دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی برق

گزارش پروژه‌ی درس آمار و احتمال مهندسی

آشنایی با زنجیره‌های مارکوف

حامد آجورلو
۹۷۱۰۱۱۶۷

استاد

دکتر محمّدعلی مدّاح‌علی

بهار ۱۳۹۹

فهرست مطالب

۱ بازم شستا!

زنجیره ی مارکوف یک مدل تصادفی به منظور توصیف پدیده هایی که به صورت توالی اتفاقاتی که با احتمالات مشخص رخ می دهند بیان می شود در ادامه به بررسی زنجیره های مارکوف می پردازیم .

۲ از دی که گذشت هیچ ازاو یاد مکن!

۱.۲ پرسش ۱

استقلال ذکر شده در رابطه ی (۱) که به خاصیت مارکوف معروف است حاکی از آن است که وضعیت بعدی تنها وابسته به وضعیت فعلی باشد که این خاصیت در بسیاری از پدیده های دنیای واقعی نیز قابل مشاهده است .
پیش بینی وضعیت آب و هوا در روز های آینده که اساسا پدیده ای احتمالاتی است و مهم نیست که روز های گذشته چه اتفاقی افتاده است و مشخصا خاصیت مارکوف برقرار است و همچنین بازی های تخته ای که با تاس صورت میگیرد نیز مثال روشنی از زنجیره ی مارکوف می باشد که مهم نیست چگونه به خانه ی A رسیده ایم و رفتن به خانه ی بعدی تنها وابسته به خانه ی فعلی است .

۲.۲ پرسش ۲

در هر یک از وضعیت های مجموعه ی $\mathcal{X}$ باشیم ، می دانیم که حتما باید در واحد زمانی بعد به یکی از حالت های مجموعه ی $\mathcal{X}$ برویم یعنی طبق یکی از اصول اولیه ی نظریه ی احتمال مجموع همه ی پیشامد های یک فضای نمونه باید برابر ۱ باشد که عبارت ذکر شده نیز از این اصل حکایت دارد .

۳.۲ پرسش ۳

فرض بفرمایید که توزیع احتمالاتی قرارگیری در وضعیت های مختلف مجموعه ی $\mathcal{X}$ را در واحد زمانی صفر در اختیار داریم و قصد داریم توزیع احتمالاتی قرارگیری در وضعیت های مختلف مجموعه ی $\mathcal{X}$ را در واحد زمانی ۱ بدست بیاوریم.
طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\lambda_0 = [\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2), \cdots, \mathbb{P}(X_0 = M)] \tag{۱}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = k)\mathbb{P}(X_0 = k) \tag{۲}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{m} p_{kj}\mathbb{P}(X_0 = k) \tag{۳}$$

که می توان این عبارت را به فرم ماتریسی نوشت :

$$\lambda_1 = \lambda_0 P \tag{۴}$$

به همین ترتیب داریم :

$$\lambda_2 = \lambda_1 P = \lambda_0 P^2 \qquad (۵)$$

بنابراین در حالت کلی داریم:

$$\lambda_n = [(X_n = 1), (X_n = 2), \cdots, (X_n = M)] \qquad (۶)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{m} p_{kj} \mathbb{P}(X_0 = k) \qquad (۷)$$

$$\lambda_n = \lambda_0 P^n \qquad (۸)$$

۴.۲ پرسش ۴

طبق فرض مسئله در مورد دنباله ی $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ می دانیم که

$$\mathbb{P}[X_{n+1} | X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} | X_{n-1}, X_n]$$

حال دنباله ی ثانویه ی $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ را به صورتی تعریف می نماییم که $Y_n = (X_{n-1}, X_{n-2})$ می دانیم خاصیت زیر برقرار است :

$$\mathbb{P}[X_n = k_1 | X_{n-1} = k_2, X_{n-2} = k_3] = \mathbb{P}[X_n = k_1, X_{n-1} = k_2 | X_{n-1} = k_2, X_{n-2} = k_3]$$

بنابر این می توان نوشت :

$$\mathbb{P}[X_n = k_1, X_{n-1} = k_2 | X_{n-1} = k_2, X_{n-2} = k_3] = \mathbb{P}[Y_{n+1} = (k_1, k_2) | Y_n = (k_2, k_3)];$$

از دنباله ی $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ می توان نظیر به نظیر دنباله ی $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ را مشخص نمود

$$Y_n = (k_2, k_3) \longrightarrow X_{n-1} = k_2$$

بنابراین می توان این دنباله را به صورت یک دنباله ی مارکوف نوشت . در حالت کلی به طرز مشابه با تعریف دنباله ای با K جزء از دنباله ی $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ به صورت زیر :

$$Y_n = (X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots, X_{n-K+1})$$

و می توان طی مراحل مشابه اثبات کرد که اگر یک دنباله دارای حافظه ی محدود K باشد آنگاه می توان آن را به صورت یک زنجیره ی مارکوف نوشت .

۵.۲ پرسش ۵

از استقرا برای اثبات بهره می گیریم :
این گزاره برای $n = 0$ معتبر می باشد . فرض می کنیم که برای n دلخواهی به شرطی که $n > 0$ نیز معتبر باشد و همچنین وجود دارد :

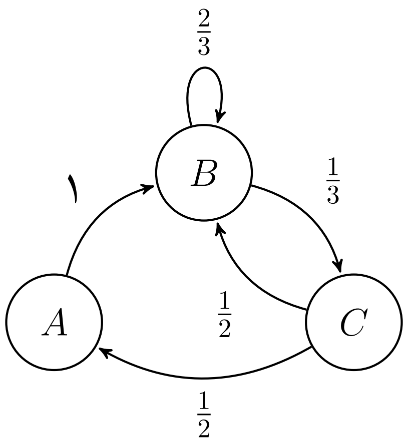
$$A_n = [X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n] \tag{۹}$$

در این صورت حتما برای $n + 1$ نیز معتبر خواهد بود . زیرا :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|A_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_n,i_{n+1}} \tag{۱۰}$$

بنابر استقرا اثبات شد که این گزاره معتبر می باشد .

۶.۲ پرسش ۶



۷.۲ پرسش ۷

از مبحث احتمال شرطی می دانیم رابطه ی زیر برقرار است :

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C) \tag{۱۱}$$

حال از معادله ی (۱۱) بهره میگیریم :

$$p_{ij}(m + n + r) = \mathbb{P}(X_{m+n+r} = j|X_m = i) \tag{۱۲}$$

$$\sum_k \mathbb{P}(X_{m+n+r} = j, X_{m+n} = k|X_m = i) \tag{۱۳}$$

$$\sum_k \mathbb{P}(X_{m+n+r} = j|X_{m+n} = k, X_m = i)\mathbb{P}(X_{m+n} = k|X_m = i) \tag{۱۴}$$

با استفاده از خاصیت مارکوف :

$$\sum_k \mathbb{P}(X_{m+n+r} = j|X_{m+n} = k)\mathbb{P}(X_{m+n} = k|X_m = i) \tag{۱۵}$$

$$\sum_k p_{kj}(m+n, m+n+r)p_{ik}(m, m+n) \tag{۱۶}$$

حال میخواهیم با استفاده از آنچه اثبات کردیم ، رابطه ی زیر را اثبات کنیم :

$$P(m, m+n) = P^n \tag{۱۷}$$

از استقرا بهره می گیریم . می دانیم که به ازای $n = 1$ این رابطه معتبر است .

$$P(m, m+1) = P \tag{۱۸}$$

حال برای گام استقرا

$$P(m, m+k) = P^k \tag{۱۹}$$

در نظر می گیریم برای همه ی m ها و همه ی $n>k$
حال بنابر فرمول چپمن- کلموگروف :

$$P(m, m+n) = P(m, m+n-1)P(m+n-1, m+n) \tag{۲۰}$$

اما بنابر فرض استقرا :

$$P(m, m+n-1) = P^{n-1} \tag{۲۱}$$

$$P(m+n-1, m+n) = P \tag{۲۲}$$

بنابراین :

$$P(m, m+n) = P^n \tag{۲۳}$$

۳ بس در طلبت کوشش بی فایده کردیم!

