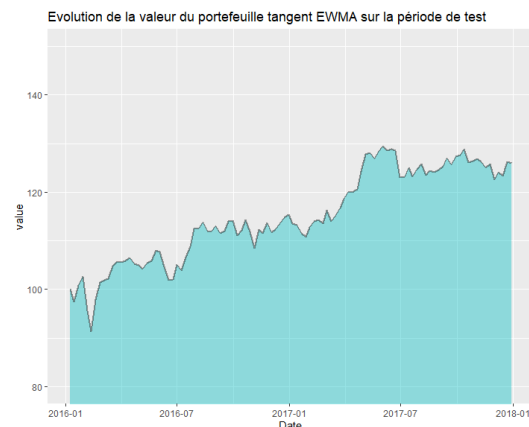


FIGURE 9 – Backtest du portefeuille tangent

**Backtest :** La fig. 9 et le tableau suivant récapitulent les résultats du backtest de cette méthode. On note encore une fois la différence entre période d'entraînement et de test. On souligne également que sur la période de test, la volatilité et la CVaR sont légèrement plus faibles que ceux obtenus par les modèles précédent, et le rendement est égal à celui obtenu par l'approche CVaR.

Période	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Entraînement	31.6 %	0.021	-0.040
Test	12.3 %	0.0193	-0.041

#### 4.4 Estimation de la variance par GARCH

Dans cette partie on adapte l'approche de Markowitz en prévoyant la matrice de covariance des rendements par un modèle DCC-GARCH ajusté à l'aide de la librairie rmgarch. On note que cette méthode automatisée d'estimation du modèle GARCH n'est pas optimale, mais elle est utile pour la partie 4.7. Les résultats de cette méthode sont donc donnés à titre indicatif.

**Frontière efficiente :** Les trois frontières efficientes obtenues par les estimations standard, EWMA et GARCH sont tracées en fig. 10. on remarque que celles-ci sont proches mais la frontière efficiente EWMA prévoit un risque plus faible pour le même rendement, suivie par la frontière GARCH.

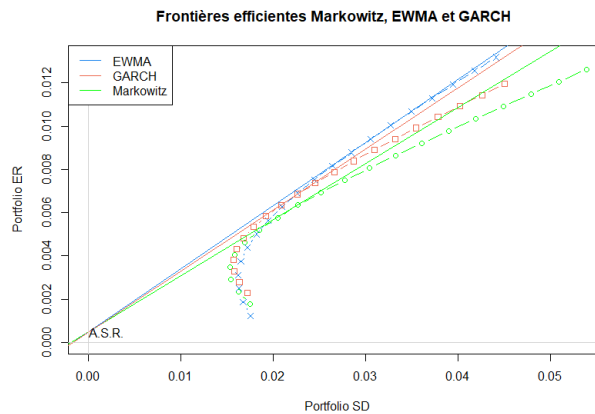


FIGURE 10 – Frontières efficientes de Markowitz, EWMA et GARCH

**Stabilité :** On procède de façon similaire aux modèles précédents pour étudier l'évolution des poids du portefeuille tangent au cours du temps, tracée en fig. 11. On remarque que les

poids obtenus sont proches de ceux de l’approche standard de Markowitz. On observe quelques fluctuations à la fin de la période étudiée mais l’évolution des poids reste globalement stable et adaptée pour un portefeuille de moyen à long terme.

