اسم المادة : نظرية الأعداد

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط **هنا**

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

مادة النهائي

أهم المهم *

* الوحدة الرابعة
نظريات أساسية في الحساب

نظرية فيرما الصغرى
اذا كان p عدد أولياً وكان a أيا من الاعداد $1, 2, \ldots, p-1$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

يكون نظام كامل البواقي بالمقياس m
$\{1, 2, \ldots, m\}$ أو $\{0, 1, \ldots, m-1\}$

مهم: مثال هل الاعداد التالية تمثل نظام كامل للبواقي لمقياس m
نقسم الأعداد على المقياس وننظر للبواقي ونبحث هل تشكل احدى الأنظمة السابقة $\{1, 2, \ldots, m\}$ أو $\{0, 1, \ldots, m-1\}$

نظرية فيرما
اذا كان p أولياً والقاسم المشترك $(a, p) = 1$
فإن ⟸ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

مثال

$$a^{4} \equiv 1 \pmod{5} \quad (5-1=4)$$

$$a^{6} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$a^{\cancel{7}} \equiv 1 \pmod{8}$$

* هل صحيح ←

$$2^{4} \equiv 1 \pmod{5}$$

$16 \equiv (1) \pmod{5}$ ← نعم صحيحة لأنه

$16 - 1 \stackrel{?}{=} 5k$

$15 = 5(3)$ ✓

2019/11/8 23:44

$4^6 = 1 \mod 7$

$4096 = 1 \mod 7$

$4096 - 1 = 7k$ ✓

$= 7(580)$

* ام المهم

نتيجة مكافئة لفيرما

شرط

P ← أولي

$a^p = a \pmod p$

مثال ←

$4^3 = 4 \pmod 3$

$64 - 4 = 60 = 3(20)$ ✓ صحيحة

مثال ←

$2^5 = 2 \mod 5$

$32 - 2 = 30 = 5 * (6)$ ✓

$3^3 = 3 \mod 3$

$27 - 3 = 24 = 3 * 8$ ✓

مثال 4 ص 368

اوجد الباقي لدى قسمة 3^{92} على 11 $\Leftarrow$ $a \leftarrow 3^{92} = \boxed{??} \pmod{11}$

(1) ننظر إلى P ← 11 ← أولي

$P = 11 \to P - 1 = 10$

(2) نتأكد أن $(a, p) = 1$

$3^{10} = 1 \pmod{11}$ (p-1)

نرفع للقوة 9 ثم نضرب بـ 3^2

$(3^{10})^9 \times 3^2 = (1)^9 (3)^2 \pmod{11}$

$3^{92} = 3^2 \pmod{11}$

$3^{92} = \boxed{9} \pmod{11}$

الباقي

2019/11/8 23:44

* عكس نظرية فيرما

اذا كانه $a^{p} \neq a \bmod p$

فإنه p ليس أولي

اذا كانه $a^{p-1} \neq 1 \pmod{p}$

فإنه p ليس أولي $(a,p) \neq 1$

* وهو اختبار لأولية العدد

اذا تحقق فيرما العدد فهو أولي

مثال 6 عن هذه الخاصية

* اهم المهم

* نظرية أويلر في حالة

~~عدد أولي~~ عدد غير أولي لكن يمكن كتابته كحاصل ضرب عددين أوليين غير متساويين

$a^{(p-1,q-1)} = 1 \pmod{pq}$

$(a,q)=1$

$(a,p)=1$

أوليان ← p,q

* العناصر التي تقل عن العدد الذي يسأل عنه

$Z(m)=\{1,2,3,\dots,m\}$ $\quad U(m)=\{x \in Z(m) : (x,m)=1\}$

$U(10)$

اقل من عشرة والقواسم التي بينها وبين العشرة واحد = $\{1,3,7,9\}$

* $U(m)$ ←

مجموعة العناصر التي أقل من m والقاسم المشترك بينها واحد

* عدد العناصر الموجودة في المجموعة ← ϕ {تلفظ أوساي}

مثلا ← $\phi\, U(10)$ $\quad U(10)=\{1,3,7,9\}$

$\therefore \phi = 4$

$U(5) = \{1, 2, \dots, 4\}$ $\phi = 4$ لأنه أولي

$U(7) = \{1, 2, \dots, 6\}$ $\phi = 6$

$\boxed{\phi(p) = p - 1}$ ← عدد الأعداد في المجموعة

* نظرية أويلر

إذا كان $m > 1$ وكان $(a, m) = 1$ فإنه ←

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

* فيرما حالة خاصة من نظرية أويلر

* خانة الآحاد ← mod 10 خانة العشرات ← mod 100

أول خانتين ← mod 100

* مثال 10 ص 381

① ~~$\phi(10) = 10 - 1 = 9$~~ $\phi(10) = 4$

② أويلر

$$3^{163} \equiv \_\_\_ \bmod 10$$

$$3^{\phi(10)} \equiv 1 \bmod (10)$$

* أهم المهم

$$3^{4} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$(3^{4})^{40} \times 3^{3} \equiv 1 \cdot 3^{3} \bmod 10$$