۱.۳ پرسش ۸

دیدیم که p_{ij} در سطر i و ستون j ماتریس P^n برابر احتمال انتقال از i به j دقیقا در n گام می باشد . حال با فرض ارتباط بین حالت i و j نتیجه می گیریم که $n > 0$ وجود دارد به طوری که

$$p_{i0,i1}p_{i1,i2}\cdots p_{in-1,in} > 0 \tag{۲۴}$$

حال فرض می کنیم که عبارت (۲۴) برقرار باشد آنگاه می دانیم که انتقال از i به j دقیقا در n گام میسر می باشد (هرچند با احتمال ناچیز !)پس ارتباط بین این دو حالت برقرار می باشد .

۲.۳ پرسش ۹

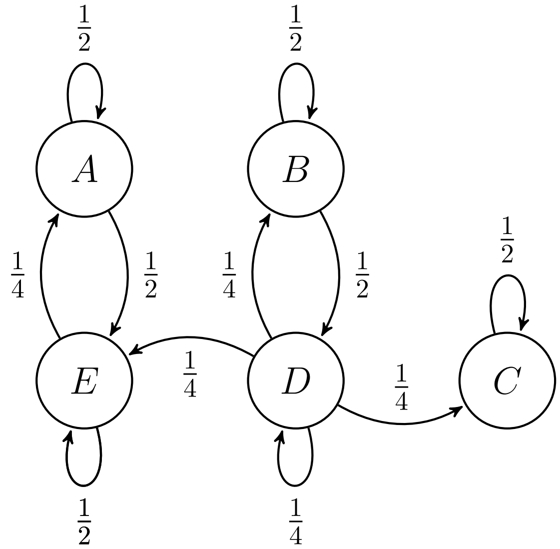
بازتابی : داریم $i \iff i$ پس : $p_{i,i}(0) = 1$
تقارنی : از فرض هم ارزی به صورت بدیهی بدست می آید .
تعدی : فرض کنید $k \longrightarrow i$ و $j \longrightarrow k$. چون $k \longrightarrow i$ $m > 0$ وجود دارد به گونه ای که $p_{i,k}(m) > 0$. به طور مشابه چون $j \longrightarrow k$، n وجود دارد که $p_{k,j}(n) > 0$. سپس داریم :

$$p_{i,j}(m+n) = \sum_r p_{i,r}(m)p_{r,j}(n) \geq p_{i,k}(m)p_{k,j}(n) > 0.$$

بنابراین $j \longrightarrow i$. به طرز مشابه اگر $i \longrightarrow k$ و $k \longrightarrow j$ آنگاه $i \longrightarrow j$. بنابراین $k \iff i$و $j \iff k$ به $j \iff i$منجر می شود . به این ترتیب رابطه ی تعدی بدست می آید . درنتیجه در ارتباط بودن یک رابطه ی هم ارزی روی مجموعه ی حالت های $\mathcal{X}$می باشد .

۳.۳ پرسش ۱۰

سه مجموعه ی {A،E}، {B،D} {C} سه کلاس هم ارزی و به عبارتی سه کلاس مخابراتی را تشکیل می دهند که هر سه بسته هستند .



۴.۳ پرسش ۱۱

از آنجا که تعداد گام هر مسیری که از $X_0 = 0$ آغاز می شود در زمان صفر ، مضرب دو می باشد لذا gcd تمام مسیر ها بزرگ تر از یک می باشد درنتیجه پریودیک هست و پریود برابر ۲ می باشد .

۵.۳ پرسش ۱۲

اگر $j \longleftrightarrow i$. آنگاه : $m, n \geq 1$ وجود دارد با $p_{i,j}(m), p_{j,i}(n) > 0$. (پیشتر اثبات کردیم) بنابر معادلات چپمن ـ کلموگروف می توان گفت :

$$p_{i,j}(m+n+r) \geq p_{i,j}(m)p_{j,j}(r)p_{j,i}(n) \geq \alpha p_{j,j}(r) \qquad (۲۵)$$

که $\alpha = p_{i,j}(m)p_{j,i}(n) > 0$. حال اگر داشته باشیم: $D_j = \{r \geq 1 : p_{i,j}(r) > 0\}$. که بنابر تعریف : $d_j = gcdD_j$ می دانیم که اگر $r \in D_j$ آنگاه $m + r + n \in D_i$ همچنین می دانیم که $n+m \in D_i$ چون $p_{i,i}(n+m) \geq p_{i,j}(n)p_{j,i} > 0$. برای هر $r \in D_j$ می دانیم که $d_i|m+n+r$ و همینطور $d_i|m+n$ پس $d_i|r$. لذا $gcdD_i|gcdD_j$ طبق تقارن مسئله $gcdD_j|gcdD_i$ نیز برقرار است . پس $gcdD_i = gcdD_j$.

۴ روز فراق را که نهد در شمار عمر ؟!

۱.۴ پرسش ۱۳

اگر $X_0 = i \in A$ آنگاه $H^A = 0$ و $h_i^A = 1$. اگر $X_0 = i \notin A$. آنگاه $H^A \geq 1$ بنابر خاصیت مارکوف داریم :

$$\mathbb{P}_i(H^A < \infty | X_1 = j) = \mathbb{P}_j(H^A < \infty) = h_j^A \tag{۲۶}$$

$$h_i^A = \mathbb{P}_i(H^A < \infty) = \sum_{j \in I} \mathbb{P}_i(H^A < \infty, X_1 = j)$$

$$= \sum_{j \in I} \mathbb{P}_i(H^A < \infty | X_1 = j) \mathbb{P}_i(X_1 = j) = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A.$$

فرض کنید که $x = (x_i : i \in I)$ پاسخ مسئله باشد . برای $i \in A$ $h_i^A = x_i = 1$. برای $i \notin A$ داریم :

$$x_i = \sum_{j \in I} p_{ij} x_j \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j$$

x_j را جایگذاری می کنیم :

$$x_i = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} (\sum_{k \in A} p_{jk} + \sum_{k \notin A} p_{jk} x_k) \tag{۲۷}$$

$$= \mathbb{P}_i(X_1 \in A) + \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, X_2 \in A) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} x_k.$$

با جایگذاری های متوالی به نتیجه ی زیر خواهیم رسید :

$$x_i = \mathbb{P}_i(X_1 \in A) + \cdots \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, X_2 \in A) + \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A)$$

$$+ \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij1} p_{j1j2} p \cdots p_{j_{n-1}} p_{j_n} x_{j_n}.$$

اگر x نامنفی باشد ،انگاه آخرین جمله ی سمت راست خواهد بود . بنابراین $x_i \geq \mathbb{P}_i(H^A \leq n)$

$$\forall n : x_i \geq \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(H^A \leq n) = \mathbb{P}_i(H^A < \infty) = h_i$$

۲.۴ پرسش ۱۴

اگر $X_0 = i \in A$ باشد . آنگاه $H^A = 0$ در نتیجه $k_i^A = 0$ می باشد . اگر $X_0 = i \notin A$ آنگاه $H^A \geq 1$. طبق خاصیت مارکوف خواهیم داشت :

$$E_i(H^A|X_1 = j) = 1 + E_j(H^A)$$

$$k_i^A = E_i(H^A) = \sum_{j\in I} E_i(H^A|X_1 = j)$$

$$= \sum_{j\in I} E_i(H^A|X_1 = j)P_i(X_1 = j) = 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij}k_j^A$$

فرض کنید $y = (y_i : i \in I)$ پاسخ مسئله باشد . آنگاه :

$$k_i^A = y_i = 0 \ \ , \ \ for \ \ i \in A$$

اگر $i \notin A$

$$y_i = 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij}y_j$$

$$= 1 + \sum_{j\notin A} p_{ij}(1 + \sum_{k\notin A} p_{ik}y_k)$$

$$= P_i(H^A \geq 1) + P_i(H^A \geq 2) + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} p_{ij}pjky_k$$

