اسم المادة : مبادئ التحليل العددي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط هنا

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

النظام العشري {0،1،2،3،4،5،6،7،8،9}

النظام الثنائي {0،1}

* التحويل من عشري ← ثنائي $(\quad)_{10} \Rightarrow (\quad)_2$

1* نقسم العدد العشري على 2 واحتفظ بالباقي

2* والجواب النهائي نكتب الباقي من أعلى إلى أسفل ومن اليمين ← اليسار

* التحويل من كسر عشري ← كسر ثنائي $(0.\quad)_{10} \Rightarrow (0.\quad)_2$

1* اضرب الكسر العشري بالعدد 2.

2* نأخذ العدد الصحيح الناتج (يسار الفاصلة) ويكون إما (0،1)

3* نضرب ما يتبقى من الناتج من يمين الفاصلة بـ 2 ونستمر بنفس الطريقة

4* نتوقف اذا نتج 0 أو أصبح الحل يتكرر

5* نكتب الجواب من يمين الفاصلة من اليسار ← اليمين [أعلى ← أسفل]

صيغة الكسور العشرية التي يمكن تمثيلها بكسور ثنائية منتهية

$\frac{1}{B}$ ← حيث $B = 2^n$

* لتحويل النظام العشري لأي نظام آخر مثلاً ثنائي، رباعي، سادس عشري
نقسم العدد العشري على رمز النظام الآخر مثلاً (2، 4، 16)
ونأخذ الباقي ونكتبه من أعلى ← أسفل ومن اليمين ← اليسار

* لتحويل من ثنائي ← عشري $(\quad)_2 \to (\quad)_{10}$
نضرب منازل العدد العشري بالعدد $2^{(\;)}$ ونبدأ من
المنزلة جهة اليمين نضربها بـ $2^{(0)}$ ثم المنزلة التالية $2^{(1)}$ ونكمل

$$(\;)*2^0+(\;)*2^1+(\;)*2^2 \dots = (\quad)_{10}$$

* النظام السادس عشري ← 0، 1، 2، ...، 9 ثم نكمل

← A B C D E F

10 11 12 13 14 15

2019/10/26 06:28

* للتحويل من $(\quad)_{16} \rightarrow (\quad)_{10}$

نضرب كل منزلة بالعدد 16 مرفوع للقوة حسب ترتيبه

$$(\ )*16^0+(\ )*16^1+(\ )*16^2+\dots=(\quad)_{10}$$

* نظام الفاصلة المتحركة

1. تحريك الفاصلة يميناً ← نضرب بقاعدة النظام مرفوع للأس السالب
2. 〃 〃 يساراً ← 〃 〃 〃 〃 الموجب

* تحريك الفاصلة إلى أقصى اليسار بحيث لا يكون من اليسار أرقام ومن اليمين يكون أول عدد غير الصفر ← [الصيغة الاساسية]

* صيغة نظام الفاصلة في الحاسوب ← $F(b, p, M_1, M_2)$

القاعدة ، عدد المنازل بعد الفاصلة ، أصغر أس ، أكبر أس

* عدد أعداد النظام التي يتضمنها حسب القاعدة

$$1+2(b-1)*b^{p-1}*(M_2-M_1+1)$$

وهي ← الموجبة ، 0 ، السالبة

* وإذا كان القاعدة $b=2$ ← $1+2^p(M_2-M_1+1)$

* الخطأ = القيمة الحقيقية (X_E) − القيمة التقديرية (X_A)

$$X_E \xleftrightarrow{\text{عكس}} - \quad X_A \quad = E$$

* الخطأ المطلق ← القيمة المطلقة للخطأ
* الخطأ النسبي ← الخطأ تقسيم القيمة الحقيقية

* تقريب الأعداد إلى س منازل عشرية (س = عدد معين مثلاً 4)

نحدد المنزلة التي ذكرها

1. ننظر للعدد الذي على يمينها إذا كان > 5 نضيف لها (1) ونضع بداله صفر مثل 443.7 ← 444.0 ← 444
2. إذا كان < 5 لا نضيف 1 مثل 443.2 ← 443.0 ← 443
3. إذا كان = 5 ننظر المنزلة (س) إذا فردية نضيف 1 وإذا زوجية لا نضيف 1

