PROGRAMMATION LINEAIRE

Prof Adama COULIBALY
UFR de Mathématiques et Informatique,
Université FHB, 22 BP 582 Abidjan 22, Côte d'Ivoire.

24 juin 2020

Table des matières

Chapitre 1

Notions de convexité

1.1 Ensembles convexes

Définition 1.1.1 *Soient $x^i : i = 1, \cdots, k$ des points de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire convexe de ces points, tout élément $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.*

En particulier, une combinaison linéaire convexe de deux points x et y, est tout point $z = (1-\lambda)x+\lambda y$ avec $\lambda \in [0, 1]$.

On définit aussi :

Définition 1.1.2 *Soit x, $y \in \mathbb{R}^n$; on appelle segment "fermé" d'extrémités x et y, l'ensemble noté $[x, y]$ et défini par :*

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1 - \lambda) x + \lambda y \ : \lambda \in [0, 1]\} .$$

C'est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires convexes des points x et y.

De façon analogue, on définit :

Définition 1.1.3 *On appelle segment "ouvert" d'extrémités x et y, et on le note $]x, y[$, l'ensemble*

$$]x, y[= \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1 - \lambda) x + \lambda y : \ \lambda \in]0, 1[\} .$$

On définit aussi $]x, y]$ et $[x, y[$ qui sont appelés segments semi ouvert en x respectivement en y.

$$]x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1 - \lambda) x + \lambda y, \ \ \lambda \in]0, 1]\} .$$

$$[x, y[= \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1 - \lambda) x + \lambda y, \ \ \lambda \in [0, 1[\} .$$

Définition 1.1.4 *Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. C est convexe si seulement si pour tout x, $y \in C$, $(1 - \lambda) x + \lambda y \in C$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Autrement dit, C est convexe si seulement si C contient tout segment fermé d'extrémités deux quelconques de ses points.*

Exemple 1.1.1 - *Dans $\mathbb{R}^n$, les ensembles suivants sont convexes. $\mathbb{R}^n$, l'ensemble vide, les singletons, les boules, les segments.*

- *Dans $\mathbb{R}$, les parties convexes sont les intervalles.*

On a la proposition :

Proposition 1.1.1 *Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si seulement si elle contient toute combinaison linéaire convexe de toute famille finie d'éléments qui lui appartiennent.*

Preuve : Si C contient toute combinaison linéaire convexe de familles finies d'éléments qui lui appartiennent, en particulier, prenant une famille de deux éléments x et y de C, on a $[x,y] \subset C$ et donc C est convexe.

Réciproquement, soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors C contient toute combinaison linéaire convexe de deux quelconques de ses éléments. Donc la propriété est vraie pour une famille comportant deux éléments. Supposons qu'elle est vraie pour une famille de $k-1$ éléments.

Soit

$$\mathcal{F} = \left\{x^1,\, x^2, \cdots, x^k\right\}$$

une famille de k élément de C.

Soit

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \text{ avec } \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

On a

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x^i + \lambda_k x^k.$$

Soit

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i.$$

On a $\lambda \in [0,1]$.

Si $\lambda = 0$ alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, k-1$ et donc $\lambda_k = 1$. Il vient alors que $x = \lambda_k x^k = x^k \in C$.

Si $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$x = \lambda \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) x^i + \lambda_k x^k.$$

L'élément

$$y = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) x^i,$$

est une combinaison linéaire convexe de $k-1$ éléments de C. C'est donc un élément de C, par hypothèse de recurrence. Donc $x = \lambda y + \lambda_k x^k$. Or $\lambda_k = 1 - \lambda$ avec $\lambda \in [0,1]$. Donc x est combinaison linéaire convexe de deux éléments de C. Comme par hypothèse, C est convexe, on a alors $x \in C$. □

On rapelle que :

Définition 1.1.5 *Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite affine si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

i) Pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

ii) Il existe une application linéaire $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et a dans $\mathbb{R}^m$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \mathcal{L}(x) + a.$$

Les résultats suivants sont immédiats.

Proposition 1.1.2 1) *Si* C_1 *et* C_2 *sont convexes alors pour tous* α_1 *et* α_2 *dans* $\mathbb{R}$, $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$ *est convexe.*
2) *Toute intersection de parties convexes est convexe.*
3) *Le produit cartésien de deux convexes est convexe.*
4) *L'image d'un convexe par une application affine est convexe.*
5) *L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.*

1.2 Polyèdres convexes

Définition 1.2.1 *Un polyèdre convexe* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est l'intersection (éventuellement vide) d'un nombre fini de demi-espaces fermés et/ou d'hyperplans.*
C'est-à-dire :

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} a_i x \leq b_i, \ i = 1, \cdots, p_1, \\ a_i x \geq b_i, \ i = p_1 + 1, \cdots, p_2, \\ a_i x = b_i, \ i = p_2 + 1, \cdots, m \end{array} \right\}$$

où les a_i *sont dans* $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ *et les* b_i, *dans* $\mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$.

Remarque 1.2.1 *Dans cette définition on peut toujours supposer qu'on a un seul type d'inégalité.*

Définition 1.2.2 *Soit* $\mathcal{P}$ *un polyèdre convexe de* $\mathbb{R}^n$. *Un point* $x \in \mathcal{P}$ *est un sommet de* $\mathcal{P}$ *s'il existe* $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ *tel que* $cx < cy$ *pour tout* $y \in \mathcal{P}$, $y \neq x$.

On montre que si le polyèdre est de la forme

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \geq b_i, \ i = 1, \cdots, m\}$$

un point $x \in \mathcal{P}$ est un sommet si et seulement si il est intersection de n hyperplans frontières linéairement indépendants.

Chapitre 2

Formulation d'un programme linéaire

2.1 Programmes linéaires

Définition 2.1.1 *Un programme linéaire dans* $\mathbb{R}^n$ *est un problème qui consiste à déterminer le minimum ou maximum ainsi que les éléments qui les réalisent d'une application linéaire* $Z(x)$ *sachant que* x *vérifie un système mixte d'équations et/ou d'inéquations linéaires dans* $\mathbb{R}^n$.

Si l'application linéaire est $Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ *et le système mixte d'équations et/ou d'inéquations linéaires est :*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, & i = m_1+1, \cdots, m_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, & i = m_2+1, \cdots, m \end{cases}$$

on le note symboliquement :

$$\begin{array}{l} \min\ (\max) \quad Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, & i = m_1+1, \cdots, m_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, & i = m_2+1, \cdots, m \\ \quad x_j \in \mathbb{R}, & j = 1, \cdots, n \end{cases} \end{array}$$

On peut supposer que ce programme est sous la forme suivante dite forme générale :

$$\begin{array}{l} \min\ (\max) \quad Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, & i = m_1+1, \cdots, m_2 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, & i = m_2+1, \cdots, m \\ \quad x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n_1 \\ \quad x_j \leq 0, & j = n_1+1, \cdots, n_2 \\ \quad x_j \in \mathbb{R}, & j = n_2+1, \cdots, n. \end{cases} \end{array}$$

On a les remarques suivantes :

Remarque 2.1.1 - *Etant donné un programme linéaire, on peut toujours se ramener à un programme linéaire où les variables sont astreintes à être non négatives. En effet si* x_j *est une variable négative on fait le changement de variable* $x'_j = -x_j$. *Si par contre* x_j *est quelconque dans* $\mathbb{R}$ *on pose* $x_j = x_j^+ - x_j^-$ *avec* $x_j^+,\ x_j^- \geq 0$ *car tout réel peut s'écrire comme la différence de deux réels positifs ou nuls.*

- Dans un programme linéaire on peut ramener toutes les contraintes d'inégalité à des inégalités de même type. il suffit de multiplier la contrainte par -1 le cas échéant.

Par convention les contraintes d'inégalité pour un problème de minimisation sont du type " $\geq$ " et les contraintes d'inégalité pour un problème de maximisation sont du type " $\leq$ "

On peut dire alors qu'un programme linéaire est un programme mathématique de la forme

$$\begin{array}{l} \min\ (\max) \quad Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq)\, b_i, \quad i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n \end{array} \right. \end{array}$$

Dans un programme linéaire on distingue deux types de contraintes : les contraintes relatives au signe des variables, dites contraintes de restriction de signe ou de non-négativité et les autres dites "vraies contraintes" on dit aussi contraintes structurelles.

