بسم الله الرحمن الرحيم
الصف الافتراضي الثامن لمقرر

تفاضل وتكامل 2
التكامل الثنائي والثلاثي وتطبيقاتها .
الأحد 2020-7-26
د. أحمد الكحلوت

مثال: غير ترتيب التكامل ثم أوجد قيمة التكاملين التاليين :

أ- $$\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$$

ب- $$\int_0^{1}\int_y^{1}e^{x^2}\,dx\,dy$$

الحل :أ-

$$\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}dydx=\int_0^{\pi}\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}x\Big|_0^y dy=\int_0^{\pi}\sin y dy$$

$$=-\left[\cos y\right]_0^{\pi}=2$$

ب-

$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}dxdy=\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dydx=\int_0^1 e^{x^2}.y\Big|_0^x dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

الحجوم والمساحات :

إذا كان $f(x,y)=1$ فإن حجم الجسم الواقع تحت مستوى $z=1$ وفوق المنطقة R يتساوي عددياً

من مساحة المنطقة R . وهكذا فإن المساحة A للمنطقة R تعطى بالتكامل المزدوج :

$$A=\iint_R dA=\iint_R dxdy=\iint_R dydx$$

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين : $y=4x, y=x^2$.

الحل: نقوم بإيجاد حدود قيم x وذلك عن طريق مساواة المنحنيين :

$x^2=4x \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4) \Rightarrow x=0$ or $x=4$

إذا كانت f(x,y)≠1 فإن التكامل الثنائي على المنطقة R يصبح مساحة .

مثال :جد حجم الجسم الواقع بين الأسطوانة $x^2+y^2=4$ والمستويين $y+z=4$ و $z=0$.

الحل:

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}(4-y)\,dy\,dx=\int_{-2}^{2}\left(4y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{0}^{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(4\sqrt{4-x^2}-\frac{4-x^2}{2}\right)dx$$

$$let\ x=2\sin\theta \Rightarrow dx=2\cos\theta d\theta : -\pi/2\le\theta\le\pi/2$$

$$\therefore V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(4\sqrt{4-4\sin^2\theta}-\frac{4-4\sin^2\theta}{2}\right)2\cos\theta d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(8\cos\theta-2\cos^2\theta\right)2\cos\theta d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(16\cos^2\theta-4\cos^3\theta\right)d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(8(1+\cos 2\theta)-4\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\left[8\theta+4\sin 2\theta-4\sin\theta+\frac{4\sin^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=8\pi-8+\frac{8}{3}=8\pi-\frac{16}{3}$$

$$\int_0^4 \int_{x^2}^{4x} dydx = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 10.67$$

التكامل المزدوج بالإحداثيات القطبية : $\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r,\theta) r dr\, d\theta$

مثال :باستخدام الاحداثيات القطبية احسب قيمة التكامل :

$$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

الحل:

$$0 \le y \le \sqrt{2x - x^2},\ 0 \le x \le 2$$

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$$

وهذا دائرة مركزها (1,0) ونصف قطرها 1 .

إذا منطقة التكامل هي ربع الدائرة التي حدودها بالإحداثيات القطبية $r=\sec\theta$ و $r=2\cos\theta$

$0 \le \theta \le \pi/4$

$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sec\theta}^{2\cos\theta} \frac{rdrd\theta}{r} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos\theta - \sec\theta) d\theta$$

$$= \left[2\sin\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]_{0}^{\pi/4} = \sqrt{2} - \ln\left|\sqrt{2}+1\right|$$

مثال :أثبت أن : $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

الحل :

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I = \int_{0}^{\pi} e^{-y^2} dy$$