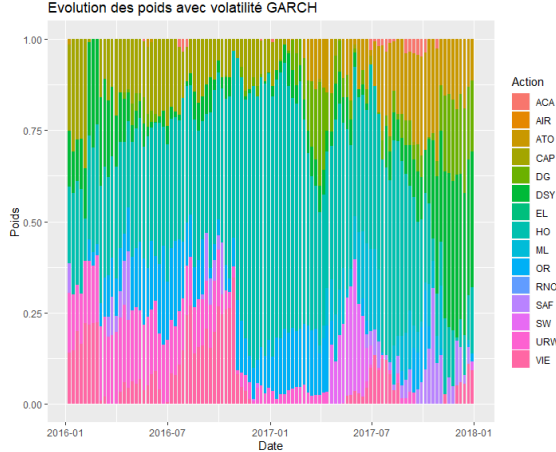


FIGURE 11 – Estimation des poids sur une fenêtre glissante des rendements

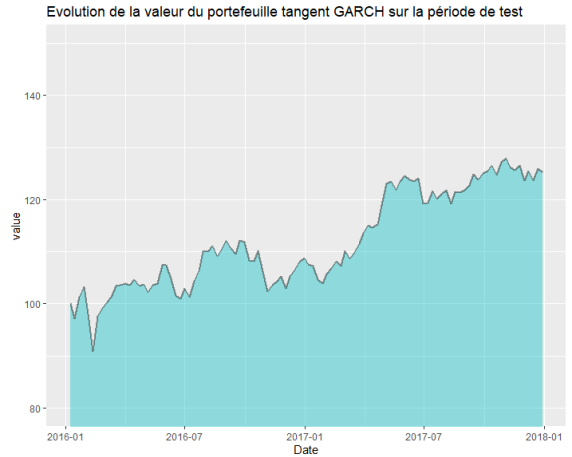


FIGURE 12 – Backtest du portefeuille tangent

**Backtest :** Outre la différence entraînement-test, on relève un rendement relativement faible sur la période de test (12.0%), couplée avec un risque CVaR plus élevé que les autres méthodes. Dans le cas de cette étude empirique, les résultats hors-échantillon ne semblent pas aller de pair avec la sophistication des méthodes appliquées.

Période	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Entraînement	32.1 %	0.0212	-0.041
Test	12.0 %	0.0204	-0.046

#### 4.5 Contraction linéaire

Afin de diminuer les valeurs extrêmes et de rapprocher les estimations d’une valeur de référence, les méthodes de contraction ou shrinkage sont applicables. Par souci de concision, on se restreint à l’application de cette méthode avec la matrice identité comme matrice cible pour estimer la matrice de covariance, pour  $\lambda = 0.5$ . Celle-ci est ensuite utilisée avec les rendements moyens pour calculer le portefeuille tangent par optimisation moyenne-variance de Markowitz. Les principaux résultats sont résumés ci-dessous :

On voit que cette méthode conduit à un portefeuille bien diversifié avec des poids proches pour tous les actifs et stables au cours du temps. Cela s’explique par le rapprochement des

Période	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Entraînement	29.6 %	0.024	-0.047
Test	15.7 %	0.0202	-0.042

TABLE 2 – Résultats du backtest du portefeuille tangent

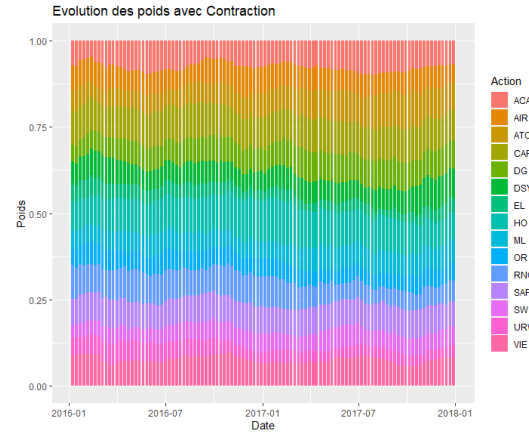


FIGURE 13 – Évolution des poids du portefeuille tangent

variances et des covariances vers des valeurs communes pour tous les actifs ce qui favorise l'équi-répartition des poids. Malgré la simplicité de cette méthode, elle conduit à un rendement considérablement supérieur aux méthodes précédentes bien que ses mesures de risque ne montrent pas d'amélioration.

#### 4.6 Diversification maximale : portefeuille équi-réparti

À titre de comparaison, on fournit ci-dessous et en fig 20 les résultats de backtest pour un portefeuille de pondérations égales. Il s'agit du portefeuille qui maximise la diversification et fournit un benchmark pour mettre en perspective les résultats des autres méthodes.

Période	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Entraînement	27.6 %	0.0223	-0.045
Test	16.15 %	0.0193	-0.040

On note qu'on observe ici aussi la différence entraînement-test, mais cette fois-ci elle est due uniquement à notre sélection des actifs selon le ratio de Sharpe des actions calculé sur la période d'entraînement, d'où la différence se réduit ici à 11.5% contre 18% en moyenne pour les autres méthodes.

Bien que triviale, on s'aperçoit que cette méthode fournit le meilleur rendement parmi toutes les méthodes évaluées, ce qui confirme une observation empirique assez répandue en finance de marché affirmant que les méthodes simples sont souvent aussi performantes voire meilleures que les méthodes complexes.

