



اسم المادة : رياضيات منفصلة

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadecclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفير وتجميع **كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة** للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط **هنا**

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء

مصفوفة التجاور Adjacency Matrix:

مصفوفة مستطيلة الشكل تمثل ارتباط الرؤوس ببعضها البعض مباشرة عن طريق الأضلاع في المخطط السهمي.

تضاد السلسلة Antichain:

مجموعة من الأعداد الصحيحة بحيث لا يقسم أي عدد منهما عدداً آخر أو مجموعة جزئية لا تستطيع مقارنة عناصرها بعضها البعض بناءً على ترتيب معين.

تضاد التماثل Antisymmetric:

علاقة ثنائية تحقق الخاصية التالية:

إذا كان الزوج (a, b) ينتمي للعلاقة، وكذلك الزوج (b, a) ينتمي للعلاقة، فإنه ينتج أن $a = b$.

العلاقات الثنائية Binary Relation:

مجموعة جزئية من حاصل ضرب الديكارتية لمجموعتين.

شجرة ثنائية Binary Tree:

شجرة ذات رؤوس حيث يتفرع عن كل رأس على الأكثر فرعان.

الضرب الديكارتية لمجموعتين Cartesian Product:

مجموعة الأزواج المرتبة بحيث ينتمي الإحداثي الأول في الزوج للمجموعة الأولى وينتمي الإحداثي الثاني إلى المجموعة الثانية.

سلسلة Chain:

مجموعة من الأعداد مرتبة تصاعدياً بحيث أن كل عنصر يقسم العنصر الذي بعده، أو مجموعة جزئية مرتبة جزئياً بحيث تستطيع مقارنة أي عنصرين بناءً على عملية الترتيب المذكورة.

الدرجة Degree:

عدد الأضلاع التي تدخل أو تخرج من رأس ما في المخطط السهمي.

المخطط السهمي Digraph:

مخطط ذو أضلاع متجهة.

الضلع Edge:

مخطط (خط) من رأس ما إلى رأس آخر (أو نفس الرأس).

طريقة البحث الوسطى Inorder Traversal:

معالجة الرأس بعد معالجة الفرع الأيسر وقبل معالجة الفرع الأيمن

العروة Loop:

ضلع مغلق من رأس ما إلى نفس الرأس.

العلاقة المرتبة Ordered Relation:

علاقات ثنائية نستطيع تعريف عملية ترتيب بين عناصرها.

المسار Path:

مجموعة مرتبة من الأضلاع تصل بين رأسين في المخطط.

طريقة البحث القبلي Preorder Traversal:

معالجة الرأس قبل معالجة فرعي الشجرة.

طريقة البحث البعدي Post-order Traversal:

معالجة الرأس بعد معالجة الشجرة.

علاقة منعكسة Reflexive Relation:

علاقة ثنائية تحوي كافة الأزواج (a, a) .

علاقة متماثلة Symmetric Relation:

علاقة ثنائية تحقق الخاصية التالية:

"إذا كان الزوج (a, b) ينتمي إلى العلاقة، فإن الزوج (b, a) ينتمي إلى نفس العلاقة".

علاقة متعدية: Transitive Relation:

علاقة ثنائية تحقق الخاصية التالية :

"إذا كان الزوج (a, b) ينتمي إلى العلاقة، والزوج (b, c) ينتمي إلى العلاقة فإن الزوج (a, c) ينتمي للعلاقة نفسها.

شجرة Tree:

مخطط سهمي بدون دوائر مغلقة أو حتى أضلاع على شكل عروة.

الاقتران الثابت Constant Function: اقتران له قيمة ثابتة واحدة لجميع عناصر مجاله.

تركيب الاقترانات Composition of Functions: هو تطبيق الاقتران الثاني على نتيجة الاقتران الأول.

مجال الاقتران Domain: كافة العناصر التي تستطيع تعريف الاقتران عليها.

