اسم المادة : جبر خطي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط **هنا**

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء

الوحدة الثالثة ← المجموعات المولدة

* تعريف التركيبة الخطية

مثال 14

$V = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$

أعداد حقيقية

$(0,1,4) = c_1(1,1,0) + c_2(1,-1,1) + c_3(1,0,2)$

$0 = c_1 + c_2 + c_3$

$1 = c_1 - c_2 + 0$

$4 = 0 + c_2 + 2c_3$

نحولها لمصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{للوصول إلى مصفوفة الوحدة}]{\text{عمليات صف بسيطة}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$c_1 = 1$

$c_2 = -2$

$c_3 = 3$ ∴ لو وصلنا للنظام ← أعداد حقيقية ←

∴ يمكن كتابة المتجه على شكل تركيبة خطية

$V = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$

التركيبة ← $V = 1u_1 - 2u_2 + 3u_3$

ام المجد

2019/7/13 23:30

تعريف 9

اذا كانت $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = S$ مجموعة جزئية من فضاء متجهي V فكل عبارة على الشكل $\sum c_i v_i = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ تركيبة خطية ويمكن كتابتها بالرمز $L(S)$

نظرية 5

اذا كانت S مجموعة جزئية من فضاء متجهي V فإن $L(S)$ هي أصغر فضاء يحتوي على S بمعنى أن $L(S)$ هي الفضاء الجزئي الذي يحتوي S

نظرية 6

اذا كانت $v_1, v_2, \dots, v_n$ متجهات في فضاء متجهي فإن الفضاء الذي تولده هذه المتجهات لا يتغير اذا أجرينا عليه أي من عمليات الصف البسيط

ام المجد

نظرية (7)

لكل مجموعة A من المتجهات في R^m توجد مصفوفة مكونة صفوفها من عناصر A هي $[A]$ فإذا كانت S, T مجموعتين من المتجهات في R^m واذا أمكن الحصول على المجموعة المصفوفة $[S]$ من المصفوفة $[T]$ من عمليات الصف البسيط

$L(S) = L(T)$

2019/7/13 23:31

مثال (18) برهن أنه S تولد الفضاء R^3

$S = \{(1,3,2)(4,12,9),(0,1,1)\}$

(1) نكتب مصفوفة مكونة من الصفوف المكونة من المتجهات المعطاة

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 14 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{بسيط}]{\text{عمليات صف}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

بما أننا وصلنا لمصفوفة الوحدة بعد إجراء عمليات الصف البسيط
فإن S مجموعة مولدة للفضاء R^3

مثال (19) $S = \{(1,0,3,2)\ (0,1,0,1),(0,1,0,8)\ (5,6,15,9)\}$
برهن أنه S لا تولد

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 6 & 15 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{بسيط}]{\text{عمليات صف}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ليست مصفوفة وحدة ∴ ليست مجموعة مولدة للفضاء

★ B ← القاعدة للفضاء
الصفوف التي نتجت من عمليات الصف البسيط
$B = \{(1,0,3,0)\ (0,1,0,0)\ (0,0,0,1)\ (0,0,0,0)\}$

2019/7/13 23:31

مثال 20

$1+x,\ x+2x^2,\ 3x^2+4x^3,\ 5x^3-x$

نكتب المصفوفة على الشكل

$$\begin{array}{cccc} \text{الثابت} & x & x^2 & x^3 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{صف}]{\text{عمليات}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نجد مصفوفة وحدة ∴ مجموعة مولدة

$B=\{1, x, x^2, x^3\}$

ام المجد

2019/7/13 23:31

* الاستقلال الخطي

تكون المتجهات مرتبطة خطياً اذا أمكن كتابتها على شكل تركيبة خطية (نحل النظام) واذا نتجت أصفار ← مرتبطة خطياً

