اسم المادة : جبر خطي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط **هنا**

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء

1

بسم الله الرحمن الرحيم

مادة الرياضي حص 212

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

صفوف ← → أعمدة

ام الحب

$a_{13} \Rightarrow$ صف 1 عمود 3 $\Rightarrow = 3$

* تتساوى المصفوفتان عندما $A_{n\times m} = B_{n\times m}$

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, ij$$

مثال

$$\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ x-y & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

جد قيمة x, y

$x = 5$

$x - y = 3$

$5 - y = 3 \Rightarrow y = 2$

* الجمع والطرح

$$A_{n\times m} \mp B_{n\times m} = C_{n\times m}$$

$$a_{ij} \mp b_{ij} = c_{ij}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+-1 & 2+0 \\ 3+5 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

* الضرب في ثابت

$$3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$3A + 4B = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 20 & 24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 29 & 36 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

$$C_{n\times p} = A_{n\times m} \cdot B_{m\times p}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

صيان أمكن AB BA

① $$A_{2\times 2} B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 & -1+4 \\ 0+0 & 0+3 & 0+6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

نضرب الصف الأول في العمود الأول

" " " الثاني " الثالث

" " الثاني " الأول

" " الثاني " الثالث

2019/6/11 01:07

$\boxed{3}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

② BA → لايجوز الضرب

$2\times 3 \quad 2\times 2$

غير متساويات

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $AB \neq BA$

عملية الضرب في المصفوفات ليست تبديلية

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times -1 + 2\times 2 & 1\times 5 + 2\times 0 \\ 3\times -1 + 4\times 2 & 3\times 2 + 4\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1\times 1 + 5\times 3 & -1\times 2 + 5\times 4 \\ 2\times 1 + 0\times 3 & 2\times 2 + 0\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

ليست تبديلية

* أنواع المصفوفات

① قطرية

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

قطر رئيسي

② علوية (مثلثية)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

تحت القطر أصفار

③ سفلية (مثلثية)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

فوق القطر أصفار

④ صفرية

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جميعها أصفار

⑤ محايدة (مصفوفة الوحدة)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عناصر القطر = 1 والبقية أصفار

$$I_1 = [1]_{1\times 1}$$

$$I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ام المجتبى

2019/6/11 01:07

* خصائص المنقول

A^t ← منقول المصفوفة

هو عكس الأعمدة والصفوف

$n \times m \Rightarrow m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

منقول المنقول $(A^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

① منقول المنقول للمصفوفة = نفس المصفوفة $(A^t)^t = A$

② الضرب

$$(AB)^t = B^t A^t$$

③ الجمع

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

④ عدد ثابت

$$(kA)^t = k(A^t)$$

سؤال واجب

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

أثبت أن $(AB)^t = B^t A^t$

$$AB = \begin{bmatrix} 17 & 22 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad (AB)^t = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 22 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad A^t \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B^t A^t = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 22 & 6 \end{bmatrix}$$

وبالتالي

2019/6/11 01:07

* معكوس المصفوفة ← النظير الضربي ويرمز (A^{-1})

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

بشرط $ad-bc \neq 0$

* نبدل القطر ونقلب اشارة الباقي

مثال أوجد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \cancel{A^{-1} = \frac{1}{-1\times 2 - 3\times -4}}$$

أولاً نجد $ad-bc$

$$ad-bc = 1\times 2 - 3\times -4 = 2+12 = 14 \neq 0$$

∴ يوجد نظير

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{14} & \frac{-3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$$

* تأكد أن $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

أي مصفوفة * نظيرها = مصفوفة وحدة

x خصائص المعكوس

① $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

② $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$

③ $(A^{-1})^{-1} = A$

ام المجد

① أثبت أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ بدون اعداد (مصفوفة)