$$3^{163} \equiv 3^{3} \bmod 10$$

$$3^{163} \equiv 27 \bmod 10 \qquad \Rightarrow 27 \bmod 10$$

$$3^{163} \equiv \underline{7} \bmod 10 \qquad 7 \bmod 10$$

خانة الآحاد

للعدد الأولي

$$\phi p = p-1$$

* القاعدة الأسهل والأعم الحل ⇐

p أولي و $w \geq 1$

$$\phi(p^w) = p^w - p^{w-1}$$

بغض النظر عن العدد نكتبه كحاصل ضرب عوامله الأولية

مثال

* $\phi(125) \Rightarrow 125 = 5^3 \qquad \phi(5^3) = 5^3 - 5^2$

$= 125 - 25$

$\boxed{\phi(5^3) = 100}$

* مثال $\phi(90) \Rightarrow$

3	90
3	30
2	10
5	5
	1

$90 = 3^2 \times 2 \times 5$

* $\phi(9) = \phi(3^2) = 3^2 - 3^1 = 9 - 3 = \boxed{6}$

* $\phi(3^6 \times 5^2 \times 7^4) \Rightarrow \phi(3^6) \times \phi(5^2) \times \phi(7^4)$

$= (3^6 - 3^5)(5^2 - 5^1)(7^4 - 7^3) = \boxed{}$

* $\phi(90) = \phi(2)\,\phi(3^2)\,\phi(5)$

$= 1 \times 3^2 - 3^1 \times 4 = \boxed{24}$

* أم المهم

نظرية 7 ⇐ طريقة أخرى لإيجاد ϕ لكن صعبة الأفضل عدم استخدامها في الحل

نظرية 8 ⇐ العدد يساوي مجموع ϕ لقواسمه الموجبة

نظرية 9 ⇐ لإيجاد القواسم الموجبة في حالة الأعداد الكبيرة

$(p-2)! \equiv -2 \mod p$

* نظرية ويلسون

اذا كان p عدداً أولياً ⟸ $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$

• مثال $p=3$

$(3-1)! = 2! \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 2 \equiv -1 \mod 3$