با جایگذاری های متوالی به نتیجه ی زیر خواهیم رسید :

$$y_i = P_i(H^A \geq 1) + \cdots + P_i(H^A \geq n)$$

$$+ \sum_{j_1\notin A} \cdots \sum_{j_n\notin A} p_{ij_1}p_{j_1j_2}\dots p_{j_{n-1}j_n}y_{j_n}$$

اگر yنامنفی باشد .

$$y_i \geq P_i(H^A \geq 1) + \cdots + P_i(H^A \geq n)$$

با میل دادن nبه سمت بی نهایت :

$$y_i \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_i(H^A \geq n) = E_i(H^A) = x_i$$

۳.۴ پرسش ۱۵

: $k_1 = k_4 = 0$ ، $h_1 = 0, h_4 = 1$

$$h_2 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3, k_2 = 1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_3$$

$$h_3 = \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_4, k_3 = 1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_4$$

$$h_2 = \frac{1}{2}h_3 = \frac{1}{2}h_4(\frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2})$$

$$k_2 = 1 + \frac{1}{2}k_3 = 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}k_2)$$

$k^{\{1,4\}} = 2$ ، $h^{\{4\}} = \frac{1}{3}$

۵ خوشا رفتن از خود رسیدن به خویش

۱.۵ پرسش ۱۶

فرض بفرمایید از $X_0 = i$ شروع کنیم واولین بازگشت در زمان n , $k = 1, 2, 3, \cdots$ رخ دهد و همچنین یک بازگشت دیگر در زمان n رخ دهد . احتمال این رخداد برابر $f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$ است . این احتمال را به ازای k های مختلف جمع می کنیم.

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} \quad , p_{ii}^{(0)} = 1$$

در s^nضرب می نماییم .

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} s^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} s^{(n-k)}$$

$$P_{ii}(s) - 1 = F_{ii}(s) P_{ii}(s)$$

$$\lim_{s \to \infty} F_{ii}(s) = F_{ii}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_i$$

$$\lim_{s \to \infty} F'_{ii}(s) = F_{ii}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \mu_i$$

$$P_{ii}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \longleftrightarrow f_i = 1$$

$$P_{ii}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \longleftrightarrow f_i < 1$$

احتمال شروع از حالت i و رسیدن به حالت j برای اولین بار بعد از n گام برابر است با :

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}, \quad , i \neq j$$

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} + \cdots + f_{ij}^{(n)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \quad , p_{jj}^{(0)} = 1$$

s^nرا در عبارت ضرب می نماییم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} s^n$$

$$P_{ij}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} s^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{jj}^{(n-k)} s^{(n-k)}$$
$$P_{ij}(s) = F_{ij}(s) P_{jj}(s) \quad , i \neq j$$

۲.۵ پرسش ۱۷

مطابق آنچه بدست آوردیم به این دو پرسش پاسخ خواهیم داد :

۱.۲.۵ ۱

$$P_{ii}(s) = 1 + P_{ii}(s) F_{ii}(s)$$
$$F_{ii}(s) = 1 - \frac{1}{P_{ii}(s)}$$

اگر ۱ $\rightarrow$ s آنگاه بدست می آید : $\sum f_{jj}(n) = 1 - \frac{1}{\sum p_{jj}^{(n)}}$ بنابرفرض مسئله $\sum f_{jj} = 1$ بنابر این حالت j حتما بازگشتی است . هم چنین در این صورت برای هر i, j که $f_{i,j} > 0$

$$P_{ij}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = F_{ij}(1) \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

لذا اگر

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty \quad (p_{ij}^{(0)} = 0)$$

۲.۲.۵ ۲

به طور مشابه نتیجه گیری می شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty \quad (p_{ij}^{(0)} = 0)$$

۳.۵ پرسش ۱۸

از قسمت های قبل بدست آوردیم :

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}$$

$$\lim_{s\to 1}(1-s)P_{ii}(s) = \lim_{n\to\infty} p^*_{ii}(n) = \lim_{s\to 1} \frac{1-s}{1-F_{ii}(s)}$$

چون $F_{ii}(1) = f_i$ و $f_i = 1$ سمت راست معادله نیاز به رفع ابهام دارد . از قاعده HOP استفاده می نماییم .

$$\lim_{n\to\infty} p^*_{ii}(n) = \frac{1}{F'_{ii}(1)} = \frac{1}{\mu_i}$$

که μ_i امید ریاضی تعداد گام برای بازگشت به مبدا می باشد از آنجا که برای حالت گذرا این مقدار برابر بی نهایت می باشد بنابراین گزاره ی مورد بحث نتیجه می شود .

۴.۵ پرسش ۱۹

$$\begin{aligned} E(N|X_0=i) = E[N|T_i=\infty, X_0=i]P(T_i=\infty|X_0=i) \\ +E[N|T_i<\infty, X_0=i]P(T_i<\infty|X_0=i) \\ E(N|X_0=i) = 1.(1-f_i) + f_i[1+E(N|X_0=i)] \end{aligned}$$

اگر $T_i = \infty$ به غیر از $n = 0$ هیچ بازگشتی در کار نخواهد بود . اما اگر $T_i < \infty$ حتما به حالت مبدا باز خواهیم گشت .

$$E(N|T_i<\infty, X_k=i) = E(N|T_i<\infty, X_0=i)$$

با خاصیت مارکوف خواهیم داشت :

$$E(N|T_i<\infty, X_0=i) = 1 + E(N|X_0=i)$$

$$E(N|X_0=i) = 1.(1-f_i) + \{1+E[N|X_0=i\}].f_i$$

$$E(N|X_0=i) = \frac{1}{1-f_i}$$

از آنجاکه برای حالت های بازگشتی $f_i < \infty$ لذا امید ریاضی تعداد دفعات عبوری از حالت iبه شرط شروع ازحالت i کران دار است .

۶ عاقبت گرگ زاده گرگ شود گرچه با آدمی بزرگ شود

۱.۶ پرسش ۲۱

رابطه ی $\lambda P = \lambda$ متناظر با رابطه ی $Mv = av$ برای بردار ویژه های ماتریس به ازای مقدار ویژه ی ۱ می باشد . بنابراین توزیع ایستان ماتریس انتقال برابر با بردار ویژه ی متناظر با مقدار ویژه ی ۱ می باشد .

۲.۶ پرسش ۲۲

۱.۲.۶ ۱

توزیع ایستان احتمال حضور در حالت های مختلف مجموعه ی حالت های $\mathcal{X}$ بعد از گذشت زمان های طولانی می باشد و از آنجا که فضای نمونه مجموعه حالت های $\mathcal{X}$می باشد و طبق یکی از اصول اساسی نظریه ی احتمال داریم :

$$\sum_{i \in \mathcal{X}} P(X = i) = 1$$

به طور مشابه گزاره ی مورد بحث نتیجه می شود .

۲.۲.۶ ۲

طبق آنچه صحبت کردیم توزیع ایستان ، توزیع احتمالاتی حضور در حالت های مختلف زنجیره بعد از گذشت زمان های طولانی می باشد . بنابراین داریم :

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n$$

به طور مشابه می توان نوشت :

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \to \infty} \lambda_{n+1} \\ &= \lim_{n \to \infty} [\lambda_0 P^{n+1}] \\ &= \lim_{n \to \infty} [\lambda_0 P^n P] \\ &= \lim_{n \to \infty} [\lambda_0 P^n] P \\ &= \lambda P \end{aligned}$$

که این نتیجه گیری طبق قانون احتمال کل به این صورت قابل نوشتن می باشد :

$$\lambda_j = \sum_{k \in \mathcal{X}} \lambda_k P_{kj}, \forall j \in S$$

به این ترتیب $\lambda = (w_1, w_2, w_3, \cdots, w_r)$ یک توزیع ایستان برای زنجیر می باشد .