نخفي اشارة التظرف الطرف الايسر ثم نضرب الطرفين مع بعض ويعطينا I

$(AB) \times B^{-1}A^{-1} =$

$A\underbrace{BB^{-1}}A^{-1} = \underbrace{AI}A^{-1}$

مصفوفة وحدة

أي مصفوفة × مصفوفة الوحدة تعطينا المصفوفة

$= \underbrace{AI}A^{-1}$

$AA^{-1} = I$ مصفوفة

② اثبت $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

نخفي المعكوس من الطرف الايسر ونضرب ويعطينا I

$A^{t}(A^{-1})^{t}$

لكن حسب $(AB)^{t} = B^{t}A^{t}$

∴

$= (A^{-1}A)^{t}$

$= (I)^{t} = I$ مصفوفة وحدة

③ $(A^{-1})^{-1} = A$

$A^{-1}A = I$ مصفوفة وحدة

ملاحظة

① $A^{t} = A \Rightarrow$ متماثلة

② $A = -A^{t} \Rightarrow$ مخالفة التماثل

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$A = A^t$ متماثلة

② $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$-A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = -A^t$

مختلفة التماثل

ام الحب *

* عمليات الصف البسيطة

① تبديل صف بصف آخر

② ضرب صف بعدد

③ ضرب صف بعدد واضافته إلى صف آخر

مثال

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

العلاقة بينهما $R_1 \leftrightarrow R_2$

تبديل الصف الاول مع الثاني

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$2R_2$ ضرب الصف الثاني بعدد (2)

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ضرب الصف الاول بعدد (2) ثم اضافته للصف الثاني

$2R_1 + R_2 \leftrightarrow R$

المحاضرة 13
2

[9]

* المصفوفة الأولية تكون حجمها $n \times n$
يمكن الحصول عليها من مصفوفة الوحدة I بعد إجراء عملية واحدة فقط من عمليات الصف البسيط

أنواع المصفوفات الأولية

1. ناتجة من تبديل الصفين $i, j \Leftarrow E(i, j)$
2. ناتجة من ضرب الصف i بعدد حقيقي $k \Leftarrow E(k.i)$
3. ناتجة من ضرب الصف i بالعدد k ثم إضافة الناتج للصف $j \Leftarrow E(k.i+j)$

ملاحظة

اذا ناتجت المصفوفة E من عملية صف بسيط وكانت لدينا مصفوفة A فإن حاصل الضرب يكون المصفوفة الأصلية A بعد إجراء نفس عملية الصف البسيط

* المصفوفة الأولية تكون معكوسة ونظيرها مصفوفة اولية

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j)$$

ام المجد

$$E(k.i)^{-1} = E\left(\frac{1}{k} . i\right)$$

$$E(k.i+j)^{-1} = E(-k.i+j)$$

2019/6/11 23:41

تحويل المصفوفة الى شكل صفي مميز

مثال حول المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ الى شكل صفي مميز

نريدها على شكل $2 \to 1$ $3 \to 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

عملية رتبة

نحول $3 \to 0$ نضرب الصف الاول بـ -3 ثم نضيفه للصف الثاني

$$\xrightarrow{-3R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$-3+3$, $-\frac{3}{2}+4$

نجعل $\frac{5}{2} \to 1$

$$\xrightarrow{\frac{2}{5}R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نجعل $\frac{1}{2} \to 0$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ شكل صفي مميز

2019/6/11 23:41

إيجاد نظير المصفوفة $A_{3\times3}$

$$[A \mid I] \underset{\text{عمليات صفية}}{\sim} [I \mid A^{-1}]$$

مثال 29 جد نظير المصفوفة

ام المرتضى

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الخطوة الأولى

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{4}R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{2R_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{-6R_1+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & \frac{-6}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 5 & \frac{-6}{4} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{1R_2+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{-4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{5}R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$\frac{-6}{4}+\frac{1}{6} = \frac{-4}{3}$

I $\qquad$ A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

مثال 35 طريقة الحذف (جاوس) لحل نظام معادلات خطية

① نكتبه على صورة $AX = B$

② نكتبه على صورة مصفوفة ممتدة $[A \mid B]$

③ نكتبه على صورة شكل صفي مميز $\sim [I \mid X]$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

المصفوفة المميزة ←

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid B] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

نحولها إلى أصفار

نحولها للشكل الصفي المميز

$$\underset{-1R_1+R_2}{\overset{-2R_1+R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}R_2}{\sim}$$

نحول $-3 \leftarrow 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

نحول $1 \leftarrow 0$

2019/6/19 02:55

$$-1R_2 + R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$$

حول $\frac{-5}{3}$ ← 1

نحولها الى اصفار

$$-\frac{3}{5}R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{-R_3 + R_1}{\overset{\frac{1}{3}R_3 + R_2}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{-R_2 + R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$I \qquad X$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