الاقتران Function: بنية رياضية تتكون من ثلاثة عناصر هي المجال، وقانون الاقتران، ومدى الاقتران. وتحقق الخاصية التالية:

"كل عنصر في المجال يقابله عنصر واحد فقط في المدى".

اقتران الوحدة Identity Function: اقتران f يحقق $f(x) = x$ لكافة عناصر x المنتمية للمجال.

مدى الاقتران Range of Function: كافة العناصر التي تكون صور عناصر المجال للاقتران.

اقتران متكرر Recursive Function: اقتران معرف عن طريق استعماله ثنائية في تعريفه.

الاقتران العكسي Inverse of Function: هو اقتران تكون فيه الصور في الاقتران الأصلي مصادر، وتكون فيه المصادر في الاقتران الأصلي صوراً. وهو اقتران تناظر كذلك، والاقتران الأصلي يجب أن يكون اقتران تناظر أيضاً. حاصل تركيب الاقتران الأصلي مع الاقتران العكسي يعطي اقتران لوحدة.

ولا: خاصية الانعكاس:

تكون العلاقة ع علاقة انعكاسية على المجموعة أ عندما يرتبط كل عنصر من أ مع نفسه في العلاقة ع.

أي أن لكل س \exists أ يجب أن يوجد (س، س) \exists ع. \forall س \exists أ ، (س ، س) \exists ع.

ملاحظة: إذا وجدنا عنصر واحد في أ بحيث أن هذا العنصر لا يرتبط مع نفسه في ع تكون العلاقة ع علاقة غير انعكاسية.

مثال: أ = { 9 ، 8 ، 6 ، 5 } ، ع = { (5 ، 5) ، (6 ، 6) ، (5 ، 8) ، (8 ، 8) ، (9 ، 9) } ، هل العلاقة ع انعكاسية؟.

نبحث بعناصر أ ونفحص إن كان كل عنصر من أ يرتبط مع نفسه في ع.

$5 \in$ أ و $(5 ، 5) \exists$ ع.

$6 \in$ أ و $(6 ، 6) \exists$ ع.

$8 \in$ أ و $(8 ، 8) \exists$ ع.

$9 \in$ أ و $(9 ، 9) \exists$ ع.

إذن كل عنصر من أ يرتبط مع نفسه في ع أي أن لكل س \exists أ يوجد (س ، س) \exists ع. إذن العلاقة ع انعكاسية.

ثانياً: خاصية التماثل:

تكون العلاقة ع **علاقة تماثلية** على المجموعة أ: عندما يوجد (س، ص) \exists ع فإنه يجب ان يوجد (ص، س) \exists ع حيث س، ص \exists أ.

أي أنه إذا وجد زوج مرتب (س، ص) في العلاقة ع يجب أن يوجد (ص، س) في نفس العلاقة ع.

هنا نفحص كل الأزواج المرتبة في ع ولا نفحص عناصر المجموعة أ. ونفحص كل زوج مرتب في ع ونقوم بالبحث في العلاقة ع عن الزوج الناشئ عن تبديل مساقط ذلك الزوج المرتب. وتكون العلاقة تماثلية إذا وجدنا (ص، س) \exists ع لكل (س، ص) \exists ع.

ملاحظة: إذا وجدنا زوج مرتب واحد (س، ص) \exists ع وكان (ص، س) \nexists ع تكون العلاقة ع غير تماثلية.

مثال: ع = {(8، 8)، (3، 8)، (7، 6)، (8، 3)، (5، 4)، (6، 6)، (4، 5)، (6، 7)}

هل العلاقة ع تماثلية؟

نفحص كل الأزواج المرتبة في العلاقة ع ونقوم بتبديل مساقطها ونقوم بالبحث في العلاقة ع عن الزوج الناشئ عن تبديل مساقط ذلك الزوج المرتب.

(7، 6) \in ع أيضاً (6، 7) \exists ع.

(5، 4) \in ع أيضاً (4، 5) \exists ع.