كيفية حساب الأخطاء

① عدد صحيح ← .05 مثال 72 ← .05

② عدد صحيح مع أعشار ← نعوض بدل كل الأرقام أصفار ونكتب على اليسار 5

مثل $7.4 \leftarrow 0.05$ $9.73 \leftarrow 0.005$

③ اذا كانت مسألة ← نعوض قيم الأخطاء كما في السابق ونجمع كل القيم حتى لو كانت الاشارة بين الحدود سالبة

④ في حالة الضرب

الخطأ ← خطأ ① * الثاني + خطأ ② * الأول

⑤ في حالة القسمة

الخطأ ← القيمة الحقيقية * $\left(\frac{\text{خطأ البسط}}{\text{البسط}} + \frac{\text{خطأ المقام}}{\text{المقام}} \right)$

* للتخفيف وتقليل الأخطاء نستخدم لكثيرات الحدود ←

① صيغة هورنر ← الثابت + x(... + x[الثالث + x(الثاني + x(الأول)))]

② باستخدام القانون العام ← $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ام المجد

* حساب الخطأ في قيم الاقترانات $F(x)$

① نشتق الاقتران $F(x) \leftarrow f'(x)$

② نعوض المقدار المراد تقديره في المشتقة ← $f'(x)$

③ " " " " " الاقتران نفسه ← $F(x)$

④ نعوض بالقاعدة ← $f'(x) = \frac{f(X_E) - f(X_A)}{X_E - X_A}$

أو بالقاعدة ←

$$f(X_E) - f(X_A) \approx f'(X_E)(X_E - X_A)$$

انتهت قوانين الوحدة الأولى

2019/10/26 06:29

5

الوحدة الثانية

ام الطحين

* المعادلات التصاعدية تحتوي على ← sin، cos، e، ln
* المعادلات الجبرية ← حدوديات أو صيغ نسبية $\frac{P(x)}{Q(x)}$
* أنواع الجذور ← بسيطة لا تتكرر
  مضاعفة تتكرر

جذور المعادلة $f(x)=0$ هي نقاط تقاطع $y=f(x)$ مع محور x $(y=0)$

مبرهنة (1) (القيمة الوسطية)

إذا كان $f(x)$ متصل على $[a,b]$ وإذا كان A عدد يقع بين $f(a), f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a,b بحيث أن $f(c)=A$

⇐ $f(a)\cdot f(b)<0$ مختلفان في الإشارة

* نستخدم القسمة التركيبية بدلاً من القسمة الطويلة للحدوديات من الدرجة $n\geq 1$ على العامل $(x-a)$ نستخدم معاملات الحدود مرتبة تنازلياً

* طريقة التنصيف

① نتأكد أن الفترة $[a,b]$ تحقق الشرط $f(a)\cdot f(b)<0$

② نحاول أن نصغر الفترة بإيجاد عدد جديد بينهما في كل مرة بحيث $c_1=\frac{a+b}{2}$

③ نحسب $f(a)\cdot f(c_1)$ إذا كان موجباً نختار الفترة الجديدة $[c_1,b]$ وإذا كان سالباً نختار الفترة الجديدة $[a,c_1]$

④ ونكرر الخطوة ② ثم ③ حتى نقترب من الجذر المطلوب

القيم $c_1, c_2, c_3, \dots$ قيم متتابعة تقاربها

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c\,|\alpha - x_n|^p$$

* c ثابت التقارب الخطي (معدل)
* $c=\frac{1}{2}$ ثابت التقارب لجميع المعادلات مهما كانت قيم a,b

* الحل بطريقة النقطة الثابتة
* نبدأ بقيمة واحدة فقط
* النقاط الثابتة هي تقاطع $y = x$ ، $y = g(x)$

* مبرهنة (2)

افرض $g(x)$ متصلة على $[a,b]$ وأن $a \leq g(x) \leq b$ ويوجد k حيث $0 < k < 1$
وأن $|g(x_1) - g(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|$
فإن $x = g(x)$ له حل منفرد هو α حيث $\alpha \in [a,b]$
وأن القيم التتابعية المحسوبة من $x_{n+1} = g(x_n)$ تتقارب إلى α

* مبرهنة (3)

افرض $g(x)$ له مشتقة على $[a,b]$ ، $a \leq g(x) \leq b$
فإن $K = \max |g'(x)| < 1$

* مبرهنة (4)

