باسمه تعالی

پروژه‌ی درس سیستم‌های مخابراتی

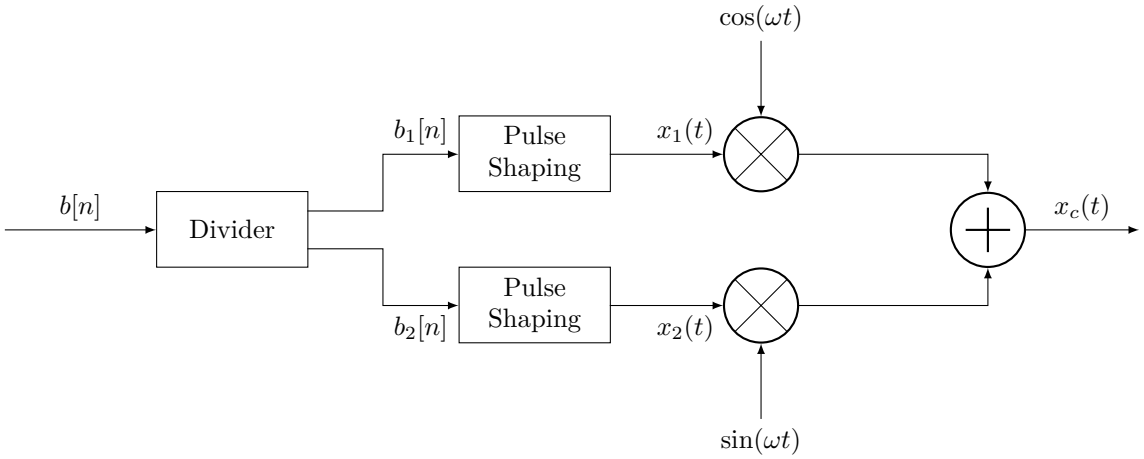
شبیه‌سازی یک سیستم مخابرات دیجیتال

دکتر پاکروان

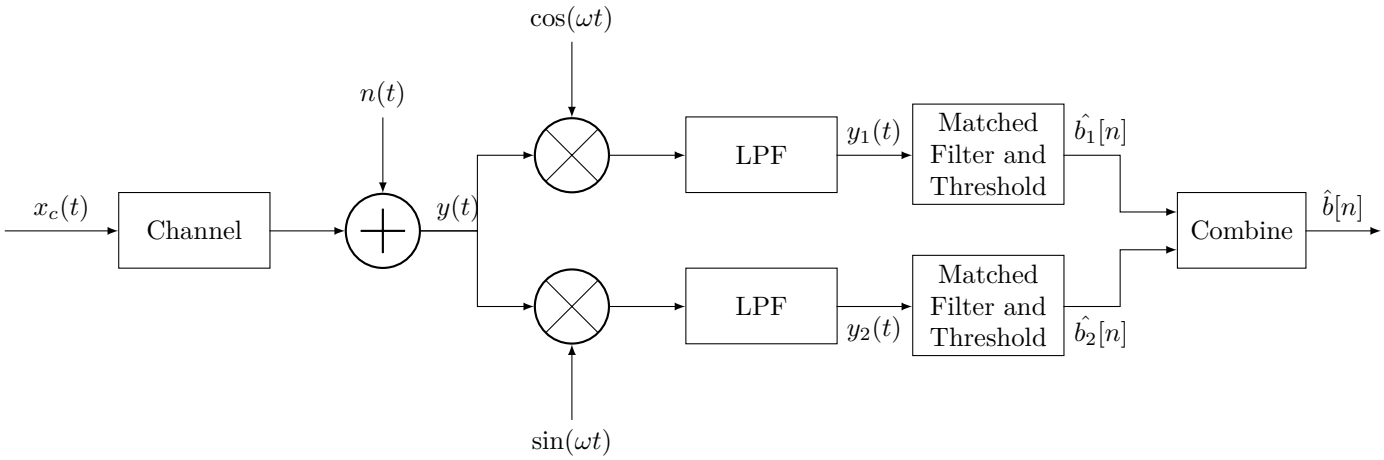
آخرین مهلت تحویل:
۲۰ بهمن ۱۳۹۹

۱ مقدّمه

در این پروژه قصد داریم یک سیستم مخابرات دیجیتال را به طور کامل شبیه‌سازی کنیم و تأثیر پارامترهای مختلف را بر عملکرد این سیستم مشاهده کنیم. دیاگرام بلوکی فرستنده و گیرنده در شکل‌های ۱ و ۲ نمایش داده‌شده‌اند. برای راحتی، در این پروژه فقط حالت باینری را در نظر می‌گیریم.



