بسم الله الرحمن الرحيم
الصف الافتراضي السادس لمقرر

تفاضل وتكامل 2
الأحد 2020-7-12
د. أحمد الكحلوت

القيم العظمى والصغرى لمعدل تغير الاقتران

المشتقة المتجهة للاقتران f عند النقطة p_0 باتجاه متجه الوحدة $\vec{u}$ تساوي :

$$D_{\vec{u}} f(p_0) = \vec{\nabla} f(p_0).\vec{u} = \left|\vec{\nabla} f(p_0)\right|\left|\vec{u}\right| \cos\theta$$

فإذا كانت θ هي الزاوية بين $\vec{\nabla} f(p_0)$ ومتجه الوحدة $\vec{u}$ وحيث أن $-1 \le \cos\theta \le 1$

لجميع قيم θ. فإن للمشتقة $\vec{\nabla} f(p_0)$ قيمة عظمى مقدارها $\left|\vec{\nabla} f(p_0)\right|$ وذلك عندما

تكون $\cos\theta=1$.

وهذا يقابل $\theta=0$ ، أي أن $\vec{u}$ متجه وحدة باتجاه $\vec{\nabla} f(p_0)$.أي أن : $\vec{u} = \dfrac{\vec{\nabla} f(p_0)}{\left|\vec{\nabla} f(p_0)\right|}$

وتكون للمشتقة $D_{\vec{u}} f(p_0)$ قيمة صغرى مقدارها $\left|\vec{\nabla} f(p_0)\right|$، وذلك عندما

يكون $\cos\theta=-1$ ، وهذا يقابل $\theta=\pi$ ، متجه وحدة معاكس لاتجاه $\vec{\nabla} f(p_0)$ أي أن $\vec{u} = \dfrac{-\vec{\nabla} f(p_0)}{\left|\vec{\nabla} f(p_0)\right|}$

مثال : جد أكبر وأصغر معدل تغير للاقتران $f(x,y)=x^2+x^3y^2$ عند النقطة $p_0(-2,3)$ وحدد الاتجاهات التي يكون فيها التغير أكبر وأقل ما يمكن .

الحل:

$$f_x = 2x + 3x^2y^2 \Rightarrow f_x(-2,3) = 104$$

$$f_y = 2x^3y \Rightarrow f_y(-2,3) = -48$$

$$\vec{\nabla} f(p_0) = 104\hat{i} - 48\hat{j} \Rightarrow \left|\vec{\nabla} f(p_0)\right| = \sqrt{(104)^2 + (-48)^2} = 114.54$$

القيمة العظمى لمعدل تغير الاقتران f عند النقطة p_0 تساوي 114.54 في اتجاه $\dfrac{104\hat{i} - 48\hat{j}}{114.54}$

القيمة الصغرى للاقتران f عند النقطة p_0 تساوي 114.54- في اتجاه $\frac{-104\hat{i}+48\hat{j}}{114.54}$

إيجاد الاقتران إذا علم معدل تغيره :

مثال : إذا كان $\vec{\nabla} f(x,y)=\left(3x^2+2xy\right)\hat{i}+\left(x^2+6y\right)\hat{j}$ جد الاقتران f(x,y) .

الحل :

$$f_x=3x^2+2xy,\ f_y=x^2+6y$$
$$\therefore\ f(x,y)=x^3+x^2y+g(y)$$
$$f_y=x^2+g`(y)$$
$$\therefore g`(y)=6y \Rightarrow g(y)=3y^2+c$$
$$\therefore\ f(x,y)=x^3+x^2y+3y^2+c$$

معادلة المستوى المماس للسطح ومعادلة الخط العمودي على السطح :

معادلة المستوى المماس للسطح $f(x,y,z)=0$ عند النقطة $p_0(x_0,y_0,z_0)$ هو المستوى الذي يحتوي النقطة p_0 ويعامد المتجه $\vec{\nabla} f(p_0)$.

وعليه فإن معادلة هذا المستوى هي :

$f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)+f_z(p_0)(z-z_0)=0$.