• مثال $p=5$

$(5-1)! = 4! \equiv -1 \pmod 5$

$24 \equiv -1 \pmod 5$

$+1 \quad +1$

$25 \equiv 0 \mod 5$

للتأكد

* فقط للأعداد الأولية

$3x \equiv 2 \mod 20$

نظير 3 هو 7 لأنه $\frac{3(7)}{20} = 1$ الباقي — يجب أن يكون الباقي ١ في النظير

مثال 22 نشكل R ، T

$R = \{1, \ldots, (p-1)\}$

$T = \{2, \ldots, (p-2)\}$

نظير 5 ⟸ $\frac{5(9)}{11} = 1$ الباقي ∴ 9 هو النظير

نشكل أزواج من العدد ونظيره $T = \{2,6\} \cup \{3,4\} \cup \{5,9\} \cup \{7,8\}$

مثال 23 باقي قسمة $26!$ على 29 — $p = 29$ أولي

$(29-1)! \equiv -1 \mod 29$

$28! \equiv -1 \mod 29$

$28 * 27 * 26! \equiv -1 \mod 29$

نستبدل 27/28 لحظة ⟸ $28 \equiv -1 \mod 29$ ، $27 \equiv -2 \mod 29$

$-1 * -2 * 26! \equiv -1 \mod 29$

$15(2 * 26! \equiv -1 \mod 29)$

نضرب بنظير 2 بالنسبة 29 هو $\boxed{15}$ — $\frac{2(15)}{29} = 1$ الباقي

$26! \equiv -15 \mod 29$

نستبدل -15 بعدد يطابقه بالنسبة 29 وهو 14

$26! \equiv \boxed{14} \mod 29$

الباقي 14

$(p-1)! \equiv -1 \mod p$

$(p-2)! \equiv -2 \mod p$

$(p-3)! \equiv -3 \mod p$

وهكذا للأعداد الأولية

ام المعجزة

مثال 26

فيرما ⟵ $a^{p} \equiv a \mod p$

ويلسون ⟵ $(p-1)! \equiv -1 \mod p$

نضرب الطرفين بـ a

$a(p-1)! \equiv a \cdot -1 \mod p$

نقل a للطرف الآخر $a(p-1)! + a \equiv 0 \mod p$

بما أن الباقي 0 ∴ يقبل القسمة عليه

* عكس نظرية ويلسون p صحيح

∴ اذا تحقق $(p-1)! \equiv -1 \mod p$

∴ فإن p عدد أولي

نظرية 12 ⟵ اذا كان n عدد مؤلف ولا يساوي 4 ⟵

$(n-1)! \equiv 0 \mod n$

مثال $n=6$

$(6-1)! =$ ~~...~~ $=$

$5! \equiv 0 \mod n$

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \equiv 0 \mod 6$

$120 \equiv 0 \mod 6$

* اذا كان p يقبل القسمة على 4 ويترك الباقي 1 فهو قابل للحل

ويكون الحل ⟵ $\mp\left(\frac{p-1}{2}\right)!$

8

يجب ان يكون معامل x^2 واحد فقط

* مثال $x^2 = -1 \mod 13$

$\frac{13}{4} = 1$ الباقي

∴ هو من مجموعة $\sqrt[4]{}$ وهو قابل للحل

والحل هو $\mp \left(\frac{p-1}{2}\right)! \Rightarrow \mp \left(\frac{13-1}{2}\right)!$

الحل $\pm 6!$

* اذا كان p أولي يقبل القسمة على 4 ويترك الباقي 3 فهو غير قابل للحل

* سؤال مثال 28

نجعله على الصيغة العامة (طرف تربيع مثل $(x-1)^2$ أو x^2 ...