Si on note :

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq)\, b_i, \quad i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n \end{array} \right\},$$

Les éléments de C sont appelés solutions réalisables, admissibles ou acceptables et la fonction Z est appelée fonction-objectif du problème.

2.2 Quelques exemples

Exemple 1 : Problème de production

Soient m machines M_i $(i = 1, \cdots, m)$ qui fabriquent en série n types de produits P_j $(j = 1, \cdots, n)$. La machine M_i a une capacité maximum de b_i unités de temps. La fabrication d'une unité du produit P_j nécessite l'utilisation de la machine M_i durant a_{ij} unités de temps. Si c_j représente le gain relatif à la production d'une unité du produit P_j, quelle doit être la politique de production pour maximiser le gain total ?

Exemple 2 : Problème de transport

Soient r centres de production d'un bien donné possédant des stocks disponibles en quantités respectives $q_1, \cdots, q_r$. Dans s centres de consommation, la demande de ce bien est respectivement de $d_1, \cdots, d_s$. Les frais de transport d'une unité de bien du centre de production i au centre de consommation j est c_{ij} unités monétaires. Il s'agit de déterminer comment approvisionner les centres de consommation à partir des centres de production de manière à minimiser le coût total de transport. Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Exemple 3 : Problème de la ration alimentaire

On dispose de n aliments A_j $(j = 1, \cdots, n)$ aux prix respectifs par unité de c_j $(j = 1, \cdots, n)$.

Soient m éléments nutritifs e_i $(i = 1, \cdots, m)$. La quantité du $i^{\text{ème}}$ élément nutritif contenue dans une unité de l'aliment A_j est a_{ij}. Les besoins respectifs en les m éléments nutritifs sont b_i $(i = 1, \cdots, m)$.

On se propose de déterminer la ration alimentaire qui tout en étant de meilleur marché possible garantisse un apport suffisant en éléments nutritifs.

Exemple 4

Un ébéniste fabrique des bureaux sous deux modèles : le modèle "luxe" et le modèle "standard". Des études de marché ont montré que, pour l'année à venir, les possibilités de vente s'élèvent à 300 unités pour le modèle "luxe" et à 400 unités pour le modèle "standard". L'approvisionnement en bois est suffisant pour pouvoir fabriquer annuellement 500 bureaux quel que soit le type. Par ailleurs, le temps de fabrication d'un bureau sous le modèle "luxe" est double de celui d'un bureau de type "standard" : la capacité annuelle de fabrication est telle que, si tous les bureaux fabriqués étaient du type "standard", on pourrait en fabriquer 700 au maximum.

La vente d'un bureau sous le modèle "luxe" conduit à une marge unitaire sur coût variable égale à 7, celle d'un bureau de type "standard" : 5.

On se propose de rechercher le programme annuel de fabrication conduisant au profit global maximal.

Exemple 5

Le propriétaire d'une station d'essence qui vend du Super, de l'Ordinaire et du Gas-oil aux prix respectifs de 415, 390 et 295 unités monétaires le litre, mais livrés par la station mère aux prix de 405, 375 et 270 unités monétaires.

Comme le propriétaire de la station est peu scrupuleux et qu'il veut s'enrichir rapidement, il se livre au trafic suivant : se basant sur son expérience du métier, il sait qu'il peut vendre à la pompe "Super" un mélange des trois carburants à condition qu'il y ait au moins 70% de Super et pas plus de 10% d'Ordinaire.

De même, à la pompe "Ordinaire", il peut vendre un mélange comportant au moins 15% de Super et pas plus de 70% de Gas-oil.

Enfin, le mélange vendu à la pompe "Gas-oil" doit contenir au moins 80% de Gas-oil.

D'autre part, le marché est tel que le propriétaire de la station ne peut vendre plus de 20 000 litres de Super, 30 000 litres d'Ordinaire et 20 000 litres de Gas-oil.

Donner la formulation mathématique de ce problème.

Exemple 6

Les demandes journalières en chauffeurs dans une entreprise de transport sont :

lu	ma	me	je	ve	sa	di
13	18	21	16	12	25	9

Les chauffeurs travaillent cinq jours d'affilée (et peuvent donc avoir leurs deux jours adjacents de congé n'importe quand dans la semaine).

On se propose de déterminer les effectifs formant les sept équipes possibles de chauffeurs de manière à

- couvrir tous les besoins.
- engager un nombre minimum de chauffeurs.

Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Exemple 7

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus deux produits bruts : orge et arachide.

- la quantité nécessaire par portion est de 400g.
- l'aliment ainsi fabriqué devra comporter au moins 30% de protéïnes et au plus 5% de fibres.

On a les données suivantes :

	quantité par gramme d'aliment		
Aliment	Protéïne	Fibres	Coût (F/kg)
orge	0,09	0,02	450
arachide	0,60	0,06	500

Modéliser le problème sous forme d'un programme linéaire.

2.3 Forme standard, forme canonique

Dans cette partie on considère la relation suivante.

Pour u et v dans $\mathbb{R}^n$ on note

$$u \leq v \Leftrightarrow u_i \leq v_i \quad \forall\, i = 1, \cdots, n.$$

Définition 2.3.1 *Un programme linéaire est sous forme standard si les vraies contraintes sont des égalités et les variables sont astreintes à être non négatives. En d'autres termes, le problème est sous la forme*

$$\min\,(\max)\; Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

Si on pose $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c = (c_j) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, on a la notation matricielle

$$\min(\max)\; Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n, \; x \geq 0 \end{cases}$$

On a la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Tout programme linéaire peut se mettre sous forme standard*

Preuve : Il suffit de transformer les contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité en considérant les équivalences suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i, \;\; s_i \geq 0$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i, \;\; s_i \geq 0$$

□

Définition 2.3.2 *La variable s_i introduite pour passer d'une contrainte d'inégalité à une contrainte d'égalité est appelée variable d'écart.*

Remarque 2.3.1 *Le passage à la forme standard augmente le nombre de variables dans le programme linéaire.*

Définition 2.3.3 *Un programme linéaire est sous forme canonique si les vraies contraintes sont des inégalités et les variables sont astreintes à être non négatives. Pour les problèmes de minimisation on a*

$$\min\; Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

et pour les problèmes de maximisation on a

$$\max\; Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

En considérant les mêmes notations que ci-dessus, on obtient respectivement pour la minimisation et la maximisation la notation matricielle suivante :

$$\min\; Z = cx \qquad\qquad \max\; Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \in \mathbb{R}^n, \; x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n, \; x \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 2.3.2 *Tout programme linéaire peut se mettre sous forme canonique*

Preuve : Il suffit de transformer les contraintes d'égalité en contraintes d'inégalité en considérant l'une des équivalences suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i \end{cases}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i \end{cases}$$

□

Remarque 2.3.2 *Le passage à la forme canonique augmente le nombre de contraintes dans le programme linéaire.*

Chapitre 3

Résolution des programmes linéaires

3.1 Résultats théoriques fondamentaux

On définit d'abord les notions d'infimum de supremum, minimum et de maximum qui sont des prérequis nécessaires pour ce chapitre.

Définition 3.1.1 (Minorant/Majorant) *Soit X une partie de $\mathbb{R}$.*

$m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un minorant de X si et seulement si

$$\forall\, x \in X, \quad m \leq x.$$

$M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un majorant de X si et seulement si

$$\forall\, x \in X, \quad x \leq M.$$

Définition 3.1.2 (Infimum/Supremum) *Soit X une partie de $\mathbb{R}$.*

1) Si X est non vide et admet des minorants, par définition l'infimum de X est le plus grand des minorants de X. On le note $\inf(X)$ ou $\inf_{x\in X}(x)$.

Si X est non vide et n'admet pas de minorants, par convention, l'infimum de X est égal à $-\infty$.

Si $X = \emptyset$, par convention son infimum est égal à $+\infty$: $\inf(\emptyset) = +\infty$

2) Si X est non vide et admet des majorants, par définition le supremum de X noté $\sup(X)$ ou $\sup_{x\in X}(x)$ est le plus petit des majorants de X.

Si X est non vide et n'admet pas de majorants, par convention, le supremum de X est égal à $+\infty$.

Si $X = \emptyset$, par convention $\sup(\emptyset) = -\infty$.

Ces notions sont aussi caractérisées par :

Proposition 3.1.1 *1) Si X est non vide et admet des minorants,*

$$m = \inf(X) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x \quad \forall\, x \in X \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon. \end{cases}$$

2) Si X est non vide et admet des majorants,

$$M = \sup(X) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq M \quad \forall\, x \in X \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M. \end{cases}$$

On a le résultat suivant qui lie un problème de supremum à celui d'infimum.