## 4.7 Backtest sur de nouvelles données

Le tableau suivant récapitule les résultats des backtests (en période de test) :

Méthode	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Markowitz	12.8 %	0.020	-0.044
CVaR	12.3 %	0.0196	-0.043
EWMA	12.3 %	0.0193	-0.041
GARCH	12.0 %	0.0204	-0.046
Contraction	15.7 %	0.0202	-0.042
Equi-réparti	16.15 %	0.0193	-0.040

Afin d'évaluer la pertinence de ces résultats et d'obtenir des backtests plus significatifs, on agrandit notre base de données en incluant 485 actions (non délistées ou fusionnées) du S&P500, totalisant 525 actifs avec ceux du CAC40. Cela nous permet donc de constituer 105 portefeuilles de 5 actifs, en répartissant les actifs de façon à minimiser leur corrélation dans les portefeuilles afin d'améliorer les rendements. On reprend les mêmes périodes d'entraînement et de test et on réalise les backtests, puis on calcule le rendement, volatilité et CVaR<sub>5%</sub> moyens sur les 105 portefeuilles. On obtient :

Méthode	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Markowitz	18.1 %	0.0213	-0.043
CVaR	18.2 %	0.0222	-0.045
EWMA	18.9 %	0.0229	-0.047
GARCH	18.4 %	0.0220	-0.045
Contraction	20.8 %	0.0222	-0.044
Equi-réparti	21.6 %	0.0192	-0.036

Ces résultats sont globalement concordants avec ceux obtenus précédemment, sauf pour EWMA qui devient plus profitable mais également plus risquée. On peut en outre tester si l'écart entre le rendement moyen de deux méthodes est statistiquement non nul grâce à un t-test de Welch. On note que ce test suppose que les rendements des portefeuilles suivent une loi normale, hypothèse valide pour les rendements de 3 méthodes sur les 6 méthodes testées, d'après le test de Kolmogorov-Smirnov à 5%. Le t-test unilatéral d'égalité avec le rendement du portefeuille équi-réparti est rejeté pour les méthodes Markowitz, GARCH et CVaR au niveau 5%, indiquant que ces méthodes ont conduit à un rendement significativement inférieur au portefeuille équi-réparti.

Pour conclure avec une ouverture sur une nouvelle perspective, on note qu'il existe deux familles de stratégies d'investissement : Suivi de la tendance (ou Trend following) qui consiste à acheter les actions qui ont eu le meilleur rendement sur la période passée en espérant que la tendance haussière continue, et Retour à la moyenne (ou Mean reversion) qui consiste à acheter les actions dont le cours a baissé en considérant que ces actions sont survendues ou sous-évaluées et devraient augmenter en valeur. Il est évident que les approches évaluées sont des approches de suivi de tendance, mais on pourrait les adapter dans une perspective de retour à la moyenne en appliquant une symétrie sur les espérances de rendement des actions d'une même portefeuille :  $er_i \leftarrow 2\overline{er} - er_i$ . On obtient alors les résultats suivants :

Méthode	Rendement	Volatilité	CVaR <sub>5%</sub>
Markowitz	18.6 %	0.0196	-0.037
CVaR	19.5 %	0.0214	-0.040
EWMA	19.8 %	0.0222	-0.043
GARCH	19.0 %	0.0190	-0.036
Contraction	23.8 %	0.0208	-0.038
Equi-réparti	21.6 %	0.0192	-0.036

On constate que les résultats de toutes les méthodes s'améliorent, en particulier la méthode de contraction qui donne alors le meilleur rendement. On obtient finalement une méthode ayant un meilleur rendement que le portefeuille équi-réparti, bien que la différence est seulement significative au seuil 10%. L'approche de retour à la moyenne s'avère prometteuse, et il serait intéressant de l'évaluer sur des périodes d'investissement différentes.

