Математическое моделирование

Лабораторная работа № 2

Хамди Мохаммад

2026-02-24

Содержание (i)

1. Вводная часть

Цель работы

Показать, как с помощью математического моделирования можно обосновать стратегию поиска/преследования и получить траекторию, ведущую к перехвату.

Сюжет: в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. В момент краткого прояснения лодка фиксируется на расстоянии k км от катера, затем снова скрывается и уходит по прямой в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раз больше скорости лодки. Требуется определить траекторию катера, обеспечивающую встречу.

Задание

1. Провести рассуждения и получить дифференциальные уравнения для случая, когда скорость катера превосходит скорость лодки в n раз.

Задание

1. Провести рассуждения и получить дифференциальные уравнения для случая, когда скорость катера превосходит скорость лодки в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.

Задание

1. Провести рассуждения и получить дифференциальные уравнения для случая, когда скорость катера превосходит скорость лодки в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.
3. По графикам определить точку пересечения траекторий (момент перехвата).

2. Теория: постановка и вывод модели

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,

Переходим к полярным координатам:

Начальные обозначения и координаты

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k от лодки (вдоль выбранного направления).

Переходим к полярным координатам:

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k от лодки (вдоль выбранного направления).

Переходим к полярным координатам:

- полюс — точка обнаружения лодки,

Начальные обозначения и координаты

Положим $t_0 = 0$.

В момент обнаружения:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k от лодки (вдоль выбранного направления).

Переходим к полярным координатам:

- полюс — точка обнаружения лодки,
- ось r направим через начальное положение катера.

Дистанция перехода к «обходу» полюса

Ищем расстояние x, при котором катер и лодка оказываются на одном и том же радиусе относительно полюса.

За время t:

- лодка проходит x,

Дистанция перехода к «обходу» полюса

Ищем расстояние x, при котором катер и лодка оказываются на одном и том же радиусе относительно полюса.

За время t:

- лодка проходит x,
- катер проходит $x - k$ или $x + k$ (в зависимости от того, как задана начальная конфигурация относительно полюса).

Разложение скорости катера и система ОДУ

Приравнивая времена и учитывая, что скорость катера равна nv, получаем два режима начальных условий:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

После выхода на общий радиус катер должен:

Скорость раскладываем на компоненты:

Приравнивая времена и учитывая, что скорость катера равна nv, получаем два режима начальных условий:

- **case = plus**:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- **case = minus**:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

После выхода на общий радиус катер должен:

Скорость раскладываем на компоненты:

Разложение скорости катера и система ОДУ

Приравнивая времена и учитывая, что скорость катера равна nv, получаем два режима начальных условий:

- **case = plus**:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- **case = minus**:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

После выхода на общий радиус катер должен:

- удаляться от полюса с радиальной скоростью, равной скорости лодки v,

Скорость раскладываем на компоненты:

Разложение скорости катера и система ОДУ

Приравнивая времена и учитывая, что скорость катера равна nv, получаем два режима начальных условий:

- **case = plus**:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- **case = minus**:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

После выхода на общий радиус катер должен:

- удаляться от полюса с радиальной скоростью, равной скорости лодки v,
- одновременно иметь тангенциальную составляющую, чтобы «обметать» направления.

Скорость раскладываем на компоненты:

Разложение скорости катера и система ОДУ

Приравнивая времена и учитывая, что скорость катера равна nv, получаем два режима начальных условий:

- **case = plus**:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- **case = minus**:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

После выхода на общий радиус катер должен:

- удаляться от полюса с радиальной скоростью, равной скорости лодки v,
- одновременно иметь тангенциальную составляющую, чтобы «обметать» направления.

Скорость раскладываем на компоненты:

- $v_r = \frac{dr}{dt}$,

Разложение скорости катера и система ОДУ

Приравнивая времена и учитывая, что скорость катера равна nv, получаем два режима начальных условий:

- **case = plus**:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- **case = minus**:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

После выхода на общий радиус катер должен:

- удаляться от полюса с радиальной скоростью, равной скорости лодки v,
- одновременно иметь тангенциальную составляющую, чтобы «обметать» направления.

Скорость раскладываем на компоненты:

- $v_r = \frac{dr}{dt}$,

Исключая t, получаем:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Вывод по виду решения: в полярных координатах траектория катера является расходящейся (экспоненциальной по углу) спиралью.

3. Эксперимент: численное моделирование

Условие задачи для расчётов

Дано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,

Цель: построить траектории катера и лодки и по их пересечению определить момент перехвата.

Условие задачи для расчётов

Дано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,
- скорость катера выше в $n = 5$ раз.

Цель: построить траектории катера и лодки и по их пересечению определить момент перехвата.