Proposition 3.1.2 *Pour tout $X \subset \mathbb{R}$, on a* $\sup_{x\in X}(x) = -\inf_{x\in X}(-x)$

Définition 3.1.3 (Minimum/Maximum) *Soit X une partie de $\mathbb{R}$.*

On dit que X a un minimum si $\inf(X) \in X$. *Dans ce cas, on note* $\min(X) = \inf(X)$.

On dit que X a un maximum si $\sup(X) \in X$. *Dans ce cas, on note* $\max(X) = \sup(X)$.

Il faut noter d'après la proposition (3.1.2) que tout problème de maximisation peut se ramener à un problème de minimisation. En effet, on a :

Proposition 3.1.3

$$\max_{x\in\mathcal{P}} Z(x) = -\min_{x\in\mathcal{P}} -Z(x).$$

Sans perdre de généralités, on peut donc considérer dans ce qui suit que nous avons un problème de minimisation.

Soit le programme linéaire :

$$\min_{x\in\mathcal{P}} Z(x) \qquad (P),$$

On sait que l'ensemble des solutions réalisables d'un programme linéaire est un polyèdre convexe fermé. Il peut être :

- vide,
- non vide et borné, on dit que c'est un polytope,
- non vide et non borné.

Etant donné le programme linéaire (P), une solution optimale est un élément x^* de $\mathcal{P}$ vérifiant :

$$Z(x^*) \leq Z(x), \forall\, x \in \mathcal{P}.$$

Dans ce cas la valeur $Z^* = Z(x^*)$ est dite valeur optimale ou plus précisément le minimum.

Etant donné le programme linéaire (P), on a les trois situations suivantes :

- $\mathcal{P} = \emptyset$, dans ce cas on dit que le **programme est impossible**,
- $\mathcal{P} \neq \emptyset$, mais la fonction-objectif n'est pas minorée sur $\mathcal{P}$. Le minimum vaut alors $Z^* = -\infty$ (si $\mathcal{P}$ est borné, ce cas est exclu) ; on dit que le **programme est non borné**.
- $\mathcal{P} \neq \emptyset$, et la fonction-objectif est minorée sur $\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{P}$ a une solution optimale (pas forcément unique). En d'autres termes, on a la théorèeme suivant :

Théorème 3.1.1 *Etant donné le programme linéaire (P), si son polyèdre des solutions réalisables est non vide, fermé et borné alors il possède une solution optimale.*

Nous avons dans ce qui suit la propriété dite propriété fondamentale de la programmation linéaire.

Théorème 3.1.2 *Si un programme linéaire possède une solution optimale, alors son polyèdre des solutions réalisables contient au moins un sommet et un d'entre eux est solution optimale.*

3.2 Méthode graphique

La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées pour résoudre les programmes linéaires.

On considère le programme linéaire (P).

On suppose que (P) admet une solution optimale. Pour résoudre ce problème par la méthode graphique, on peut procéder de la façon suivante :

- dessiner le polyèdre des solutions réalisables dans un repère (de préférence orthonormé),
- considérer les lignes de niveau de la fonction-objectif passant par les différents sommets,

- éliminer tous les sommets dont les lignes de niveau rencontrent l'intérieur du polyèdre des solution réalisables,

- prendre comme solution, le premier sommet (par rapport au sens du vecteur gradient de la fonction-objectif) dont la ligne de niveau correspondante ne rencontre pas l'intérieur du polyèdre des solutions réalisables.

On rappelle que les courbes de niveau de la fonction-objectif Z, sont les courbes d'équation : $Z(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans le plan, les courbes de niveau sont des droites perpendiculaires au vecteur gradient de la fonction-objectif.

A titre d'exemples, résoudre graphiquement les programmes linéaires suivants :

1) $\min\ Z = 2x_1 + 3x_2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) $\min\ Z = x_1 + x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) $\min\ Z = 2x_1 - 3x_2$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4) $\max\ Z = 3x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5) $\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6) $\max\ Z = x_1 + x_2$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Cette méthode est limitée car elle ne s'applique qu'à des programmes linéaires où le nombre de variables est faible (au maximum 3 variables). Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à une méthode algébrique, la méthode du simplexe.

3.3 Méthode du simplexe

On considère le programme linéaire sous la forme standard suivant.

$$Z^* = \min\ Z = cx \qquad \begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \tag{PL}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec $\text{rang}A = m < n$.

Notons $\mathcal{C}$ le polyèdre convexe fermé des solutions réalisables de (PL).

3.3.1 Base, solutions de base

Etant donné le programme linéaire (PL), on a les définitions suivantes :

Définition 3.3.1 *On appelle base de (PL), toute sous matrice B, carrée d'ordre m, régulière extraite de A.*

Définition 3.3.2 *Soit B une base de (PL), les variables associées aux colonnes de B sont appelées variables de base associées à B, et les autres, variables hors base ou libres associées à B.*

Remarque 3.3.1 *La matrice des vraies contraintes du programme linéaire (PL) étant dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, il possède au plus C_n^m bases.*

Remarque 3.3.2 *Dans la pratique, on représente une base par son ensemble de variables de base ou par son ensemble des indices des variables de base. Cela permet d'éviter certaines indéterminations. En effet, si on considère un programme dont le système des vraies contraintes est :*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

on sait que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est une base mais il est difficile de dire quelles sont les variables de base associées.

Soit B une base de (PL). Notons N la sous matrice de A constituée des colonnes des variables hors base. Moyennant une permutation on peut supposer que les colonnes de B sont les m premières colonnes de A. Donc on peut supposer que A est sous la forme (matrices blocs) $A = (B, N)$. De même on peut décomposer le vecteur variable x sous la forme $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ où x_B est constitué des variables de base et x_N des variables hors base. Le système $Ax = b$ s'écrit alors :

$$Bx_B + Nx_N = b \Longleftrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \tag{3.1}$$

On obtient donc : $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N)$. Par suite l'ensemble des solutions réalisables du programme linéaire est :

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : x = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) \\ x_N \end{pmatrix}, \ x_N \in \mathbb{R}^{n-m} \right\}.$$

Définition 3.3.3 *On appelle solution de base de (PL) associée (ou relative) à la base B, la solution particulière $x(B)$ du système $Ax = b$ obtenue en fixant les variables hors base à zéro (en prenant $x_N = 0$) i. e.* $x(B) = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple 3.3.1

Considérons le programme linéaire ci-dessous où c quelconque est une matrice ligne à 5 colonnes.

$$\begin{array}{l} Z^* = \min \ Z = 2x_1 - 3x_2 \\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_4 = 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, \cdots, 4 \end{cases} \end{array} \tag{PL}$$

La matrice des vraies contraintes est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que rang$A = 2$. Il y a cinq bases possibles (seul $I = \{1, 3\}$ est exclu)

$$I_1 = \{1, 2\}, \ I_2 = \{1, 4\}, \ I_3 = \{2, 3\}, \ I_4 = \{2, 4\}, \ I_5 = \{3, 4\}.$$

avec les solutions de base :

$$x(I_1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x(I_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \ x(I_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x(I_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \ x(I_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.3.4 *On dit qu'une base B de (PL) est une base réalisable, si la solution de base $x(B)$ associée à B, est telle que $x(B) \geq 0$ c'est-à-dire $B^{-1}b \geq 0$. On dit alors que $x(B)$ est une solution de base réalisable de (PL).*

Exemple 3.3.2 *Dans l'exemple (3.3.1), les bases I_1, I_2, I_3 et I_5 sont réalisables.*

Exemple 3.3.3

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min\ Z = 2x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 10x_4 - 3x_5$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 37 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 26 \\ x \in \mathbb{R}^5,\ x \geq 0 \end{cases}$$

$I = \{x_1, x_3\}$ est une base réalisable. En effet, si on note B la matrice associée à I, on a :

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et } B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0.$$

La solution de base réalisable associée est $x(B) = (1, 0, 3, 0, 0)^T$.

Définition 3.3.5 *Une base réalisable B de (PL) est dite dégénérée si le vecteur $x_B = B^{-1}b$ contient au moins une composante nulle.*

Exemple 3.3.4

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min\ Z = -3x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_5 = 8 \\ x \in \mathbb{R}^5,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $I = \{1, 3, 5\}$. La matrice associée à I est

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\det B = -4 \neq 0$; donc I est une base.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

La base est alors réalisable ; mais le vecteur $B^{-1}b$ a une composante nulle. Donc la base I est dégénérée.

