7

قوانين مادة النهائي

أم المجد

قوانين الوحدة الرابعة

* نص نظرية فيرما (الصغرى) ← اذا كان P عدداً أولياً وكان a أولياً للأعداد $2, \dots, P-1$ فإن ←
$a^{P-1} = 1 \pmod P$ مثال $a^{5-1} = 1 \pmod 5$

* يكون النظام كاملاً للبواقي مقياس (m) اذا كانت (البواقي) على شكل
$\{0, 1, \dots, m-1\}$ أو $\{1, 2, \dots, m\}$

* اذا كانت صيغة السؤال أوجد نظاماً كاملاً للبواقي مقياس n وكانت $(m,n)=1$ وكان w عدد
$w, m+w, 2m+w, 3m+w, 4m+w \dots (n-1)m+w$
نعوض قيم w, m, n وتكون الأعداد نظام كامل للبواقي مقياس n

* نظرية فيرما ← اذا كان P أولياً وكان $(a,p)=1$ فإن ←
$a^{P-1} = 1 \pmod P$

نتيجة ← $a^P = a \pmod P$

* $P-1 = -1 \pmod P$

* عكس نظرية فيرما صحيحة، وتستخدم لاختبار أولية العدد

* يكون العدد أولي عندما يحقق التطابق $2^n = 2 \pmod n$ للأعداد حيث $n \leq 340$ لكن 341 هو شبه أولي

* يكون العدد شبه أولي اذا كان غير أولي لكن يحقق التطابق
$2^n = 2 \pmod n$

* نظرية أويلر ← اذا كان m عدداً غير أولياً لكن يمكن كتابته كحاصل ضرب عددين أوليين $m = p \times q$ فإنه يحقق التطابق
$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{pq}$$

* $U(m)$ ← مجموعة العناصر التي أقل من m والقاسم المشترك بينها واحد

* $\boxed{\phi(m)}$ ← عدد العناصر الموجودة في المجموعة $U(m)$

* عندما p عدداً أولي ←
$$\phi(p) = p-1$$
مثال $\phi(5) = 5-1 = 4$

* قانون نظرية أويلر ←
$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

* لايجاد $\phi(p)$ اذا كان p عدداً أولي و $n \geq 2$ ←
نكتب العدد على صورة (p^n) ثم على القاعدة ←
$$\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$$

* اذا كان $(m,n) = 1$ فإن ←
$$\phi(mn) = \phi(m) * \phi(n)$$

* اذا كان d القواسم الموجبة للعدد n فإن ←
العدد n = مجموع ϕ القواسم الموجبة ←
$$n = \sum \phi(d)$$

* نحلل العدد n ← الى عوامله الأولية الموجبة ونأخذ ϕ لكل عامل ثم المجموع يكون مساوي لـ n

* لايجاد القواسم الموجبة للعدد n اذا كان كبيراً ←
نحلل العدد الى عوامله الأولية على صيغة p^e
نحول الاسس الى رموز n, s

2019/11/8 23:47

3

* نظرية ويلسون ← اذا كان P عدداً أولياً فإن ←

$$(P-1)! = -1 \pmod{P}$$

1. نكتب R ← $R = \{1, 2, 3, \dots, (P-1)\}$
2. نكتب T ← $T = R - \{1, (P-1)\} = \{2, 3, \dots, (P-2)\}$
3. يوجد نظير ضربي لكل عنصر في R ونجعل تجزئة T الى مجموعات تحتوي العدد ونظيره
4. حاصل ضرب عناصر T (العدد ونظيره) = 1