ويعرف الخط العمودي على السطح $f(x,y,z)=0$ والمار بالنقطة $p_0(x_0,y_0,z_0)$ بأنه الخط المستقيم المار بالنقطة p_0 والموازي للمتجه $\vec{\nabla} f(p_0)$ وعليه فإن المعادلات البارامترية للخط العمودي على السطح $f(x,y,z)=0$ عند النقطة p_0 هي :

$x=x_0+f_x(p_0)t$ و $y=y_0+f_y(p_0)t$ و $z=z_0+f_z(p_0)t$.

مثال :

جد معادلة المستوى المماس للسطح $z=\ln(x^2+y^2)$ عند النقطة $p_0(e,0,z)$.

الحل :

$$f(x,y,z)=z-\ln\left(x^2+y^2\right)$$

$$f_x=\frac{-2x}{x^2+y^2},\ f_y=\frac{-2y}{x^2+y^2},\ f_z=1$$

$$f_x(e,0,2)=\frac{-2e}{e^2}=\frac{-2}{e},\ f_y(e,0,2)=0,\ f_y(e,0,2)=0,\ f_z(e,0,2)=1$$

معادلة المستوى المماس $\frac{-2}{e}(x-e)+(z-2)=0\Rightarrow\frac{-2}{e}x+2+z-2=0\Rightarrow\frac{-2}{e}x+z=0$

معادلة العمودي على السطح : $x=x_0+f_x(p_0)t=e+(-2/e)t$

$y=y_0+f_y(p_0)t=0$

$z=z_0+f_0(p_0)t=2+t$.

القيم القصوى :

تعريف (5)

للاقتران $f(x,y)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة (a,b) اذا كان هناك جوار للنقطة (a,b) بحيث يكون $f(x,y) \le f(a,b)$ لجميع النقط (a,b) في ذلك الجوار.

تعريف (6)

للاقتران $f(x,y)$ قيمة عظمى مطلقة عند النقطة (a,b) اذا كان $f(x,y) \le f(a,b)$ لجميع النقط (x,y) في مجال الاقتران f.

تعريف (7)

للاقتران $f(x,y)$ قيمة صغرى محلية عند النقطة (c,d) اذا كان هناك جوار للنقطة (c,d) بحيث يكون $f(x,y) \ge f(c,d)$ ، لجميع النقط (x,y) في ذلك الجوار.

تعريف (8)

للاقتران $f(x,y)$ قيمة صغرى مطلقة عند النقطة (c,d) اذا كان $f(x,y) \ge f(c,d)$ لجميع النقط (x,y) في مجال الاقتران f.

تعريف (9)

تسمى النقطة (a,b) نقطة حرجة للاقتران $f(x,y)$ اذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

(أ) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

(ب) $f_x(a,b)$ أو $f_y(a,b)$ غير موجودة.

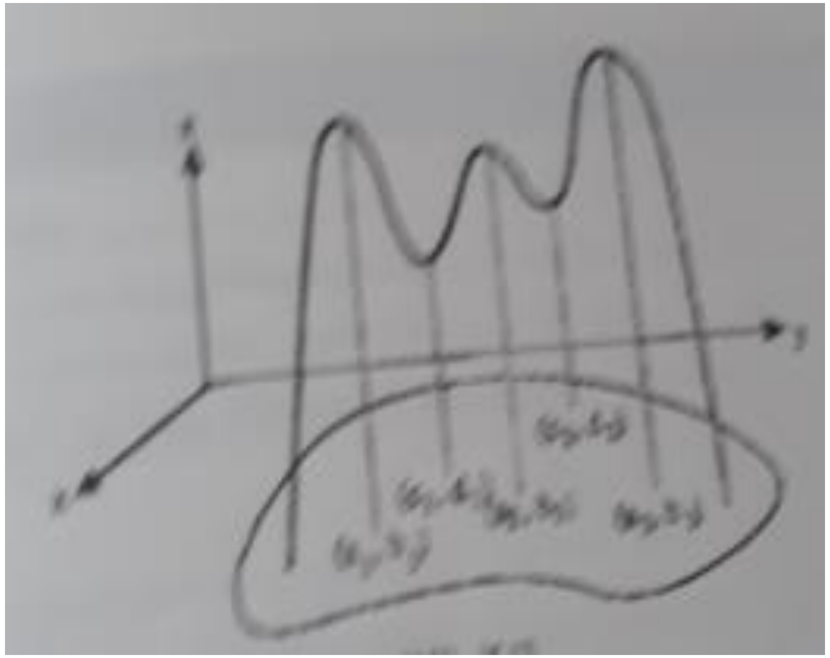
تعريف (10)

يعرف مميز الاقتران f، ويرمز له بالرمز D بالعلاقة

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx}$$

ويستخدم الرمز $D(a,b)$ ليدل على قيمة الاقتران عند النقطة (a,b).

