اسم المادة : الاحتمالات

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط هنا

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

تعريفات

1. **التجارب العشوائية:** هي عملية أو مجموعة من العمليات لا نعرف نتيجتها الحتمية ولكن نستطيع معرفة مجموعة جميع النتائج الممكنة لها.
2. **التجارب المحددة:** هي التجارب التي اذا قمنا بها أكثر من مرة (تحت نفس الظروف) ستعطي نفس النتيجة.
3. **فضاء العينة:** هي مجموعة جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز Ω.

ملاحظة: عندما نقول كلمة **مجموعة** في الرياضيات فإن لها خصائص وشروط أهمها

1. تكتب بين حاصرتين على الشكل $\{ \quad \}$
2. ما يكتب داخلها يسمى عناصر المجموعة.
3. لا يسمح بتكرار كتابة العناصر داخلها.
4. تسمى عادة باحرف كبيرة باللغة الإنجليزية.
5. ترتيب العناصر غير مهم عند كتابة المجموعات.

مثال: اوجد فضاء عينة رمي قطعة نقد

$$\Omega = \{H, T\}$$

حيث نرمز للصورة H والكتابة T.

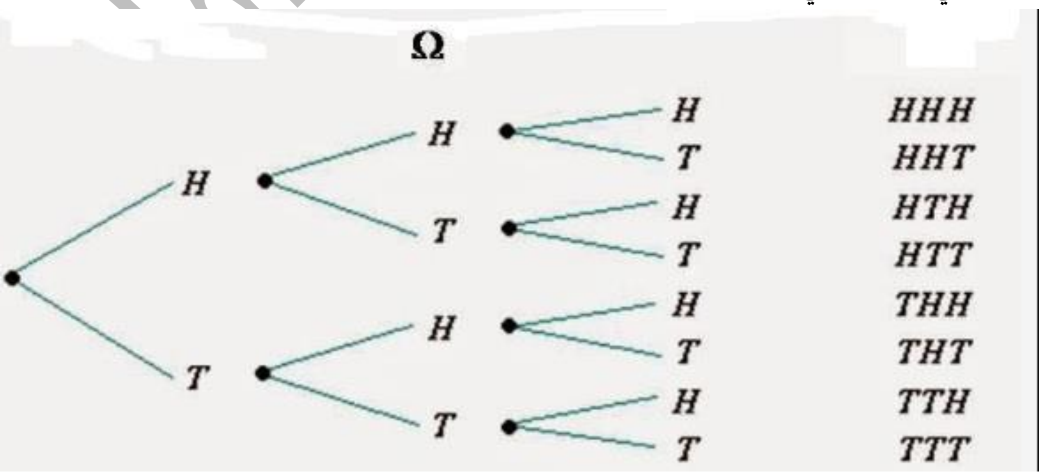
مثال: أوجد فضاء عينة رمي قطعتين نقد.

$$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

مثال3: أوجد فضاء عينة رمي ثلاث قطع من النقود

$$\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

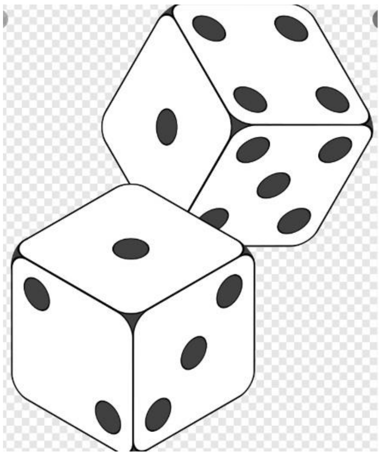
لاحظ كلما زاد عدد القطع النقدية كلما صعب علينا معرفة فضاء العينة Ω لذلك ممكن استخدام ما يسمى بطريقة الشجرة لمعرفة Ω كما في الشكل التالي



مثال: أوجد فضاء عينة رمي حجر نرد

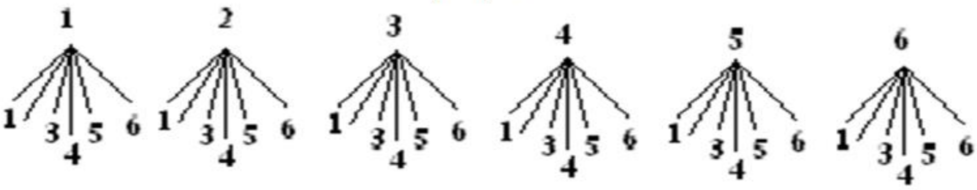
$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

