# بسم الله الرحمن الرحيم

# الصف الافتراضي السابع لمقرر

# تفاضل وتكامل 2

# مضروبات لاجرانج وطريقة الاختزال والتكامل المتعدد

الأحد 2020-7-19

د. أحمد الكحلوت

# مضروبات لاجرانج

هناك بعض المسائل التي يراد فيها إيجاد القيم القصوى لاقتران بمتغيرين أو ثلاثة وتحت قيود معينة ، وللتعامل مع مثل هذه المسائل اقترح العالم جوزيف لاجرانج طريقة عرفت بطريقة مضروبات لاجرانج ويمكن تلخيص هذه الطريقة بما يلي :

إذا أردنا أن نجد القيم القصوى للاقتران $f(x,y,z)$ بحيث يكون $g(x,y,z)=0$ فإننا نعرف اقتراناً جديداً بالعلاقة : $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ .

وتتحول المسألة إلى إيجاد النقط الحرجة للاقتران $F$ ويتم ذلك عن طريق حل المعادلات

$F_x=0,F_y=0,F_z=0,F_\lambda=0$ حيث يسمى $\lambda$ مضروب لاجرانج .

ويمكن تعميم طريقة مضروبات لاجرانج كالتالي :

فمثلاً لايجاد القيم القصوى للاقتران $f(x,y,z)$ بحيث يكون $g_1(x,y,z)=0$ و $g_2(x,y,z)=0$ نعرف الاقتران F كما يلي :

$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g_1(x,y,z)-\mu g_2(x,y,z)$ ولايجاد القيم القصوى نحل المعادلات

$F_x=0,F_y=0,F_z=0,F_\lambda=0,F_\mu=0$ ويسمى العددان $\lambda,\mu$ مضروبي لاجرانج .

مثال :**باستخدام مضاعفات لاجرانج أوجد القيم القصوى للاقتران $f(x,y)=x+y-2$ على الدائرة $x^2+y^2=8$**

الحل :

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x+y-2-\lambda\left(x^2+y^2-8\right)$$

$$F_x=1-2x\lambda=0\Rightarrow x=\frac{1}{2\lambda}$$

$$F_y=1-2y\lambda=0\Rightarrow y=\frac{1}{2\lambda}$$

$$F_\lambda=-x^2-y^2+8=0$$

$$\therefore -\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2-\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2+8=0$$

$$-\frac{1}{2\lambda^2}+8=0\Rightarrow\lambda=\pm\frac{1}{4}$$

$$\therefore x=\pm 2,\ y=\pm 2$$

**القيمة الصغرى للاقتران عند النقطة (-2,-2) وتساوي -6 و القيمة العظمى للاقتران عند النقطة (2,2) وتساوي 2 .**

# طريقة الاختزال :

في هذه الطريقة نقوم باختزال الاقتران ذو ثلاث متغيرات باقتران بمتغيرين ، والاقتران ذو المتغيرين باقتران بمتغير واحد لبعض المسائل .

مثال :

استخدم طريقة الاختزال لايجاد القيم القصوى للاقتران $f(x,y)=x^2y^2$ بحيث يكون $x^2+y^2=1$ .

الحل:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2$$

$$\therefore f(x)=x^2\left(1-x^2\right)=x^2-x^4$$

$$f'(x)=2x-4x^3=2x(1-2x^2)=0$$

$$\therefore x=0 \quad or \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\pm 1 \quad or \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

| القيم الحرجة | قيمة الاقتران |
|---|---|
| $(0,\pm1)$ | 0 |
| $(0,\pm1/\sqrt{2})$ | 0 |
| $(\pm1/\sqrt{2},\pm1)$ | 1/2 |
| $(\pm1/\sqrt{2},\pm1/\sqrt{2})$ | 1/4 |

القيمة العظمى ½ والقيمة الصغرى 0 .

# التفاضلات المضبوطة :

تعرف التفاضلة للاقتران f(x,y,z) بالعلاقة :

$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz$

مثال:

قرب المقدار التالي باستخدام التفاضلات : $\sqrt{(2.79)^2+(3.85)^2}$

الحل :

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{(2.79)^2+(3.85)^2} = f(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

$$x=3, y=4, \Delta x=-.21, \Delta y=-.15$$

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{5}(-.21)+\frac{4}{5}(-.15)$$

$$=-.126-.12=-.246$$

$$\therefore \sqrt{(2.79)^2+(3.85)^2} = f(x,y)+df = 5-.246 = 5.246 = 4.754$$

تعريف : يسمى المقدار $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ تفاضلة في المتغيرين $x,y$ .

نظرية : تكون الصيغة التفاضلية : $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ تفاضلة مضبوطة إذا وفقط إذا

كان: $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ شريطة أن تكون للاقترانات $N(x,y),M(x,y)$ مشتقات جزئية متصلة.

مثال : بين فيما إذا كانت الصيغة التالية تفاضلة مضبوطة أم لا :

$y\cos x dx+(y^2+\sin x)dy$

الحل:

$$M(x,y)=y\cos x, N(x,y)=y^2+\sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x, \frac{\partial N}{\partial x}=\cos x$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

إذاً التفاضلة مضبوطة .