* اذا كان عدد المجاهيل اكبر من عدد المعادلات فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول

ام احمد

حالات إيجاد حل للنظام الخطي $AX = B$

بعد اجراء عمليات الصف البسيط

1. اذا أمكن إيجاد مصفوفة الوحدة يوجد حل للنظام

2. اذا كان الصف الأخير أصفار ما عدا الطرف الايمن للصف الأخير فإنه لا يوجد حل للنظام

3. اذا كان الصف الاخير اصفار وكذلك الطرف الايمن للصف الأخير فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول

مثال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

الحل $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

مثال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

عدد لا نهائي من الحلول

مثال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

لا يوجد حل للنظام

رتبة المصفوفة هي عدد الصفوف غير الصفرية

ام الحسن

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام النظير

$AX = B \qquad X = A^{-1}B$

لإيجاد النظير (معكوس)

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$

تمرين 37 حل النظام باستخدام النظير

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + z = 3 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

① ايجاد النظير A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-1R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

I $\qquad$ A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2019/6/19 02:55

$$X = A^{-1} B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

الوحدة الثانية 17

الاقترانات المحددات باستخدام المعاملات

اذا كان لدينا المصفوفة المربعة A فنرمز لمحدد المصفوفة A بـ $|A|$

محدد المصفوفة الأحادية $A = a$ بـ العدد الحقيقي $|A| = a$

محدد المصفوفة الثنائية $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$|A| = ad - bc$ بالعدد الحقيقي

محدد المصفوفة الجزئية المتبقية بعد حذف الصف i والعمود j

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = C_{11} = a_{11}$$
$$= (-1)^{1+1} M_{11}$$
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 1\,(0 \times 4 - 2 \times 2)$$
$$= 0 - 4 = \boxed{-4}$$

ام العجب

ايجاد محددة المصفوفة A باستخدام الصف الأول

$$|A| = \sum a_{1j} C_{1j}$$ نثبت $i = 1$

تابع المثال باستخدام الصف الأول

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\, c_{1j}$$

(عدد أعمدة $= 3$)

$$= a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$$
$$= (1) C_{11} + (2) C_{12} + (3) C_{13}$$

$$C_{11} = \boxed{-4}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$$
$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -1\,(-4 - 2)$$
$$= \boxed{6}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$$
$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1\,(-2 - 0) = \boxed{-2}$$

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$
$$= (1)(-4) + 2(6) + 3(-2)$$
$$= -4 + 12 - 6 = \boxed{2}$$

نجد محدد A باستخدام العمود الثاني ⇐ $j = 2$ عمود

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}\, C_{i2}$$
$$= \overset{a_{12}}{2}\, C_{12} + \overset{a_{22}}{0}\, C_{22} + \overset{a_{32}}{2}\, C_{32}$$

$C_{12} = 6$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\,(4-3) = \boxed{1}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1\,(2+3) = \boxed{-5}$$

$$|A| = 2(6) + 0(1) + 2(-5)$$ نفس قيمة المحددة
$$= 12 + 0 - 10$$
$$= \boxed{2}$$

جواب المحددة ثابت لا يتغير مهما استخدمنا أي طريقة

ام المجبر

احسب المحددة بدون شروط

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \end{array}$$

نستخدم طريقة الاشارات موجب ، سالب

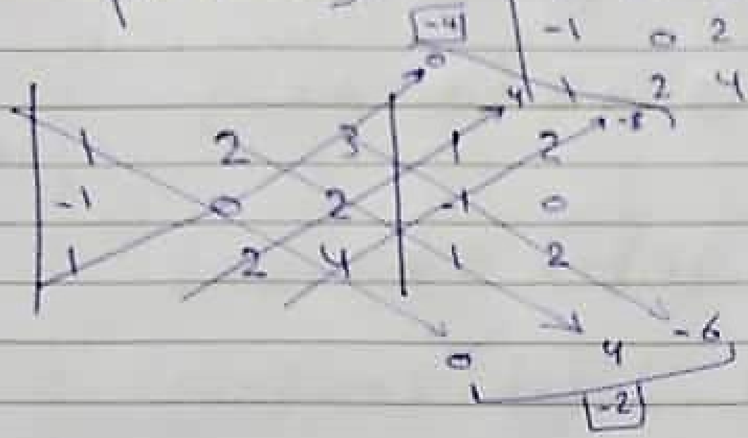
$$= 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1(0-4) - 2(-4-2) + 3(-2-0)$$
$$= -4 + 12 - 6 = 8 - 6 = \boxed{2}$$