$x^2 = -1 \mod p$

$x^2 - 6x = 19 \pmod{29}$

$+9 \qquad +9$

نكمل المربع باضافة 9 للطرفين $\mp \left(\frac{1}{2} 6\right)^2$

$x^2 - 6x + 9 = 19 + 9 \mod 29$

$(x-3)^2 = 28 \mod 29$

$(x-3)^2 = -1 \mod 29$ نفس الصيغة العامة

$t = \mp \left(\frac{29-1}{2}\right)! \Rightarrow \mp 14!$

$(x-3) = \mp 14!$

$x = 3 \mp 14!$ يجب ان تبقى x في طرف واحد

* ام المعصر

2019/11/8 23:45

تدريب 29

$X^2+10X-47=0 \mod 73$

$X^2+10X=47 \mod 73$

اكمال مربع

$X^2+10X+25=47+25 \mod 73$

$(X+5)^2=72 \mod 73$

على الصيغة العامة

$(X+5)^2=-1 \mod 73$

الباقي 1-

$X+5=\mp\left(\frac{73-1}{2}\right)!$

$X+5=\mp 36! \Longrightarrow X=-5\mp 36!$

مثال 29

الخطوات

$37X^2-27X=27 \pmod{101}$

① يجب أن نجعل معامل $X^2=1$ نبحث عن نظير 37 بمقياس 101

نظير 37 هو 30- وتصبح المعادلة

$X^2+810X=-810 \pmod{101}$

② سنبدل 810 بعدد يطابقه بنفس المقياس وتصبح

$X^2+2X=-2 \mod 101$

③ اكمال المربع

$(X+1)^2=-2+1 \mod 101$

الصيغة العامة

$(X+1)^2=-1 \mod 101$

$(X+1)=\mp\left(\frac{101-1}{2}\right)! = \mp 50!$

$\boxed{X=-1\mp 50!}$

ام المهاجر

أم الصرح

الاقترانات الضربية

$\phi(nm) = \phi n \cdot \phi m \quad \forall (n,m)=1$ أوبساي

يكون اقتران ضربي اذا كان $f(nm)=f(n) \cdot f(m)$

$\phi(nm) = \phi n \cdot \phi m$

* مثال 31

$f(n) = n^3 \Rightarrow f(nm) = (nm)^3 = n^3 \cdot m^3$

$\phi n \cdot \phi m$

∴ هو اقتران ضربي

ملاحظة ← اذا كان الاقتران ضربي يجب أن تكون صورة الواحد ← $f(1)=1$

* نظرية 16 ← حاصل ضرب اقترانين ضربيين يكون اقتران ضربي

$h = fg$

مجموع اقترانين ضربيين ليس بالضرورة اقتران ضربي

$h = f + g^2 \qquad n=1 \quad m=2$

$h = n + m^2 \Rightarrow h = 1+4 = 5 \neq 1$

ليس ضربي

تعريف 4 ← عدد القواسم الموجبة للعدد $d(n)=n$

مثال أوجد $d(6)$ قواسم 6 ← $1, 2, 3, 6$

عددهن = 4 ← $d(6)=4$

اوجد $d(45)$ ← $45: 1, 45, 3, 15, 5, 9$

$d(45) = 6$

الطريقة الاسهل للارقام الكبيرة

$d(45) \qquad 45 = 3^2 * 5$

$= d(45) = d(3^2) * d(5^1)$

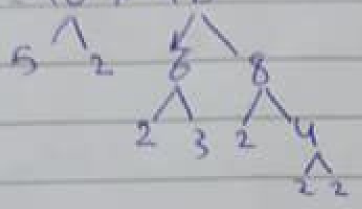
$(2+1) * (1+1) = 6$

(القوة +1) * (القوة +1)

2019/11/8 23:45

مثال

$d(480) = 10 * 48$



$480 = 2^5 * 3 * 5$

(القوة + 1)

$d(480) = (5+1)(1+1)(1+1)$

$6 * 2 * 2 = \boxed{24}$

تعريف 5

مجموع القواسم الموجبة للعدد n ⟸ $\sigma(n)$

$\sigma(6) \Rightarrow 6: 1, 2, 3, 6$

$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

لكن $\sigma(p)$ عندما p عدد أولي ⟸ $\sigma(p) = p+1$

مثال $\sigma(5)$ ⟸ $5+1 = 6$

احسب $\sigma(45)$

نكتب قواسم العدد أولاً

$45 = 3^2 * 5$

حسب القاعدة ⟸ $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p-1}$

$\sigma(45) = \sigma(3)^2 * \sigma(5)$

$\frac{3^{2+1} - 1}{3-1} * 6$

$\sigma(45) = 13 * 6 = 78$

ام الهدى

$\sigma(480) \Rightarrow \left(\frac{2^{5+1} - 1}{2-1}\right) * (3^1 + 1) * (5+1)$

$63 * 4 * 6 = \boxed{}$

$n = 2^4 * 3^5 * 5^2$

$\sigma(n) = \left(\frac{2^5 - 1}{2-1}\right)\left(\frac{3^6 - 1}{3-1}\right)\left(\frac{5^3 - 1}{5-1}\right)$

فاطمة

12

* الأعداد الكاملة (الأزواج المتحابة)

* ام المحور

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

* القواسم الفعلية هي القواسم بدون العدد نفسه

مثل $6: 1, 2, 3, 6$

نحذف 6 $\therefore$ والباقية هي قواسم فعلية

الأعداد الكاملة ← هي الأعداد التي تحقق القاعدة $\sigma(n) = 2n$

مجموع القواسم الفعلية ← $\theta(n)$

$$\sigma(n) = \theta n + n$$

* اذا كان مجموع قواسم العدد $= 2n$ فهو عدد كامل

مثل $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = \underbrace{2n = 2(6)}$ ✓

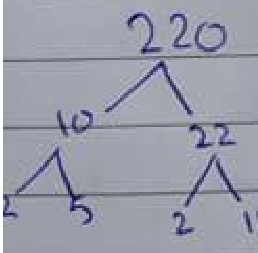
مثل $28: 1, 2, 4, 7, 14, 28 = 4 * 7 = 2^2 * 7$

$$\sigma(28) = \sigma(2^2) * \sigma(7)$$

$$= 2^{2+1} - 1 * 7 + 1 \quad = 2^3 - 1 * 8 = 56$$

هل $56 \overset{?}{=} 2(28)$ نعم ✓ $\therefore$ هو عدد كامل

* هل 220 عدد كامل



$$220 : 2^2 * 5 * 11$$

$$\sigma(220) = \sigma(2^2)\ \sigma(5)\ \sigma(11)$$

$$= (2^3 - 1)\ (6)\ (12)$$

$$= \cancel{4536}\ 504 \neq 2(220)$$

$\therefore$ هو عدد غير كامل

مثال 45) اذا كان p عدداً أولياً فبرهن p^2 لا يمكن ان يكون عدداً كاملاً
نفرض العكس وهو انه عدد كامل p^2

$$\sigma(p^2) = 2p^2$$

$$\frac{p^{2+1}-1}{p-1} = 2p^2$$

فرق تكعيب

$$\frac{(p-1)(p^2+p+1)}{(p-1)} = p^2+p+1 = 2p^2$$

* $p^2-p-1=0$ ⟸ هذه المعادلة لا يوجد لها حل ∴ العدد غير كامل

* نظرية اقليدس (23)