# التكامل المزدوج:

سندرس في هذا القسم تكامل اقتران f(x,y) في متغيرين على منطقة R في المستوى xy كعملية عكسية للاشتقاق الجزئي ، ولنبدأ بتوضيح ذلك لاقتران مثل f(x,y) معرفاً على منطقة مستطيلة الشكل R معرفة بالمتباينتين $c<y<d, a<x<b$ كما في الشكل التالي :

ويرمز للتكامل $\int_{a}^{b} f(x,y)dx$ إلى تكامل محدود جزئي بالنسبة إلى x .

وبحسب هذا التكامل بتثبيت y واجراء التكامل بالنسبة إلى x . بينما يرمز إلى $\int_{c}^{d} f(x,y)dy$

إلى تكامل محدود جزئي بالنسبة إلى y ، ويحسب بتثبيت x واجراء التكامل بالنسبة إلى y .

مثال: جد قيمة التكاملات التالية :

$$\int_1^2 y^2 \sin x dy, \int_0^{\pi} y^2 \sin x dx$$

الحل:

$$\int_1^2 y^2 \sin x dy = \frac{y^3}{3} \sin x \bigg|_1^2 = \frac{7}{3} \sin x$$

$$\int_0^{\pi} y^2 \sin x dx = -y^2 \cos x \bigg|_0^{\pi} = -y^2 (\cos \pi - \cos 0) = y^2$$

يسمى كل من
$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$
$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

بالتكامل الثنائي (المكرر) للاقتران f(x,y) على المنطقة R .

مثال : جد قيمة التكاملات التالية :

١- $$\int_0^1\int_1^2\left(x+y^2\right)dxdy$$

٢- $$\int_1^2\int_0^1\left(x+y^2\right)dydx$$

الحل:١-

$$\int_0^1\int_1^2\left(x+y^2\right)dxdy=\int_0^1\left[\int_1^2\left(x+y^2\right)dx\right]dy=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}+xy^2\right]\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$$

$$=\int_0^1\left[\left(2+2y^2\right)-\left(\frac{1}{2}+y^2\right)\right]dy=\int_0^1\left(\frac{3}{2}+y^2\right)dy=\left[\frac{3}{2}y+\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$$

٢-

$$\int_1^2\int_0^1\left(x+y^2\right)dydx=\int_1^2\left[xy+\frac{y^3}{3}\right]_0^1dx=\int_1^2\left(x+\frac{1}{3}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x\right]_1^2$$

$$=\left(2+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$$

من المثال السابق نلاحظ أن :

$$\int_0^1 \int_1^2 \left(x + y^2\right) dxdy = \int_1^2 \int_0^1 \left(x + y^2\right) dydx = \frac{11}{6}$$

وبصورة عامة ، إذا كانت a,b,c,d أعداداً حقيقية معطاة فإن :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dxdy$$

تسمى هذه القيمة المشتركة التكامل المزدوج للاقتران f(x,y) على المنطقة R .

ويرمز له بالرمز $\iint_R f(x,y)\,dA$

حيث dA=dxdy=dydx هي مساحة مستطيل بعداه dy,dx أي أن :

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

مثال: احسب قيمة التكامل المزدوج $\iint_R \frac{\sin y}{x}\, dA$ ، حيث R هو المستطيل :

. R={(x,y):1≤x≤e,0≤y≤π/2}

الحل:

$$\iint_R \frac{\sin y}{x}\, dA = \int_0^{\pi/2}\int_1^{e} \frac{\sin y}{x} dx dy = \int_0^{\pi/2} \sin y \ln x\Big|_1^{e} dy = \int_0^{\pi/2} \sin y dy$$

$$= -\cos y\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

سنعمم التكامل المزدوج على مناطق غير المستطيلات من خلال الأمثلة التالية :

مثال : احسب قيمة التكامل $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2 y\,dy\,dx$ وارسم منطقة التكامل R .

الحل:

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4} x^2 y\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{4} dx = \int_{-2}^{2}\left(8x^2-\frac{x^6}{2}\right)dx = \left[8\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{14}\right]_{-2}^{2}$$

$$=\left(\frac{64}{3}-\frac{128}{14}\right)-\left(-\frac{64}{3}+\frac{128}{14}\right)=\frac{128}{3}-\frac{256}{14}$$

مثال : احسب قيمة التكامل : $\iint_R \left(x^2 + 4y\right) dA$ في المنطقة المحصورة بين القطع المكافئ $y=x^2$ والخط المستقيم $y=x+2$ .

الحل :

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = 2, x = -1$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\left(x^2 + 4y\right)dydx = \int_{-1}^{2}\left[x^2 y + 4\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x+2} dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left[\left(x^2(x+2) + 2(x+2)^2\right) - \left(x^4 + 2x^4\right)\right]dx = \int_{-1}^{2}\left(-3x^4 + x^3 + 4x^2 + 8x + 8\right)dx$$

$$= \left[-3\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + 8x\right]_{-1}^{2} = 31.95$$

مثال :غير ترتيب التكامل ثم جد قيمته :

**الحل:**

$$\int_0^1\int_y^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln 2$$

تمت بحمد الله .