Marches aléatoires auto-sécantes

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$: au temps 0, $X_t = (0, ..., 0)$, et à chaque temps t, on choisit pour X_{t+1} un des 2d voisins de la position actuelle (selon une loi uniforme).
On s'intéresse plus précisément à des trajectoires auto-sécantes; i.e. la partie de la trajectoire de la marche aléatoire soit depuis la dernière coupure (temps où la trajectoire s'est coupée elle-même), soit depuis le temps 0 s'il n'y a pas eu encore de coupure.

1.Simuler de telles trajectoires (pour d= 2), représenter la loi de la longueur de telles trajectoires auto-sécantes à différents temps t; est-ce que cette loi semble se stabiliser? Commenter.

2.On propose de modifier l'algorithme précédent de la manière suivante: On génère $N = (2d)k$ trajectoires, où k est un entier. A chaque temps t, on génère N directions de façon équirépartie : k directions de chaque type possible, et on attribue aléatoirement ces N directions aux N trajectoires.Cette approche est-elle valide ? à quelle partie du cours se rattache-t-elle ? La mettre en œuvre, et comparer à la méthode précédente.

3.On souhaite évaluer la probabilité que la taille de ces trajectoires dépasse un certain seuil l. Quel problème cela pose-t-il pour t grand, et $l \leq t$ proche de t ? On souhaite développer un algorithme d'importance sampling pour générer avec une plus forte probabilité des longues trajectoires. Proposer et comparer différentes lois de proposition pour cet algorithme.

4.Question bonus: faire le lien entre la question précédente et la cross-entropy method (la version pour "événements rares", pas celle pour l'optimisation vue en cours) telle que présentée dans l'article que je vous ai envoyé. Proposer une version de cette approche pour le problème considéré et comparer aux algorithmes développés pour la question précédente.