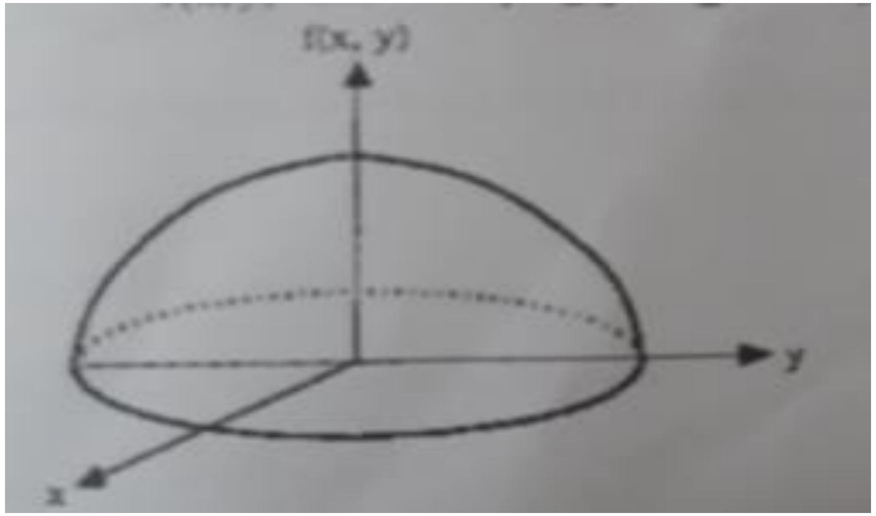
لاحظ عزيزي الطالب أنه اذا كانت المشتقات الجزئية f_{xy}, f_{yx} متصلة، فان $f_{xy} = f_{yx}$ وعليه فان $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$



مثال : جد القيمة العظمى للاقتران

$f(x,y)=100-x^2-y^2$

الحل :



المعادلة $f(x,y)=100-x^2-y^2$ تمثل نصف كرة انظر الشكل المقابل . ومن الشكل يتضح أن للاقتران قيمة عظمى عند النقطة (0,0) تساوي 100 .

القيم القصوى المحلية للاقترانات المعرفة على مجال مفتوح:

نظرية : إذا كانت النقطة (a,b) نقطة حرجة للاقتران f(x,y) ، وكانت المشتقات الجزئية من

الدرجة الأولى والدرجة الثانية متصلة في جوار النقطة (a,b) فإن :

(أ) للاقتران f قيمة عظمى محلية عند النقطة (a,b) إذا كان $D(a,b)\geq 0$, $f_{xx}(a,b)\leq 0$.

(ب) للاقتران f قيمة صغر ية محلية عند النقطة (a,b) إذا كان $D(a,b)\geq 0$, $f_{xx}(a,b)\geq 0$.

(ج) تكون النقطة (a,b) نقطة سرج ، إذا كان $D(a,b)\leq 0$.

مثال :جد القيم القصوى المحلية للاقتران :
. $f(x,y)=x^3+3y^3-3x-9y+2$

الحل :

$$f_x = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f_y = 9y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 18y$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 18y \end{vmatrix} = 108xy$$

القيم الحرجة (a,b)	$f_{xx}(a,b)$	D(a,b)	التصنيف
(1,1)	6	108	صغرى محلية
(1,-1)	6	-108	سرج
(-1,1)	-6	-108	سرج
(-1,-1)	-6	108	عظمى محلية

القيم القصوى المطلقة للاقترانات المعرفة على مجال مغلق:

لإيجاد القيم القصوى المطلقة لاقترانات ذات متغيرين معرفة على مجال مغلق نتبع الخطوات التالية :

١- نجد القيم القصوى المحلية داخل المجال المغلق .