$$T = \{a, a'\} \cup \{c, c'\} \cup \{\dots\}$$

$$(1)(1)\dots(1) = [(a \times a')(c \times c')\dots]$$

$$(1)\dots(1)(1) = 1 \bmod P$$

5. نضرب الطرفين بـ $(P-1)$ ← $(P-1)! = -1 \bmod P$

* لمعرفة نظير العدد بمقياس معين ←

مثلاً ما هو نظير العدد (2) بالمقياس 29

نبحث عن رقم بحيث يكون حاصل ضربه مع 2 ومقسوم على 29 والباقي دائماً واحد ←

$$\frac{2(\ \ )}{29} = \text{الباقي } 1$$

نضرب الأعداد حتى نصل للحلول ويكون ←

$$\frac{2 \times 15}{29} = \frac{30}{29} = \text{الباقي } 1$$

للأعداد الأولية ←

$$(P-1)! = -1 \bmod P$$

$$(P-2)! = -2 \bmod P$$

$$(P-3)! = -3 \bmod P$$

$$(P-5)! = -5 \bmod P$$

$\vdots$

ام المجتبى

* عكس نظرية ويلسون صحيح اذا تحقق التطابق $(P-1)! = -1 \bmod P$ فإن P عدد أولي

2019/11/8 23:47

الأعداد الأولية كلها فردية ما عدا 2

عند قسمتها على 4 فإنها تنقسم إلى مجموعتين

[1] عند قسمتها على 4 تترك الباقي 1 $S: \{p : p = 1 \bmod 4\}$

وهي قابلة للحل ويكون حلها = $\left(\frac{p-1}{2}\right)! \mp$

[2] عند قسمتها على 4 تترك الباقي 3 $T: \{p : p = 3 \bmod 4\}$

وهي غير قابلة للحل

* ويكون شكل التطابق عند قسمتها على 4 ⇐

معامل x^2 واحد $x^2 = -1 \bmod p$

صيغة التطابق التربيعي ⇐ $x^2 = a \bmod p$

* اذا كان $(n,m)=1$ وكان $f(nm) = f(n) * f(m)$

يكون اقترانه ضربي $\phi(nm) = \phi(n) * \phi(m)$

* حاصل ضرب اقترانين ضربيين هو اقتران ضربي $f * g = h$

* ليس بالضرورة أن يكون حاصل جمع اقترانين ضربيين هو اقتران ضربي

* 〃 〃 〃 〃 اقترانين مركبين 〃 〃 〃

عدد القواسم الموجبة للعدد ⇐ $\boxed{d(n)}$

* أسهل طريقة لمعرفة عدد القواسم الموجبة $d(n)$ نكتبه على شكل حاصل ضرب عوامله الأولية مرفوعة لقوة ثم نجد d لكل عامل ويكون (1 + القوة)

$$d(45) = 3^2 * 5$$
$$= d(3^2) * d(5^1)$$
$$= \underbrace{(2+1)}_{\text{القوة}} * \underbrace{(1+1)}_{\text{القوة}} = 3 * 2 = \boxed{6}$$

مجموع القواسم الموجبة للعدد ⇐ $\boxed{\sigma(n)}$

اذا كان p أولي ⇐ $\sigma(p) = p + 1$

2019/11/8 23:47

* طريقة أخرى لإيجاد $\sigma(p)$ ⇐ $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$
* القواسم الفعلية للعدد هي قواسمه بدون نفسه
* مجموع القواسم الفعلية للعدد n ⇐ $\theta(n)$
* الأعداد الكاملة هي الأعداد التي تحقق ⇐ $\sigma(n) = 2n$
* الأعداد الكاملة الأقل من عشرة آلاف هي 6 ، 28 ، 496 ، 8128 فقط
وقاعدتها ⇐ $2^{p-1}(2^p-1)$

* نظرية اقليدس (للأعداد الكاملة) ⇐ يكون العدد كاملاً اذا وفقط اذا
حقق ⇐ $n = 2^{k-1}(2^k-1)$
اذا كان (2^k-1) عدداً أولياً و k أولي

* نظرية اقليدس/اويلر ⇐ الأعداد الزوجية الكاملة هي التي تكتب
على صورة $K_p = 2^{p-1}(2^p-1)$
حيث (2^p-1) و p عدد أولي.