لكن اذا وجد عدد على الأقل ليس صفري ← ليست مرتبطة خطياً

* اذا وجد علاقة بين متجهين (ضرب بعدد حقيقي) يكونان مرتبطان خطياً

مثل $W=(-4,-2,12)$ $\quad V=(2,1,-6)$

مرتبطان ← $W=-2V$

* في حالة أكثر من متجهين

اذا أمكن كتابة المتجهات $V_1, V_2, \dots, V_n$

على صورة $c_1V_1+c_2V_2+\dots+c_nV_n=0$

تكون مرتبطة خطياً

مثال 2 $\quad V_1=(2,1,-2)$ $\quad V_2=(3,4,5)$ $\quad V_3=(0,5,16)$

$$c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3=0$$

$$c_1(2,1,-2)+c_2(3,4,5)+c_3(0,5,16)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned} 2c_1+3c_2+0c_3&=0\\ 1c_1+4c_2+5c_3&=0\\ -2c_1+5c_2+16c_3&=0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 5 & 0\\ -2 & 5 & 16 & 0 \end{array}\right]$$

تكون المتجهات أعمدة للمصفوفة (لمعرفة اذا كانت مرتبطة ام لا

ام المجد

2019/7/13 23:31

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 16 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

يوجد عدد لانهائي من الحلول

$c_1 - 3c_3 = 0 \Rightarrow c_1 - 3t = 0 \Rightarrow c_1 = 3t$

$c_2 + 2c_3 = 0 \qquad c_2 + 2t = 0 \qquad c_2 = -2t$

نفرض $c_3 = t$

$$\begin{bmatrix} 3t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} \qquad t \in R$$

تكون مستقلة عندما $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

تكون مرتبطة $c_1 \neq 0$ أو $c_2 \neq 0$ أو $c_3 \neq 0$

∴ مرتبطة خطياً

* اذا بعد اجراء عمليات الصف البسيط وصلنا لمصفوفة الوحدة فإنها مستقلة خطياً

* لمعرفة مستقلة أم مرتبطة

① نكتب المتجهات أعمدة للمصفوفة والجزء الايمن أصفار

② نجري عمليات الصف البسيط

③ اذا وصلنا الى مصفوفة الوحدة ← مستقلة

اذا ليست " " ← مرتبطة

ام الماجد

2019/7/13 23:31

مثال 3

$$\begin{array}{cccc} \text{ثوابت} & t & t^2 & t^3 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{صف البسط}]{\text{عمليات}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الرتبة 2 عدد كثيرات الحدود = 3

$3 > 2$ ∴ مرتبطة

ام المجد

2019/7/13 23:37

* الأساس والبعد

تسمى المجموعة E أساساً (Basis) للفضاء الجزئي V
اذا كانت E مستقلة خطياً وتولد V
(مستقلة ، مولدة)
أعمدة ↑ صفوف ↑

أهم المهم

دائماً مصفوفة الوحدة تشكل أساساً لفضاء خطي R^n

نظرية (18)

* اذا كان مجموعتين من المتجهات الأولى عدد m من المتجهات والثانية عدد n من المتجهات وكانت $m > n$ فتكون المجموعة الأكبر مرتبطة خطياً

* المجموعة الأكبر مستقلة ← المجموعة الأصغر مستقلة

* الأساس هو الصفوف غير الصفرية في المصفوفة N الناتجة من عمليات الصف البسيط على المصفوفة M (المتجهات)

* البعد نفس الرتبة = عدد الصفوف غير الصفرية بعد اجراء عمليات الصف البسيط (عدد المتجهات غير الصفرية)

مثال (1)

$$M = \begin{array}{cccc} 1 & t & t^2 & t^3 \\ \end{array}$$
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{بسيط}]{\text{عمليات صف}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

لا يوجد صفوف صفرية
∴ البعد = 3
الأساس ← $1+t \,,\, -t+t^2 \,,\, -t^2+t^3$

2019/7/17 23:48

لإيجاد الأساس والبعد للصفوف نعمل عمليات الصف البسيط للمصفوفة الأساسية ونجد البعد والأساس للصفوف

لإيجاد الأساس والبعد للأعمدة نأخذ منقول المصفوفة الأصلية ونعمل عمليات الصف البسيط ونجد البعد والأساس للأعمدة

بعد الصفوف = بعد الأعمدة

البعد = عدد المجاهيل - الرتبة ⟸ البعد = ٨ - ٣

مثال (46)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة N ليست مستقلة
نضيفها لتصبح قريبة لمصفوفة الوحدة (الصف الثاني) (0,1,0,0)
ونضيفه للمتجهات الأصلية لتصبح