شکل ۱: دیاگرام بلوکی فرستنده



شکل ۲: دیاگرام بلوکی گیرنده

۲ پیاده‌سازی بلوک‌ها به صورت مجزّا

۱. تابعی با عنوان Divide بنویسید، که در ورودی دنباله‌ای به طول زوج از اعداد صفر و یک بگیرد، و در خروجی دو دنباله به طول نصف دنباله‌ی ورودی تحویل دهد. (به نظرتان باید این تابع چگونه دنباله‌ی ورودی را تقسیم کند که شبیه‌سازی ما به یک سیستم real-time نزدیک‌تر شود؟) وارون این سیستم را در تابعی به نام Combine پیاده‌سازی کنید.

۲. تابعی با عنوان PulseShaping بنویسید که در ورودی، دنباله‌ای از صفر و یک، شکل پالس متناظر با صفر (به صورت رشته‌ای از اعداد حقیقی!)، و شکل پالس متناظر با یک (به صورت رشته‌ی دیگری از اعداد حقیقی!) را دریافت کند، و در خروجی، شکل موج متناظر با دنباله را تحویل دهد. توجّه کنید که طول پالس‌های صفر و یک باید برابر باشند.

۳. تابعی با عنوان AnalogMod بنویسید که در ورودی، دو شکل موج، فرکانس نمونه‌برداری و فرکانس حامل را دریافت کرده و درخروجی سیگنال $x_c(t)$ را بدهد.

۴. برای سادگی، کانال را ایده‌آل در نظر می‌گیریم و فقط پهنای باند سیگنال عبوری از آن را محدود می‌کنیم. برای حلّ این بخش، تابعی با عنوان Channel بنویسید که در ورودی سیگنال ارسالی، فرکانس نمونه‌برداری، فرکانس مرکزی و پهنای باند کانال را بگیرد و درخروجی، سیگنال دریافتی در گیرنده را تحویل دهد. (تنها باید یک فیلتر میان‌گذر بنویسید!)

۵. تابعی با عنوان AnalogDemod بنویسید که در ورودی سیگنال $x_c(t)$ ، فرکانس نمونه‌برداری، پهنای باند سیگنال و فرکانس حامل را بگیرد و در خروجی دو شکل موج demodulate شده (یعنی $y_1(t)$ و $y_2(t)$ در شکل ۲) را تحویل دهد. (ترکیب ضرب‌کننده و فیلتر پایین‌گذر)

۶. برای آخرین قسمت نیز، تابعی با عنوان MatchedFilt بنویسید که در ورودی شکل موج demodulate شده، شکل پالس متناظر با صفر، و شکل پالس متناظر با یک را دریافت کند و در خروجی دو دنباله به این صورت بدهد:

(آ) مقدار خروجی Matched Filter (میزان correlation) هم برای شکل پالس متناظر با یک و هم برای شکل پالس متناظر با صفر

(ب) مقدار تخمین‌زده‌شده برای بیت متناظر

۳ انتقال دنباله‌ی تصادفی صفر و یک

برای این قسمت، مشخّصات بلوک‌ها را به این صورت در نظر بگیرید:

متغیّر	مقدار
فرکانس نمونه‌برداری	1 MHz
طول هر پالس	10 ms
فرکانس حامل	10 KHz
فرکانس مرکزی کانال	10 KHz
پهنای باند کانال	1 KHz

جدول ۱: مشخّصات بلوک‌ها

۱. شکل پالس را مربّعی ساده در نظر بگیرید که دامنه‌اش برای ارسال بیت یک، برابر با $+1$ و برای بیت صفر، برابر با -1 است. (هر پارامتر دیگری که قرار است انتخاب کنید را به شکلی معقول انتخاب کنید، و دلایلتان را برای آن انتخاب شرح دهید.)

(آ) دنباله‌ای به طول «به اندازه‌ی کافی بلند» از صفر و یک تولید کنید. با فرض وجود نداشتن نویز، فرآیند ارسال این دنباله را شبیه‌سازی کنید. شکل موج را برای خروجی هر بلوک رسم کنید. (بازه‌ی زمانی رسم‌کردن را به شکل معقولی در نظر بگیرید که شکل‌های شما «قشنگ» باشند!)