مثال: أوجد فضاء عينة رمي حجرين نرد



$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array} \right\}$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1),(1,2),\dots,(1,6) \\ (2,1),(2,2),\dots,(2,6) \\ . \\ . \\ (6,1),(6,2),\dots,(6,6) \end{array} \right\} = \{(i,j):\ i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$$



تعريفات:

1. **الحدث (Event)**:هو مجموعة جزئية من Ω عادة ما يسمى بأي حرف كبير باللغة الانجليزية.
2. **الحدث البسيط** : هو الحدث الذي يتكون من عنصر واحد.
3. **الحدث المركب**: هو الحدث الذي يتكون من أكثر من عنصر.
4. **الحدث المستحيل**: هو الحدث الذي لا يمكن ان يحدث ويرمز له بالرمز Φ.
5. نقول ان الحدثين A,B **منفصلين** اذا كان $A \cap B = \Phi$
6. **الحدث المتمم** للحدث A هو جميع العناصر الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في A ويرمز له بالرمز $\overline{A}$

ملاحظة: عند تحديد فضاء العينة Ω فإنه لمعرفة الحدث المطلوب دراسته فقط ما علينا الى اختيار النتائج من Ω التي تحقق الحدث كالامثلة التالية:

مثال: عند رمي 3 قطع نقود أوجد ما يلي:

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

1. حدث ظهور صورتين.

$$A_1=\{(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\}$$

2. حدث ظهور قطع متشابهة

$$A_2=\{(H,H,H),(T,T,T)\}$$

3. حدث ظهور صورة على الاكثر

$$A_3=\{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

4. حدث ظهور 4 صور: بما اننا رمينا 3 قطع نقد بالتالي لا يمكن ان يظهر 4 صور وعليه يكون هو الحدث المستحيل بالتالي يكون الجواب Φ.
5. حدث عدم ظهور صور

احتمال ظهور صور هو

$$C=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$$

احتمال عدم ظهور صور هو جميع عناصر الفضاء مع عدا العناصر الموجودة في C أي انه متمم C وهو

$$\overline{C}=\{(T,T,T)\}$$

مثال: عند رمي حجرين نرد أوجد ما يلي:

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

1. حدث ظهور رقمين متشابهين.

$$B_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

2. حدث ظهور العدد 1

$$B_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

3. حدث ظهور عددين مجموعهم 6

$$B_3=\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$$

4. حدث ظهور عددين مجموعهم أكبر من أو يساوي (على الأقل) 8.

$$C=\begin{Bmatrix}(2,6),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,3),(5,4),\\(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

5. حدث ظهور عدديم مجموعهم أقل من او يساوي (على الأكثر) 4

$$E=\{(1,2)(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

6. حدث ظهور عددين الفرق بينهم 1.

$$D=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}$$

مثال: **اوجد فضاء عينة** إلقاء قطعة نقود ثم قطعة نرد

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(H,1)\ ,\ (H,2)\ ,\ (H,3)\ ,\ (H,4)\ ,\ (H,5)\ ,\ (H,6)\\ (T,1)\ ,\ (T,2)\ ,\ (T,3)\ ,\ (T,4)\ ,\ (T,5)\ ,\ (T,6)\end{Bmatrix}$$

تعريف: ليكن Ω فضاء عينة لتجربة عشوائية نعرف $P:\Omega\to[0,1]$ على اقتران معرف على Ω فنقول أن P هو اقتران احتمال إذا حقق الشروط التالية (مسلمات الاحتمالات):

1. $\forall A\subseteq\Omega\Rightarrow P(A)\geq 0$
2. $P(\Omega)=1\ \&\ P(\Phi)=0$
3. $\forall A_1,A_2\ni A_1\cap A_2=\Phi\Rightarrow P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$

مثال: إذا كانت $\Omega=\{5,6,9,10,15\}$ وعرفنا $\forall A\in\Omega$ $P(A)=\dfrac{n(A)}{5}$ بين أن P هو اقتران احتمال