$C = \{(1,-1,2,1)\ (0,1,0,0)\ (1\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ )$

$C\ \{(1,-1,2,1)\ (1,1,1,-2)\ (1,-1,5,6)\ (0,1,0,0)\}$

ام المجد

2019/7/17 23:48

الوحدة الرابعة التحويلات الخطية

* التحويل (مثل المشتقة والتكامل) بشروطه

① يتوزع على الجمع $T(u+v) = T(u) + T(v)$

② يخرج عدد ثابت من الاقتران $T(av) = a\,T(v)$

مثال 2 $T: R^2 \longrightarrow R^2$ $\quad T(x,y) = (x, y+1)$

هل T تحويل خطي

$u = (u_1, u_2)$ $\qquad v = (v_1, v_2)$

① $T(u+v) \overset{?}{=} T(u) + T(v)$

$T(u_1+v_1, u_2+v_2) \overset{?}{=} T(u_1, u_2) + T(v_1, v_2)$

$T([u_1+v_1], [u_2+v_2+1]) \overset{?}{=} T(u_1, u_2+1) + T(v_1, v_2+1)$

$(u_1+v_1, u_2+v_2+1) \neq (u_1+v_1, u_2+v_2+2)$

ليس تحويل خطي

مثال 3 $T: R^2 \longrightarrow R^2$ $\quad T(x,y) = (x, -y)$

(تحويل خطي ⟸ تحويل انعكاسي في R^2).

تحويل خطي صفري $T(v) = 0$

تحويل خطي محايد $I(v) = v$

* ام المجد

مثال 6

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad T : R^2 \to R^3$$

$$T(x) = A X$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \\ 3x \end{bmatrix}$$

أوجد

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-0 \\ 1+0 \\ 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أم الطرحين

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1+1 \\ 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ مصفوفة التحويل الخطي الدوراني

مثال 8

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$T(x) = A X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1-2 \\ -1+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2019/7/17 23:49

* اذا كان التحويل خطي ← صورة الصفر ← صفر لكن العكس ليس صحيح

اذا كان $T: V \to W$ تحويلا خطيا فإن

* $T(u-v) = T(u) - T(v)$ / $T(-v) = -T(v)$ / $T(0) = 0$

$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$

* صورة سالب أي متجه في المجال هي سالب صورته في المجال المقابل

* صورة فرق متجهين في المجال هي فرق صورتيهما في المجال المقابل

* صورة التركيب الخطي في المجال هي تركيب خطي للصور في المجال المقابل

* نواة ومدى التحويل الخطي

نكتب النظام على صورة Ax

وحله عبارة عن النواة

* التحويل الصفري

$T_0: V \to W$

$T_0(V) = 0$

$T(V) = 0$

كل V صورته صفر

النواة المجال $= V$

المدى $= 0$

* التحويل المحايد

$T(I(v)) = V \to V$

$T(v) = v$

$T(0) = 0$

النواة $= 0$

المدى $= V$

2019/7/17 23:49

مثال ١٩ أوجد النواة والمدى للتحويل $T: R^3 \to R^3$

$T(x,y,z) = (x+y+2z,\ x+z,\ 2x+y+3z)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad AX = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

نجري عمليات الصف البسيط وينتج $\Leftarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

النواة = حل النظام

$$x - y - z = 0$$

$$\ker(T)\ \{a(-1,-1,1) : a \in R\}$$

بعد النواة = عدد المتجهات = ١

المدى: نأخذ المنقول (بدون الصفري)

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نجري عليها عمليات الصف البسيط

وينتج $\Leftarrow$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rang}(T) = \{a(1,0,1) + b(0,1,1) : a, b \in R\}$$

بعد المدى = عدد المتجهات = 2

بعد النواة + بعد المدى = بعد المجال

$$3 = 2 + 1$$

2019/7/17 23:49

14

* العمليات الجبرية على التحويلات الخطية

[1] لجمع تحويلات يجب أن يكون لهما نفس المجال ونفس المجال المقابل

[2] وكذلك الطرح

[3] ضرب التحويلات $T_1 : V \to U$

$T_2 : U \to W$

$T_2 T_1 (v) = T_2(T_1(v))$ (نفس تركيب التحويلات)