(ب) حال با فرض اینکه نویز AWGN، بعد از عبور سیگنال از کانال با آن جمع می‌شود، احتمال خطا را برحسب واریانس نویز رسم کنید. بازه‌ی محور افقی را به اندازه‌ی کافی بزرگ بگیرید. رفتار احتمال خطا را توجیه کنید.

(ج) با توجّه به بخش قبل، ۶ مقدار مختلف برای واریانس نویز انتخاب کنید، (به صورتی که تا حدّ خوبی بازه‌های معنادار نمودار را پوشش دهد.) برای هرکدام از این واریانس‌ها، scatter plot دوبعدی خروجی دو Matched Filter را رسم کنید. این به آن معناست که به ازای هر زوج $(b_1[i], b_2[i])$، به علّت وجود نویز، خروجی دو Matched Filter به صورت دو عدد $(\hat{b_1}[i], \hat{b_2}[i])$ درمی‌آیند که احتمالاً $\hat{b_1}[i] \neq b_1[i]$, $\hat{b_2}[i] \neq b_2[i]$. ولی اگر مقدار واریانس نویز کم باشد، می‌توان از روی $(\hat{b_1}[i], \hat{b_2}[i])$، $(b_1[i], b_2[i])$ را به درستی تخمین زد. خواسته‌ی مسأله آنست که $(\hat{b_1}[i], \hat{b_2}[i])$ را به صورت یک نقطه در فضای دوبعدی تصوّر کنید و به ازای i های مختلف، همه‌ی این نقاط را روی یک نمودار رسم کنید. این کار را برای ۶ مقدار واریانس نویزی که انتخاب کرده‌اید، تکرار کنید. برای آشنایی بهتر با خواسته‌ی مسأله، می‌توانید عبارت «منظومه‌ی سیگنال» (Signal Constellation) را جستجو کنید.

۲. حال به جای شکل پالس مربّعی، شکل پالس سینوسی با فرکانس $500Hz$ در نظر بگیرید. دامنه‌ی آن را برای ارسال بیت یک، برابر با $+1$ و برای ارسال بیت صفر، برابر با -1 فرض کنید.

(آ) دنباله‌ای به طول «به اندازه‌ی کافی بلند» از صفر و یک تولید کنید. با فرض وجود نداشتن نویز، فرآیند ارسال این دنباله را شبیه‌سازی کنید. شکل موج را برای خروجی هر بلوک رسم کنید. (بازه‌ی زمانی رسم‌کردن را به شکل معقولی در نظر بگیرید که شکل‌های شما «قشنگ» باشند!)

(ب) حال با فرض اینکه نویز AWGN، بعد از عبور سیگنال از کانال با آن جمع می‌شود، احتمال خطا را برحسب واریانس نویز رسم کنید. بازه‌ی محور افقی را به اندازه‌ی کافی بزرگ بگیرید. رفتار احتمال خطا را توجیه کنید.

(ج) با توجّه به بخش قبل، ۶ مقدار مختلف برای واریانس نویز انتخاب کنید، (به صورتی که تا حدّ خوبی بازه‌های معنادار نمودار را پوشش دهد.) برای هرکدام از این واریانس‌ها، هیستوگرام دوبعدی خروجی دو Matched Filter را رسم کنید.

۳. نتایج این دو سیستم را باهم مقایسه کنید.

۴ انتقال دنباله‌ای از اعداد ۸ بیتی

در این قسمت می‌خواهیم دنباله‌ای از اعداد تصادفی بین ۰ و ۲۵۵ را به دنباله‌ای از اعداد ۰ و ۱ تبدیل کرده و انتقال آن‌ها را شبیه‌سازی کنیم. تفاوت اصلی این بخش با بخش قبلی در معیار سنجش صحّت سیستم مخابره است. در این قسمت از مجذور اختلاف اعداد به جای احتمال خطا استفاده خواهیم کرد.

۱. تابعی با عنوان SourceGenerator بنویسید که دنباله‌ای از اعداد صحیح بین ۰ تا ۲۵۵ را بگیرد و در خروجی، دنباله‌ی باینری متناظر با آن را بدهد. (می‌توانید از تابع `de2bi` در MATLAB استفاده کنید.) سیستم معکوس این تابع را نیز به صورت تابعی با عنوان OutputDecoder بنویسید. (می‌توانید از تابع `bi2de` در MATLAB استفاده کنید.)