مثال: إذا كان $P(A)=\displaystyle\int_{x\in A}e^{-x}dx$ $\Omega=(0,\infty)$ فبين أن P هو اقتران احتمال

1. $e^{-x}\geq 0\Rightarrow\forall A\subseteq(0,\infty)\Rightarrow P(A)=\displaystyle\int_{x\in A}e^{-x}dx\geq 0$
2. $P(\Omega)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx=1$
3. $take\quad A_1,A_2\quad\ni A_1\cap A_2=\varphi$

$$P(A_1\cup A_2)=\int_{x\in A_1\cup A_2}e^{-x}dx=\int_{x\in A_1}e^{-x}dx+\int_{x\in A_2}e^{-x}dx=P(A_1)+P(A_2)$$

مثال: إذا كان $P(A)=\displaystyle\int_{x\in A}x\quad dx$ $\Omega=(0,2)$ فبين أن P هو ليس اقتران احتمال

$$P(\Omega)=\int_0^2 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=\frac{4}{2}=2\neq 1$$

مثال: 3 اشخاص كل واحد منهم يحمل قطعة معدنية، يرمون مع بعض العملات، اذا تشابهت النتيجة تنتهي اللعبة والا يستمرون في رمي القطع النقدية (اذا كانت القطع منتظة) اوجد احتمال ان تنتهي اللعبة من الرمية الأولى.

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}\Rightarrow$$
$$P\{(H,H,H),(T,T,T)\}=\frac{2}{8}$$

مثال: إذا كان $P(A)=\int_{x\in A} -e^{-x}dx$ $\quad \Omega=(0,\infty)$ فبين أن P هو ليس اقتران احتمال

$$P(\Omega)=\int_0^\infty -e^{-x}dx=e^{-x}\Big|_0^\infty=0-1=-1$$

الحدث المكمل: هو جميع العناصر غير الموجودة في A ويرمز له بالرمز $\overline{A}$.

نظرية: إذا كان P اقتران احتمالي وكانت $A,B\subseteq\Omega$ فإن

1. $\forall A\subseteq\Omega\Rightarrow 0\le P(A)\le 1$
2. $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)$
3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
4. $P(A-B)=P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$
5. $P(\overline{A})=1-P(A)$

المتغيرات العشوائية

تعريف: ليكن Ω فضاء عينة تجربة ما، يعرف المتغير العشوائي X على أنه اقتران معرف على Ω، ومداه مجموعة جزئية من $\Re$ وهو على الشكل $X:\Omega\to\Re$ ويسمى مدى (فضاء) الاقتران X بقيمه ويرمز له بالرمز A_x أي أن

$$A_x=\{x:\quad x\in X(\omega),\ \omega\in\Omega\}$$

مثال: عند رمي حجرين نردين أوجد قيم المتغير العشوائي X الذي يمثل الفرق بين العددين الظاهرين فاوجد فضاء

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\ldots,(1,6)\\(2,1),(2,2),\ldots,(2,6)\\ .\\ .\\(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\end{matrix}\right\}=\{\omega=(i,j):\ i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$X=|i-j|=\{0,1,2,3,4,5\}\Rightarrow A_x=\{0,1,2,3,4,5\}$$

مثال: عند رمي حجرين نردين أوجد قيم المتغير العشوائي X الذي يمثل حاصل جمع العددين الظاهرين فاوجد فضاء

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),\ldots,(1,6)\\(2,1),(2,2),\ldots,(2,6)\\.\\.\\(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\end{array}\right\}=\{\omega=(i,j):\ i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$X=i+j=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\Rightarrow A_x=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

مثال: إذا كانت $\Omega=[-2,4]$ وعرفنا $\omega\in\Omega$ $\quad X=2\omega+1$ فإن $A_x=[-3,9]$

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي فضاؤه A_x وكانت $A\subseteq A_x$ وكانت $A\subseteq A_x$ و $A^*=X^{-1}(A)$
فإن $P\{x\in A\}=P(A^*)$

مثال: إذا كان $\Omega=\{\omega=(i,j):\ i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$ وكان $X=i+j$ فإن إذا كانت

$$1.\ A=\{12\}\Rightarrow P(X\in A)=P(X=12)=P(A^*=\{(6,6)\})=\frac{1}{36}$$

$$2.\ B=\{2,3,4\}\Rightarrow$$

$$P(X\in B)=P(A^*=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2)\})=\frac{6}{36}$$