$T_2 \circ T_1 \Rightarrow T_2 T_1$

مثال (16)

$T_1 : R_2 \to R_3 \quad T_2 : R_3 \to R_3$

$T_1(x, y) = (x - y , x + y , 5x)$

$T_2(x, y, z) = 2x , -y , 3z)$

اوجد $T_2 T_1 \Rightarrow T_2 \circ T_1 = T_2(T_1)$

$T_2(T_1) = T_2(T_1(x, y)) = T_2(\overset{x}{\overbrace{x-y}} , \overset{y}{\overbrace{x+y}} , \overset{z}{\overbrace{5x}})$

$T_2(x, y, z) \Rightarrow (2(x-y) , -(x+y) , 3(5x))$

$= (2x - 2y , -x - y , 15x)$

* ضرب التحويلات ليس تبديلي

ام المجد

15

* التحويلات الخطية والمصفوفات

مثال 18

س:

$T(1,1,1) =$

أوجد $T(x,y,z)$

$V = aV_1 + bV_2 + cV_3$

$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$

$x = a + b + c$
$y = a + b$
$z = a \Rightarrow \boxed{a = z}$

$y = a + b$
$z + b$
$\boxed{b = y - z}$

$x = a + b + z$
$x = z + y - z + c$
$\boxed{c = x - y}$

$T(x,y,z) = aT(1,1,1) + bT(1,1,0) + cT(1,0,0)$

$= z\,(1,0) + (y - z)(2,-1) + (x - y)(4,3)$

$= [z + 2y - 2z + 4x - 4y],\ 0(-y + z) + 3(x - y)$

$= \left(\overbrace{4x - 2y - z}^{\text{مرأول}},\ \overbrace{3x + 3y + z}^{\text{مرثاني}}\right)$

① نجد قيم a, b, c

② نعوض في صورة التحويل ونعوض قيم a, b, c وصورة $T(\ \ )$

ونجري العمليات الحسابية لينتج فيه $(\ \ ,\ \ )$

$T(\overset{x}{2}, \overset{y}{-3}, \overset{z}{5}) = \left(4(2) - 2(-3) - (5),\ 3(2) - 3(-3),\ 5\right)$

2019/7/17 23:49

مثال (20)

$T : R^2 \longrightarrow R^2$

$T(x,y) = (x+y, -2x+4y)$

$B \{V_1 = (1,1), V_2 = (1,2)\}$ أساس لـ R^2

أوجد $[T]_B$

① $TV_1 = T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+1\\-2(1)+4(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \boxed{2V_1} + 0V_2$

② $TV_2 = T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2\\-2(1)+4(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = 0V_1 + 3V_2$

③ $[T]_B = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

للتحقق باستخدام نظرية (8)

يجب التأكد من صحة ⇐

$V = (1,0)$

$[T]_B [V]_B = [T(v)]_B$

ام المجد

$v = (1,0)$

$T(v) = T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

$(1,-2) = a_1V_1 + a_2V_2$

$= a_1(1,1) + a_2(1,2)$

$$-\begin{bmatrix}1 = a_1 + a_2\\-2 = a_1 + 2a_2\end{bmatrix}$$

$\boxed{-3 = a_2}$

$1 = a_1 + a_2$

$1 = a_1 + -3$

$+3 \quad +3$

$\boxed{a_1 = 4}$

$[T(v)]_B = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$

2019/7/17 23:49

حساب $[V]_B$

$V = a_1 V_1 + a_2 V_2$

$(1,0) = a_1(1,1) + a_2(1,2)$

$$-\begin{bmatrix} 1 = \cancel{a_1} + a_2 \\ 0 = a_1 + 2a_2 \end{bmatrix}$$

$1 = -a_2$

$\boxed{\begin{matrix} a_2 = -1 \\ a_1 = 2 \end{matrix}}$

$$[V]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

هل تحقق النظرية

$$[T]_B [V]_B \overset{??}{=} [T(V)]_B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{??}{=} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

تحقق النظرية (8).