اذا كان $f(x)$ له مشتقة متصلة على فترة وأن $0 < K \leq f'(x)$
فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α يقع بين 0 ، $-\frac{f(0)}{K}$

* طريقة صياغة $g(x)$

$$G(x) = x + f(x)$$

$$x = g(x) = \frac{1}{1+\lambda}\left[\lambda x + G(x)\right]$$

* المشتقة الأولى ⇐

$$g'(x) = \frac{1}{1+\lambda}\left[\lambda + G'(x)\right]$$

* نختار قيمة λ بحيث تكون $|g'(x)| < 1$ أو $-G'(x) = \lambda$

* مبرهنات 5 + 6 + 7 + 8 حفظ
* اذا كانت $0 < g' < 1$ ⇐ التقارب من جهة واحدة
* " " $-1 < g' < 0$ ⇐ " " من جهتين مختلفتين

* طريقة النقطة الثابتة $f(x) \rightarrow G(x) = x + f(x) \rightarrow G'(x)$

$\lambda = -G'(x) \rightarrow g(x) \rightarrow x_{n+1} = g(x)$

$\frac{1}{1+\lambda}\left[x\lambda + G(x)\right]$

2019/10/26 06:29

* $0 < g'(x) < 1$ ⟸ تقاربية ذات وتيرة (جهة)
* $-1 < g'(x) < 0$ ⟸ تقاربية ذات تردد (جهتين)
* $g'(x) > 1$ ⟸ تباعدية ذات وتيرة (جهة)
* $g'(x) < -1$ ⟸ تباعدية ذات تردد (جهتين)

* طريقة نيوتن - رافسون من طرق النقطة الثابتة تقاربها غير خطي
* نحصل على الافتراض $g(x_n)$ ⟸ $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
* نحسب القيم التتابعية ⟸

$$\boxed{X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}} \rightarrow X_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)}$$

* في حالة الجذور المضاعفة نتقارب خطياً وثابتة بمقدار $\frac{1}{2}$

$$M = \frac{\max |f''(x)|}{\min |f'(x)|}$$ (المعد)

أم المجد

* طريقة القاطع (ليست من طرق النقطة الثابتة)
هي طريقة وسط بين طريقة حساب الخطأين وطريقة نيوتن
تبدأ بقيمتين تحصران جذر المعادلة $f(x) = 0$
رتبة تقاربها = $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 = P$ ⟸ النسبة الذهبية
لا نحتاج لحساب المشتقة (تقارب غير خطي)
يعطينا X_0, X_1 ونبدأ الحل من $X_2 \leftarrow X_3 \leftarrow X_4 \leftarrow X_5$
حسب القانون ⟸

$$\boxed{X_{n+1} = X_n - f(X_n)\frac{X_n - X_{n-1}}{f(X_n) - f(X_{n-1})}}$$

* طريقة النقطة الثابتة حسب
$$X_{n+1} = g(X_n)$$
نجد $g(x)$ أولاً من $f(x)$ حسب الخطوات السابقة

2019/10/26 06:29

* طريقة القاطع أسرع من طريقة نيوتن اذا كانت السيكنت [illegible] وهي أكثر فعالية

* اذا كان α جذر مضاعف (P) للمعادلة $f(x)=0$ فإن

$$f(x) = (x-\alpha)^p h(x) \qquad h(\alpha) \neq 0$$

ويصبح ثابت التقارب خطي ومقداره ← $g'(x) = 1 - \frac{1}{p}$

$$= \frac{p-1}{p}$$

* لتحويل طريقة نيوتن من خطي لرتبة ثانية ←

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

* اذا قيمة P غير موجودة نستخدم القاعدة $K'(\alpha) = \frac{1}{p}$

حيث K ←

$$K(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 1 - \frac{(x-\alpha)\,h(x)}{p\,h(x) + (x-\alpha)\,h'(x)}$$

* P ← المضاعفة عدد صحيح موجب محصور بين $\frac{1}{K'(a)}$, $\frac{1}{K'(b)}$

انتهت قوانين الوحدة الثانية

ام المجد

2019/10/26 06:30

الوحدة الثالثة

* المصفوفة المزيدة الممتدة ← مصفوفة المعاملات A والثوابت B

$[A \vdots b] \Rightarrow \tilde{A}$

* المصفوفة الصفرية O ← كل عناصرها أصفار
* المصفوفة القطرية D ← كل عناصرها أصفار ماعدا القطر
* المصفوفة المحايدة I ← عناصر القطر = 1 وبقية العناصر = 0
* المصفوفة غير مفردة ← لها نظير ضربي (A^{-1})
* المصفوفة المفردة ← ليس لها نظير ضربي