## 5 Conclusion

Dans le but d'identifier les modèles de construction de portefeuille les plus favorables pour maximiser le rendement tout en minimisant le risque de perte, nous avons implémenté et évalué sur nos données tout au long de ce projet plusieurs modèles d'optimisation de portefeuille recommandés par la littérature. L'approche standard de Markowitz établit le fondement théorique de l'optimisation moyenne-variance et bien que ses hypothèses initiales soient restrictives, elle a l'avantage d'être adaptable en fonction des méthodes d'estimation et de la mesure de risque envisagée. À l'encontre de nos attentes, l'approche CVaR ne s'avère pas efficace pour réduire le risque de queue de distribution, et l'approche GARCH produit des résultats hors-échantillon modestes. L'approche EWMA semble plus performante, et se

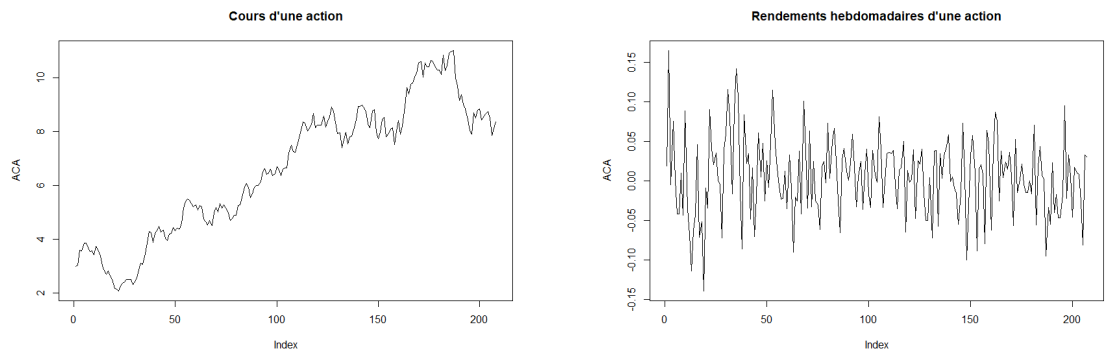


montre particulièrement adaptée à un investissement à court terme avec des poids plus réactifs et moins sensibles à la période de calcul. Il ressort en outre que des modèles plus diversifiés comme la contraction linéaire et l'équi-répartition produisent des rendements élevés à faible risque. Ces conclusions empiriques restent toutefois subjectives et fortement liées aux données choisies. Il serait particulièrement intéressant d'étudier l'impact du changement de la période concernée et de l'horizon d'investissement sur les résultats obtenus.

Ce projet nous a également permis d'établir un certain nombre de faits stylisés relatifs aux méthodes considérées : La vente à découvert amplifie les erreurs d'estimation et conduit à des résultats hors-échantillon médiocres, les méthodes les plus simples comme l'équi-répartition s'imposent comme les plus efficaces, et les portefeuilles efficients de Markowitz ne conduisent généralement pas aux rendements et volatilités espérées.

Ce travail répond à notre curiosité pour explorer différentes variantes d'optimisation du portefeuille et déterminer une éventuelle méthode optimale, qui d'après les résultats obtenus semble rester l'équi-répartition des poids, bien que la méthode de contraction avec inversion des espérances de rendement semble prometteuse. Il est à noter que les parties GARCH et contraction n'ont pas été approfondies et méritent une étude spécifique permettant de les optimiser. En outre, diverses autres méthodes tout aussi intéressantes peuvent être étudiées, comme les estimateurs robustes<sup>8</sup>, les méthodes machine learning, la combinaison de plusieurs méthodes, et évidemment l'adaptation des modèles d'optimisation de portefeuilles habituels à une optique de Mean-reversion, qui semble être une approche prometteuse.