۲. دنباله‌ای به حدّ کافی بلند از اعداد صحیح بین ۰ تا ۲۵۵ تولید کنید. مخابره‌ی آن‌ها را شبیه‌سازی کنید. (شکل پالس‌ها را مربّعی بگیرید و مشخّصات سیستم را مطابق قسمت قبل) واریانس خطای بازسازی این اعداد را برحسب واریانس نویز رسم کنید.

۳. در ادامه‌ی بخش قبل، به ازای چند واریانس نویز مشخّص، توزیع خطا را رسم کنید. رفتار حدّی این توزیع به چه شکلی است؟

۴. در حالتی که نویز به سمت بی‌نهایت میل کند، واریانس خطا را به روش تحلیلی حساب کنید. آیا با آنچه که مشاهده می‌کنید سازگار است؟

۵ کدینگ منبع

در این قسمت می‌خواهیم با کدینگ منبع (Source Coding) آشنا شویم. خبر خوب آنست که این بخش از بخش‌های قبلی پروژه مستقل است!

ابتدا باید با مفاهیم اوّلیه آشنا شویم. منبع اطّلاعات گسسته‌ی X که دنباله‌ی سمبل‌های X_i را تولید می‌کند در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که الفبای خروجی این منبع، $\mathcal{X}$ است و فرض می‌کنیم $|\mathcal{X}| = M < \infty$.

برای مدل‌کردن منبع اطّلاعات، باید به هر سمبل از منبع یک احتمال نسبت بدهیم. در نتیجه می‌توانیم منبع اطّلاعات را به این صورت نمایش دهیم:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_M \\ p_1 & p_2 & \dots & p_M \end{pmatrix}$$

به عنوان مثال اگر شما که به زبان فارسی حرف می‌زنید را به عنوان منبع اطلاعات در نظر بگیریم، هر سمبل خروجی این منبع، حرفی از حروف فارسی است. در نتیجه $\mathcal{X} = \{\text{ی}, \cdots, \text{ب}, \text{الف}\}$ و $|\mathcal{X}| = M = 32$. همچنین به طور تجربی می‌دانیم که برخی حروف در زبان فارسی بیشتر استفاده می‌شوند، مانند «الف» و «م»، و برخی حروف کمتر استفاده می‌شوند مانند «ژ» و «ض». در نتیجه در مدل احتمالاتی این منبع، باید به حروف پراستفاده احتمال بیشتری نسبت به حروف کم‌استفاده نسبت دهیم.

(البته ذکر این نکته لازم است که شما احتمالاً کاملاً تصادفی صحبت نمی‌کنید و میان حروف استفاده‌شده توسّط شما ارتباطاتی وجود دارد! به تعبیر دیگر حرف تولیدشده در زمان $t-1$ اطّلاعاتی درباره‌ی حرف تولیدشده در زمان t در اختیار ما قرار می‌دهد و می‌توانیم $\mathbb{P}[X_t = x_i | X_{t-1} = x_j]$ را تشکیل دهیم و عملاً مدل دقیق‌تری برای منبع اطّلاعات به دست آوریم که به صورت یک «زنجیره‌ی مارکف» است. ولی در مدل فعلی فرض می‌کنیم که همه‌ی حروف تولیدی توسّط شما از یکدیگر مستقلّند و توزیع تمامی آن‌ها باهم برابر است.)

مسأله‌ی کدینگ منبع آنست که می‌خواهیم یک نگاشت مانند C از الفبای خروجی منبع به الفبای دوتایی $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ پیدا کنیم. (البته در حالت کلّی‌تر الفبای کد می‌تواند D سمبلی باشد، ولی ما حالت ساده‌ی دوتایی را در نظر می‌گیریم.)، به گونه‌ای که طول متوسّط هر کلمه‌کد کمینه شود. به تعبیر دیگر اگر طول کلمه‌کد متناظر با سمبل $x \in \mathcal{X}$ را با $l(x)$ نشان دهیم، هدف آنست که $\mathbb{E}[l(X)]$ کمینه شود.