يكون العدد $n = 2^{k-1}(2^k-1)$
عدداً كاملاً اذا وفقط اذا كان 2^k-1 عدداً أولياً

اذا كان n عدداً زوجياً كاملاً فانه يوجد عدد k بحيث
$n = 2^{k-1}(2^k-1)$

مثال 47 اذا كان $t>1$ ، وكان $t \equiv 1 \pmod 4$
فبرهن K_t زوجياً
آحاده 6
∴ نستخدم (mod 10)

$$K_t = n = 2^{t-1}(2^t-1)$$

ام المجد

قاعدة عامة
الباقي دائماً 6 ⟸
$$6^m \equiv 6 \pmod{10}$$

من السؤال
$t \equiv 1 \bmod 4 \Rightarrow t-1 = 4s$
$t = 4s+1$

نجعل الاساس 2 للطرفين
$$2^t = 2^{4s+1}$$

2019/11/8 23:45

يتبع حل مثال ←

$t-1 = 45$

$2^{t-1} = 2^{45} \Rightarrow 2^{t-1} = (2^4)^5 \Rightarrow 2^{t-1} = (16)^5$

يقابل $6 = (16)^5 = 10$

من القاعدة السابقة ←

$6^5 = 6 \mod 10$

ام المجد

$2^{t-1} = 6 \mod 10$

* نعوض قيمة t ثم نطرح من الطرفين

$2^{t-1} = 2^{45+1} - 1$

$2^t - 1 = 2(2^{45}) - 1$

$2^t - 1 = \underbrace{2(6) - 1}_{11} \Rightarrow 2^t - 1 = 1 \mod 10$

$1 \mod 10 \leftarrow 11$

∴ $6(1) = 6 \mod 10$

نظرية اقليدس/اويلر

الاعداد الزوجية الكاملة

$Kp = \underbrace{2^{p-1}}_{أولي}(\underbrace{2^p - 1}_{أولي})$

* نظرية مرسين بعد التصحيح

$Mp \leftarrow$ عدد مرسين

$Mp = 2^p - 1 \qquad Kp = 2^{p-1}(2^p - 1)$

* العدد المرسيني الأول هو ~~M_2~~ عندما نعوض ← M_2

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$

* العدد المرسيني الثاني عند تعويض ← M_3

$M_3 = 2^3 - 1 = 7$

العدد المرسيني الثالث ← M_5

$M_5 = 2^5 - 1 = 31$

العدد الكامل الاول لعوض K_1

$K_1 = 2^{2-1}(2^2 - 1)$

2019/11/8 23:45

* يكون العدد زائدي ⟸ $\sigma(n) > 2n$

* يكون العدد ناقصي ⟸ $\sigma(n) < 2n$

* يكون n عدد كاملاً من الرتبة الثالثة عندما $\sigma(n) = 3n$

* لايجاد مجموع الآحاد لأي عدد نقسم اولاً على اي عدد من 4 حيث يكون الباقي 1

* لايجاد عدد الخانات العشرية للعدد P ⟸ $P \cdot \log 2$

* العددان n، m متحابين عندما $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$