$A A^{-1} = A^{-1} A = I$

* المصفوفة U ← مصفوفة المثلث العلوي أرقام $\neq 0$
* المصفوفة L ← مصفوفة المثلث السفلي أرقام $\neq 0$

* عمليات الصف البسيط

(1) ضرب صف بعدد حقيقي ← kR_1
(2) ضرب صف بعدد حقيقي ثم إضافته لصف آخر ← $kR_1 + R_2$
(3) تبديل صف بصف آخر $R_2 \leftrightarrow R_3$

* طريقة جاوس والاختزال (التعويض) العكسي (من الطرق المباشرة لحل المعادلات)

(1) نكتب المصفوفة المزيدة
(2) نجري عمليات الصف البسيط لتحويلها لمصفوفة U ~~...~~ ⇐ $\tilde{A}$
(3) نجري التعويض العكسي لإيجاد قيم المجاهيل

* طريقة جاوس - جوردان

(1) نكتب المصفوفة المزيدة
(2) نجري عمليات الصف البسيط لتحويلها لمصفوفة قطرية D
(3) نجد القيم المجهولة مباشرة ولا يوجد فيها تعويض عكسي

ام الماجد

* طريقة النظير (النظير الضربي)
① نكتب مصفوفة المعاملات A
② نجد مصفوفة النظير A^{-1}
③ نعوض في $X = A^{-1} * b$

$[X] = [\text{النظير}] * [\text{الثابت}]$

* طريقة ايجاد نظير المصفوفة
[1] باستخدام المحددة للمصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

المحددة ⇐ $|A| = (ad - cb)$

[2] باستخدام التحويل لمصفوفة الوحدة ⇐

$$[A \,\vdots\, I] \xrightarrow[\text{بسيط}]{\text{عمليات صف}} [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

[3] نظير المصفوفة القطرية = $\frac{1}{\text{عناصر القطر}}$

* لإيجاد محدد مصفوفة أكبر من 2x2 ⇐ نستخدم اسلوب الاشارات (+ - +)

* طريقة التحليل للمصفوفات (LU) $A = [\text{ثلاثية القطرية}]$
* القطر + اللي فوقه + اللي تحته ⇐ أعداد والباقي أصفار
* القطر الرئيسي عناصره ⇐ $a_1, \dots, a_n$
* " العلوي " ⇐ $r_1, \dots, r_{n-1}$
* " السفلي " ⇐ $c_2, \dots, c_n$

* الخطوات
① نقسم المصفوفة A إلى مصفوفتين U و L (ضمن خطوات معينة)
② نفرض أن صورة النظام $LU\vec{X} = \vec{b}$ لذلك نحسب
② $U\vec{X} = Z$ ⇐ ① $LZ = b$
③ من عملية الضرب $UX = Z$ نجد قيم X

2019/10/26 06:30

* خطوات ايجاد عناصر المصفوفتين U و L من المصفوفة A

① نضع $d_1 = a_1$

② نضع $u_i = c_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$

③ نحسب $e_i = \frac{c_i}{d_{i-1}}$ ثم $d_i = a_i - u_{i-1} e_i$

④ نعوض القيم الناتجة في U و L حسب الشكل التالي

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e_n & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & & \\ & d_2 & u_2 & \\ & & \ddots & u_{n-1} \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

انتهت الوحدة الثالثة

* الوحدة الرابعة (طرق حل المعادلات غير المباشرة)

1 المقياس (مقياس المتجه، مقياس المصفوفة)

مقياس المتجه X ← اقتران $\|\cdot\|$ مداه R^n ومداه ≥ 0 مضاعفة

* $\|X\| \geq 0$ * $\|X\| = 0$ في حالة المتجه الصفري

* $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$ ← α عدد حقيقي

$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ ← المتباينة المثلثية

* أنواع مقاييس المتجه

1 المقياس الأول ← L_1 مجموع القيم المطلقة $\|X\|_1 = \sum |x_i|$

2 المقياس الثاني ← L_2 نربع كل قيمة ثم نجمعها ونأخذ الجذر $\|X\|_2 = \left\{ \sum x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