## 6 Annexe



(a) Cours de l'action

(b) Rendement logarithmique hebdomadaire de l'action

FIGURE 14 – Visualisation des données historiques d'une action du CAC40

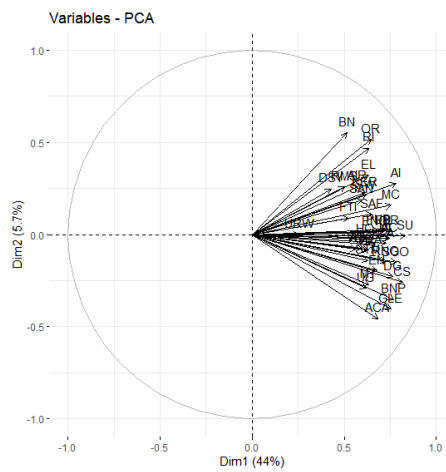


FIGURE 15 – Corrélation des actifs

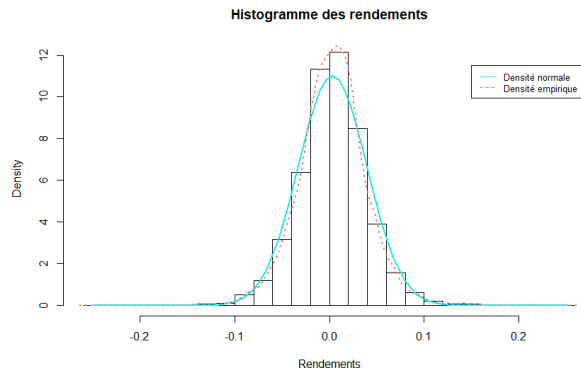


FIGURE 16 – Histogramme des rendements

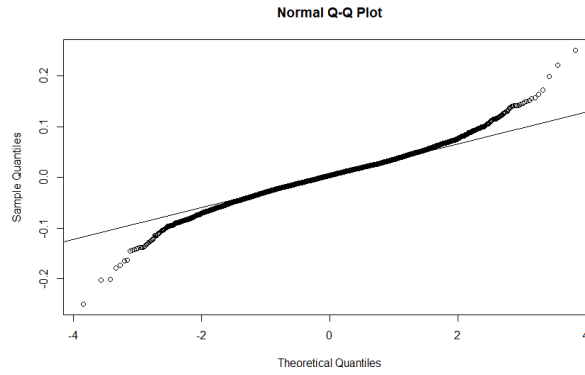
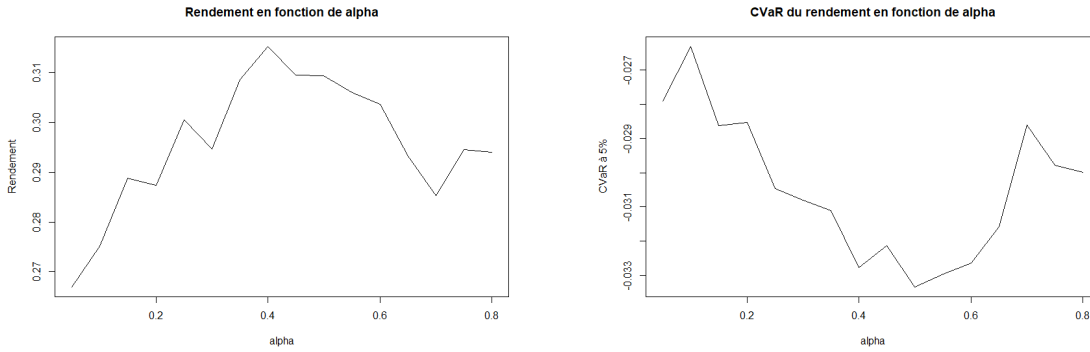


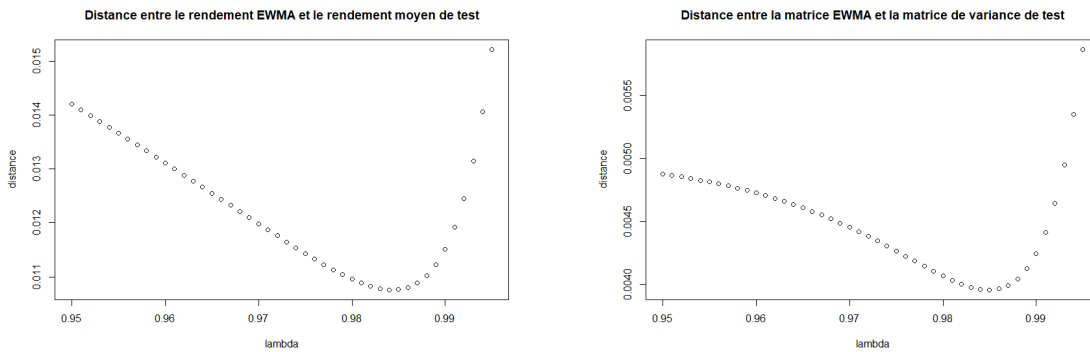
FIGURE 17 – QQ-plot des rendements avec loi normale