(6، 6) \in ع أيضاً (6، 6) \exists ع

لا داعي لفحص هذا الزوج المرتب لأن تبديل مساقطه يعطي نفس الزوج المرتب (6، 6)

(4، 5) \in ع أيضاً (5، 4) \exists ع.

(3، 8) \in ع أيضاً (8، 3) \exists ع.

(6، 7) \in ع أيضاً (7، 6) \exists ع.

(8، 3) \in ع أيضاً (3، 8) \exists ع.

(8، 8) \in ع أيضاً (8، 8) \exists ع.

إن لكل (س، ص) \exists ع يوجد (ص، س) \exists ع. إذن العلاقة ع علاقة تماثلية.

ثالثاً: خاصية التعدي:

تكون العلاقة ع **علاقة تعدي** على المجموعة أ: إذا وجدنا (ص، ص)، (ص، ل) \exists ع فإنه يجب أن يوجد (س، ل) \exists ع حيث س، ص، ل \exists أ.

أي نفحص كل الأزواج المرتبة الموجودة في ع ولا نفحص عناصر المجموعة أ.

عندما نجد زوج مرتب (س، ص) \exists ع نبحت إذا يوجد زوج مرتب (ص، ل) \exists ع بحيث يكون مسقطه الأول هو نفس المسقط الثاني للزوج المرتب

(س، ص)؛ ثم نبحت عن الزوج المرتب (س، ل) في ع بحيث مسقطه الأول هو المسقط الأول للزوج المرتب (س، ص) ومسقطه الثاني هو المسقط الثاني للزوج المرتب (ص، ل).

ملاحظة: إذا وجدنا (س، ص)، (ص، ل) \exists ع وكان (س، ل) \nexists ع تكون العلاقة ع ليست علاقة تعدي.

مثال: ع = {(1، 2)، (2، 1)، (4، 4)، (3، 4)، (2، 2)، (1، 1)، (7، 3)، (7، 4)، (7، 7)}
{(3، 3)، (7، 7)}

(1، 2)، (2، 2) \in ع أيضاً (1، 1) \exists ع.

(1، 2)، (2، 2) \in ع أيضاً (2، 1) \exists ع

لا داعي لفحص الزوج المرتب الذي مساقطه متساوية لأن الزوج المرتب الناتج الثالث سيعيدنا إلى نفس الزوج المرتب الأول.

(4، 4)، (4، 4) \in ع أيضاً (3، 4) \exists ع

لا داعي لفحص الزوج المرتب الذي مساقطه متساوية لأن الزوج المرتب الناتج الثالث سيعيدنا إلى نفس الزوج المرتب الثاني.

(2، 1)، (1، 1) \in ع أيضاً (2، 2) \exists ع.

(4، 3)، (3، 3) \in ع أيضاً (7، 4) \exists ع.

$(3, (7, 7)) \in E$ ، أيضاً $(3, 3) \in E$.
 $(4, (7, 7)) \in E$ ، أيضاً $(3, 4) \in E$.
 $(7, (3, 3)) \in E$ ، أيضاً $(7, 7) \in E$.
 إذن لكل (s, s) ، $(s, l) \in E$ فإنه يوجد $(s, l) \in E$. إذن العلاقة ع علاقة تعدي.

رابعاً: خاصية التكافؤ:

تكون العلاقة ع **علاقة تكافؤ** على المجموعة أ عندما تكون علاقة انعكاسية و تماثلية و تعدي معاً.

ملاحظات:

- إذا كانت العلاقة ع ليست تعدي تكون العلاقة ع ليست علاقة تكافؤ.
- إذا كانت العلاقة ع ليست تماثل تكون العلاقة ع ليست علاقة تكافؤ.
- إذا كانت العلاقة ع ليست انعكاسية تكون العلاقة ع ليست علاقة تكافؤ.