* نظرية مرسين بعد التصحيح ⇐ نحصل على أول 12 عدد مرسيني M_p
و زوجي كامل k_p بتعويض القيم
$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$
الأول، الثاني، الثالث، الرابع، الخامس، السادس، السابع، الثامن، التاسع، العاشر، الحادي عشر، الثاني عشر
* العبارتين للأعداد المرسينية ⇐ $M_p = 2^p - 1$
للأعداد الزوجية الكاملة ⇐ $K_p = 2^{p-1}(2^p-1)$
* مثال ⇐ أوجد العدد المرسيني السادس : نعوض ب $p=17$ أي $M_{17} = 2^{17}-1$

* العدد المرسيني M32 يتكون من 227831 خانة عشرية ثم وجد أنه
خطأ لأنه يتكون من 227832 خانة
* العدد المرسيني M_p السابع والعشرين عندما $p=44497$
عدد خاناته ⇐ $p * \log 2$ ونأخذ العدد صحيحاً

* خانة الآحاد للعدد المرسيني المعطى رقم P يكون بضعف أول عامليه من اليمين على 4 والباقي يكون رقم أول خانة الآحاد

* لمعرفة عدد الخانات العشرية للعدد المرسيني المعطى رقم P باستخدام هذا القانون ⇐ $P \times \log 2$
وأخذ الرقم بشكل صحيح وليس أرقام عشرية مثل $234.9 \Leftarrow 235$ يكون الجواب

تصنيف الأعداد إلى ناقصة / زائدة / كاملة

1. إذا كان $\sigma(n) > 2n$ ⇐ زائداً
2. $\sigma(n) < 2n$ ⇐ ناقصاً
3. $\sigma(n) = 2n$ ⇐ كاملاً

* يكون العددان متحابان إذا كان ⇐ $\sigma(n) = \sigma(m) = m + n$

* إذا كان عددان متحابان فإنه لا يمكن أن يكون أياً منهما أولياً

* نظرية ثابت بن قرة ⇐ إذا أمكن كتابة الأعداد الأولية p, q, r على الصورة

$$\begin{cases} p = 3(2^{n-1}) - 1 \\ q = 3(2^{n}) - 1 \\ r = 9(2^{2n-1}) - 1 \end{cases}$$

حيث $n > 1$
فإن العددين متحابين ⇐

$$x = 2^{n} \cdot p \cdot q$$
$$y = 2^{n} \cdot r$$

ام المجد

2019/11/8 23:48

(تلخيص قوانين مادة النهائي)

* (الوحدة الخامسة)

أم المجد

* يكون (x, y, z) مثلثاً فيثاغورياً إذا حقق
$x^2+y^2=z^2$ $\quad x^n+y^n=z^n$
* يكون أحد العددين x, y فردي والآخر زوجي
* يكون (x, y, z) ثلاثي بدائي إذا لم يكن بين الأعداد x, y, z أي قواسم مشتركة موجبة غير العدد واحد.
* إذا كان (a, b, c) ثلاثي فيثاغوري فإنه يوجد ثلاثي بدائي (x, y, z) وعدد طبيعي d حيث أنه $(a, b, c) = d(x, y, z)$
* نظريات القاسم المشترك
① $(a, b) = (a, b+ka) \quad \forall k$
② $(a^n, b^n) = (a, b)^n \quad \forall n>0$
* لكي يكون (a, b, c) بدائي ⟸ $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$
القاسم المشترك بين a, b, c يساوي واحد
* إذا كان (x, y, z) ثلاثي بدائي فإنه x ⟵ زوجي y, z ⟵ فردي
* إذا كان $(a, b)=1$ وكانت (ab) مربع كامل فإنه a, b مربع كامل
* إذا كان $(a, b)=1$ ⟸ $(a+b, a-b) = 1$ أو 2
* يكون الثلاثي فيثاغوري أولي على صيغة ⟸
$(x, y, z) = (2st, s^2-t^2, s^2+t^2)$
بشرط أن تحقق s, t الشروط الثلاث معاً
① $(s, t)=1$ ② $s>t>0$ ③ أحدهما فردي والآخر زوجي
* إذا كان معلوماً x, y, z ونريد إيجاد s, t من خلال
$z+y=2s^2$ $\quad z-y=2t^2$
مع تحقيق الشروط
* الأعداد التي تصلح أن تكون وتراً في مثلث فيثاغوري بدائي ⟸ $n=s^2+t^2$
مع تحقيق شروط s, t
مجموع مربعين كاملين

2019/11/8 23:48