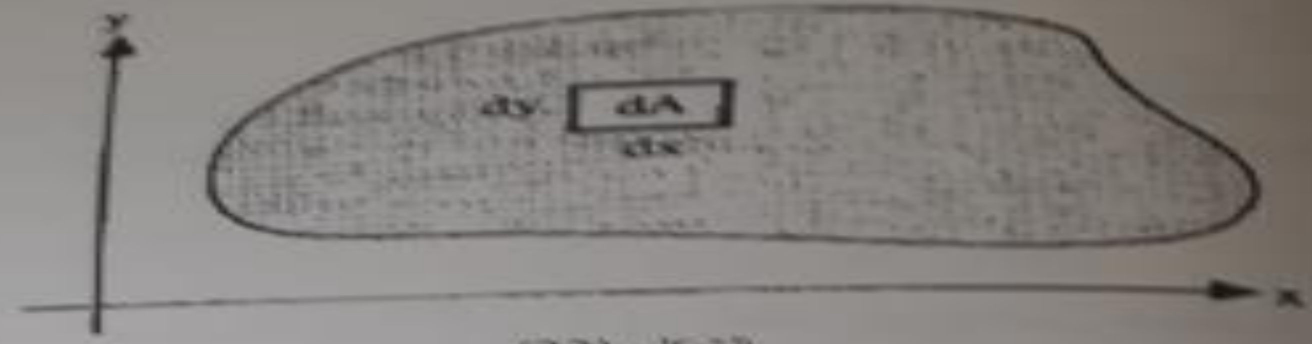
$$I^2 = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{0}^{\pi} e^{-y^2} dy = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} rdrd\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{0}^{\infty} d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

الع

٣-١ العزوم ومركز الثقل

عزيزي الطالب، إذا كان الاقتران $f(x,y)$ هو اقتران الكثافة لصفيحة معدنية لها شكل المنطقة R من المستوى xy والمرسومة في الشكل (22)



الشكل (22)

فإن كتلة عنصر المساحة dA والتي سيرمز لها بالرمز dM هي $dM=f(x,y)dA$ وهكذا فإن الكتلة M للصفيحة R تعطى بالتكامل المزدوج التالي:

$$M=\iint_R f(x,y)\,dA \qquad \ldots(1)$$

يعرف عزم النقطة المادية في المستوى حول أي مستقيم بأنه حاصل ضرب كتلتها في البعد العمودي بين النقطة والمستقيم، فإذا كان M_x, M_y هما عزمي الكتلة M حول كل من المحور x والمحور y على التوالي، فإنهما يعطيان بما يلي:

$$M_x=\iint_R y f(x,y)\,dA \qquad \ldots(2)$$

$$M_y=\iint_R x f(x,y)\,dA \qquad \ldots(3)$$

إذا كان مركز ثقل الصفيحة هو النقطة $(\bar{x},\bar{y})$ فإن:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_R x f(x,y)\,dA}{\iint_R f(x,y)\,dA} \qquad \ldots(4)$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_R y f(x,y)\,dA}{\iint_R f(x,y)\,dA} \qquad \ldots(5)$$

وهناك أنواع أخرى مهمة من العزوم تسمى عزوم القصور الذاتي للكتلة M فعزم ... ويرمز له بالرمز I_x ويعرف بما يلي:

$$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)\,dA \qquad ---(6)$$

حيث y هي المسافة بين النقطة (x,y) الموجودة في المنطقة R والمحور x.

أما عزم القصور الذاتي حول المحور y والذي يرمز له بالرمز I_y فيعطى بما يلي:

$$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)\,dA \qquad ---(7)$$

حيث x هي المسافة بين النقطة (x,y) الموجودة في المنطقة R والمحور y.

وأما عزم القصور الذاتي حول نقطة الأصل فيرمز له بالرمز I_0 ويعطى بالتكامل التالي:

$$I_0 = \iint_R r^2 f(x,y)\,dA = \iint_R (x^2+y^2) f(x,y)\,dA$$
$$= I_x + I_y \qquad ---(8)$$

حيث r هي المسافة $r=\sqrt{x^2+y^2}$ بين النقطة (x,y) فــي المنطقــة R ونقطة الأصل (0,0).

مثال : أوجد عزوم القصور الذاتي I_x, I_y, I_0 للصفيحة المعدنية المحصورة بين y=lnx و y=0 و x=2 إذا كانت كثافة الصفيحة تعطى بالاقتران f(x,y)=1/x .

الحل :

$$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dA = \int_1^2 \int_0^{\ln x} \frac{y^2}{x} dydx$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{y^3}{3x} \right]_0^{\ln x} dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(\ln x)^4}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{12}(\ln 2)^4$$

$$I_y == \iint_R x^2 f(x,y)dA = \int_1^2 \int_0^{\ln x} xdydx = \int_1^2 [xy]_0^{\ln x} dx$$

$$= \int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{1}{12}(\ln 2)^4 + 2\ln 2 - \frac{3}{2}$$

التكامل الثلاثي وتطبيقاته :

التكامل الثلاثي :

ويكون على الصورة $\iiint_D f(x, y, z)dv$ ويطلق عليه التكامل الثلاثي

للاقتران f(x,y,z) على المنطقة D حيث dv=dzdydx هو عنصر الحجم .