لاحظ ان

$$P(X=k)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{36} & k=2,3,\ldots,7\\[2mm] \dfrac{13-k}{36} & k=8,9,\ldots,12\end{cases}$$

مثال: 3 اشخاص كل واحد منهم يحمل حجر نرد، يرمون مع بعض احجار النرد، اذا كان X المتغير العشوائي الذي يعد عدد القطع المتشابهة أوجد دالة الكثافة الاحتمالية.

$$A_x=\{0,2,3\}$$

لاحظ ان عدد القطع 3 احجار نرد بالتالي عدد عناصر فضاء العينة هو $6\times6\times6=216$

عدد الخيارات المتشابهة هي $6\times1\times1=6$

عدد خيارات يكون فيه 2 متشابهين $3\times\left(\underbrace{6\times1\times5}_{\text{one dice}}\right)=90$

عدد الخيارات يكون كلهم مختلفين $6\times5\times4=120$

X	**0**	**2**	**3**	**المجموع**
$P(X)$	$\frac{120}{216}$	$\frac{90}{216}$	$\frac{6}{216}$	**1**

مثال: إذا كانت $P(A)=\int_{X\in A}\frac{dx}{2}$ و $\Omega=[0,2]$ وكان $\omega\in\Omega$ $X(\omega)=2\omega+5$ فاوجد $P(5.4\le 2\omega+5\le 8)$.

$$P(5.4\le 2\omega+5\le 8)=P(5.4\le 2\omega+5\le 8)=P(0.2\le\omega\le 1.5)=\int_{0.2}^{1.5}\frac{dx}{2}=\frac{x}{2}\Big|_{0.2}^{1.5}=0.65$$

تعريف: نقول أن X متغير عشوائي منفصل إذا كان A_x قابل للعد، ونقول أنه متصل إذا كان غير قابل للعد.

تعريف: إذا كان A_x هو فضاء المتغير العشوائي X المتصل وكان $\forall X\in A_x \;\; f(x)\ge 0$ وكان

$$P(X\in A)=\int_{X\in A} f(x)dx \quad \forall A\subseteq A_x$$

فإن $f(x)$ تسمى اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير X.

نظرية: $\int_{X\in A_x} f(x)dx=1$

$$1=P(\Omega)=P(X\in A_x)=\int_{X\in A_x} f(x)dx$$

لأن $X^{-1}(A_x)=\Omega$

مثال: أوجد قيمة $a\in\mathbb{R}$ التي تجعل X متغير عشوائي مع العلم

$$P(X\in A)=\int_{X\in A} ax \;\; dx \qquad A_x=[2,4]$$

الحل:

$$1=\int_2^4 ax \;\; dx=a\frac{x^2}{2}\Big|_2^4=a(8-2)\Rightarrow a=\frac{1}{6}$$

ملاحظة: احتمال اي مجموعة منتهية في متغير عشوائي متصل هو صفر

اذا كانت أي مجموعة معدودة $A=\{a_1,a_2,a_3,.....\}$ بالتالي

$$P(X\in A)=\int_{X\in A} f(x)dx=\sum_{a_i\in A}\int_{a_i} f(x)dx=\sum_{a_i\in A}0=0$$

تعريف: إذا كان A_x هو فضاء المتغير العشوائي X المنفصل وكان $\forall X\in A_x \;\; f(x)\succ 0$ وكان

$$P(X\in A)=\sum_{X\in A} f(x) \quad \forall A\subseteq A_x$$

فإن $f(x)$ تسمى اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير X.