2019/6/19 02:56

احسب المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

طريقة الأسهم



ونعيد كتابة أول عمودين

نضرب الأعداد التي على الأسهم ثم نجمع

بأخذ أسهم بالجهة الثانية

نحسب باستخدام هذا القانون ←

$|A| =$ مجموع الأسفل − مجموع الأعلى

$= -2 - (-4)$

$= \boxed{2}$

* خواص المحددات مهمات جداً كما هي بالموضوع فقط

ويضاف لها

* الخاصية السابعة

/ إذا كانت المصفوفة $A_{n\times n}$ ← $|kA| = k^n|A|$

* الخاصية الثامنة

$$|A+B| \neq |A| + |B|$$

~~$|A|=5$ $|B|=9$~~ ~~$B_{3\times 3}$ $A_{3\times 3}$~~

مثال شامل لكل الخواص

$B_{3\times 3}$ $A_{3\times 3}$ $|B| = 4$ $|A| = 5$

جد كل من ما يلي

① $|AB|$ ② $|2A|$ ③ $|2AB^{-1}|$ ④ $|(2AB)^{-1}|$
⑤ $|(5A)^{-1}B^{T}|$

① $|AB| = |A|\,|B| = 5 \times 4 = \boxed{20}$

② $|2A| = 2^{n}|A| = 2^{3}|A| = 8 \times 5 = \boxed{40}$

③ $|2AB^{-1}| = 2^{3}|AB^{-1}| = 2^{3}|A|\,|B^{-1}|$

$= 8 \times \cancel{4}\,5 \cdot \dfrac{1}{|B|} = 40 \times \dfrac{1}{4} = \boxed{10}$

④ $|(2AB)^{-1}| = \dfrac{1}{|2AB|} = \dfrac{1}{2^{3}|A|\,|B|} = \dfrac{1}{8(5)(4)}$

$= \boxed{\dfrac{1}{160}}$

⑤ $|(5A)^{-1}B^{t}| = \dfrac{1}{|5A|} \cdot |B| = \dfrac{1}{5^{3}|A|} \cdot |B|$

$= \dfrac{1}{5^{3}(5)} \cdot 4 = \boxed{\dfrac{4}{625}}$

ام الطهر

2019/6/19 02:56

* قرينة المصفوفة والنظير الضربي للمصفوفة

① نحسب C للمصفوفة الأصلية

② نأخذ منقول C ويكون هو نفسه القرينة

مثال احسب adj(A) ← قرينة المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة 2x2 ← يكون لها 4 قيم لـ C

① نحسب C

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -1^2 \times -1 = \boxed{-1}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+3} M_{12} = (-1)^3 \times 4 = \boxed{-4}$$

ام الطلب

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 * 3 = \boxed{-3}$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 * 2 = \boxed{2}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

② نأخذ C^t

نقلب الصف مع العمود

$$\text{adj } A = C^T = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

نظرية ←

$$A \,\text{adj}(A) = |A| I$$

* حساب النظير باستخدام adj ⟵ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{-2}{14} \end{bmatrix}$$

الطريقة

نحسب ① adj ⟵ ② المحددة $|A|$ ⟵ ③ A^{-1}

قانون $\operatorname{adj}(A) = |A|\, A^{-1}$

* الخاصية التاسعة

$$|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

مثال اذا كانت $A_{4\times4}$ ،كانت $|A| = 3$ جد $|\operatorname{adj}(A)|$

$$|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{4-1} = 3^3 = \boxed{27}$$

* قاعدة كرامر لحل نظام خطي

A مصفوفة مكونة من الحجم $n \times n$ فإن حل النظام $AX = B$ هو ⟵

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad \ldots$$

A_i مصفوفة ناتجة من A باستبدال العمود i من A بالعمود B

مثال — حل نظام المعادلات الخطية باستخدام كرامر

$$x_1 + x_2 = 4$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = 1 - 2 = \boxed{-1}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 5 = \boxed{-1}$$ نستبدل العمود الاول من A بالعمود B