مثال : أوجد قيمة التكامل التالي $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2y} xdxdydz$.

الحل :

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2y} xdxdydz = \int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\left[\int_0^{2y} xdx\right]dydz = \int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2y} dydz = \int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\left[2y^2\right]dydz$$

$$= \int_0^1\left[\frac{2y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{z}}dz = \int_0^1 \frac{2z^{3/2}}{3}dz = \left[\frac{z^{5/2}}{15}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

تطبيقات التكامل الثلاثي:

اذا كان لجسم ما شكل المنطقة D من الفضاء الثلاثي xyz وكانت كثافة هذا الجسم عند النقطة (x,y,z) تعطى بالاقتران f(x,y,z) متصلاً على المنطقة D فان كتلة هذا الجسم M تعطى بالتكامل الثلاثي التالي:

$$M = \iiint_D f(x,y,z)\,dv$$

واذا اتبعت نفس الاسلوب الذي اتبع في حالة استخدام التكامل المزدوج لتعريف العزوم ومركز الثقل فإنه يمكن تعريف عزوم كتلة الجسم حول المستوى xy والمستوى yz والمستوى zx على الترتيب. وهذه العزوم تعطى بالعلاقات التكاملية الثلاثية التالية:

$$M_{xy} = \iiint_D z f(x,y,z)\,dv$$

$$M_{yz} = \iiint_D x f(x,y,z)\,dv$$

$$M_{zx} = \iint_D \int y f(x,y,z)\,dv$$

ويمكن استخدام هذه العزوم في الحصول على احداثيات مركز ثقل الجسم $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ باستخدام العلاقات التالية:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

مثال : جد مركز الثقل المنطقة المحصورة بين السطوح $z=y$ و $y=x^2$ و $y=4$ و $z=0$ علماً بأن الكثافة للمنطقة ثابتة وتساوي الوحدة .

الحل :

$$M = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{y} dzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} ydydx = \int_{-2}^{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{4} dx = \int_{-2}^{2}\left(8-\frac{x^4}{2}\right)dx$$

$$=\left[8x-\frac{x^5}{10}\right]_{-2}^{2} = \left(16-\frac{32}{10}\right)-\left(-16+\frac{32}{10}\right) = 32-\frac{64}{10} = 25.6$$

$$M_{xy} = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{y} zdzdydx \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{0}^{y} dydx = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\frac{y^2}{2}dydx = \int_{-2}^{2}\left[\frac{y^3}{6}\right]_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(64-\frac{x^6}{6}\right)dx = \left[64x-\frac{x^7}{42}\right]_{-2}^{2} = 249.9$$

$$\bar{z} = \frac{249.9}{25.6} = 9.76$$

التكامل الثلاثي بالإحداثيات الأسطوانية والكروية :

التكامل الثلاثي بالإحداثيات الأسطوانية :

$$\iiint_D f(x,y,z)dv = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{g_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{g_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dz\,dr\,d\theta$$

مثال: استخدم الاحداثيات الاسطوانية لايجاد قيمة التكامل $\iiint_D z\,dv$

حيث D هي ذلك الجزء من الكرة $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ والواقع في الثمن الأول .

الحل : الثمن الأول يعني حدود المنطقة هي المنحنيات x=0,y=0,z=0

$$\int_0^{\pi/8}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/8}\int_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/8}\int_0^1 r(1-r^2)\,dr\,d\theta$$

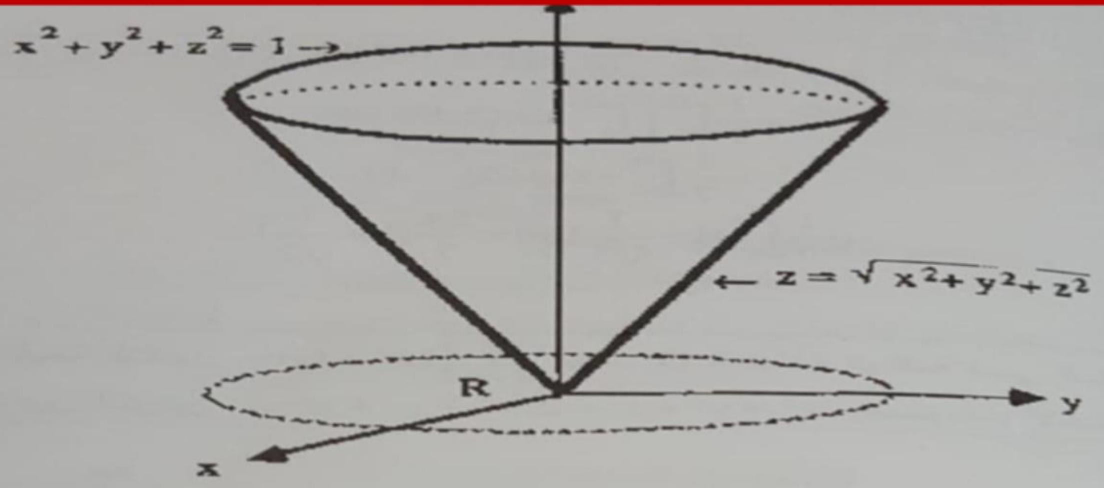
$$= \int_0^{\pi/8}\int_0^1 \left(r-r^3\right)dr\,d\theta = \int_0^{\pi/8}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/8} d\theta = \frac{\pi}{32}$$