(a) Variation du rendement en fonction de  $\alpha$

(b) Variation de la CVaR du rendement en fonction de  $\alpha$

FIGURE 18 – Choix du niveau  $\alpha$  de la CVaR



(a) Erreur d'estimation du rendement en fonction de  $\lambda$

(b) Erreur d'estimation de la matrice de variance en fonction de  $\lambda$

FIGURE 19 – Choix du paramètre de lissage EWMA

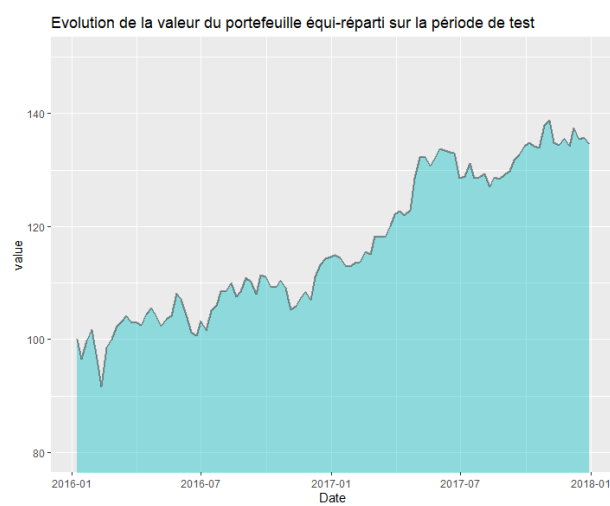


FIGURE 20 – Backtest du portefeuille équi-réparti sur la période de test

### Tests de stationnarité utilisés :

On note  $(r_t)_{t \in \{1..T\}}$  la série des rendements d'un actif donné. Le test KPSS repose sur la régression suivant le modèle :  $r_t = \xi t + m_t + \epsilon_t$ , où  $m_t = m_{t-1} + u_t$  est une marche aléatoire,  $\epsilon_t$  est un résidu stationnaire et  $u_t \sim BB(0, \sigma_u^2)$ , et il a pour hypothèse nulle  $\sigma_u^2 = 0$  correspondant au cas de stationnarité.

Le test ADF (avec constante) se base sur la régression  $r_t - \mu = \sum_{i=1}^p \phi_i (r_{t-i} - \mu) + \epsilon_t$  qui donne  $\nabla r_t = \pi (r_{t-1} - \mu) + \sum_{i=1}^{p-1} \pi_i \nabla r_{t-i} + \epsilon_t$  avec  $\pi = -1 + \sum_{i=1}^p \phi_i$  et  $\pi_i = -(\phi_{i+1} + \dots + \phi_p) \forall i \in \{1, \dots, p-1\}$ . L'hypothèse nulle du test est alors  $1 - \sum_{i=1}^p \phi_i z^i = (1 - z) (1 - \sum_{i=1}^{p-1} \pi_i z^i)$  avec  $1 - \sum_{i=1}^{p-1} \pi_i z^i \neq 0 \forall |z| \leq 1$  correspondant à la présence d'une racine unité, donc la non-stationnarité de la série.

### Les hypothèses du modèle de Markowitz

*Hypothèse 1 :* Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque. Par conséquent, Le rendement d'un actif financier pour toute période future est une variable aléatoire, dont on suppose la distribution déterminée par ses deux premiers moments. L'espérance du rendement correspond au profit, et la variance du rendement correspond au risque.

*Hypothèse 2 :* Tous les investisseurs ont un degré plus ou moins élevé d'aversion vis-à-vis du risque. Ainsi l'utilité des investisseurs est une fonction décroissante du risque et croissante du rendement. Les investisseurs ne sont prêts à prendre plus de risque qu'en échange d'un rendement plus élevé.

*Hypothèse 3 :* Les investisseurs sont rationnels : ils prennent leur décision d'investissement en maximisant leur espérance d'utilité.

*Hypothèse 4 :* Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période. Cette dernière hypothèse permet de mettre en œuvre un modèle de décision qui tient compte du caractère hautement combinatoire du portefeuille.

## Références

- [1] Robert C. Merton. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. 1972.
- [2] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1., Mar., 1952.
- [3] R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk. Sep., 1999.
- [4] J.P.Morgan. Riskmetrics—technical document, p93. 1996.
- [5] Marco Neffelli. Target matrix estimators in risk-based portfolios. *MDPI*, Nov., 2018.
- [6] Frost and James E. Savarino. For better performance : Constrain portfolio weights. 1988.
- [7] Georg Ch. Pflug. Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. 2000.
- [8] Bernhard Pfaff. Financial risk modelling and portfolio optimization with R. *Wiley*, 2016.