فالحل 284 ، 220 متحابين $220 : 2^2 * 5 * 11$

① التحليل $284 : 2^2 * 71$

$284 \to 2,\ 142 \to 2,\ 71$ أولي

$\sigma(220) : (2^3 - 1)(6)(12) = 504$

$\sigma(284) = (2^3 - 1)(72) = 504$ متساويان

لكن يجب ان $504 = n + m$

∴ $220 + 284 = 504$

هما متحابان

* اذا كان عددان متحابان x، y فإنه لا يمكن ان يكون العددان أولي أي

ام المجد

نظرية ثابت بن قرة

توجد أعداد أولية p, q, r

$p = 3(2^{n-1}) - 1$
$q = 3(2^{n}) - 1$
$r = 9(2^{2n-1}) - 1$

$n > 1$

فإن

$x = 2^{n} \cdot p \cdot q$ ، $y = 2^{n} \cdot r$

∴ x, y متحابية

2019/11/8 23:46

الوحدة الخامسة

النظرية الاساسية المثلثات الفيثاغورية

(x, y, z) ثلاثي فيثاغوري اذا حقق معادلة الفيثاغورية

$x^2+y^2=z^2$

$x^n+y^n=z^n$

∴ المثلث قائم الزاوية

مثال

لفرض وجود مثلث متساوي الساقين $x=y$

$x^2+y^2=z^2$

$x^2+x^2=z^2$

$\frac{2x^2}{2}=\frac{z^2}{2}$ $\quad x=\sqrt{\frac{z^2}{2}}$ $\quad =\sqrt{2}=z/x$

وهو تعارض

∴ لا يوجد

$\frac{\text{عدد طبيعي}}{\text{عدد طبيعي}}$ = عدد طبيعي لكن $\sqrt{2}$ نسبي

تدريب 1

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

لفرض العكس

$\frac{1}{2}xy=13$

$xy=26$

∴ $x, y \rightarrow 13, 2$ أو $26, 1$

بتجريب

$x^2+y^2=z^2$

$13^2+2^2=$ غير مربع كامل

$26^2+1^2=$ غير مربع كامل

مثال 2

* اذا كان احد العددين $x\ y$ فردي والآخر زوجي
* لا يمكن أن يكونا فردياً معاً لكن ممكن أن يكونا زوجياً معاً
* صيغة العدد الفردي ← $2K+1$
* " " الزوجي ← $2K$

* الثلاثي الفيثاغوري الأساسي $(3,4,5)$ ممكن أن يكون عدد لانهائي من الثلاثيات الفيثاغورية

* أبسط المقادير لابسط صورة ليكون هو الثلاثي الأساسي للثلاثيات المعطى بالسؤال (القواسم بين كل متغير بواحد)
* ويسمى مثلث فيثاغوري **بدائي**

نظرية 1

اذا كان (a,b,c) ثلاثي فيثاغوري فإنه يوجد ثلاثي فيثاغوري بدائي له (أي ثلاثي ممكن أبسطه ليصبح ثلاثي بدائي)

$(9,12,15)$ ← أقسم على $d=3$

$(3,4,5)$ ويصبح

القاسم المشترك — القاسم

$(a,b) = (a, b+ka)$

القاسم — القاسم

$(a^n, b^n) = (a,b)^n$

* الفهم المحور

* نظرية 2

• اذا كان (a,b,c) ثلاثي فيثاغوري وكان D القاسم المشترك لـ a,b,c

$(a,b) = (b,c) = (a,c) = D$ ← القاسم

• ويكون (a,b,c) بدائي اذا كان $D=1$

* نظرية 3

اذا كان (x, y, z) ثلاثي فيثاغوري بدائي فإن أحد العددين x, y فردي والآخر زوجي وبالتالي z فردي (فرديا وزوجي)

* سنعتبر أن x زوجي y فردي z فردي في حالة البدائي (x, y, z)

* نظرية 4

اذا كان عددان طبيعيان $(a, b) = 1$ وكان ab مربع كامل فإن كلا من a, b مربعا كاملاً

مثال $(9, 4) = 1$

$9 \times 4 = 36 = 6^2$ مربع كامل

$\therefore$ 4 مربع كامل و 9 مربع كامل

شرط أساسي $(a, b) = 1$

$(2, 18) \neq 1$

$2 \times 18 = 36$ مربع كامل

لكن 18 ، 2 مربعات غير كاملة لأنه $(2, 18) \neq 1$

هام مهم

نظرية 5

اذا كان $(a, b) = 1$ فإن $(a+b, a-b) = 1$ أو 2

مثال $(9, 4) = 1$

$(9+4, 9-4)$

$(13, 5) = 1$ الصحيح

* أهم علاقة

$$(x, y, z) = (\underbrace{2st}_{\text{زوجي}}, \underbrace{s^2 - t^2}_{\text{فردي}}, \underbrace{s^2 + t^2}_{\text{فردي}})$$

x y z

$z > x, y$

2019/11/8 23:46

20

× اذا كان معلوم y و z لا نريد قيم s t

$z + y = 2s^2$ ، $z - y = 2t^2$

× شروط s, t (الفرضية)