التكامل الثلاثي بالإحداثيات الكروية:

عنصر الحجم dv في الاحداثيات الكروية (ρ,ϕ,θ) يعطى بالعلاقة : $dv = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

مثال : جد قيمة التكامل $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dv$ حيث D هي المنطقة المحصورة من

أعلى بالكرة $x^2+y^2+z^2=1$ ومن أسفل بالمخروط $z^2=x^2+y^2, z\geq 0$.



الشكل (37)

لاحظ أن D تعرف بالمتباينة

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\,,(x,y)\in R$$

حيث R هي مسقط D على المستوى xy، وهي قرص دائري نصف قطره الوحدة، أي أن R هي المنطقة $R=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

وباستخدام العلاقة بين الاحداثيات الكروية والاحداثيات الديكارتية فان معادلة الكرة تصبح $\rho=1$ بينما تصبح معادلة المخروط هي $\theta=\frac{\pi}{4}$

وذلك لأن: $z=\rho\cos\varnothing, x^2+y^2=r^2=\rho^2\sin^2\varnothing, \rho^2=x^2+y^2+z^2$

أي أن المعادلة $z^2=x^2+y^2$ تصبح $\rho^2\cos^2\varnothing=\rho^2\sin^2\varnothing$

فإذا كانت $\rho\ne 0$ فان $\tan^2\varnothing=1$

وحيث أن $z\ge 0$ فان $0\le\varnothing\le\frac{\pi}{2}$

وهكذا فان معادلة المخروط تصبح $\varnothing=\frac{\pi}{4}$

لذلك فان D تعرف بالمتباينات $0\le\rho\le 1, 0\le\varnothing\le\frac{\pi}{4}, 0\le\theta\le 2\pi$

وهكذا فان

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^2\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 \rho^4 \, . \, \rho^2 \sin\varnothing \, d\rho \, d\varnothing \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\rho^7}{7}\Big]_0^1 \sin\varnothing \, d\varnothing \, d\theta$$

$$= \frac{1}{7}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/4} \sin\varnothing \, d\varnothing\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{7}\int_0^{2\pi} -\cos\varnothing\Big]_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \frac{1}{7}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\theta = \frac{2\pi}{7}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

مثال : جد قيمة التكامل الثلاثي التالي : $\int_{0}^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{1}^{2} \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \, d\rho d\varphi \, d\theta$

الحل :

$$\int_{0}^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{1}^{2} \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_{0}^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_1^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta d\phi d\theta = \frac{7}{3}\int_{0}^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\right)\cos^2 \theta d\phi d\theta$$

$$\frac{7}{6}\int_{0}^{\pi}\left(\phi-\frac{\sin 2\phi}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\cos^2 \theta d\theta = \frac{7}{12}\pi\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{7}{24}\pi\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{7}{24}\pi^2$$

مثال : جد قيمة التكامل الثلاثي التالي :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{0}^{2\cos\theta}\int_{0}^{r}\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

الحل :

$$\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\theta}\int_{0}^{r}\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta=\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\theta}r\cos\theta\,dr\,d\theta=2\int_{0}^{\pi/2}\cos^{3}\theta\,d\theta=2\int_{0}^{\pi/2}\cos\theta(1-\sin^{2}\theta)\,d\theta$$

$$=2\left(\sin\theta-\frac{\sin^{3}\theta}{3}\right]_{0}^{\pi/2}=2(1-\frac{1}{3})=\frac{4}{3}$$

تمت بحمد الله .