Définition 3.3.6 *Le programme linéaire (PL) est dit dégénéré s'il possède une base réalisable dégénérée.*

Définition 3.3.7 *On dit que deux bases B et B' sont adjacentes, si les colonnes qui les constituent ne diffèrent que d'un seul élément.*

Exemple 3.3.5 *Dans l'exemple (3.3.1), les bases I_1 et I_2 sont adjacentes.*

On montre que :

Proposition 3.3.1 *Etant donné un programme linéaire sous forme standard, si l'ensemble des solutions réalisables est non vide, il contient au moins une solution de base réalisable. En outre, si le programme possède une solution optimale, alors il possède une solution de base réalisable optimale.*

3.3.2 Forme canonique par rapport à une base réalisable

On vient de voir que si (PL) possède un optimum fini, il existe au moins une base réalisable optimale. C'est pour cela qu'on s'intéresse dans ce qui suit aux conditions d'optimalité des solutions de base réalisables.

Soit B une base réalisable de (PL). On note I l'ensemble des indices des variables de base et J l'ensemble des indices des variables hors base.

On sait qu'on peut supposer sans perdre de généralités que B est formée des m premières colonnes de A et donc A est de la forme (matrices blocs) $A = (B,\, N)$ où N est la sous-matrice formée par les colonnes de A qui ne sont pas dans B. De même on peut partitionner $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ où x_B est constitué des variables de base et x_N des variables hors base.

Le système $Ax = b$ est alors équivalent à

$$Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \tag{3.2}$$

On peut aussi partitionner c de la façon suivante : $c = (c_B,\, c_N)$ où c_B est formé des coefficients des variables de base et c_N des coefficients des variables hors base. On a alors :

$$Z(x) = cx = c_Bx_B + c_Nx_N.$$

En remplaçant x_B par sa valeur ($x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$), on a :

$$Z(x) = c_BB^{-1}b + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N. \tag{3.3}$$

Posons

$$\hat{A} = B^{-1}A, \quad \hat{c} = c - c_BB^{-1}A, \quad \hat{Z} = c_BB^{-1}b \tag{3.4}$$

Donc $\hat{c}_B = 0$ et $\hat{c}_N = c_N - c_BB^{-1}N$.
On remarque qu'on a $Z(x(B)) = c_BB^{-1}b = \hat{Z}$.

Définition 3.3.8 *Deux programmes linéaires sont dits équivalents s'ils ont les mêmes solutions réalisables et les mêmes solutions optimales.*

Définition 3.3.9 *Le programme linéaire (PL) est équivalent au programme linéaire :*

$$Z^* = \min \; Z = \hat{c}x + \hat{Z}$$
$$\begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n, \; x \geq 0 \end{cases}$$

C'est la forme canonique (ou forme équivalente) de (PL) par rapport à la base réalisable B.

Remarque 3.3.3 *Ecrire un programme linéaire sous forme canonique par rapport à une base réalisable, c'est écrire sa fonction-objectif ainsi que ses variables de base en fonction des seules variables hors base.*

En d'autres termes il s'agit d'écrire la fonction-objectif à l'aide des seules variables hors base et transformer le système des vraies contraintes en un système équivalent dans lequel chaque variable de base n'intervient que dans une seule équation, et dans cette équation son coefficient est égal à 1*. On dira alors que cette dernière est la variable de base associée à cette équation.*

Exemple 3.3.6

La forme canonique du programme linéaire de l'exemple (3.3.3) par rapport à la base réalisable $I = \{x_1, x_3\}$ est :

$$\min\ Z = 14 + 5x_2 + 60x_4 - 27x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 19x_2 + 65x_4 - 26x_5 = 1 \\ x_3 - 13x_2 - 45x_4 + 19x_5 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3.3.3 Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

On peut à présent donner les conditions d'optimalité pour une solution de base réalisable.

Théorème 3.3.1 *Une condition suffisante pour que B soit une base réalisable optimale est $\hat{c} \geq 0$.*

Preuve : Dans (PL) on a la contrainte $x_N \geq 0$. Donc pour toute solution réalisable x de (PL), on aura :

$$Z(x) = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \geq c_B B^{-1} b = Z(x(B)).$$

Par suite $x(B)$ est une solution optimale de (PL). □

Remarque 3.3.4 *Pour un problème de maximisation la condition suffisante d'optimalité est $\hat{c} \leq 0$.*

Dans le cas de non dégénérescence, la condition suffisante ci-dessus est aussi nécessaire.

Théorème 3.3.2 *Si le problème (PL) est non dégénéré i.e. ne possède pas de base réalisable dégénérée, une condition nécessaire et suffisante pour que B soit optimale est $\hat{c} \geq 0$.*

Théorème 3.3.3 *Soit k dans J tel que $\hat{c}_k < 0$. Si $\hat{A}_k$, la colonne associée à la variable x_k dans la matrice $\hat{A}$ est telle que $\hat{A}_k \leq 0$, alors on peut diminuer indéfiniment la fonction objectif, ce qui signifie que $(z^* = -\infty)$. On dit alors que l'optimum de (PL) est non borné ou que (PL) n'admet pas de solution optimale à distance finie.*

Preuve : Considérons dans le système $Ax = b$ la solution $x(\alpha)$ obtenue en imposant aux variables hors base les valeurs suivantes :

$$x_j = 0 \quad \forall\, j \in J - k \text{ et } x_k = \alpha.$$

On obtient alors

$$x_i = \hat{b}_i - \alpha \hat{a}_{ik} \quad \forall i \in I.$$

La solution $x(\alpha)$ est réalisable pour tout $\alpha \geq 0$.

On a :

$$Z(x(\alpha)) = \hat{Z} + \sum_{j \in J} \hat{c}_j x_j = \hat{Z} + \alpha \hat{c}_k$$

Comme $\hat{c}_k < 0$, on a $Z(x(\alpha))$ qui tend vers $-\infty$ pour λ tendant vers $+\infty$. Donc $Z^* = -\infty$. □

Exemple 3.3.7

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min\ Z = -x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 4 \\ x \in \mathbb{R}^5,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $I = \{1, 2, 5\}$. La matrice associée à I est :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{43}{3} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Donc c'est une base réalisable. La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min \; Z = -\frac{17}{3} - \frac{4}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4$$
$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = \frac{8}{3} \\ x_5 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = \frac{43}{3} \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

La colonne de la variable hors base x_3 est négative dans cette forme. On remarque que

$$x(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha \\ \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ \frac{43}{3} + \frac{2}{3}\alpha \end{pmatrix}$$

est réalisable quel que soit $\alpha \geq 0$ et $Z(x(\alpha)) = -\frac{17}{3} - \frac{4}{3}\alpha$ qui tend vers $-\infty$ quand α tend vers $+\infty$. Le problème est alors non borné.

Remarque 3.3.5 *On a les mêmes résultats dans le cas des problèmes de maximisation si on remplace la condition $\hat{c}_k < 0$ par $\hat{c}_k > 0$ dans le théorème (3.3.3).*

Dans le théorème qui suit on montre que si pour tout $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$, on a $\hat{A}_k \nleq 0$ alors il existe une base réalisable qui améliore la fonction-objectif Z.

Théorème 3.3.4 *Soit B une base réalisable, on note I et J respectivement les ensembles des indices des variables de base et hors base, $\hat{b} = B^{-1}b$, $\hat{A} = B^{-1}A$ et $\hat{c} = c - c_B B^{-1}A$. Soit $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$ et $\hat{A}_k \nleq 0$. Soit l tel que*

$$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \; : \; i \in I, \; \hat{a}_{ik} > 0 \right].$$

Alors la matrice B' associée aux variables dont les indices sont dans $I' = I - l + k$ est une base réalisable adjacente à B. Et on a

$$Z(x(B')) = Z(x(B)) + \hat{c}_k \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}}.$$

Preuve : La matrice associée à $I' = I - l + k$ est $B' = BM$. où

$$M = \begin{pmatrix} e_1 \; e_2 \; \cdots \; e_{l-1} \; \hat{A}_k \; e_{l+1} \; \cdots \; e_m \end{pmatrix}$$

les e_i étant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

On a

$$\det(B') = \det B \det M = \hat{a}_{lk} \det B \neq 0.$$

Donc I' est une base.