۳.۲.۶ ۳

فرض بفرمایید که از حالت iشروع کرده و انتقال به حالت های مختلف را در طول زمان به ازای N که به بینهایت میل می کند نظاره گر هستیم . در طول N گام n_i را به عنوان تعداد دفعاتی که به حالت i برمی گردیم در نظر می گیریم . به ازای N که بی بینهایت میل می کند، انتظار داریم که $\frac{n_i}{N}$ به λ_i میل کند . حال میانگین تعداد گام هایی که طول می کشد تا به حالت i باز گردیم (که ممکن است هر دفعه با گام های متفاوتی نسبت به دفعه های قبل یا بعد به مبدا بازگردیم) بسیار شبیه به وقتی رفتار میکند که این بازگشت به مبدا ها به صورت یکنواخت و یونیفورم در طول N گام پخش شده باشد . پس انتظار داریم این مقدار میانگین به $\frac{N}{n_i}$ نزدیک باشد و به ازای N که به بی نهایت میل میکند ، به μ_i میل می کند (μ_i رابه عنوان میانگین گام لازم برای برگشت به حالت i تعریف می نماییم .)
بنابراین انتظار داریم که $\lambda_i\mu_i = 1$ برقرار باشد . اگر λ_i مثبت باشد آنگاه $\mu_i < \infty$ بنابراین حالت i recurrent می باشد و توزیع ایستان نیز یکتا می باشد .
از دید دیگر نیز می توان به موضوع نگاه کرد که با حل دستگاه معادله ی $\lambda P = \lambda$ به $n-1$ معادله ی مستقل خواهیم رسید که با اعمال معادله ی $\sum_{i\in\mathcal{X}} w_i = 1$ می توان یک دستگاه حل کرد و به جواب های یکتا دست پیدا کرد .

۳.۶ پرسش ۲۳

۱.۳.۶ ۱

قصد داریم نشان بدهیم :

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} = \sum_{k=1}^{r} p_{kj}^{(n)} [p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}]$$

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}^{(N)} p_{kj}^{(n)} - \sum_{k=1}^{(N)} p_{mk}^{(N)} p_{kj}^{(n)}$$

طبق چپمن_ کلموگروف داریم : $p_{ij}^{(n+N)} = \sum_{k=1}^{r} p_{kj}^{(n)} p_{ik}^{(N)}$ و $p_{mj}^{(n+N)} = \sum_{k=1}^{r} p_{kj}^{(n)} p_{mk}^{(N)}$ که صورت مسئله تفاضل نظیر به نظیر طرفین این دو معادله می باشد

۲.۳.۶ ۲

دو مجموعه ی $S1$ و $S2$ را تعریف می نماییم و بنابر این دو مجموعه داریم :

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} = \sum_{k\in S1} p_{kj}^{(n)} [p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}] + \sum_{k\in S2} p_{kj}^{(n)} [p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}]$$

تعریف می کنیم $q_k = |p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}|$ ویک منفی به جمله ی دوم اضافه می کنیم تا تساوی حفظ شود .

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} = \sum_{k\in S1} p_{kj}^{(n)} q_k - \sum_{k\in S1} p_{kj}^{(n)} q_k$$

حال قصد داریم برای این عبارت کران بالا تعیین کنیم لذا $k \in S1$ $p_{kj}^{(n)}$ را با بزرگ ترین المان ستون j ماتریس P^n و $k \in S2$ $p_{kj}^{(n)}$ را با کوچک ترین المان ستون j ماتریس P^n جایگزین می نماییم تا به کران بالای این عبارت دست یابیم . چون قدر مطلق تعریف کردیم q_k به ازای k های مجموعه ی $S1$ و $S2$ برابر می باشد و یکسان است .

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k\in S1} q_k = (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k\in S2} q_k$$

۳.۳.۶ ۳

اگر $j_0 \in S1$ باشد آنگاه $p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)}$ بزرگتر از صفر خواهد بود بنابراین قدر مطلق حذف می شود .
حال قصد داریم که برای این عبارت کران بالا تعیین نماییم :

$$\sum_{k\in S1} (p_{ik}^{(N)} - p_{mk}^{(N)})$$

از آنجا که $p_{mk}^{(N)}$ عضوی از ستون ناصفر j_0 می باشد لذا $\exists\epsilon > 0$ به طوری که :

$p_{mk}^{(N)} > \epsilon$ بنابراین برای ماکسیمم بودن این تفاضل جمله ی مثبت باید در بیشترین و جمله ی منفی باید در کمترین حالت خود باشد .
تقریبی که برای جمله ی مثبت می توان زد این است که همواره از ۱ کم تر است زیرا تعدادی از حالات در مجموعه ی $S2$ هستند و جمله ی منفی نیز با $0 < \epsilon$ جایگذاری می نماییم . لذا داریم :

$$\sum_{k \in S1} q_k \leq 1 - \epsilon$$

به طرز مشابه می توان این عملیات را برای $j_0 \in S2$ گفت که یک منفی به ازای قدر مطلق به وجود می آید و جای جمله ی منفی و مثبت عوض شده و باقی مراحل مشابه می باشد .

۴ ۴.۳.۶

در قسمت قبل اثبات کردیم که :

$$\sum_{k \in S1} q_k \leq 1 - \epsilon$$

در طرفین نامساوی عبارت همواره مثبت $M_j^{(n)} - m_j^{(n)}$ را ضرب می نماییم که مشکلی در جهت نامساوی نیز ایجاد نمی کند .

$$(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k \in S1} q_k \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1 - \epsilon)$$

از طرفی طبق نامساوی قسمت ۲ داریم :

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)}) \sum_{k \in S1} q_k$$

طبق این دو نامساوی نتیجه گیری می شود که :

$$p_{ij}^{(n+N)} - p_{mj}^{(n+N)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1 - \epsilon)$$

این نامساوی برای همه ی i, j ها برقرار است بنابراین می توان $p_{ij}^{(n+N)}$ را با $M_j^{(n+N)}$ و $p_{mj}^{(n+N)}$ را با $m_j^{(n+N)}$ جایگزین کرد بنابراین داریم :

$$M_j^{(n+N)} - m_j^{(n+N)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1 - \epsilon)$$

۵ ۵.۳.۶

طبق آنچه در قسمت ۴ بدست آوردیم داریم :

$$M_j^{(n+N)} - m_j^{(n+N)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1 - \epsilon)$$

تغییر متغیر $n = (l-1)N$ داده و در نامساوی جایگذاری می نماییم :

$$M_j^{(lN)} - m_j^{(lN)} \leq (M_j^{(l-1)N} - m_j^{(l-1)N})(1-\epsilon)$$

با $l \to \infty$ و با افزایش توان $(1-\epsilon)$ در اثر تکرار عملیات سمت راست نامساوی به سمت صفر میل می نماید . در نتیجه عبارت زیر اثبات می شود .

$$lim_{l\to\infty}[M_j^{(lN)} - m_j^{(lN)}] = 0$$

۶.۳.۶ ۶

طبق نامساوی اثبات شده در قسمت ۴ داریم : به ازای $N = 1$ داریم :

$$M_j^{(n+1)} - m_j^{(n+1)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1-\epsilon)$$

به عبارتی هر چه تعداد گام ها افزایش می یابد اختلاف بیشترین جمله و کمترین جمله کاهش پیدا کرده که در قسمت ۵ اثبات شد که در بی نهایت این اختلاف به صفر میل می کند و M_j و m_j برابر خواهند بود . لذا M_j و m_j یکنوا خواهند بود .

۷.۳.۶ ۷

طبق مفاهیم موجود در درس ریاضی ۱ دنباله ی یکنوا ی کران دار حتما در بی نهایت همگرا خواهد بود که با وجود کران دار بودن اختلاف M_j و m_j و یکنوایی هردو لذا حتما همگرا خواهند بود . لذا این زنجیره ی مارکوف با این مشخصات دارای حالت دائمی خواهد بود .

۷ من جَرّبَ المُجَرّب... !