ملاحظة: فعليا $P(X=a)=f(a)$

أثبت أن $\sum_{X\in A} f(x)=1$

$$1=P(\Omega)=P(X\in A_x)=\sum_{X\in A} f(x)$$

لأن $X^{-1}(A_x)=\Omega$

مثال: أوجد قيمة k التي تجعل f اقتران احتمال حيث أن $A_x=\{1,2,3,4\}$.

$$1=P(X\in A_x)=\sum_{X\in A} f(x)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=$$

$$=\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}=1\Rightarrow k=10$$

نظرية: إذا كان X متغير عشوائي متصل وكانت $A_x=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$ فإن $P(X\in A_x)=0$

$$P(X\in A_x)=\int_{X\in A_x} f(x)dx=\int_{X\in\{a_1,a_2,\ldots a_n\}} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{X=a_i} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}0=0$$

مثال: اوجد قيمة a التي تجعل $x=1,2,3,\ldots$ $f(x)=a\left(\frac{1}{3}\right)^x$ هو اقتران كثافة احتمال

$$1=\sum_{x=1}^{\infty} f(x)=\sum_{x=1}^{\infty} a\left(\frac{1}{3}\right)^x=-a+\sum_{x=0}^{\infty} a\left(\frac{1}{3}\right)^x=-a+\frac{a}{1-\frac{1}{3}}=-a+\frac{3}{2}a=\frac{a}{2}\Rightarrow a=2$$

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي وكانت f اقتران كثافة الاحتمال فيعرف اقتران التوزيع الاحتمالي للمتغير X ونرمز لها بالرمز $F(X)$ كما يلي:

1. المتغير العشوائي المتصل

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

وبناء على *Fundamental Theory of Calculus* فإن $f(x)=\frac{\partial}{\partial x}F(x)$

2. المتغير العشوائي المنفصل

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{X\le x} f(x)$$

مثال: اثبت ان الاقتران $x>0,\theta\in\Re^+$ $f(x)=\frac{b}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^b}$ هو اقتران كثافة احتمال واوجد اقتران التوزيع الاحتمالي له

لاحظ أن $\forall x>0$ $f(x)\ge 0$ وأيضا لنفرض أن $y=\left(\frac{x}{\theta}\right)^b\Rightarrow dy=\frac{b}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1}dx$ وبالتالي:

$$\int_0^\infty \frac{b}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^b} dx = \int_0^\infty e^{-y} dy = 1$$

والان

$$F(t) = \int_0^t \frac{b}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^b} dx = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^b}$$

مثال 16: رميت قطعة من النقود 3 مرات، وكان X متغير عشوائي يمثل عدد الصور الظاهرة فأوجد اقتران التوزيع الاحتمالي

$$\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$X : \Omega \to A_x$$

$$(H,H,H) \to 3 \to f(3) = \frac{1}{8}$$

$$(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H) \to 2 \to f(2) = \frac{3}{8}$$

$$(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H) \to 1 \to f(1) = \frac{3}{8}$$

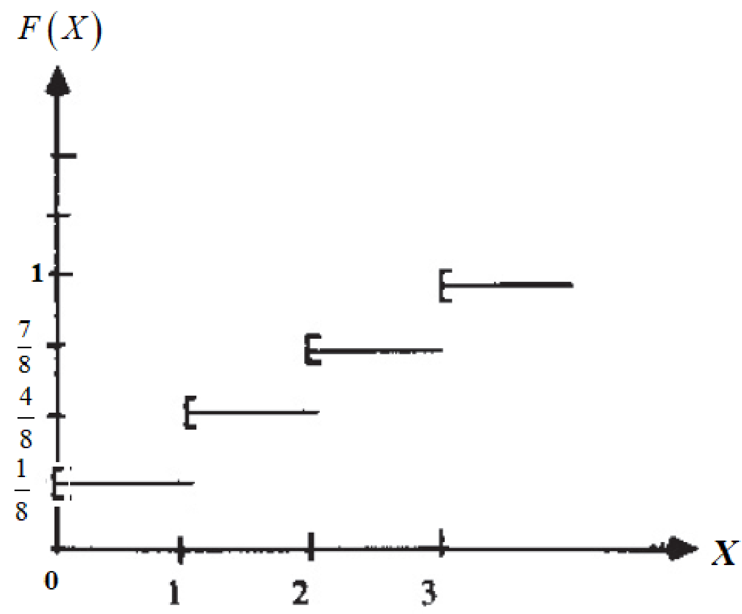
$$(T,T,T) \to 0 \to f\ 0 = \frac{1}{8}$$

$$F(0) = P(X \le 0) = \sum_{X \le 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{X \le 1} f(x) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{X \le 2} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{X \le 3} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8}$$



X	0	1	2	3
$F(X)$	$1/8$	$4/8$	$7/8$	$8/8=1$

مثال: إذا كان اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير المنفصل X فأوجد ما يلي:

X	1	2	3	4	المجموع
$f(X)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1

1. $F(1)=P(X\le 1)=\sum_{X\le 1} f(x)=f(1)=0.1$
2. $F(1.5)=P(X\le 1.5)=\sum_{X\le 1.5} f(x)=f(1)=0.1$
3. $F(1.999999)=P(X\le 1.9999999)=\sum_{X\le 1.99999} f(x)=f(1)=0.1$
4. $F(2)=P(X\le 2)=\sum_{X\le 2} f(x)=f(1)+f(2)=0.1+0.2=0.3$
5. $F(3)=P(X\le 3)=\sum_{X\le 3} f(x)=f(1)+f(2)+f(3)=0.1+0.2+0.3=0.6$
5. $F(3)=P(X\le 4)=\sum_{X\le 4} f(x)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0.1+0.2+0.3+0.4=1$

وعند رسمها تكون على شكل درج

مثال: رميت حجرين نرد، وكان X متغير عشوائي يمثل الفرق بين نتيجة الحجرين الظاهرة فاوجد قيم اقتران التوزيع الاحتمالي

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\dots,(1,6)\\(2,1),(2,2),\dots,(2,6)\\.\\.\\(6,1),(6,2),\dots,(6,6)\end{matrix}\right\}=\{(i,j):\ i,j\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$X:\Omega\to A_x$$

$$\begin{array}{rcl}
(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6) & \to & 0\\
(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5) & \to & 1\\
(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4) & \to & 2\\
(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),(6,3) & \to & 3\\
(1,5),(5,1),(2,6),(6,2) & \to & 4\\
(1,6),(6,1) & \to & 5
\end{array}$$

$$F(0)=P(X\le 0)=\sum_{X\le 0} f(x)=f(0)=\frac{6}{36}$$

$$F(1)=P(X\le 1)=\sum_{X\le 1} f(x)=f(0)+f(1)=\frac{6}{36}+\frac{10}{36}=\frac{16}{36}$$

$$F(2)=P(X\le 2)=\sum_{X\le 2} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)=\frac{6}{36}+\frac{10}{36}+\frac{8}{36}=\frac{24}{36}$$

$$F(3)=P(X\le 3)=\sum_{X\le 3} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=$$

$$\frac{6}{36}+\frac{10}{36}+\frac{8}{36}+\frac{6}{36}=\frac{30}{36}$$

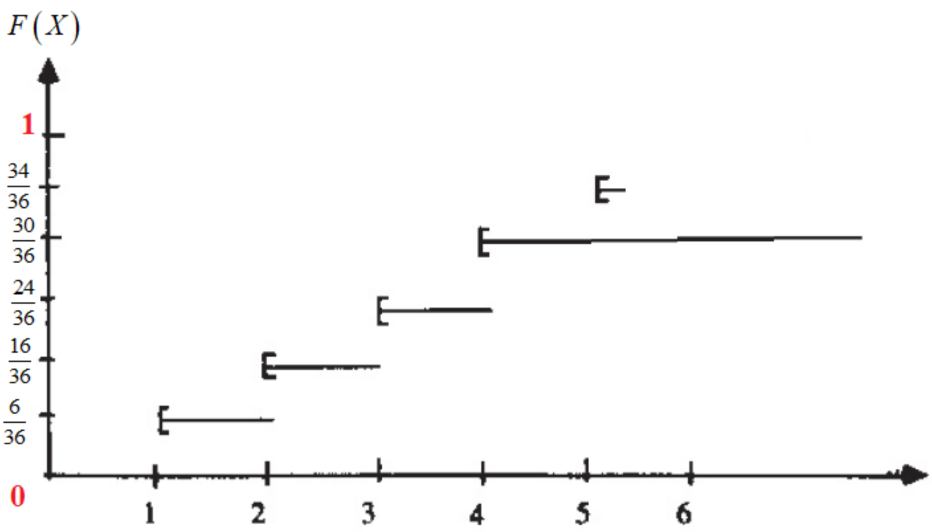
$$F(4)=P(X\le 4)=\sum_{X\le 4} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=$$

$$\frac{6}{36}+\frac{10}{36}+\frac{8}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}=\frac{34}{36}$$

$$F(5)=P(X\le 5)=\sum_{X\le 5} f(x)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$$

$$=\frac{6}{36}+\frac{10}{36}+\frac{8}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{36}{36}$$