① موجبات و s العدد الأكبر
② القاسم المشترك
③ احدهما فردي والآخر زوجي

تحقق الشروط معاً
$$\begin{cases} s > t > 0 \\ (s, t) = 1 \\ s \not\equiv t \pmod 2 \end{cases}$$

مثال 5 أوجد كل المثلثات الفيثاغورية البدائية التي طول الوتر 97

مهم

$(x, y, z) = (2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$

$z = 97 = s^2 + t^2$

× عن طريق التجربة نبحث عن s, t عددية مجموع مربعهما 97

× نقل 1 للطرف الآخر وتصبح $97 = 1^2 + (?)^2$

هل يوجد عدد طبيعي مربعه 96 $96 = (?)^2$

طبعاً لا ∴ نبحث عن $97 = 2^2 + (?)^2$ ننقل 2^2 للطرف الآخر

× نكمل حتى نصل لعدد تربيعه أكبر من نصف العدد

وينتج أنه $(4, 9) \leftarrow$ $\boxed{s = 9 \quad t = 4}$

زوجي 4 فردي 9 $\quad 9 > 4 > 0 \quad s > t > 0 \quad (9, 4) = 1$

نعوض بقيم s, t في العلاقات

$(2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$

$(2(9)(4), (9)^2 - (4)^2, (9)^2 + (4)^2)$

$(72, 65, 97)$

أم السجد

2019/11/8 23:46

مثال 6) أوجد كل المثلثات البدائية التي طول أحد أضلاعها 36

$x=36 = 2st \qquad st=18$

نبحث عن أي عددين s,t حاصل ضربهما 18

ثم نفحص العددين إذا يحقق شروط s,t

$1,18 \,/\, 2,9 \,/\, 3,6$

* $3,6 \Rightarrow$ لا يصلح لأنه $(3,6)\neq 1$

* $2,9 \Rightarrow (2,9)=1 \qquad 9>2>0$ ف 9 و 2 ز

∴ الزوج هو $(9,2)$ $\quad s=9 \quad t=2$

نعوض في الثلاثي البدائي

$2st \,,\, s^2-t^2 \,,\, s^2+t^2$

$2(9)(2) \,,\, (9)^2-(2)^2 \,,\, (9)^2+(2)^2$

البدائي الأول $(36 \,,\, 77 \,,\, 85)$

$1,18 \Rightarrow (1,18)=1 \qquad 18>1>0$ فردي 1 زوجي 18

نعوض ∴ $s=18 \quad t=1$

نعوضها ونكون الثلاثي $(36, 323, 325)$

تدريب

$y=45$

$y=45=s^2-t^2$ عبارة فرق بين مربعين

$45=(s-t)(s+t)$

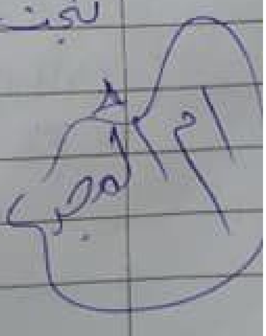
نبحث عن عددين حاصل ضربهما 45 يعني نبحث عن عددين وليس s,t

$9,5 \qquad 15,3 \qquad 1,45$

* $15,3 \rightarrow 15 \times 3 \rightarrow (s-t)(s+t)$

بالحذف

$$\begin{aligned} s+\cancel{t} &= 15 \\ s-\cancel{t} &= 3 \\ \hline \frac{2s}{2} &= \frac{18}{2} \quad \boxed{s=9} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s+t &= 15 \\ 9+t &= 15 \\ \boxed{t} &\boxed{=6} \end{aligned}$$