۱.۷ ۱

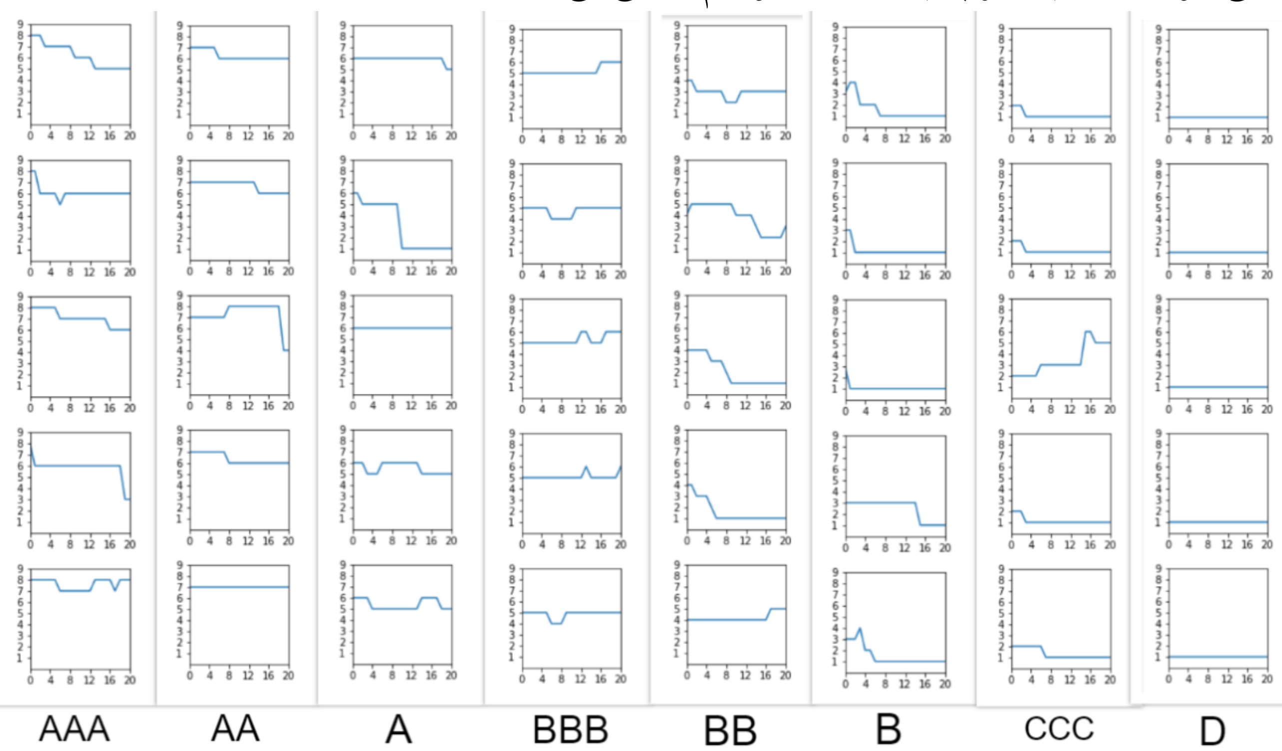
با حالت بندی اتفاقات ممکن با در نظر گیری احتمالات متناظر زنجیره ی مارکوفی طراحی می نماییم که به ازای حالت اولیه ی ورودی توسط کاربر و عددی به منظور تعداد گام پیشروی در زنجیره یک تحقق از متغیرهای تصادفی $X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, \cdots, X_n$ را در خروجی ارائه دهد .

۲.۷ ۲

طبق آنچه در پرسش ۶ پاسخ داده شد توزیع ایستان بردار ویژه ی متناظر با مقدار ویژه ی ۱ می باشد لذا این بردار ویژه را یافته و ازآنجا که جمع درایه های بردار باید برابر یک باشد بردار را با ضرب عدد مناسب در آن نرمالایز می نماییم . میبینیم که تنها یکی از درایه ها ناصفر است (D) پس انتظار داریم پس از گذشت زمان های طولانی در این وضعیت پایدار قرار بگیریم .

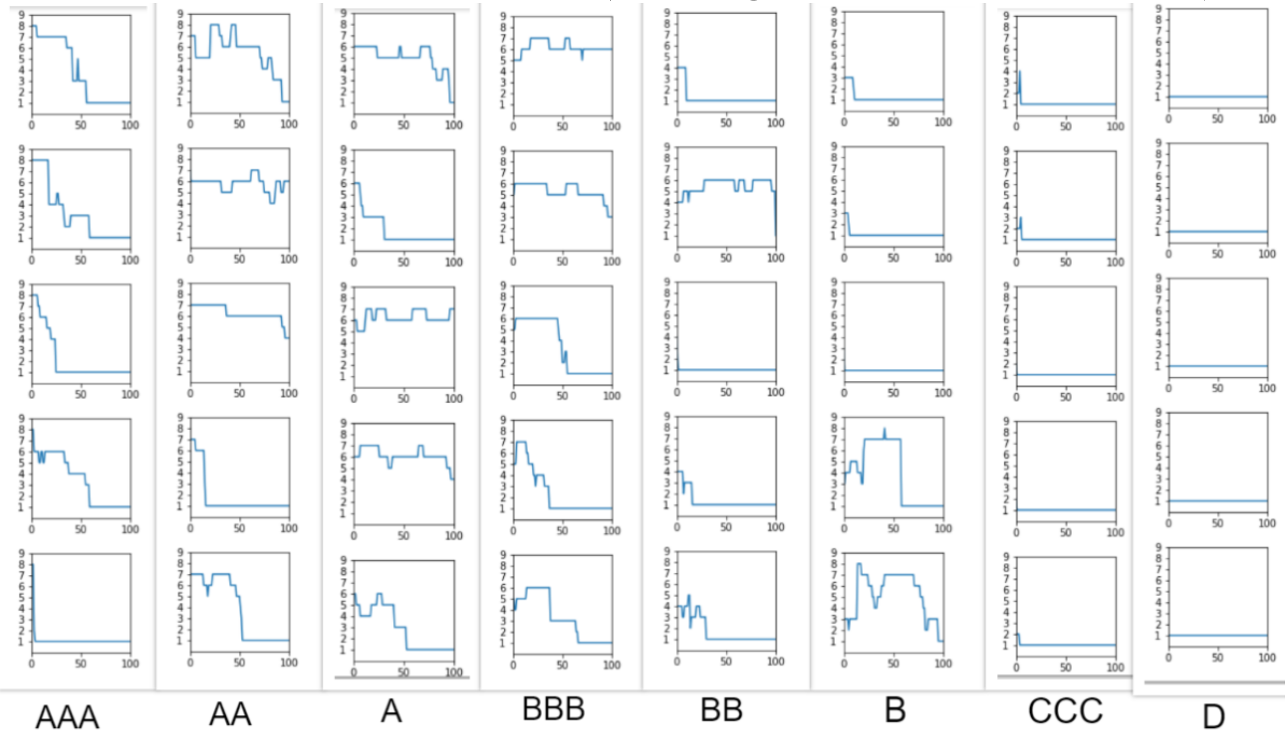
۳.۷ ۳

برای هر یک از هشت حالت اولیه ، 5 بار شبیه سازی می نماییم به ازای $n = 20$ که تصاویر به شرح زیر می باشد . عدد هایی که به هر حالت نسبت داده شده است به گونه ای است که نمودار اوضاع مالی شرکت را ــ چه خوب چه بد ــ در هر گام تداعی می کند.



۴.۷ ۴

مشابه قسمت قبل برای هر یک از هشت حالت اولیه 5 بار شبیه سازی می نماییم به ازای $n = 100$ میبینیم که با هر وضعیت اولیه ای که شروع می نماییم در نهایت به ورشکستگی منجر می شود .