ام المجد

2019/7/17 23:49

18

* العلاقة بين العمليات الجبرية على المصفوفات والتحويلات الخطية

مثال 22

$T_1(x,y) = (x, -y, x-y)$ $T_2(x,y) = x, -y, x+3y)$

$$[T_1] = \begin{array}{c} x \quad y \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الحد ①} \\ \text{الحد ②} \\ \text{الحد ③} \end{array}_{3\times 2}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$T_1 : R^2 \longrightarrow R^{③}$ ينتج $[\quad]_{3\times 2}$

$T_2 : R^2 \longrightarrow R_3 \longrightarrow [\quad]_{3\times 2}$

* المصفوفات الممثلة للتحويل الخطي في أساسات مختلفة

نظرية (11)

$M_2 = P^{-1} M_1 P$

$P M_2 = \underbrace{(P P^{-1})}_{\text{عنصر محايد}} M_1 P$ نضرب الطرفين بـ P

$\boxed{P M_2 = M_1 P}$

مثال 25 $T : R^3 \longrightarrow R^3$ $T(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$

الأساس $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

الأساس 2 S : $v_1 = (1,-1,0)$ $v_2 = (1,0,-1)$ $v_3 = (0,1,1)$

$$M_1 = [T]_E \text{ مصفوفة التحويل } = \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

معادلات التحويل

2019/7/17 23:49

$T(v_1) = T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = (0, -1, 1)$ $\quad T(v_1) = a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots$

$(0, -1, 1) = a_1(1, -1, 0) + a_2(1, 0, -1) + a_3(0, 1, 1)$

مهم جداً
ام الحجر

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1 + a_2 \\ -1 &= -a_1 + a_3 \\ 1 &= -a_2 + a_3 \end{aligned}\right]$$ نحل المعادلات لايجاد a_1, a_2, a_3

$a_1 = 1 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = 0$

هذه القيم العمود الأول في M_2

ثم نجد $T(v_2)$ ونجد القيم a_1, a_2, a_3 وتكون القيم للعمود الثاني في M_2

$a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0$

ثم $T(v_3) \Leftarrow a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2$

$$M_2 = \begin{array}{ccc} T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{array}$$
$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نجد $P \Leftarrow$ وهي مصفوفة متجهات S

$$\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

نتأكد من الحل ومن تحقق النظرية

$$PM_2 \overset{??}{=} M_1 P$$

لايجاد $M_1 \leftarrow$ مصفوفة من معاملات التحويل

$M_2 \leftarrow$ مصفوفة تكون الأعمدة فيها $T(v_1)\ T(v_2)\ T(v_3)$

$P \leftarrow$ " " " " $v_1 \quad v_2 \quad v_3$

2019/7/17 23:50

محاضرة 5

20

أم المجد

* الوحدة الخامسة
القيم المميزة والمتجهات المميزة

* تعريف القيمة المميزة
اذا كانت A مصفوفة من الحجم n x n وكان X متجه غير صفري في R^n بحيث ان $AX = \lambda X$ حيث λ عدد قياسي
تسمى λ ← قيمة مميزة
X ← متجه مميز مرتبط بـ λ

المعادلة المميزة ←

محددة $\det(A - \lambda I) = 0$

محددة $\det(\lambda I - A) = 0$

المتجه المميز المرتبط بـ λ_1 هو X_1 ←

$(\lambda_1 I - A) X_1 = 0$

مثال 3 اوجد القيمة المميزة

$$A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$I \qquad A$

$$\lambda I - A \Rightarrow \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda - 0 \end{bmatrix}$$

وهي نفسها ← الارقام $\lambda -$ على القطر الرئيسي وبقية الارقام نعكس اشارتها

2019/7/22 00:04

المحددة $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$

$= (\lambda-3)\lambda - (-2\times 1) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 , \lambda = 2$

القيم المميزة ← 1, 2

مثال 4 عندما تكون المحددة ليس لها جذور حقيقية ← ليس لها قيم مميزة

مثال 5 اوجد المتجهات المميزة المرتبطة بالقيم المميزة 2 ، 1

عندما $\lambda_1 = 1 \Rightarrow (\lambda_1 I - A) X_1 = 0$

$\lambda_1 I - A$

$\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X_1 = 0$ نظام متجانس نوجد حله

$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{عمليات صف بسيطة}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ يوجد عدد لانهائي من الحلول