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = \boxed{-3}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1} \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = \boxed{3}$$

∴ حل النظام $X \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ام المجد

* الفضاء الخطي ⇐ الفضاء الاقليدي

تعريف 1 يعرف الفضاء الاقليدي R^n ذو البعد n على أنه مجموعة كل المرتبات ذات الطول n $(x_1, \dots, x_n)$

المتجه عبارة عن مصفوفة (صف أو عمود)

المتجه $(1, \sqrt{2}) \rightarrow R^2$

$(3, 5, \pi) \rightarrow R^3$

تعريف 2 اذا كان $u(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $V(V_1, V_2, \dots, V_n)$ متجهين في R^n فإنه

مجموعهما ⇐ $u + V = (u_1 + V_1, u_2 + V_2, \dots, u_n + V_n)$

* اذا كان c عدد حقيقي ⇐ $cu = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$

* في حالة الجمع يجب ان يكونا من نفس الفضاء الاقليدي

$u \in R^n$ ، $V \in R^m \Rightarrow n = m$

مثال 2 $u = (2, -1, 1)$ $V = (1, 1, 7)$ $w = (1, 2, 6, 8)$

① $3u = 3(2, -1, 1) = (6, -3, 3)$

② $u + V = (2, -1, 1) + (1, 1, 7) = (3, 0, 8)$

③ $2u + (-3)V = 2(2, -1, 1) + (-3)(1, 1, 7)$

$= (4, -2, 2) + (-3, -3, -21)$

$= (1, -5, -19)$

④ $V + w = (1, 1, 7) + (1, 2, 6, 8)$

لا يجوز لأنهما ليسا من نفس البعد ⇐ $V \in R^3$ ، $w \in R^4$

2019/6/24 01:24

مثال 3 امسبعم x, y, z

$$x(2,0,3,0) + y(1,1,0,0) + z(-1,4,0,5) = (8,19,6,15)$$

نحولها لمعادلات

① $2x + y + z = 8$

② $0x + y + 4z = 19$

③ $3x + 0y + 0z = 6$

④ $0x + 0y + 5z = 15$

من ③ $\Rightarrow$ $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{6}{3}$ $\boxed{x = 2}$

من ④ $\frac{\cancel{5}z}{\cancel{5}} = \frac{15}{5}$ $\boxed{z = 3}$

نعوض في ② $y + 4z = 19$

$y + 4(3) = 19 \rightarrow y = 19 - 12$ $\boxed{y = 7}$

ام الحجر

تعريف $u - v \Rightarrow u + (-1)v$

المتجه الصفري كل عناصره أصفار

تعريف 4 المتجهان u, v في R^n بنفس الاتجاه $u = cv$

(نفس الإشارة) موجب موجب

يكونان متعاكسان $\Leftarrow$ $u = -cv$

(عكس الإشارة) موجب سالب

نظرية (1) مهمة للقوانين

2019/6/24 01:24

× الفضاءات الخطية

× بديهيات الفضاء الخطي ص 180 حفظ بالترتيب

× حفظ الأمثلة التي تكون فضاء خطي لسرعة الاجابة في الاسئلة الموضوعية

مثال 6 تعرف بالعلاقات $R^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in R\}$

عملية جمع عادي ← $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

الاول مع الاول ، الثاني مع الثاني

عملية ضرب (ليست عادية) ← $c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$

هل يمثل فضاء خطي $u(u_1, u_2)$ $v(v_1, v_2)$ $w(w_1, w_2)$

(A_1) : $u + v \overset{?}{=} v + u$

$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) \overset{?}{=} (v_1, v_2) + (u_1, u_2)$

✓ متساويان ← $(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \overset{?}{=} (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$

(A_2) : $(u + v) + w = u + (v + w)$

$(u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) \overset{?}{=} (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

$(u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2) = (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2)$ ✓

(A_3) $u + \overset{\text{محايد}}{0} = 0 + u = u$

$(u_1, u_2) + (0, 0) = (0, 0) + (u_1, u_2) = (u_1, u_2)$ ✓

(A_4) نظير $u + (-1)u = 0$

$(u_1, u_2) + -1(u_1, u_2) = (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2)$