أمثلة متنوعة:

المثال الأول:

لتكن $A = \{4, 5, 7, 10\}$

هل العلاقات التالية المعرفة على أ لها خواص الانعكاس و التماثل و التعدي و التكافؤ مع بيان الأسباب.

$$R_1 = \{(4, 5), (5, 7), (7, 10), (10, 4), (4, 10), (7, 4)\}$$

نبحث بعناصر أ ونفحص إن كان كل عنصر من أ يرتبط مع نفسه في ع₁.

$$4 \in \text{أ} \text{ و } (4, 4) \in \text{ع}_1$$

$$5 \in \text{أ} \text{ و } (5, 5) \in \text{ع}_1$$

$$7 \in \text{أ} \text{ و } (7, 7) \in \text{ع}_1$$

$$10 \in \text{أ} \text{ و } (10, 10) \in \text{ع}_1$$

إن كل عنصر من أ يرتبط مع نفسه في ع₁ أي أن لكل س \exists أ يوجد (س، س) \in ع₁.
 إذن العلاقة ع₁ انعكاسية.

نفحص كل الأزواج المرتبة في العلاقة ع₁ ونقوم بتبديل مساقطها ونقوم بالبحث في العلاقة ع₁ عن الزوج الناشئ عن تبديل مساقط ذلك الزوج المرتب.

$$(4, 7) \in \text{ع}_1 \text{ لكن } (7, 4) \notin \text{ع}_1$$

إذن يوجد (س، ص) \in ع₁ لكن (ص، س) \notin ع₁. إذن العلاقة ع₁ علاقة غير تماثلية. إذن العلاقة ع₁ ليست علاقة تكافؤ.

$$(4, 7), (7, 7), (7, 4) \in \text{ع}_1 \text{ أيضاً } (7, 4) \in \text{ع}_1$$

إن لكل (س، ص)، (ص، ل) \in ع₁ فإنه يوجد (س، ل) \in ع₁. إذن العلاقة ع₁ علاقة تعدي.

$$\{ (7, 2), (2, 7) \} = \text{ع}_2$$

العلاقة ع₂ ليست انعكاسية لأن $4 \notin \text{أ}$ لكن $(4, 4) \notin \text{ع}_2$.

العلاقة ع₂ ليست علاقة تماثلية لأن $(10, 7) \in \text{ع}_2$ لكن $(7, 10) \notin \text{ع}_2$. إذن العلاقة ع₂ ليست علاقة تكافؤ.

العلاقة ع₂ علاقة تعدي حيث يوجد بها زوج مرتب واحد فقط ولا يوجد زوجين مرتبين مثل (س، ص)، (ص، ل) في ع₂ وهذا لا يخالف شرط التعدي.

$$\{ (4, 3), (5, 4), (5, 7), (7, 5), (7, 10), (10, 7) \} = \text{ع}_3$$

نبحث بعناصر أ ونفحص إن كان كل عنصر من أ يرتبط مع نفسه في ع. 3

$$4 \in \text{أ} \text{ و } (4, 4) \in \text{ع.3}$$

$$5 \in \text{أ} \text{ و } (5, 5) \in \text{ع.3}$$

$$7 \in \text{أ} \text{ و } (7, 7) \in \text{ع.3}$$

$$10 \in \text{أ} \text{ و } (10, 10) \in \text{ع.3}$$

إذن كل عنصر من أ يرتبط مع نفسه في ع 3 أي أن لكل س \exists أ يوجد (س ، س) \in ع 3. إذن العلاقة ع 3 انعكاسية.