Базовый эксперимент: case = plus

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- траектория катера — расходящаяся спираль;

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- траектория катера — расходящаяся спираль;
- радиус r увеличивается при росте угла θ;

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- траектория катера — расходящаяся спираль;
- радиус r увеличивается при росте угла θ;
- траектория лодки в полярных координатах соответствует лучу (так как в декартовой системе движение прямолинейное).


Базовый эксперимент (case=minus)
катер
лодка
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
20
15
10
5
0

Ключевые отличия от case=plus:

- начальный радиус больше, поэтому стартовая точка расположена дальше от полюса;

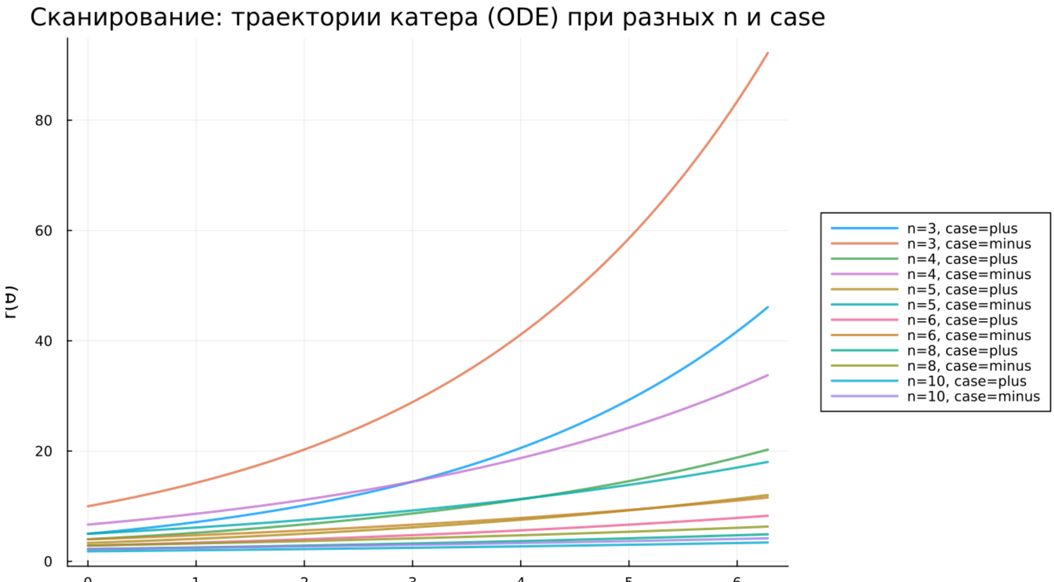
Базовый эксперимент: case = minus

Ключевые отличия от case=plus:

- начальный радиус больше, поэтому стартовая точка расположена дальше от полюса;
- форма спирали сохраняется, но меняется общий масштаб (траектория «вынесена» наружу).

4. Параметрический анализ

Сканирование по параметру n



Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

видно, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$. Следовательно:

- при малых n спираль расходится быстрее;

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

видно, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$. Следовательно:

- при малых n спираль расходится быстрее;
- при больших n рост радиуса становится более медленным;

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

видно, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2-1}$. Следовательно:

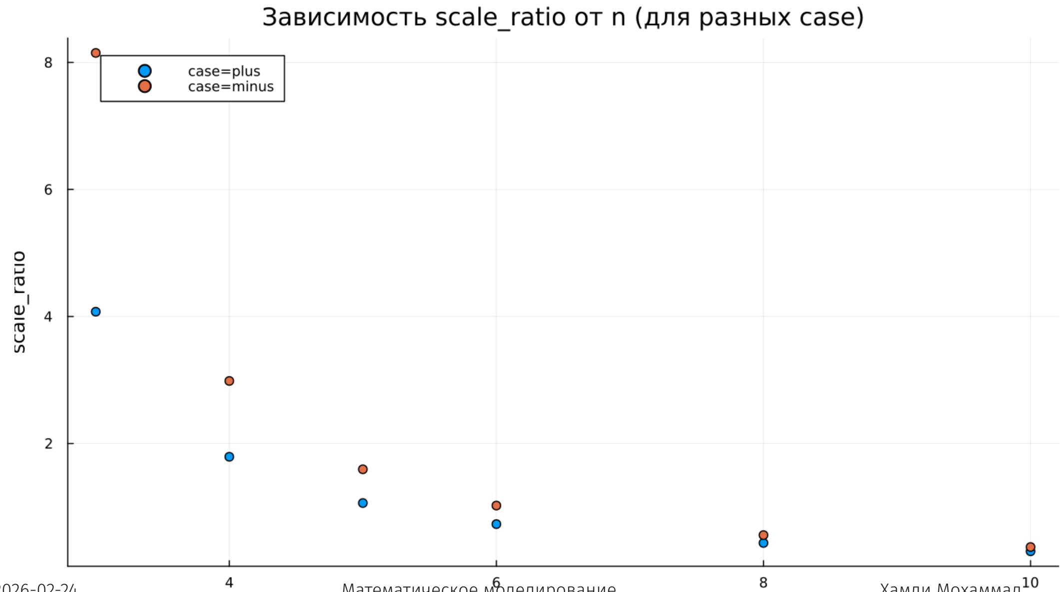
- при малых n спираль расходится быстрее;
- при больших n рост радиуса становится более медленным;
- траектории выглядят более «пологими».