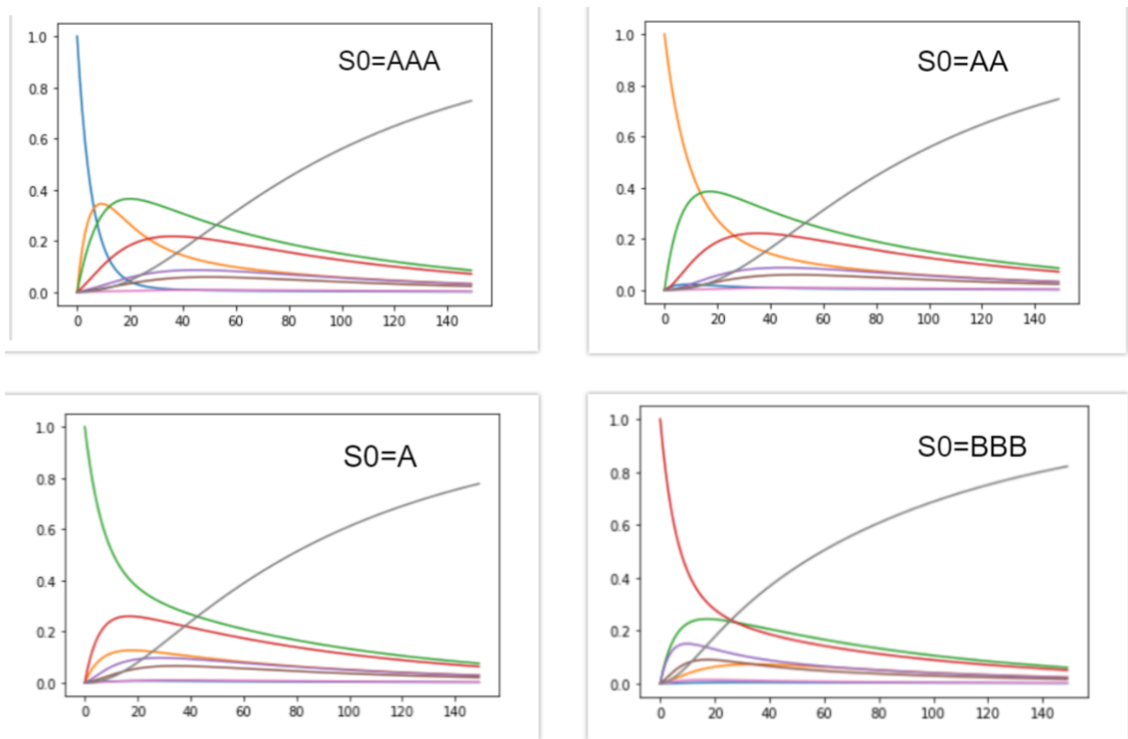


۵.۷ ۵

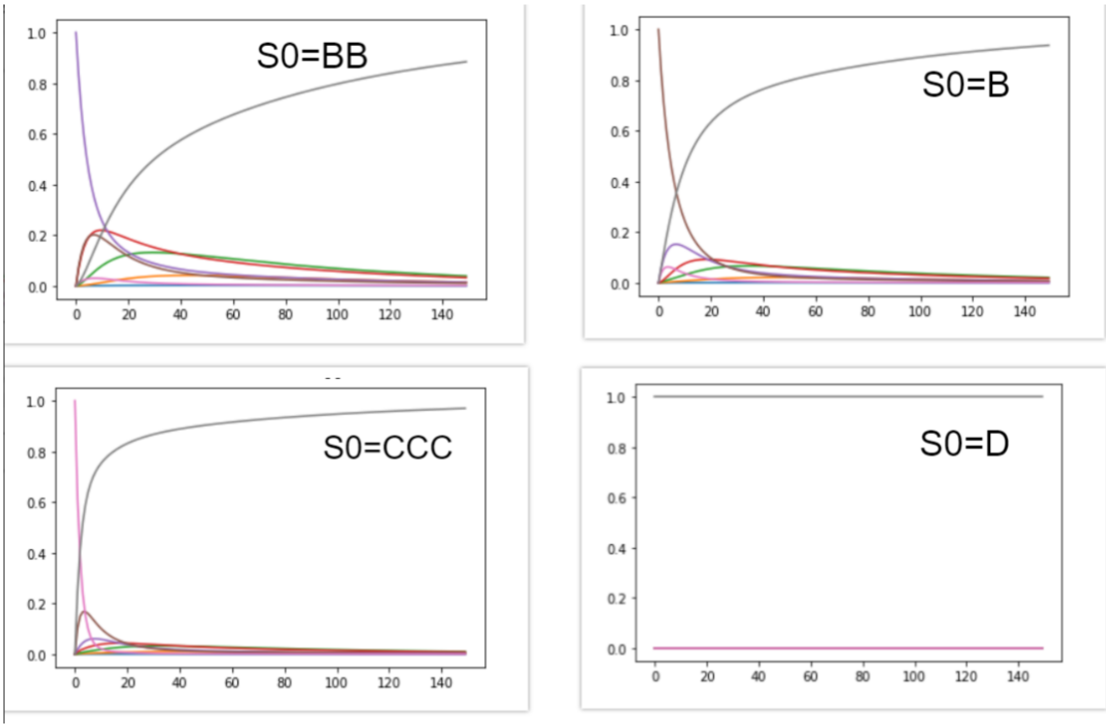
می بینیم که رفته رفته در هر سطر احتمال انتقال به حالت ورشکسته افزایش یافته و از سایر احتمالات کاسته می شود که کاملا مطابق انتظار ما می باشد یعنی هر چه تعداد گام های پیموده شده بین حالت ها افزایش یافته احتمال افتادن درون حالت پایدار و برای همیشه ماندن در آن افزایش می یابد .

۶.۷ ۶

با شروع از هر حالت احتمال حضور در سایر حالت هارا بر حسب زمان بررسی می نماییم همانطور که ملاحظه می فرمایید با وجود دانستن حضور در کدام حالت اولیه لذا احتمال حضور در آن نقطه در لحظه ی صفر برابر یک می بیاشد و احتمال حضور در باقی حالت ها صفر می باشد . لذا در همه ی نمودار ها یکی از نمودار ها از مقدار یک در حال نزول است که مربوط به نمودار حالت اولیه می باشد و یکی از نمودار ها از احتمال کم در حال صعود است که احتمال حضور در حالت ورشکسته می باشد که با گذر زمان در حال افزایش می باشد .



برای شرکت های با وضعیت مالی وخیم تر احتمال حضور در وضعیت ورشکسته با شیب بیشتری صعودی شده و اوج می گیرد . همچنین برای نموداری که با حالت اولیه ی ورشکسته آغاز می کند نیز با احتمال یک در همه ی زمان ها در حالت ورشکسته خواهیم بود و با احتمال صفر در سایر وضعیت ها که تصویر نمودار نیز حاکی از این موضوع است .

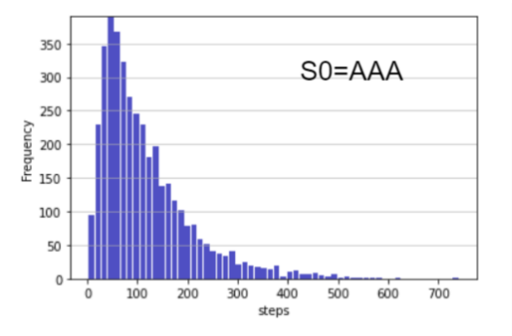


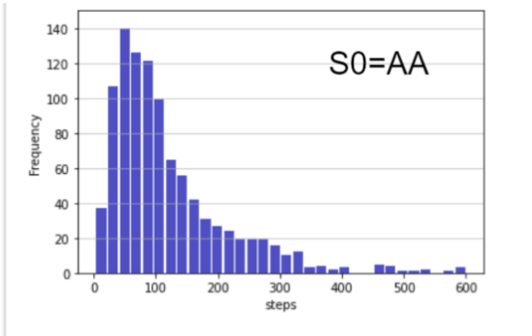
۷.۷ ۷

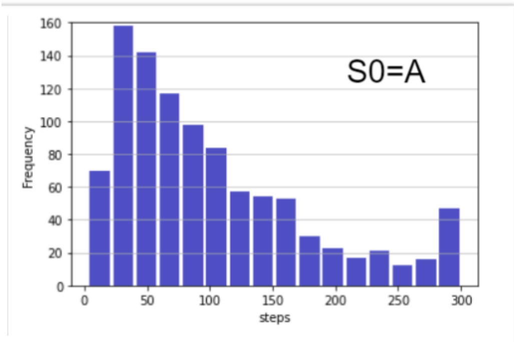
نسبت تعداد شرکت های حاضر در حالت j به کل شرکت ها برابر w_j خواهد بود بنابر این توزیع ایستان که به کمک شبیه سازی در قسمت ۲ بدست آمد نسبت های حضور در وضعیت های مختلف را به کل شرکت ها می دهد،که در این مسئله برای همه ی وضعیت ها برابر صفر خواهد بود به غیر از وضعیت ورشکسته که برابر یک می باشد .