En considérant la forme canonique du programme (PL) par rapport à la base B, on constate que le système $Ax = b$ est équivalent à :

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j\in J-k} \hat{a}_{ij}x_j + \hat{a}_{ik}x_k = \hat{b}_i & \forall\, i \in I - l \\ x_l + \sum_{j\in J-k} \hat{a}_{lj}x_j + \hat{a}_{lk}x_k = \hat{b}_l \end{cases}$$

La solution de base associée à $I' = I - l + k$ est :

$$\begin{cases} x_j = 0 \quad \forall\, j \in J - k + l \\ x_k = \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \\ x_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{ik}\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \quad \forall\, i \in I - l \end{cases}$$

Pour que cette solution de base soit réalisable il suffit qu'elle vérifie les contraintes de non-négativité, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_k = \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0 \\ x_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{ik}\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0 \quad \forall\, i \in I - l \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$0 \leq \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min\left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \,:\, i \in I,\ \hat{a}_{ik} > 0\right],$$

qui est vrai par le choix de l. Par suite $I' = I - l + k$ est une base réalisable. En outre on a :

$$Z(x(B')) = \hat{Z} + \hat{c}_k x_k = \hat{Z} + \hat{c}_k\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = Z(x(B)) + \hat{c}_k\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}}.$$

Comme

$$\hat{c}_k < 0 \text{ et } \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0,$$

on a bien $Z(x(B')) \leq Z(x(B))$. $\square$

Remarque 3.3.6 *Si la base B est non dégénérée, on a : $Z(x(B')) < Z(x(B))$. c'est-à-dire que la décroissance est stricte.*

3.3.4 Algorithme primal du simplexe

L'algorithme du simplexe contient deux phases : la phase 1 et la phase 2.

Phase 1

Dans cette phase on détermine une première solution de base réalisable du problème. Si cette procédure échoue, cela signifie que le polyèdre des solutions réalisables $\mathcal{D}$ du problème est vide.

Phase 2

Dans cette partie, on calcule à partir de la solution réalisable obtenue dans la phase 1 une autre solution de base réalisable donnant une meilleure valeur de la fonction-objectif. Géométriquement, une itération consiste à passer d'un sommet de $\mathcal{D}$ à un sommet de $\mathcal{D}$; ce nouveau sommet est adjacent au premier en ce sens qu'ils sont les extrémités d'une arête de $\mathcal{D}$.

Nous donnons ici une itération de la phase 2 de l'algorithme du simplexe.

Phase 2 de l'algorithme du simplexe

Dans une itération de la phase 2 de l'algorithme du simplexe appliqué au problème (PL) on procède comme suit.

Début

On suppose qu'on dispose d'une base réalisable de depart B. Soit I et J respectivement les ensembles des indices des variables de base et hors base.

1) Calculer $\hat{b} = B^{-1}b$, $\hat{A} = B^{-1}A$ et $\hat{c} = c - c_B B^{-1}A$.

2) Tester $\hat{c}$.
a) Si $\hat{c} \geq 0$, stop : "La base B est optimale."
b) S'il existe $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$ avec $\hat{A}_k \leq 0$, stop : "Le problème est non bornée i.e. la valeur optimale est infinie."
c) Autrement effectuer un changement de base.

3) Changement de base
a) **Test d'entrée :** Soit $k \in J$ tel que

$$\hat{c}_k = \min\left[\hat{c}_j \ : \ j \in J, \ \hat{c}_j < 0\right].$$

La variable correspondante x_k rentre dans la base on l'appelle variable rentrante.
b) **Test de sortie :** Soit l tel que

$$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min\left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \ : \ i \in I, \ \hat{a}_{ik} > 0\right].$$

La variable x_l sort de la base on l'appelle variable sortante.
c) On considère la nouvelle base réalisable encore notée B dont les ensembles des indices de variables de base et hors base sont respectivement

$$I := I - l + k \text{ et } J := J - k + l$$

Aller à 1).
Fin

Remarque 3.3.7 *Dans le cas d'un problème de maximisation, il n'est pas nécessaire de transformer le problème en un problème de minimisation afin d'appliquer l'algorithme du simplexe. Il suffit de considérer les modifications suivantes :*

$2-a)$ *Si* $\hat{c} \leq 0$ *stop : "la base* B *est optimale."*
$2-b)$ *S'il existe* $k \in J$ *tel que* $\hat{c}_k > 0$ *avec* $\hat{A}_k \leq 0$ *stop : "le problème est non bornée i.e. la valeur optimale est infinie."*

$3-a)$ ***Test d'entrée :*** *Soit* $k \in J$ *tel que*

$$\hat{c}_k = \max\left[\hat{c}_j \ : \ j \in J, \ \hat{c}_j > 0\right].$$

La variable correspondante x_k *rentre dans la base.*
Les autres instructions restent valables.

3.3.5 Convergence de l'algorithme du simplexe

On a le résultat suivant

Théorème 3.3.5 *Si à chaque base réalisable rencontrée dans résolution du problème* (PL) *la solution de base associée est non dégénérée, l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations par l'une des deux situations suivantes :*
i) obtention d'une solution de base réalisable optimale de (PL)
ii) absence de solution optimale à distance finie.

Ce théorème montre la convergence de l'algorithme du simplexe en l'absence de dégénérescence.
On montre que

Proposition 3.3.2 *Si à une itération de l'algorithme du simplexe l'ensemble*

$$\mathcal{L} = \left\{ l : \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} : \ i \in I, \ \hat{a}_{ik} > 0 \right] \right\}$$

contient plus d'un élément, alors le problème (PL) est dégénéré i.e. il existe une base dégénérée.

Lorsque le problème est dégénéré, l'algorithme du simplexe peut cycler c'est-à-dire qu'on peut retrouver une base déjà rencontrée. Pour remédier à cela on peut utiliser l'une des règles suivantes.
- la règle de Bland ou la règle du plus petit indice
- la règle lexicographique
- la règle de perturbation

La règle de Bland
Test d'entrée : La variable qui rentre dans la base est x_k avec k le plus petit indice pour lequel $\hat{c}_k < 0$
Test de sortie : La variable qui sort de la base est x_l avec l le plus petit élément de $\mathcal{L}$.

3.3.6 Méthode des tableaux

C'est une mise en œuvre manuelle de l'algorithme du simplexe.
Soit à résoudre le programme linéaire (PL)

$$\begin{array}{l} Z^* = \min \ Z = cx \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

toujours avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et rang$A = m < n$.
On suppose qu'on dispose d'une base réalisable de départ B Les ensembles des indices des variables de base et hors-base sont I et J.
La forme canonique de (PL) par rapport à B est :

$$\begin{array}{l} Z^* = \min \ Z = \hat{c}x + \widehat{Z} \\ \begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

On sait que $\hat{A} = (I_m, B^{-1}N), \quad \hat{c} = (0, c_N - c_B B^{-1}N), \hat{b} = B^{-1}b.$
On définit :

Définition 3.3.10 *On appelle tableau simplexe complet de (PL) par rapport à la base réalisable B, le tableau à $m+1$ lignes et $n+1$ colonnes ci-dessous :*

	$x_i \ i \in I \ x_j \ j \in J$	
x_i $i \in I$	$\hat{A}$	$\hat{b}$
	$\hat{c}$	$-\hat{Z}$

Définition 3.3.11 *On appelle tableau simplexe de (PL) par rapport à la base réalisable B, le tableau à $m+1$ lignes et $n-m+1$ colonnes ci-dessous*

	$x_j \; j \in J$	
x_i $i \in I$	$\hat{A}_N = B^{-1}N$	$\hat{b}$
	$\hat{c}_N$	$-\hat{Z}$

A partir du tableau simplexe on peut écrire la forme canonique de (PL) par rapport à la base B et inversement.

On définit :

Définition 3.3.12 *Dans le tableau simplexe, on appelle pivot l'élément qui est à l'intersection de la colonne de la variable rentrante et de la ligne de la variable sortante.*

Dans ce cas la ligne correspondante est dite ligne du pivot et la colonne, colonne du pivot.

La méthode des tableaux consiste à écrire les tableaux simplexes relatifs aux différentes bases rencontrées dans la résolution du programme (PL) à l'aide de l'algorithme du simplexe. Il faut donc déterminer pour deux bases successives dans l'algorithme du simplexe B et B' comment passer du tableau simplexe relatif à B à celui relatif à B'.