3 مقياس ما لانهاية L_∞ ← أكبر قيمة مطلقة للقيم $\|X\|_\infty = \max |x_i|$

2019/10/26 06:30

* $P(\lambda)$ كثيرة الحدود المميزة = $det(A-\lambda I)$
* القيم المميزة ⇐ λ
* لكتابة المصفوفة A على الشكل $P(\lambda)$ وإيجاد المحددة
(1) عناصر القطر الرئيسي نطرح منها λ
(2) ثم نجد المحددة بأسلوب الإشارات $(+-+)$
(3) نجد قيم λ
* نصف القطر الطيفي هو أكبر قيمة من القيم المميزة للمصفوفة
$r(A) \Rightarrow \rho(A) = max|\lambda_i|$
* $|a|$ ⇐ القيمة المطلقة عندما a ⇐ عدد حقيقي
* $|\lambda|$ ⇐ مقياس λ لأنها عدد مركب وتساوي $|\lambda| = \sqrt{x^2+y^2}$

* مقياس المصفوفة $\|A\|$ هو اقتران مجاله كافة المصفوفات المربعة ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة (الموجبة).
$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
* أنواع مقاييس المصفوفة
[1] المقياس الأول ⇐ مجاميع الأعمدة $\|A\|_1 = max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
[2] المقياس ~~[illegible]~~ ما لانهاية ⇐ مجاميع الصفوف $\|A\|_\infty = max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
[3] المقياس الثاني ⇐ جذر نصف القطر الطيفي $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
[4] مقياس الفريس ⇐ فروبنيس $\|A\|_F = \left\{\sum_{i=1}\sum_{j=1} |a|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$
نربع كل القيم ونجمعها ثم نأخذ جذرها

* الخطأ = الحل الحقيقي - الحل التقريبي $\vec{e} = \vec{X} - \vec{X}^*$

2019/10/26 06:30

* $\vec{r}$ ← مقدار الفرق بين الحل المحوسب والحل الحقيقي للمسألة
$\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}^*$

* العلاقة بين $\vec{e}$, $\vec{r}$ عكسية ⇐ $A\vec{e} = \vec{r}$

* رقم الحالة ⇐ $p = 1, 2, \infty$ $C(A) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_p$

* $\|e\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$ * $\|e\| \geq \frac{\|r\|}{\|A\|}$

* $\frac{1}{C(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} < \frac{\|e\|}{\|x\|} < C(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$

* اذا كانت $C(A) \approx 1$ ← المصفوفة A في حالة جيدة
* " " $C(A) >> 1$ ← " A في حالة عليلة

* خطوات ايجاد رقم الحالة $C(A)_p$
1. نكتب مصفوفة المعاملات A
2. نجد النظير A^{-1}
3. نحسب $\|A^{-1}\|_\infty$ ونحسب $\|A\|_p$ حيث $p = 1, 2, \infty$
4. نطبق حسب القاعدة ⇐ $C(A)_p = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_p$
5. نقرر اذا كانت في حالة جيدة أم عليلة

* الطرق التتابعية لحل المعادلات الخطية

[1] طريقة جاكوبي

1. نكتب كل معادلة بدلالة متغير واحد
2. نستخدم الحل الابتدائي في الحل لايجاد الحل الأول $x^{(1)}$
3. نستخدم $x^{(1)}$ " " " " " الثاني $x^{(2)}$

2019/10/26 06:30

2) طريقة جاوس - سايدل التتابعية
تبدأ بنفس طريقة جاكوبي
لكن نعوض دائماً آخر قيمة للمتغير

3) طريقة (SOR)
نحل أولاً بطريقة جاوس سايدل لايجاد $\tilde{x}_1^{(1)}$ $\tilde{x}_1^{(2)}$ $\tilde{x}_2^{(1)}$ $\tilde{x}_2^{(2)}$
ثم نعوضها في القانون

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - w\left(x^{(k)} - \tilde{x}^{(k+1)}\right)$$

ثابت التسارع k

* قيمة $w \neq 0$
* عندما $w = 1$ ← طريقة SOR نفس جاوس سايدل
* عندما $0 < w < 1$ ← $x^{(k)} - \tilde{x}^{(k+1)}$
عندما $1 < w < 2$ ← نحدد تكبير الفرق