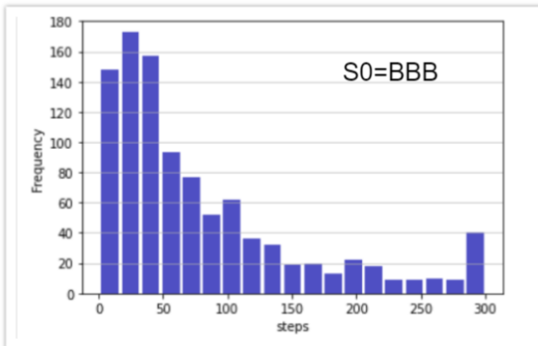
۸.۷ ۸

به کمک هیستوگرام توزیع گام های طی شده تا رسیدن به حالت ورشکسته از وضعیت های مختلف را طی اجراهای متعدد نمایش می دهیم .

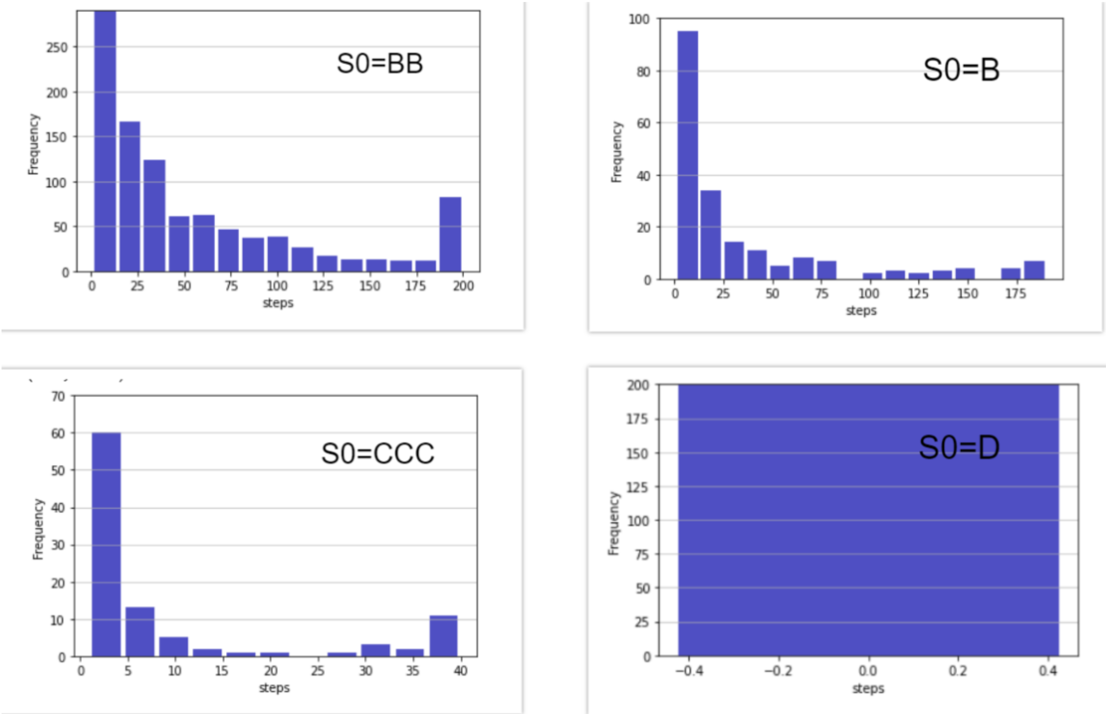








مشاهده می نماییم که هرچه وضعیت مالی شرکت وخیم تر می شود تعداد گام های رسیدن به وضعیت ورشکسته کاهش می یابد . برای وضعیت ورشکسته نیز بدیهی است که گامی نیاز نیست تا به این حالت برسیم ، زیرا در آن حاضر هستیم.



میانگین هر یک از هیستوگرام ها در کد ضمیمه شده محاسبه شده و درج شده است .

۹.۷ ۹

حال مدل پیشنهادی مهندسان بانک را بررسی می نماییم . خواهیم دید که در مدل پیشنهادی این امکان وجود دارد که شرکتی از وضعیت ورشکسته خارج شود و اوضاع اقتصادی متعادلی را تجربه نماید . قسمت های ۱ تا ۶ را برای مدل جدید تکرار خواهیم کرد.

۱.۹.۷ ۱

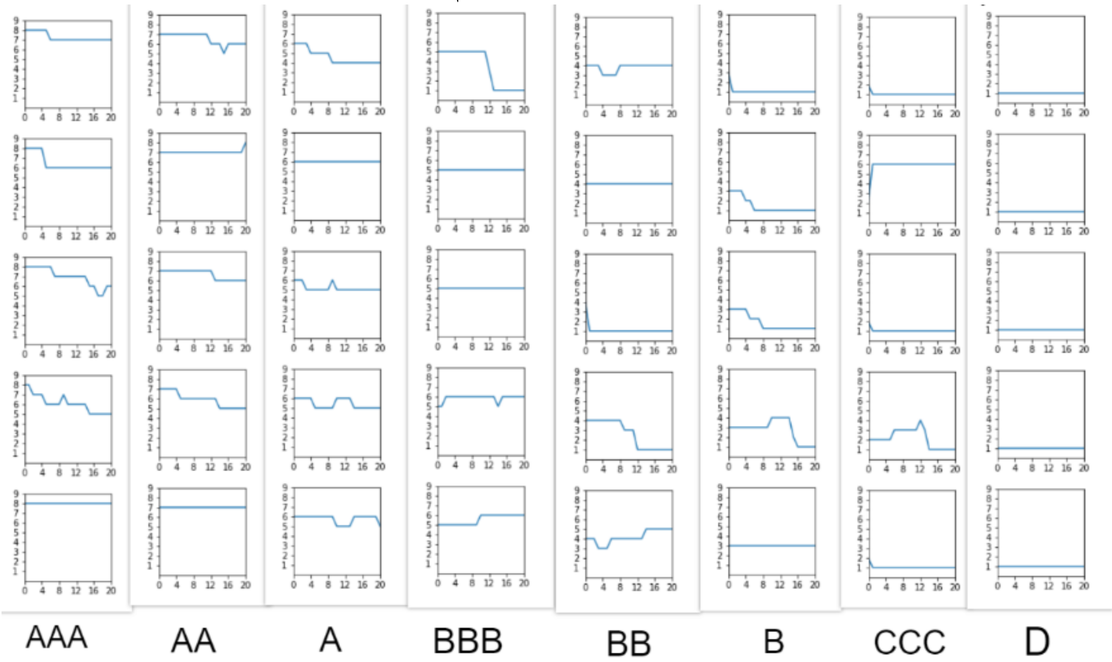
در مدل پیشنهادی جدید این امکان وجود دارد که شرکتی از وضعیت ورشکسته خارج شود و اوضاع اقتصادی متعادلی را تجربه نماید

۲.۹.۷ ۲

توزیع ایستان ماتریس جدید را بدست آوردیم که در کد ضمیمه شده است .