Pour obtenir le tableau simplexe de (PL) relatif à B' à partir de celui relatif à B on utilise le cadre du tableau simplexe relatif à B et on considère les règles suivantes.

1) Permuter les variables sortante et rentrante ;
2) Remplacer le pivot par son inverse ;
3) Diviser les autres éléments de la ligne du pivot par le pivot ;
4) Diviser les autres éléments de la colonne du pivot par le pivot ; et changer de signe ;
5) Pour les autres éléments du tableau, appliquer la règle du rectangle suivante :

Règle du rectangle

Soit $l \in I$ la ligne du pivot et $k \in J$ la colonne du pivot.

Pour $i \in I - l$ et $j \in J - k$, l'élément $\hat{a}_{ij}$ est remplacé par $\hat{a}_{ij} - \frac{\hat{a}_{ik}\hat{a}_{lj}}{\hat{a}_{lk}}$.

On note alors

$$\hat{a}_{ij} := \hat{a}_{ij} - \frac{\hat{a}_{ik}\hat{a}_{lj}}{\hat{a}_{lk}}$$

Cette règle s'applique à tous les éléments du tableau.

Remarque 3.3.8 *Si une ligne intersecte la colonne du pivot par un zéro, la ligne reste inchangée.*

Si une colonne intersecte la ligne du pivot par un zéro, la colonne reste inchangée.

Dans la méthode des tableaux une base sera désignée indifféremment par la matrice elle-même ou par l'ensembles des indices des variables de base associées.

Exemple 3.3.8

$$\min \; Z = -3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\min\ Z = -3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants. :

TS1

	x_1	x_2		
x_3	2	1	5	
x_4	1	-1	1	←
x_5	1	2	3	
	-3	2	0	
	↑			

TS2

	x_4	x_2		
x_3	-2	3	3	
x_1	1	-1	1	
x_5	-1	3	2	←
	3	-1	3	
		↑		

TS3

	x_4	x_5	
x_3	-1	-1	1
x_1	2/3	1/3	5/3
x_2	-1/3	1/3	2/3
	8/3	1/3	11/3

On est à l'optimum car la condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée.
Une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = -\frac{11}{3}$.

Exemple 3.3.9

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	1	1	8	
x_4	-2	3	6	
x_5	1	-1	2	←
	6	5	0	
	↑			

TS2

	x_5	x_2		
x_3	-1	2	6	←
x_4	2	1	10	
x_1	1	-1	2	
	-6	11	-12	
		↑		

TS3

	x_5	x_3	
x_2	-1/2	1/2	3
x_4	5/2	-1/2	7
x_1	1/2	1/2	5
	-1/2	-11/2	-45

Tous les coefficients de la fonction-objectif sont négatifs ou nuls on est donc à l'optimum. Une solution optimale du problème initial est $x^* = (5,3)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 45$.

Exemple 3.3.10

$$\min\ Z = -3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\min\ Z = -3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	-2	3	6	
x_4	1	-4	4	$\leftarrow$
	-3	5	0	
	$\uparrow$			

TS2

	x_4	x_2	
x_3	2	-5	14
x_1	1	-4	4
	3	-7	12
		$\uparrow$	

On remarque que la colonne de la variable x_2 est toute négative, il n y a donc pas de pivot. Le programme linéaire est alors non borné ; c'est-à-dire que la valeur optimale est $-\infty$.

Exemple 3.3.11 (Problème dégénéré)

$$\max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	4	3	12	
x_4	4	1	8	$\leftarrow$
x_5	4	-1	8	
	3	2	0	
	$\uparrow$			

TS2

	x_4	x_2		
x_3	-1	2	4	$\leftarrow$
x_1	1/4	1/4	2	
x_5	-1	0	0	
	-3/4	5/4	-6	
		$\uparrow$		

TS3

	x_4	x_3	
x_2	-1/2	1/2	2
x_1	3/8	-1/8	3/2
x_5	-2	0	4
	-1/8	-5/8	-17/2

On est à l'optimum. Une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{3}{2}, 2)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = \frac{17}{2}$.

Dans les exemples que nous venons de traiter, on avait toujours une base réalisable évidente. Mais très souvent il arive qu'on ne dispose pas de base réalisable dès le depart. Alors on utilise la phase d'initialisation pour déterminer une première base réalisable.

3.3.7 Initialisation de l'algorithme du simplexe

Dans cette phase d'initialisation, qu'on appelle aussi la phase 1 du simplexe, on y détermine une première base réalisable du programme (PL).

$$\begin{aligned} & Z^* = \min \ Z = cx \\ & \begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{PL}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

On suppose ici que $b \geq 0$. Mais on ne fait pas l'hypothèse que $\text{rang} A = m < n$.

On considère le problème auxiliaire défini de la façon suivante :

- Les vraies contraintes :

On considère chaque vraie contrainte de (PL) et on ajoute au premier membre une variable artificielle non-négative.

- La fonction-objectif :

La fonction-objectif ξ est la somme de toutes les variables artificielles introduites.

Dans ce programme toutes les variables sont non-négatives.

On a alors le programme suivant :

$$\begin{aligned} & \xi^* = \min \ \xi = \sum_{i=1}^m x_i^a \\ & \begin{cases} Ax + I_m x^a = b \\ x \geq 0, \ x^a \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{P_a}$$

Les variables x_i^a, $i \in \{1, \cdots, m\}$ sont appelées variables artificielles. Elles sont introduites juste pour créer une base réalisable évidente pour (P_a).

Par définition de (P_a), on a $\xi^* \geq 0$. Donc (P_a) ne peut pas être non borné. En outre il n'est pas non plus impossible car avec l'hypothèse que $b \geq 0$, la solution $(0, b)^T$ est réalisable.

La matrice des vraies contraintes de (P_a) est $\tilde{A} = (A, I_m)$. Donc $\text{rang}\tilde{A} = m < n + m$ et la matrice formée des colonnes des variables artificielles est une base réalisable évidente de (P_a). on peut donc résoudre ce dernier à l'aide de la phase 2 du simplexe en partant de cette base.

On résout (P_a) et on tire les conclusions suivantes.

1^er^ cas $\xi^* > 0$:

Si la valeur optimale de (P_a) n'est pas nulle alors le problème (PL) est impossible. Car en effet si (PL) possédait une solution réalisable on montre facilement que $\xi^* \leq 0$.

2^ème^ cas $\xi^* = 0$:

Notons (x^*, x^{a*}) la solution optimale de (P_a) obtenue où x^* est relative aux variables structurelles ou initiales du problème (PL) et x^{a*} les variables artificielles. On a nécessairement $x^{a*} = 0$.

1) Si dans cette solution toutes les variables artificielles sont hors-base c'est-à-dire que la base optimale de (P_a) est constituée uniquement de colonnes de la matrice A, alors cette dernière est une base réalisable de (PL).

2) Si par contre il existe des variables artificielles dans la base, c'est-à-dire que la base optimale de (P_a) est constituée de colonnes de A pour les variables structurelles et de colonnes de la matrice I_m pour les variables artificielles. Cette base n'est pas nécessairement une base de (PL).

Supposons que les variables artificielles dans la base optimale de (P_a) sont x_i^a, $i \in P$. On a deux cas possibles.

On suppose que le problème (P_a) est sous forme canonique par rapport à la base optimale.

a) Si $\forall i \in P$, la ligne correspondant à la variable de base artificielle x_i^a contient un coefficient non nul relatif à une variable non artificielle x_j, alors on peut faire un changement de base. Dans la nouvelle base la variable artificielle x_i^a est remplacée par la variable x_j. On obtient ainsi à la fin une base réalisable optimale de (P_a) constituée uniquement de colonnes de A. C'est donc une base réalisable de (PL). Mais cette base est dégénérée.

b) Dans le cas contraire, si une variable artificielle dans la base optimale ne peut pas être remplacée par une variable non artificielle, cela signifie que l'équation à laquelle est associée cette variable artificielle est redondante. C'est-à-dire qu'elle est combinaison linéaire d'autres équations. Elle peut donc être supprimée.

Donc si on a un nombre q variables de ce genre, on a $\text{rang}A = m - q$. Dans ce cas les q lignes correspondantes peuvent être éliminées. Les $m - q$ variables restantes dans la base optimale de (P_a) forment une base réalisable de (PL).