* الخطوات

1) نجد ايجاد القيم $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \tilde{x}_1^{(2)}, \tilde{x}_2^{(2)}$ من جاوس سايدل
2) نعوضها بالقوانين الأربعة لايجاد SOR

1 * $x_1^{(1)} = (1-w)\,x_1^{(0)} + w\,\tilde{x}_1^{(1)}$
2 * $x_2^{(1)} = (1-w)\,x_2^{(0)} + w\,\tilde{x}_2^{(1)}$
3 * $x_1^{(2)} = (1-w)\,x_1^{(1)} + w\,\tilde{x}_1^{(2)}$
4 * $x_2^{(2)} = (1-w)\,x_2^{(1)} + w\,\tilde{x}_2^{(2)}$

* (الصيغة العامة)

الثلاثة طرق تشترك بالقاعدة

$$\vec{X}^{(k+1)} = T\,\vec{X}^{(k)} + \vec{C}$$

* $\vec{C}$ ← مصفوفة النواتج $C = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} & \frac{b_2}{a_{22}} & \cdots & \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}^T$

* $\vec{T}$ ← عناصر القطر الرئيسي أصفار ثم الصف الأول نقسم كل عنصر فيه على أول عنصر ثم الصف الثاني نقسم كل عنصر فيه على أول عنصر لكل المصفوفة

2019/10/26 06:30

* لإيجاد القيم التالية باستخدام المصفوفات D, D^{-1}, L, U

[1] في حالة جاكوبي

$$D x^{(k+1)} = (L+U) x^{(k)} + b$$
$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1} b$$

[2] في حالة جاوس سايدل

$$(D-L) x^{(k+1)} = U x^{(k)} + b$$
$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1} U x^{(k)} + (D-L)^{-1} b$$

[3] في حالة SOR

$$(D-wL) x^{(k+1)} = \left((1-w) D + wU\right) x^{(k)} + w b$$

$$x^{(k+1)} = (D-wL)^{-1}\left\{(1-w)D + wU\right\} x^{(k)} + w (D-wL)^{-1} b$$

مبرهنة (1)

لكل متجه أولي $x^{(0)}$ المتتالية $\{x^k\}$ $x^{(k+1)} = T x^{(k)} + c$
تؤول إلى الحل الوحيد لنظام المعادلات $x = Tx + c$
اذا وفقط اذا $\rho(T) < 1$ نصف القطر الطيفي للمصفوفة T

* المصفوفة المربعة مسائدة قطرياً ← $|a| \geq \sum |a|$

* " " مسائدة قطرياً فعلاً ← $|a| > \sum |a|$

* يجب ترتيب المصفوفة D بشكل سائدة قطرياً لضمان وجود الحل

* المصفوفة المربعة والمتماثلة $A^T = A$ ← موجبة مؤكداً أي $x^T A x > 0$

* اذا كانت A موجبة مؤكداً، $0 < w < 2$ ← SOR تؤدي للحل المطلوب لكل اختيار أولي $x^{(0)}$

2019/10/26 06:31

* اذا كانت المصفوفة A موجبة محددة وثلاثية قطرية فإنه $\rho(T_G) = \rho(T_J)^2 < 1$
فتكون القيمة المثلى لـ w في SOR $\Leftarrow$

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_J)^2}}$$

حيث $T_J = D^{-1} B$

* طريقة الحصول على المصفوفة B
- نحول المصفوفة $A \longrightarrow B$
① نضع عناصر القطر الرئيسي أصفار
② نعكس اشارة بقية العناصر

خطوات ايجاد القيمة المثلى الثابت w في طريقة SOR

1. نكتب مصفوفة المعاملات $A \Leftarrow$
2. نجعل عناصر القطر الرئيسي ونضع البقية أصفار لنضع $D \Leftarrow$
3. نجد نظير $D = \frac{1}{\text{عناصر القطر الرئيسي}} \Leftarrow D^{-1}$
4. نكتب المصفوفة B
5. نجد المصفوفة $(T_J) \Leftarrow (T_J) = D^{-1} B$
6. نحسب $\rho(T_J)$ نصف القطر الطيفي $\Leftarrow \max|\lambda|$
نعوض قيمة $\rho(T_J)$ في القانون $\Leftarrow$

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(T_J)^2}}$$

انتهت قوانين النصفي

ام المجد

2019/10/26 06:31