العلاقة ع 3 علاقة تماثلية لأن لكل (س ، ص) \exists ع 3 يوجد (ص ، س) \exists ع 3 حيث أن كل زوج مرتب في ع 3 عندما نبدل مساقطه ينتج نفس الزوج المرتب.

$$(4, 4) \in \text{ع} 3 \text{ و } (4, 4) \in \text{ع.3}$$

$$(5, 5) \in \text{ع} 3 \text{ و } (5, 5) \in \text{ع.3}$$

$$(7, 7) \in \text{ع} 3 \text{ و } (7, 7) \in \text{ع.3}$$

$$(10, 10) \in \text{ع} 3 \text{ و } (10, 10) \in \text{ع.3}$$

العلاقة ع 3 علاقة تعدي حيث يوجد بها أزواج مرتبة مساقطها متساوية ولا يوجد زوجين مرتبين مثل (س ، ص) ، (ص ، ل) في ع 3 وهذا لا يخالف شرط التعدي.
العلاقة ع 3 هي علاقة انعكاس وتماثل وتعدي إذن ع 3 هي علاقة تكافؤ.

المثال الثاني: أ = {0، 1، 2، 3، 4، 5، 6،}

والعلاقة ع معرفة على أ حيث $\{(س، ص)\} = \text{ع} \Rightarrow \text{أ} \times \text{أ} : \text{س} + \text{ص} = 5$

هل العلاقة ع لها خواص الانعكاس والتماثل والتعدي والتكافؤ؟

$$\text{ع} = \{(0, 5), (5, 0), (2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1)\}$$

العلاقة ع ليست انعكاسية لأن $6 \in \text{أ}$ لكن $(6, 6) \notin \text{ع}$. إذن العلاقة ع ليست علاقة تكافؤ.

$$(0, 5) \in \text{ع} \text{ وأيضاً } (5, 0) \in \text{ع.}$$

$$(2, 3) \in \text{ع} \text{ وأيضاً } (3, 2) \in \text{ع.}$$

(4 ، 1) ∈ ع وأيضا (4 ، 1) ∉ ع.

العلاقة ع علاقة تماثل لأن لكل زوج مرتب (س ، ص) ∉ ع نجد (ص ، س) ∉ ع.

العلاقة ع ليست تعدي لأنه يوجد (5 ، 0) ، (0 ، 5) ∉ ع لكن (0 ، 0) ∉ ع.

المثال الثالث : أ = { 6 ، 10 ، 9 ، 7 ، 18 ، 6 ، 14 ، 3 ، 5 }.

العلاقة ع معرفة على أ حيث ع = {(س ، ص) | ∃ أ × أ : ص = 2س}.

هل العلاقة ع لها خواص الانعكاس والتماثل والتعدي؟

ع = {(10 ، 5) ، (6 ، 3) ، (14 ، 7) ، (9 ، 18)}.

العلاقة ع ليست انعكاسية لأن 5 ∉ أ لكن (5 ، 5) ∉ ع. إذن العلاقة ع ليست علاقة تكافؤ.

العلاقة ع ليست علاقة تماثل لأن (10 ، 5) ∉ ع لكن (5 ، 10) ∉ ع.

العلاقة ع علاقة تعدي حيث يوجد بها أزواج مرتبة مثل (س ، ص) لكن لا يوجد زوجين

مرتبين مثل (س ، ص) و (ص ، ل) في ع وهذا لا يخالف شرط التعدي.

المثال الرابع : لتكن أ = { 5 ، 4 ، 2 ، 1 }.

العلاقة ع معرفة على أ حيث ع = {(1 ، 1) ، (2 ، 2) ، (5 ، 5) ، (4 ، 4) ، (4 ، 5) ،

(5 ، 4) ، (1 ، 2) ، (2 ، 1)}.

هل العلاقة ع لها خواص الانعكاس والتماثل والتعدي والتكافؤ؟

نبحث بعناصر أ ونفحص إن كان كل عنصر من أ يرتبط مع نفسه في ع.

1 ∈ أ و (1 ، 1) ∉ ع.

2 ∈ أ و (2 ، 2) ∉ ع.

4 ∈ أ و (4 ، 4) ∉ ع.

5 ∈ أ و (5 ، 5) ∉ ع.

إذن كل عنصر من أ يرتبط مع نفسه في ع أي أن لكل س ∉ أ يوجد (س ، س) ∉ ع. إذن

العلاقة ع انعكاسية.