Remarque 3.3.9 *1) Dans la méthode des tableaux lorsqu'on ne dispose pas de base réalisable évidente et qu'on veuille appliquer soit la méthode des deux phases, on peut tenir compte de la situation suivante.*

Etant donné que dans le programme auxiliaire l'introduction des variables artificielles sert à créer uniquement une base réalisable évidente, il n'est pas nécessaire d'en ajouter systématiquement à chaque équation.

Si une variable n'intervient que dans une seule équation et si le signe de son coefficient est égal à celui du second membre de cette équation il n'est pas nécessaire d'ajouter une variable artificielle à cette équation. Cette variable peut être considérée comme variable de base associée associée à cette équation.

2) Dans la méthode des tableaux lorsqu'une variable artificielle sort de la base il est certain qu'elle ne peut plus y revenir la colonne correspondante devient superflue et peut être supprimée.

Exemple 3.3.12

1) $$\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est

$$\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la phase 1.
Considérons le programme auxiliaire :

$$\min \xi = x_5 + x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

$I = \{x_5, x_6\}$ est une base réalisable évidente de ce problème.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ \xi = 14 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS1

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_5	1	1	1	0	5	
x_6	2	1	3^*	-1	9	←
	-3	-2	-4	1	-14	
			↑			

TS2

	x_1	x_2	x_6	x_4		
x_5	1/3	2/3	⋮	1/3	2	←
x_3	2/3	1/3	⋮	-1/3	3	
	-1/3	-2/3	⋮	-1/3	-2	
		↑				

TS3

	x_1	x_5	x_4	
x_2	1/2	⋮	1/2	3
x_3	1/2	⋮	-1/2	2
	0	⋮	0	0

$I = \{x_2, x_3\}$ est une base réalisable du problème initial.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ Z = -x_4 + 11$$
$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 = 3 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS4

	x_1	x_4		
x_2	1/2	1/2	3	←
x_3	1/2	-1/2	2	
	0	-1	-11	
		↑		

TS5

	x_1	x_2	
x_4	1	2	6
x_3	1	1	5
	1	2	-5

La condition d'optimalité est vérifiée, une solution optimale est :
$x^* = (0,\ 0,\ 5)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 5$.

2) $\max\ Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est :

$$\max\ Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la phase 1.
Considérons le programme auxiliaire :

$$\min\ \xi = x_6 + x_7$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

$I = \{x_6, x_7, x_5\}$ est une base réalisable de ce problème.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ \xi = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS1

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_6	1	1	1	0	3
x_7	1	-2	1	-1	1
x_5	0	2	1	0	2
	-2	1	-2	1	-4

TS2

	x_7	x_2	x_3	x_4	
x_6	⋮	3	0	1	2
x_1	⋮	-2	1	-1	1
x_5	⋮	2	1	0	2
	⋮	-3	0	-1	-2

TS3

	x_6	x_3	x_4	
x_2	⋮	0	1/3	2/3
x_1	⋮	1	-1/3	7/3
x_5	⋮	1	-2/3	2/3
	⋮	0	0	0

$I = \{x_2, x_1, x_5\}$ est une base réalisable du problème initial.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\max\ Z = 4 + x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{2}{3} \\ x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{7}{3} \\ x_5 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{2}{3} \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS4

	x_3	x_4	
x_2	0	1/3	2/3
x_1	1	-1/3	7/3
x_5	1	-2/3	2/3
	1	1	-4

TS5

	x_3	x_2	
x_4	0	3	2
x_1	1	1	3
x_5	1	2	2
	1	-3	-6

TS6

	x_5	x_2	
x_4	0	3	2
x_1	-1	-1	1
x_3	1	2	2
	-1	-5	-8

La condition d'optimalité est vérifiée, une solution optimale est :
$x^* = (1,\ 0,\ 2)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 8$.

3) $\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente, utilisons la phase 1.
Considérons le programme auxiliaire suivant :

$\min\ \xi = x_6 + x_7$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 + x_7 = 2 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

$I = \{x_6, x_7, x_3\}$ est une base réalisable évidente. La forme canonique par rapport à cette base est :

$\min\ \xi = 4 - 2x_1 - 5x_2 - x_4 - 2x_5$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 + x_7 = 2 \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

	x_1	x_2	x_4	x_5	
x_6	1	3	4	1	2
x_7	1	2	-3	1	2
x_3	-1/3	-4/3	0	0	1/3
	-2	-5	-1	-2	-4

	x_1	x_6	x_4	x_5	
x_2	1/3	⋮	4/3	1/3	2/3
x_7	1/3	⋮	-17/3	1/3	2/3
x_3	1/9	⋮	16/9	4/9	11/9
	-1/3	⋮	17/3	-1/3	-2/3

	x_2	x_6	x_4	x_5	
x_1	3	⋮	4	1	2
x_7	-1	⋮	-7	0	0
x_3	-1/3	⋮	4/3	1/3	1
	1	⋮	7	0	0

La condition d'arrêt est vérifiée mais la variable artificielle x_7 est dans la base optimale. On remarque que les coefficients de x_2 et x_4 sont non nuls dans la ligne de x_7. On peut donc remplacer dans la base optimale x_7 soit par x_2 soit par x_4.

Si x_2 rentre dans la base, on a les tableaux suivants :

	x_2	x_6	x_4	x_5	
x_1	3	⋮	4	1	2
x_7	-1	⋮	-7	0	0
x_3	-1/3	⋮	4/3	1/3	1
	1	⋮	7	0	0

	x_7	x_4	x_5	
x_1	⋮	-17	1	2
x_2	⋮	7	0	0
x_3	⋮	11/3	1/3	1
	⋮	0	0	0

Dans ce cas $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ est une base réalisable du programme initial.
Si par contre x_4 rentre dans la base, on a les tableaux suivants :

	x_2	x_6	x_4	x_5		
x_1	3	⋮	4	1	2	
x_7	-1	⋮	-7	0	0	←
x_3	-1/3	⋮	4/3	1/3	1	
	1	⋮	7	0	0	
			↑			

	x_2	x_7	x_5	
x_1	17/7	⋮	1	2
x_4	1/7	⋮	0	0
x_3	-11/21	⋮	1/3	1
	0	⋮	0	0

Dans ce cas $I = \{x_1, x_4, x_3\}$ est une base réalisable du programme initial.
En partant de la base $I = \{x_1, x_2, x_3\}$, on obtient la phase 2 suivante :

	x_4	x_5		
x_1	-17	1	2	←
x_2	7	0	0	
x_3	11/3	1/3	1	
	3	-5	-7	
		↑		

	x_4	x_1		
x_5	-17	1	2	
x_2	7	0	0	←
x_3	28/3	-1/3	1/3	
	-82	5	3	
	↑			

	x_4	x_1	
x_5	17/7	1	2
x_4	1/7	0	0
x_3	-4/3	-1/3	1/3
	82/7	5	3

La condition d'arrêt du simplexe est vérifiée, on est à l'opitimum. Une solution optimale est : $x^* = (0, 0, \frac{1}{3}, 0, 2)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = -3$.

4) $\min\ Z = x_1 + x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente, on va donc utiliser la phase 1.
Le programme auxiliaire est le suivant :

$\min\ \xi = x_5 + x_6 + x_7$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

$I = \{x_5, x_6, x_7, x_4\}$ est une base réalisable évidente. La forme canonique par rapport à cette base est :

$\min\ \xi = 10 - 8x_2 - 18x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

	x_1	x_2	x_3		
x_5	1	2	3	3	
x_6	-1	2	6	2	$\leftarrow$
x_7	0	4	9	5	
x_4	0	0	3	1	
	0	-8	-18	-10	
			$\uparrow$		

	x_1	x_2	x_6		
x_5	3/2	1	$\vdots$	2	
x_3	-1/6	1/3	$\vdots$	1/3	
x_7	3/2	1	$\vdots$	2	
x_4	1/2	-1	$\vdots$	0	$\leftarrow$
	-3	-2	$\vdots$	-4	
	$\uparrow$				

	x_4	x_2		
x_5	-3	4	2	$\leftarrow$
x_3	1/3	0	1/3	
x_7	-3	4	2	
x_1	2	-2	0	
	6	-8	-4	
		$\uparrow$		

	x_4	x_5	
x_2	-3/4	$\vdots$	1/2
x_3	1/3	$\vdots$	1/3
x_7	0	$\vdots$	0
x_1	1/2	$\vdots$	1
	0	$\vdots$	0

On est à l'optimum du programme auxiliaire. dans le tableau optimal la ligne de la variable de base x_7 qui est une variable artificielle est toute nulle. La troisième équation du programme initial à laquelle est associée la variable x_7 est donc une équation redondante on peut donc la supprimer. Ainsi $I = \{x_2, x_3, x_1\}$ est une base réalisable du programme initial. La forme canonique par rapport à la base I est

$$\min\ Z = \frac{11}{6} - \frac{1}{12}x_4$$
$$\begin{cases} x_2 - \frac{3}{4}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_1 + \frac{1}{2}x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

	x_4		
x_2	-3/4	1/2	
x_3	1/3	1/3	$\leftarrow$
x_1	1/2	1	
	-1/12	-11/6	

	x_3	
x_2	9/4	5/4
x_4	3	1
x_1	-3/2	1/2
	1/4	-7/4

La condition d'arrêt du simplexe est vérifiée. On est à l'optiumum et une solution optimale du programme est $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 0, 1)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = \frac{7}{4}$.