لكن $9,6$ لا يحقق شروط s,t

22

9, 5

نجد الاعداد الناتجة

بالجمع $s + t = 9$

$s - t = 5$

$\frac{2s}{2} = \frac{14}{2}$ $\boxed{s = 7}$

$s + t = 9$

$7 + t = 9$

$\boxed{t = 2}$

(7, 2) تحقق شروط $s\ t$

∴ نعوض عن قيم s, t بـ 7, 2 في الثلاثيات البدائية

لايجاد المثلث البدائي

مثال 9

ام المجد

$\frac{1}{2} xy = 210$

$\frac{1}{2}(2st)(s^2 - t^2) = 210$

$st(s^2 - t^2) = 210$

$\boxed{st(s-t)(s+t) = 210}$

نبحث عن أربعة أعداد حاصل ضربها 210 ← نحللها لعواملها

في حالة

$210 \rightarrow 2, 3, 5, 7$

210

21 10

3 7 2 5

$s + t$ الاكبر $= 7$

t الاصغر $= 2$

$s + t = 7$

$s + 2 = 7$ ∴ $\boxed{s = 5}$ $\boxed{t = 2}$

تحقق 5, 2 شروط st ونعوضها في الثلاثي البدائي

لكن في حالة العوامل ليست أبسط صورة مثل

3×2

6, 5, 7

وتكون العدد الرابع هو $t = 1$ أو $s - t = 1$ أو

أو 2, 3, 35 وغيرها

5×7

ونبحث اذا كانت تحقق s, t

6, 5, 7

* في حالة $s - t = 1$

$s + t = 7$

$s - t = 1$

$s = t + 1$ لكن لا حل لها

* في حالة $t = 1$ نعوضها

$s(1)(s^2 - (1)^2)(s - (1)) = 210$

2019/11/8 23:46

(أم البحر)

مثال (١٠) أوجد أصل الثلاثي الفيثاغوري

$(18, 80, 82)$

نقسم على 2

$(9, 40, 41)$

القاسم المشترك الأكبر للأعداد = ١

نجعل x ← الزوجي z ← الأكبر

x, y, z

$(40, 9, \cancel{40}, 41)$

مثال (١١)

$$x, y, z \Rightarrow (2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$$

* يمكن كتابة العددين بالصورة القياسية

[1] اذا كانا مربعين

$$\left(\frac{z+y}{2}\right), \left(\frac{z-y}{2}\right)$$

$$\frac{s^2 + t^2 + s^2 - t^2}{2} = \frac{2s^2}{2} = \boxed{s^2}$$ مربع كامل

$$\frac{z-y}{2} \Rightarrow \frac{s^2 + t^2 - s^2 + t^2}{2} = \frac{2t^2}{2} = \boxed{t^2}$$ مربع كامل

[2] * اذا كانا مربعين يمكن كتابتهما على الصورة القياسية

$$\frac{z+y}{2} = A^2 \qquad \frac{z-y}{2} = B^2$$

$$z + y = 2A^2 \rightarrow ① \qquad z - y = 2B^2 \rightarrow ②$$

نجمع المعادلتين

$$2z = 2A^2 + 2B^2$$

$$z = A^2 + B^2$$

نعوض قيمة z في المعادلة ١ لايجاد y

$$A^2 + B^2 + y = 2A^2$$

$$y = 2A^2 - A^2 - B^2$$

$$\boxed{y = A^2 - B^2}$$

لايجاد x

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2 - y^2}$$

نعوض z, y لايجاد x $\boxed{x^2 = z^2 - y^2}$

مثال 13

$\frac{1}{2}$ ضلعي القائم

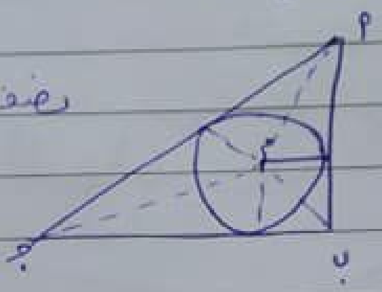
$\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع $= \frac{1}{2}(kx)(ky)$

$\cancel{\frac{1}{2}}\, kz \times h = \cancel{\frac{1}{2}}\,(kx)(ky)$

$$h = \frac{(ky)(kx)}{(kz)}$$

ونكمل الحل ←

نظرية 7



نصف القطر يكون عدد صحيح

Δ م أ ج   Δ م أ ب   Δ م ب ج

مساحة الثلاث ~~مثلثات~~ مثلثات = م Δ الكبير

$\cancel{\frac{1}{2}} wx + \cancel{\frac{1}{2}} wy + \cancel{\frac{1}{2}} wz = \cancel{\frac{1}{2}} xy$

$wx + wy + wz = xy$

$w(x+y+z) = xy$

$w = t(s-t)$ عدد صحيح

نفرضهم x,y,z من s,t وينتج

ملاحظة ← $\frac{t}{s} = \tan(A/2)$ $\tan\frac{1}{2}A$

A ← الزاوية المحصورة بين الوتر وأحد الأضلاع

نظرية فيرما الأخيرة

تعميم فيثاغورث لا يوجد عدد طبيعي ما عدا $x^n + y^n = z^n \quad n \geq 3$

تعريف 3

نسمي الثلاثية (x,y,z) طبيعية اذا كانت x,y,z طبيعية

$\cancel{x^4 = 2y^4}$

أم المجد

انتهت مادة النهائي

ام المجد