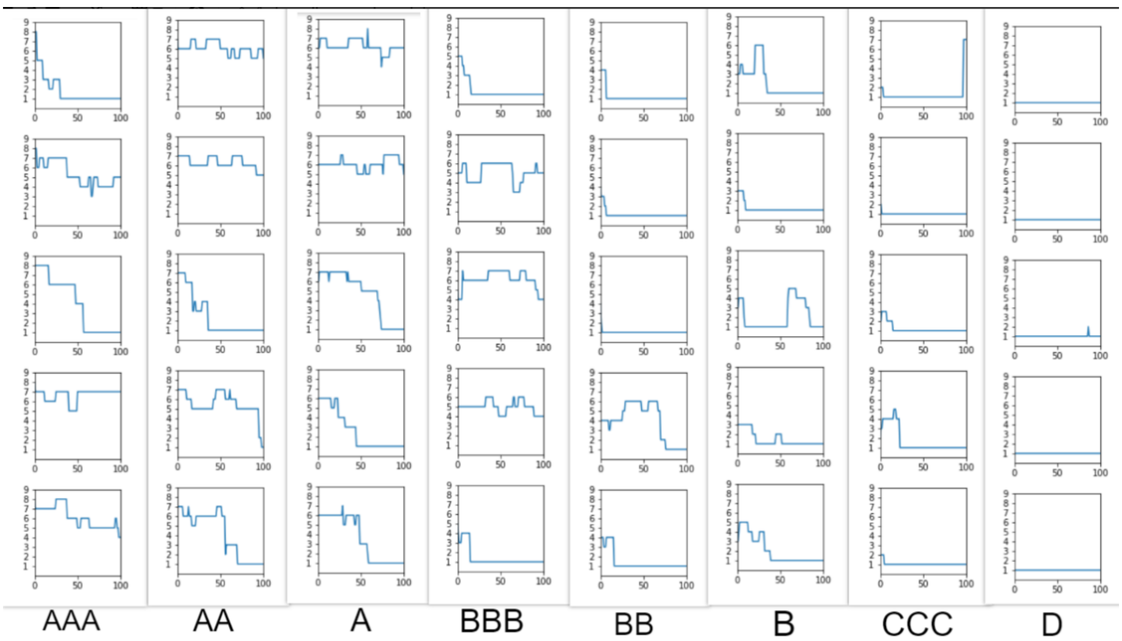
۳.۹.۷ ۳

مدل جدید را به ازای $n = 20$ شبیه سازی می نماییم .



۴.۹.۷ ۴

مدل جدید را به ازای $n = 100$ شبیه سازی می نماییم . می بینیم که بعد از حالت ورشکستی امکان بهبود وضعیت مالی شرکت وجود دارد .

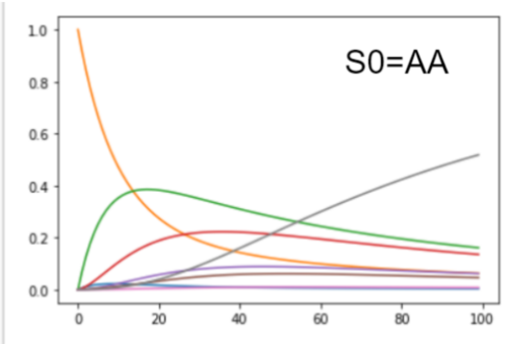


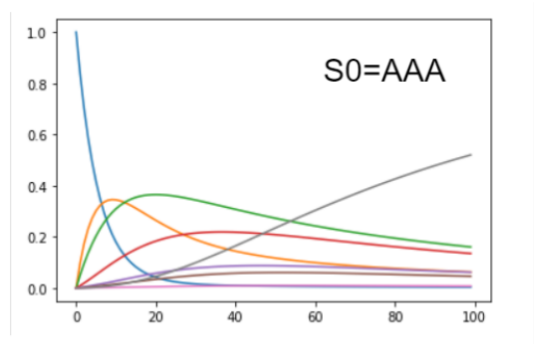
۵.۹.۷ ۵

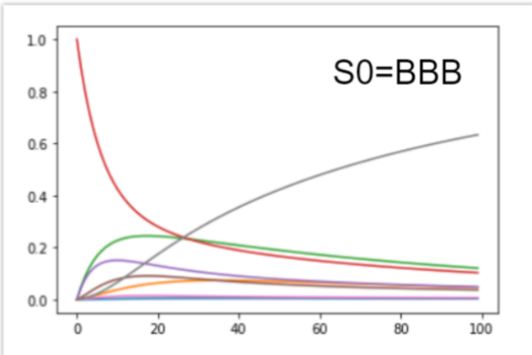
با محاسبه ی توان ها مختلف از ماتریس انتقال جدید میبینیم که پس از گذشت زمان های طولانی احتمال انتقال به وضعیت ورشکسته با شروع از حالت اولیه های غیر ورشکسته افزایش یافته ولی نسبت به ماتریس قبلی کم تر است ولی در حالت ورشکسته احتمال باقی ماندن در آن حالت رفته رفته کاهش می یابد. همچنین احتمالات به گونه ای است که احتمال سقوط به وضعیت ورشکسته از حالت قبلی کم تر است.

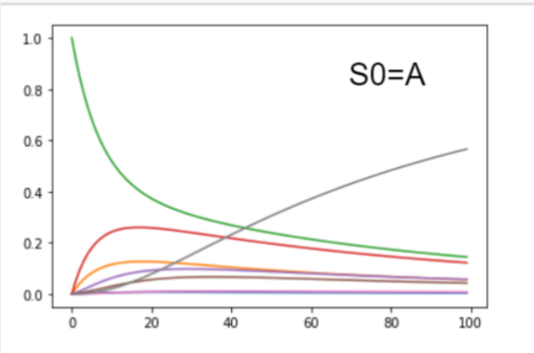
۶.۹.۷ ۶

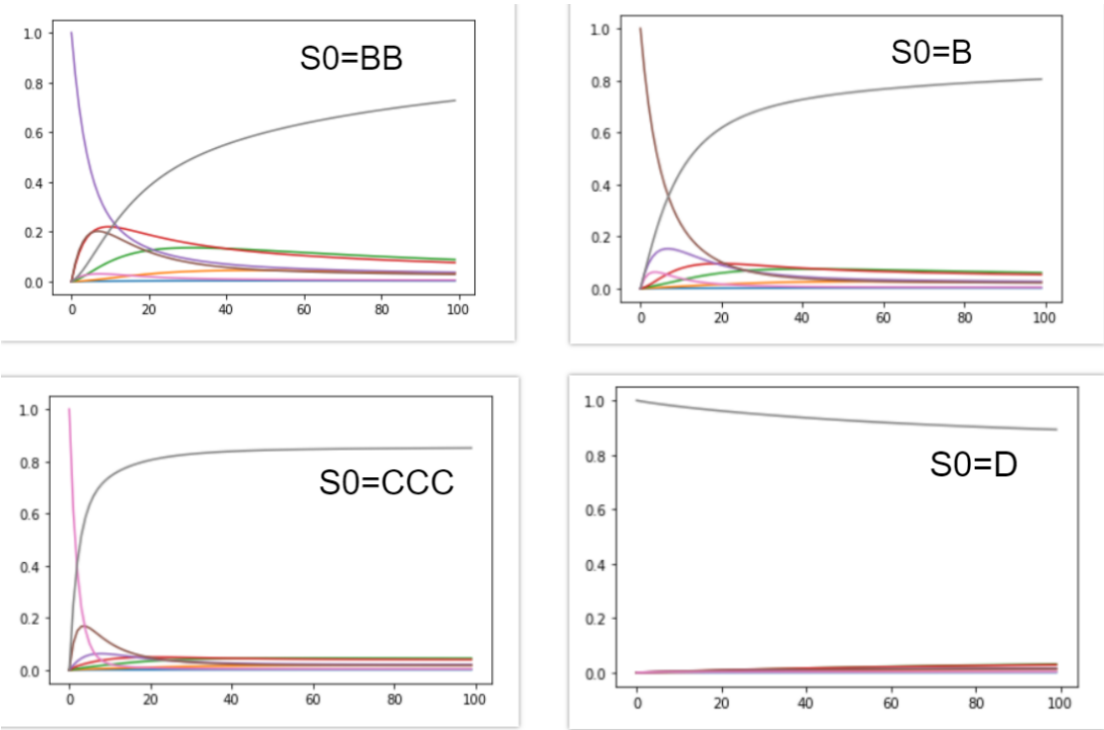
نمودار های مطلوب مسئله به شرح زیر است .










S0=BB
S0=B
S0=CCC
S0=D