طبعاً ساده‌ترین کار ممکن آنست که به هرکدام از M خروجی منبع، یک عدد باینری $\lceil \log_2 M \rceil$ بیتی نسبت بدهیم، ولی این راه‌حل اصلاً بهینه نیست. چرا؟

مثال سخنران را در نظر بگیریم. در این مثال چون $M = 32$ است، با ۵ بیت می‌توان همه‌ی حروف را کد کرد. ولی در این حالت، ما برای حرف «الف» که بسیار پراستفاده است، ۵ بیت خرج کرده‌ایم و برای حرف «ژ» هم ۵ بیت! اگر راهی باشد که بتوانیم حرف «الف» را با کمتر از ۵ بیت کد کنیم و حرف «ژ» را با کمی بیشتر از ۵ بیت، از آنجا که احتمال بیان‌شدن حرف «الف» توسّط سخنران بسیار بیشتر از احتمال بیان‌شدن حرف «ژ» است، انتظار داریم که به طور متوسط کمتر از ۵ بیت برای کدکردن منبع خرج کنیم و به کد بهینه‌تری برسیم.

احتمالاً اوّلین سؤالی که به ذهن می‌رسد، آنست که «اگر طول کلمه‌کدها برابر نباشد، در گیرنده چگونه آن‌ها را کدگشایی کنیم؟» داستان از همین‌جا شروع می‌شود!

منبع اطّلاعات زیر را در نظر بگیرید:

$$X = \begin{pmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{c} & \text{d} & \text{e} & \text{f} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

۱. کدهای زیر را در نظر بگیرید:

X	a	b	c	d	e	f
$C_1(X)$	0	10	11	10	01	111
$C_2(X)$	0	10	01	010	11	111
$C_3(X)$	0	01	011	0111	01111	011111

(آ) مشکل کد C_1 چیست؟
کدهایی که مشکل کد C_1 را نداشته باشند، کدهای «ناویژه» می‌نامیم.

(ب) مشکل کد C_2 چیست؟ (راهنمایی: فرض کنید در گیرنده دنباله‌ی 010 دریافت شده. دنباله‌ی سمبل‌های ارسالی چگونه بوده است؟)
کدهایی که مشکل کد C_2 را نداشته باشند، کدهای «به طور یکتا قابل کشف» می‌نامیم.

(ج) مشکل کد C_3 چیست؟ (راهنمایی: آیا با مشاهده‌ی کلمه‌کد مربوط به سمبل a در گیرنده، می‌توان بلافاصله با قطعیت گفت که سمبل a ارسال شده است؟)
کدهایی که مشکل کد C_3 را نداشته باشند، کدهای «آنی» می‌نامیم.

۲. می‌توان نشان داد اگر هیچ‌یک از کلمات یک کد، پیشوند کلمه‌کد دیگری نباشد، کد آنی است و در نتیجه به طور یکتا قابل کشف و ناویژه هم خواهد بود. این کدها را کدهای «پیشوندی» می‌نامیم.
همچنین می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای وجود یک کد پیشوندی دودویی با طول کلمات $l_1, l_2, \cdots, l_M$ آنست که:

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-l_i} \leq 1$$

و از آن‌جا که:

$$\mathbb{E}[l(X)] = \sum_{i=1}^{M} p_i l_i$$

باید مسأله‌ی بهینه‌سازی زیر را حل کنیم:

$$\min_{l_1,l_2,\cdots l_M} \sum_{i=1}^{M} p_i l_i \qquad \text{s.t.} \ \sum_{i=1}^{M} 2^{-l_i} \leq 1$$

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ این مسأله را حل کنید و طول کلمه‌کدها را برای منبع X بیابید.
(راهنمایی: روش ضرایب لاگرانژ با قید تساوی را در درس ریاضی عمومی ۲ آموخته‌اید. در اینجا قید به صورت نامساوی است، ولی دقّت کنید که می‌خواهیم تا حدّ ممکن، l_iها را کم کنیم و با کم‌کردن l_iها، عبارت $\sum_{i=1}^{M} 2^{-l_i}$ بزرگ می‌شود. در نتیجه اگر فرض طبیعی‌بودن l_iها را موقّتاً کنار بگذاریم، نقطه‌ی بهینه در جایی رخ می‌دهد که قید به صورت تساوی برقرار شود.)

۳. به جواب نزدیک شده‌ایم، ولی هنوز یک قدم دیگر باقی مانده است!
با توجّه به اینکه طول کلمه‌کدها را داریم و می‌خواهیم کد پیشوندی باشد، کلمه‌کدها را برای منبع X بسازید.
(راهنمایی: از کوچک‌ترین کلمه‌کد شروع کنید! توجّه کنید که مسأله یک جواب ندارد و کافیست که یک جواب را گزارش کنید)

۴. طول متوسط کلمه‌کدها را بیابید.