Метрика scale_ratio

Введём показатель:

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$

Метрика scale_ratio



Интерпретация:

- при малых n метрика существенно больше 1 — радиальный масштаб траектории катера заметно превышает масштаб лодки;

Для режима case=minus значения выше из-за большего стартового радиуса.

Интерпретация:

- при малых n метрика существенно больше 1 — радиальный масштаб траектории катера заметно превышает масштаб лодки;
- с ростом n метрика быстро уменьшается;

Для режима case=minus значения выше из-за большего стартового радиуса.

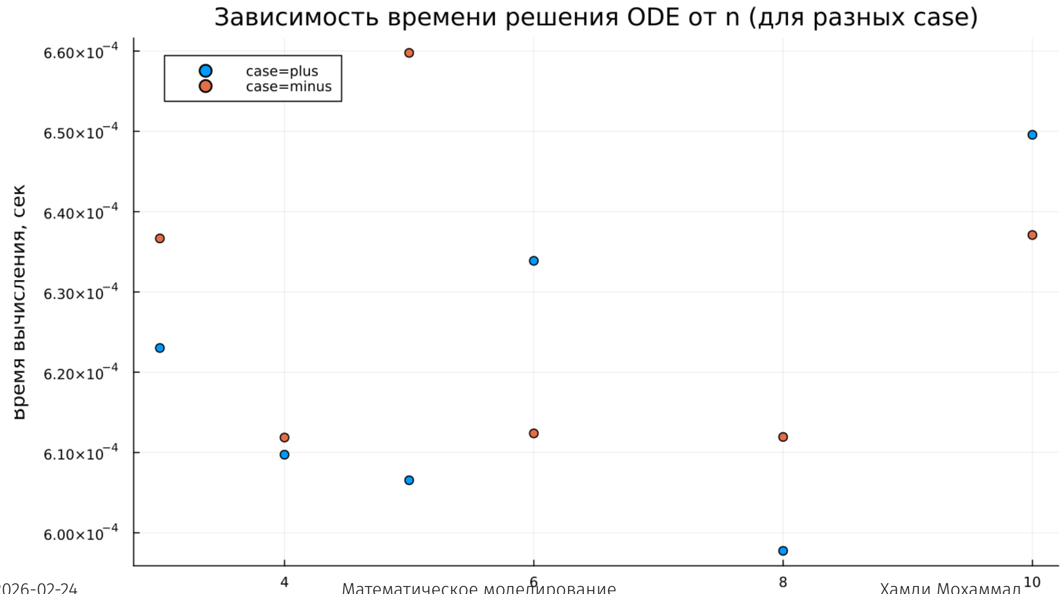
Метрика scale_ratio

Интерпретация:

- при малых n метрика существенно больше 1 — радиальный масштаб траектории катера заметно превышает масштаб лодки;
- с ростом n метрика быстро уменьшается;
- при больших n траектории становятся ближе по масштабу.

Для режима case=minus значения выше из-за большего стартового радиуса.

Время вычислений



Время вычислений

Результаты бенчмаркинга:

- время расчёта порядка 6×10^{-4} сек;

Время вычислений

Результаты бенчмаркинга:

- время расчёта порядка 6×10^{-4} сек;
- явной зависимости от n не выявлено;

Время вычислений

Результаты бенчмаркинга:

- время расчёта порядка 6×10^{-4} сек;
- явной зависимости от n не выявлено;
- небольшие колебания объясняются адаптивным шагом интегрирования.

5. Итоги

Выводы

1. Траектория катера в полярной системе координат имеет вид экспоненциально расходящейся спирали.

Выводы

1. Траектория катера в полярной системе координат имеет вид экспоненциально расходящейся спирали.
2. Параметр n задаёт темп роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается радиус при росте θ.

Выводы

1. Траектория катера в полярной системе координат имеет вид экспоненциально расходящейся спирали.
2. Параметр n задаёт темп роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается радиус при росте θ.
3. Начальный режим (case) меняет масштаб траектории, но не её качественную форму.

Выводы

1. Траектория катера в полярной системе координат имеет вид экспоненциально расходящейся спирали.
2. Параметр n задаёт темп роста: чем больше n, тем медленнее увеличивается радиус при росте θ.
3. Начальный режим (case) меняет масштаб траектории, но не её качественную форму.
4. Численное решение устойчиво, а вычислительные затраты практически не зависят от n.