$x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

نفرض $x = t$

$y = -t \qquad X_1 = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

المتجه المميز هو $(1, -1)$

2019/7/22 00:05

عند $\lambda_2 = 2$ $(\lambda_2 I - A)X_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} X_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X_2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-1R_1 + R_2]{-1R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

عدد لانهائي من الحلول

$x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$

$x = -2\cancel{y}$

نفرض $y = t$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المتجه المميز هو $(-2, 1)$

ام المجد

2019/7/22 00:05

* التشابه بين المصفوفات
* اذا كان A , B مصفوفتين مربعتين من نفس الحجم فإننا نقول أن B تشابه A اذا وجدت مصفوفة مربعة P لها نفس النظير
$B = P^{-1} A P$

* المصفوفات المربعة المتشابهة لها نفس المحدد
* " " " لها نفس كثيرة الحدود المميزة
* " " " " القيم المميزة

* لكن عكس السابق ليس صحيحاً

* تعريف (2)
نقول أن المصفوفة المربعة A قابلة للتحويل إلى مصفوفة قطرية ⟵ اذا وجد مصفوفة P لها نظير P^{-1} بحيث أن ⟵ $P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية
$P^{-1} A P = D$
* ليست كل مصفوفة مربعة تشابه مصفوفة قطرية

اذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$, وكان لها n من القيم المميزة المختلفة ⟵ A تشابه مصفوفة قطرية

* اذا نتج لدينا قيمة مميزة مكررة فيجب أن نفرض وجود عددين حقيقيين $t, s \in R$ فقد ينتج عنها متجها مميزان مختلفان

2019/7/22 00:05

تدريب ⑤ المصفوفة A تشابه مصفوفة قطرية D

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد P

أثبت ⇐ $P^{-1}AP = D$

للتسهيل نضرب الطرفين بـ P ⇐ $P(P^{-1}AP) = PD$

نثبت صحتها ⇐ $AP = PD$

① حسب القيم المميزة

نحسب المحددة

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda\left[(\lambda-2)(\lambda-3)\right] - 0) - 0(-1(\lambda-3)-1) + 2(-1(0) + 1(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda((\lambda-2)(\lambda-3) + 2(\lambda-2) = 0$$

$$[\lambda-2][\lambda(\lambda-3)+2] = 0$$

$$\lambda-2(\lambda^2-3\lambda+2) = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

$\lambda = 2, 2, 1$ القيم المميزة

② نجد المتجهات المميزة

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow \{(0,1,0), (-1,0,1)\}$$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow (-2,1,1)$$

أم المجد

2019/7/22 00:05

يوجد ثلاث متجهات مميزة مختلفة : تشابه مصفوفة قطرية D

القطر ← القيم المميزة

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

المتجهات المميزة (أعمدة)

$$P \quad \cancel{\begin{matrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{matrix}}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ نحسب ←

$$PA = PD \qquad AP \overset{?}{=} PD$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \overset{??}{=}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{??}{=} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 2 \end{bmatrix}$$

2019/7/22 00:06

* ايجاد مصفوفة التشابه القطرية ومصفوفة P

1 نكتب المصفوفة A

2 نكتب A بدلالة λ (عن طريق جعل الأرقام التي على القطر (الرقم $-\lambda$) ثم نعكس اشارة بقية ارقام المصفوفة لنحصل على مصفوفة $(\lambda I - A)$

3 نحسب محددة $|\lambda I - A|$

4 نحصل على قيم λ وهي القيم المميزة

5 نأخذ كل قيمة مميزة ونعوضها في $(\lambda I - A)$ للحصول على المتجه المميز (باستخدام عمليات الصف البسيط)

6 نكون المصفوفة D (والتي يتكون قطرها من القيم المميزة والبقية أصفار).

7. نكون المصفوفة P (أعمدتها المتجهات المميزة)

* اذا أراد أن نثبت صحة ⇐ $P^{-1}AP = D$

نضرب المعادلة بـ P $P(P^{-1}AP = D)$

وتصبح ⇐

$AP = DP$

ونعوض المصفوفات الثلاث A, P, D

ونتأكد من صحة الحل

انتهت مادة النهائي

ام المجد

2019/7/22 00:06