۵. تابعی با عنوان InformationSource بنویسید که در ورودی عدد n را بگیرد و در خروجی یک رشته شامل n سمبل بدهد، سمبل‌ها باید i.i.d. باشند و همه از توزیع احتمالی مانند توزیع احتمال منبع X آمده باشند.

۶. تابعی با عنوان SourceEncoder بنویسید که در ورودی، n و دنباله‌ای به طول n از سمبل‌های منبع X بگیرد و در خروجی یک رشته از صفر و یک‌ها بدهد که کدشده‌ی رشته‌ی ورودی است (قانون کدگذاری را در بخش ۳ پیدا کرده‌اید)

۷. تابعی با عنوان SourceDecoder بنویسید که در ورودی، دنباله‌ای از صفر و یک‌ها دریافت کند و در خروجی، دنباله‌ی متناظر آن از سمبل‌های منبع را بدهد.

۸. این سه تابع را به دنبال هم قرار دهید و سیستم را شبیه‌سازی کنید. اگر طول دنباله‌ی باینری حاصله از کدینگ یک رشته‌ی n سمبلی را $L_B(n)$ بنامیم، رفتار $H_n(X) = \frac{L_B(n)}{n}$ را با بزرگ‌شدن n بررسی کنید. با توجّه به آن‌چه در درس آمار و احتمال خوانده‌اید این رفتار را توجیه کنید!

۹. کدینگی که در این بخش دیدید، یک کدینگ بی‌اتلاف بود. یعنی از روی کلمه‌کدها می‌توان رشته‌ی ورودی را به طور یکتا و بدون خطا تعیین کرد. امّا گاهی به این میزان بیت در دسترس نداریم! در نتیجه مجبور می‌شویم از کدینگ‌های بااتلاف استفاده کنیم که در آن‌ها، نمی‌توان از روی کلمه‌کد، رشته‌ی ورودی را تعیین کرد. در این حالت باید یک «اعوجاج» تعریف کنیم که میزان خوب‌بودن کدینگ را بسنجد. به عنوان مثال اگر متغیّر تصادفی کدنشده را با X و متغیّر تصادفی کدشده را با $\hat{X}$ نشان دهیم، یک اعوجاج مرسوم به صورت $D = \mathbb{E}\left[(X-\hat{X})^2\right]$ است.

این مسأله در حالت کلّی پیچیده و دشوار است، ولی یک حالت ساده از آن را می‌توان بررسی کرد:
فرض کنید $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$، و می‌خواهیم این متغیّر تصادفی گاوسی را تنها با یک بیت کد کنیم. یعنی متغیّر تصادفی $\hat{X}$ (که تابعی از متغیّر تصادفی X است) تنها می‌تواند دو مقدار حقیقی داشته باشد. این مقادیر و احتمال تحقّق هریک را محاسبه کنید و نحوه‌ی تبعیّت $\hat{X}$ از روی X را نیز بیابید، به قسمی که $D = \mathbb{E}\left[(X-\hat{X})^2\right]$ کمینه شود.

(راهنمایی: تابعیّت $\hat{X}$ از X به صورتِ $\hat{X} = \begin{cases} \hat{x}_1 & \text{if } X \in A \\ \hat{x}_2 & \text{if } X \in B \end{cases}$ است. بدون اثبات فرض کنید که مجموعه‌های A, B بازه‌اند.)

۶ نکات مهم

لطفاً به نکات زیر دقّت کنید:

۱. این پروژه امتیازی و اختیاری است.

۲. تمامی شبیه‌سازی‌ها باید با کمک MATLAB انجام شود.

۳. تحویل پروژه به صورت گزارش و کدهای نوشته‌شده است. گزارش باید شامل تصاویر و نمودارها و نتیجه‌گیری‌های لازم باشد. همچنین تمیزی گزارش بسیار مهم است. کدها و گزارش را در یک فایل فشرده‌شده در سامانه‌ی درس‌افزار آپلود کنید.

۴. نوشتن گزارش کار با LaTeX نمره‌ی امتیازی دارد.

۵. درصورت مشاهده‌ی تقلّب، نمره‌ی هردو فرد صفر منظور خواهد شد.

موفّق باشید