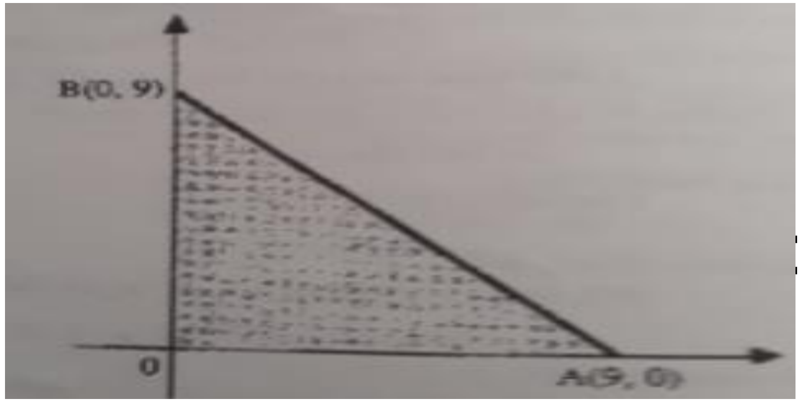
٢- نجد القيم القصوى المحلية عند النقط الحرجة .

٣- نجد قيمة الاقتران عند النقط التي حصلنا عليها في الخطوتين الأولى والثانية، وعلى ضوء القيم هذه نجد القيم القصوى المطلقة على المجال المغلق .

مثال :

جد القيم القصوى المطلقة للاقتران : $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ على المجال المغلق في الربع الأول والمحدد بالخطوط : $x+y=9, y=0, x=0$.

الحل : نقوم برسم المجال المغلق في الربع الأول والمحدد بالخطوط السابقة كما في الشكل المجاور ، ثم نقوم بعمل الخطوات التالية :



١- نبحث عن النقط الحرجة داخل المثلث OAB كالتالي :

$f_x=2-2x=0$ و $f_y=2-2y=0 \Leftarrow x=1$ و $y=1$

إذاً النقط الحرجة هي {(1,1)} ، أي أن هناك نقطة حرجة واحدة قيمة الاقتران عندها هي :

$f(1,1)=2+2+2-1-1=4$.

٢- الخطوة الثانية : نلاحظ أن حدود المجال المغلق على المستقيمات AB,OB,OA

أ- على المستقيم OA ، تكون $y=0$ ، وبالتالي يصبح الاقتران :

$f(x,0)=2+2x-x^2$ حيث $x\in[0,9]$

$f^{\backslash}(x)=2-2x=0 \Leftarrow x=1$ ، أي أن النقطة الحرجة على المستقيم OA هي النقطة (1,0) وقيمة الاقتران عندها هي : $f(1,0)=3$

ب- على المستقيم OB تكون $x=0$ ، وعليه يصبح الاقتران : $f(y)=f(0,y)=2+2y-y^2$

$f^{\backslash}(y)=2-2y=0 \Leftarrow y=1$ ، وعليه فإن النقطة الحرجة على المستقيم OB هي النقطة (0,1) وقيمة الاقتران عندها هي $f(0,1)=3$.

ج- على المستقيم AB ، يكون $y=9-x$ ، وعليه يصبح الاقتران

$f(x,9-x)=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2=-16+18x-2x^2$

. $x=9/2 \Leftarrow f^{\backslash}(x)=18-4x=0$

ومنه فإن النقطة الحرجة على المستقيم AB هي : $(9/2,9/2)$

وقيمة الاقتران عندها $f(9/2,9/2)=-41/2$

د- نقط الزوايا هي : $(0,0),(9,0),(0,9)$ وهي أيضاً نقط حرجة وقيمة الاقتران عندها تساوي: $f(0,0)=2,\ f(9,0)=-61,\ f(0,9)=-61$.

الخطوة الثالثة نكون الجدول التالي :

النقط الحرجة	f(x,y)
(1,1)	4
(1,0)	3
(0,1)	3
(9/2,9/2)	-41/2
(0,0)	2
(0,9)	-61
(9,0)	-61

من الجدول السابق نلاحظ أن للاقتران f قيمة عظمى مطلقة عند النقطة (1,1) مقدارها 4 ، وقيمة صغرى مطلقة عند النقطتين (0,9) ، (9,0) مقدارها 61- .

تمت بحمد الله