$(u_1 + -u_1, u_2 + -u_2) = (0, 0)$

2019/6/24 01:24

(M_1) $c(u+v) \stackrel{?}{=} cu + cv$

$c(u_1+v_1, u_2+v_2) = c(u_1, u_2) + c(v_1, v_2)$

$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$ بنضرب الاول ونصفر الثاني نتبع القاعدة الضرب اللي بالسؤال

$(cu_1+cv_1, 0) = (cu_1, 0) + (cv_1, 0)$

$(cu_1+cv_1, 0) = (cu_1+cv_1, 0)$ ✓

(M_2) $(c+d)u = cu + du$

$(c+d)(u_1, u_2) \stackrel{?}{=} c(u_1, u_2) + d(u_1, u_2)$ ضرب

$((c+d)u_1, 0) \stackrel{?}{=} (cu_1, 0) + (du_1, 0)$

$((c+d)u_1, 0) = (cu_1+du_1, 0)$ ✓

(M_3) $c(du) \stackrel{?}{=} (cd)u$

$c(d(u_1, u_2)) \stackrel{?}{=} (cd)(u_1, u_2)$

$c(du_1, 0) \stackrel{?}{=} (cdu_1, 0)$

$(cdu_1, 0) = (cdu_1, 0)$ ✓

(M_4) $1u \stackrel{?}{=} u$ ضرب بثابت ١

$1(u_1, u_2) \stackrel{?}{=} (u_1, u_2)$

$(u_1, 0) \neq (u_1, u_2)$ ✗

لا يحقق (M_4) ليست فضاء خطي

ام المجد

الفضاءات الجزئية

اذا كانت W مجموعة جزئية من الفضاء الخطي V بشروط

① $0 \in W$ — متجه الصفر ينتمي W

② $u+v \in W$ — مغلقة على الجمع

③ $cu \in W$ — مغلقة على الضرب بثابت

حفظ الأمثلة مهم للأسئلة الموضوعية — مثال 8 + تدريب 12 + ص 211

مثال 8

(a) $U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ هل هو فضاء جزئي ؟؟؟

نبحث اذا تحقق الثلاث شروط

$u = (u_1, u_2, u_3) \in U \quad v = (v_1, v_2, v_3) \in U$ لأنه $U \in$

$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \qquad v_1 + v_2 + v_3 = 0$

① $0 \in U$

$(0, 0, 0) \overset{?}{\in} U \Rightarrow 0 + 0 + 0 = 0 \quad \checkmark \in U$

أ/ المجد

② $u + v \overset{?}{\in} U$

$(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \overset{?}{\in} U$

$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3)$

$(u_1 + u_2 + u_3) + (v_1 + v_2 + v_3)$

$0 + 0$

$0 \in U \quad \checkmark$

③ $cu \in U$

$c(u_1, u_2, u_3)$

(cu_1, cu_2, cu_3)

$(cu_1 + cu_2 + cu_3)$

$c(u_1 + u_2 + u_3)$

$c(0) = 0 \in U \quad \checkmark$

وهو فضاء جزئي

2019/6/24 01:24

مثال 13 | أعط وصفاً هندسياً للفضاء الحل (نقطة، خط، مستوى، فضاء)

$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ 5x-y+7z&=0 \\ 3x-3y+9z&=0 \end{aligned}\right\} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

نجري عمليات الصف البسيط لنصل للصيغة

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

رتبة $= 2$ عدد المجاهيل $= 3$

$2 < 3 \Leftarrow$ عدد لانهائي من الحلول

$x + z = 0$

$y - 2z = 0$

نفرض $t = z$

مستوى $x + t = 0 \rightarrow x = -t$

مستوى $y - 2t = 0 \rightarrow y = 2t$

تقاطعهن خط مستقيم

$$\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\begin{bmatrix} -t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \qquad t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل

1. الوصف الهندسي $\Leftarrow$ خط مستقيم هو مضاعفات النقطة $(-1, 2, 1)$
2. يكون الوصف (نقطة) $\Leftarrow$ وهي نقطة الأصل اذا نتجت مصفوفة الوحدة
2. " " (مستوى) $\Leftarrow$ اذا كان الحل بدلالة متغيرين فقط $\Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
3. " " (فضاء) $\Leftarrow$ " " " صفاً واحد $\Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
4. " (خط) $\Leftarrow$ مستويان متقاطعان

انتهت مادة الصفي

م المحمد