3.3.8 Méthode du grand M

Pour résoudre le programme linéaire (PL) par la méthode du grand M, on considère l'hypothèse que $b \geq 0$ et on procède comme suit.

On considère le problème auxiliaire suivant.

$$Z_M^* = \min\ Z_M = cx + M\sum_{i=1}^m x_i^a$$
$$\begin{cases} Ax + I_m x^a = b \\ x \geq 0,\ x^a \geq 0 \end{cases} \qquad (P_M)$$

Comme dans la phase 1, les variables x_i^a, $i \in \{1, \cdots, m\}$ sont des variables artificielles.

La constante M est une constante symbolique et elle est aussi grande que l'on veut (c'est-à-dire supérieure à tout nombre auquel elle pourra être comparée lors de la résolution du problème).

On remarque comme précédemment dans la phase 1 que la matrice des vraies contraintes de (P_M) est $\bar{A} = (A, I_m)$. Donc, rang$\bar{A} = m < n + m$. Par suite avec l'hypothèse que $b \geq 0$, la matrice formée des colonnes des variables artificielles est une base réalisable évidente pour (P_M). On peut donc le résoudre à l'aide de la phase 2 du simplexe en partant de cette base.

On montre que

1) Si $Z_M^* = -\infty$, il en est de même pour Z^*.

2) Si (P_M) possède une solution optimale, on a les cas suivants :

a) Si dans cette solution il reste encore des variables artificielles non nulles dans la base (elles sont donc de base) alors le problème initial (PL) est impossible c'est-à-dire qu'il ne possède pas de solutions réalisables.

b) Si dans cette solution toutes les variables artificielles sont nulles, la partie formée des variables structurelles est une solution de base réalisable optimale de (PL).

Remarque 3.3.10 *Pour un problème de maximisation, la fonction-objectif de* (P_M) *est* $Z_M = cx - M\sum_{i=1}^{m} x_i^a$.

Comme dans la phase 1, on a les remarques suivantes :

Remarque 3.3.11 *1) Etant donné que dans le programme auxiliaire l'introduction des variables artificielles sert à créer uniquement une base réalisable évidente, il n'est pas nécessaire d'en ajouter systématiqueme à chaque équation. En effet, si une variable n'intervient que dans une seule équation et si le signe de son coefficient est égal à celui du second membre de cette équation il n'est pas nécessaire d'ajouter une variable artificielle à cette équation. Cette variable peut être considérée comme variable de base associée associée à cette équation.*

2) Dans la méthode des tableaux lorsqu'une variable artificielle sort de la base il est certain qu'elle ne peut plus y revenir la colonne correspondante devient superflue et peut être supprimée.

Exemple 3.3.13

1) $\min\ Z = 8x_1 + 7x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est

$$\min\ Z = 8x_1 + 7x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la méthode du grand M.

Considérons le programme auxiliaire :

$$\min\ Z_M = 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + Mx_6$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

$I = \{x_6, x_3\}$ est une base réalisable évidente de ce problème.

La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ Z_M = (5 - 2M)x_1 + (1 - M)x_2 + Mx_4 + 3x_5 + M + 3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

		x_1	x_2	x_4	x_5		
	x_6	2^*	1	-1	0	1	←
TS1	x_3	1	2	0	-1	1	
		5-2M	1-M	M	3	-3-M	
		↑					

		x_6	x_2	x_4	x_5		
	x_1	⋮	1/2	-1/2	0	1/2	
TS2	x_3	⋮	3/2	1/2	-1	1/2	←
		⋮	-3/2	5/2	3	-11/2	
			↑				

		x_3	x_4	x_5	
	x_1	-1/3	-2/3	1/3	1/3
TS3	x_2	2/3	1/3	-2/3	1/3
		1	3	2	-5

On est à l'optimum pour P_M et une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 5$.

2) $\min\ Z = x_1 + x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. On va utiliser la méthode du grand M.
Considérons le programme auxiliaire

$$\min\ Z_M = x_1 + x_2 + x_3 + M(x_5 + x_6 + x_7)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

$I = \{x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_4\}$ est une base réalisable évidente pour ce problème. Déterminons la forme canonique par rapport à cette base. Les variables de base sont déjà exprimées en fonction des variables hors base. Il reste à exprimer la fonction-objectif en fonction des variables hors base.
On a : $Z_M = -10M + x_1 + (1 - 8M)x_2 + (1 - 18M)x_3$
Donc la forme canonique du programme par rapport à la base I est :

$$\min\ Z_M = -10M + x_1 + (1 - 8M)x_2 + (1 - 18M)x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants.

		x_1	x_2	x_3		
	x_5	1	2	3	3	
	x_6	-1	2	6	2	
TS1	x_7	0	4	9	5	
	x_4	0	0	3^*	1	$\leftarrow$
		1	1-8M	1-18M	-10M	
				$\uparrow$		

		x_1	x_2	x_4		
	x_5	1	2	-1	2	
	x_6	-1	2^*	-2	0	$\leftarrow$
TS2	x_7	0	1	-3	2	
	x_3	0	0	1/3	1/3	
		1	1-8M	-1/3+6M	-1/3-4M	
			$\uparrow$			

		x_1	x_6	x_4		
	x_5	2	$\vdots$	1	2	$\leftarrow$
	x_2	-1/2	$\vdots$	-1	0	
TS3	x_7	2	$\vdots$	1	2	
	x_3	0	$\vdots$	1/3	1/3	
		3/2-4M	$\vdots$	2/3-2M	-1/3-4M	
		$\uparrow$				

		x_5	x_4		
	x_1	$\vdots$	1/2	1	
	x_2	$\vdots$	-3/4	1/2	
TS4	x_7	$\vdots$	0	0	
	x_3	$\vdots$	1/3	1/3	$\leftarrow$
		$\vdots$	-1/12	-11/6	
			$\uparrow$		

		x_3	
	x_1	-3/2	1/2
	x_2	9/4	5/4
TS5	x_7	0	0
	x_4	3	1
		1/4	-7/4

On est à l'optimum pour P_M et une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ 0,\ 1)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = \frac{7}{4}$.

3) $$\min\ Z = x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 2 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est

$$\min\ Z = x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la méthode du grand M.
Considérons le programme auxiliaire :

$$\min\ Z_M = x_1 - x_2 + Mx_6$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

$I = \{x_3, x_6, x_5\}$ est une base réalisable évidente de ce problème.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ Z_M = (1+M)x_1 + (-1-2M)x_2 + Mx_4 + 8M$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS1

	x_1	x_2	x_4		
x_3	-2	1	0	2	$\leftarrow$
x_6	-1	2	-1	8	
x_5	1	1	0	5	
	1+M	-1-2M	M	-8M	
		$\uparrow$			

TS2

	x_1	x_3	x_4		
x_2	-2	1	0	2	
x_6	3	-2	-1	4	
x_5	3	-1	0	3	$\leftarrow$
	-1-3M	1+2M	M	2-4M	
	$\uparrow$				

TS3

	x_5	x_3	x_4	
x_2	2/3	5/3	0	4
x_6	-1	-3	-1	1
x_1	1/3	-1/3	0	1
	1/3+M	2/3+M	M	3-M

On est à l'optimum pour P_M ; mais il existe une variable artificielle non nulle à l'optimum. Alors le problème initial est impossible.