نفحص كل الأزواج المرتبة في العلاقة ع ونقوم بتبديل مساقطها ونقوم بالبحث في العلاقة ع عن الزوج الناشيء عن تبديل مساقط ذلك الزوج المرتب.

$$(5) ، (4) \in (4) \text{ ع أيضاً } (5 ، 4) \ni \text{ع.}$$

$$(4) ، (5) \in (5) \text{ ع أيضاً } (4 ، 5) \ni \text{ع.}$$

$$(1) ، (2) \in (2) \text{ ع أيضاً } (1 ، 2) \ni \text{ع.}$$

$$(2) ، (1) \in (1) \text{ ع أيضاً } (2 ، 1) \ni \text{ع.}$$

إذن لكل (س ، ص) \ni ع يوجد (ص ، س) \ni ع. إذن العلاقة ع علاقة تماثلية.

$$(5) ، (4 ، 4) ، (5) \in (5) \text{ ع أيضاً } (5 ، 5) \ni \text{ع.}$$

$$(4) ، (5 ، 5) ، (4) \in (4) \text{ ع أيضاً } (4 ، 4) \ni \text{ع.}$$

$$(2) ، (1 ، 1) ، (2) \in (2) \text{ ع أيضاً } (2 ، 2) \ni \text{ع.}$$

$$(1) ، (2 ، 2) ، (1) \in (1) \text{ ع أيضاً } (1 ، 1) \ni \text{ع.}$$

إذن لكل (س ، ص) ، (ص ، ل) \ni ع يوجد (س ، ل) \ni ع. إذن العلاقة ع علاقة تعدي.

ع علاقة انعكاسية وتعدي وتماثل. إذن العلاقة ع هي علاقة تكافؤ.

المثال الخامس: لتكن $A = \{1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5\}$.

العلاقة ع معرفة على أ حيث $E = \{(1 ، 1) ، (2 ، 5) ، (2 ، 2) ، (2 ، 2) ، (5 ، 2) ، (4 ، 3) ، (5 ، 4) ، (5 ، 3) ، (2 ، 4) ، (2 ، 3) ، (5 ، 5)\}$. هل العلاقة ع لها خواص الانعكاس والتماثل والتعدي والتكافؤ؟

العلاقة ع ليست انعكاسية لأن $3 \ni$ أ لكن $(3 ، 3) \notin$ ع. إذن العلاقة ع ليست علاقة تكافؤ.

نفحص كل الأزواج المرتبة في العلاقة ع ونقوم بتبديل مساقطها ونقوم بالبحث في العلاقة ع عن الزوج الناشيء عن تبديل مساقط ذلك الزوج المرتب.

$$(3) ، (4) \in (4) \text{ لكن } (3 ، 4) \notin \text{ع. إذن العلاقة ع ليست علاقة تماثلية.}$$

$$(5) ، (2 ، 2) ، (5) \in (5) \text{ ع أيضاً } (5 ، 5) \ni \text{ع.}$$

$$(2) ، (5 ، 5) ، (2) \in (2) \text{ ع أيضاً } (2 ، 2) \ni \text{ع.}$$

$(3, (4, 4), \in 2) \text{ أيضاً } (2, 3) \ni \text{ع.}$

$(3, (4, 4), \in 5) \text{ أيضاً } (5, 3) \ni \text{ع.}$

$(4, (5, 5), \in 2) \text{ أيضاً } (2, 4) \ni \text{ع.}$

$(3, (5, 5), \in 2) \text{ أيضاً } (2, 3) \ni \text{ع.}$

$(4, (2, 2), \in 5) \text{ أيضاً } (5, 4) \ni \text{ع.}$

$(3, (2, 2), \in 5) \text{ أيضاً } (5, 3) \ni \text{ع.}$

إذن لكل (س ، ص) ، (ل ، ص) \ni ع يوجد (س ، ل) \ni ع. إذن العلاقة ع علاقة تعدي.