X	0	1	2	3	4	5
$F(X)$	$6/36$	$16/36$	$24/36$	$30/36$	$34/36$	$36/36=1$



خصائص اقتران التوزيع الاحتمالي

1. $F(-\infty)=0 \qquad F(\infty)=1$
2. $0 \le F(x) \le 1$
3. $F(a)=\int_{-\infty}^{a} f(t)dt=\sum_{X\le a} f(x)$
4. $P\{X=a\}=\int_{a}^{a} f(t)dt=0 \Rightarrow P\{a-\varepsilon \le X \le a+\varepsilon\}=\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)dx \approx \varepsilon f(a)$
5. $\dfrac{\partial F(a)}{\partial a}=f(a)$
6. $x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1)<F(x_2)$
7. $x_1<x_2 \Rightarrow P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

ملاحظة: يسمى اقتران التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل بالدرجية Step Function لماذا؟

التوقع والتباين

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي، واقتران كثافته الاحتمالي هو $f(x)$ وإذا كان $U(x)$ اقتران معرف باستخدام X فنعرف توقع $U(x)$ على أنه

1. المتغير المتصل

$$E[U(x)]=\int_{X\in A_X} U(x)f(x)dx$$

2. المتغير المنفصل

$$E[U(x)]=\sum_{X\in A_X} U(x)f(x)$$

ويعرف توقع المتغير X (متوسطه، معدله)

$$\mu=E[X]=\underbrace{\sum_{X\in A_X} xf(x)}_{discrete}=\underbrace{\int_{X\in A_X} xf(x)dx}_{continuouse}$$

مثال: إذا كان $x\in(0,1) \qquad f(x)=2x$ فاوجد ما يلي:

1. $E[X]=\int_{X\in A_X} xf(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=2\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1=\dfrac{2}{3}$
2. $E[X^2]=\int_{X\in A_X} x^2f(x)dx=\int_0^1 2x^3dx=2\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$
3. $E[2X+1]=\int_{X\in A_X}(2x+1)f(x)dx=\int_0^1(2x+1)2xdx=\int_0^1(4x^2+2x)dx=\left.4\dfrac{x^3}{3}+x^2\right|_0^1=\dfrac{4}{3}+1=\dfrac{7}{3}$

4. $E\left[X\left(X-1\right)\right]=\int\limits_{X\in A_X} x\left(x-1\right)f\left(x\right)dx=\int\limits_0^1 x\left(x-1\right)2xdx=\int\limits_0^1 2\left(x^3+x^2\right)dx=$

$$2\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\Big|\right)_0^1=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{12}$$

مثال: إذا كان $x\in\left(0,\infty\right)$ $f\left(x\right)=\frac{1}{5}e^{-x/5}$ فاوجد ما يلي:

$$E\left[X\right],E\left[X^2\right],E\left[2X+1\right],E\left[X\left(X-1\right)\right]$$

مثال: في المثال رقم 16 أوجد ما يلي:

1. $E\left[X\right]=\sum\limits_{X\in A_X} xf\left(x\right)=0\times f\left(0\right)+1\times f\left(1\right)+2\times f\left(2\right)+3\times f\left(3\right)=$

$$=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}$$

2. $E\left[X^2\right]=\sum\limits_{X\in A_X} x^2f\left(x\right)=0^2\times f\left(0\right)+1^2\times f\left(1\right)+2^2\times f\left(2\right)+3^2\times f\left(3\right)=$

$$=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+9\times\frac{1}{8}=\frac{24}{8}$$

3. $E\left[2X+1\right]=\sum\limits_{X\in A_X}\left(2x+1\right)f\left(x\right)=1\times f\left(0\right)+3\times f\left(1\right)+5\times f\left(2\right)+7\times f\left(3\right)=$

$$=1\times\frac{1}{8}+3\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}+7\times\frac{1}{8}=\frac{32}{8}$$

4. $E\left[X\left(X-1\right)\right]=\sum\limits_{X\in A_X} x\left(x-1\right)f\left(x\right)=0\times f\left(0\right)+0\times f\left(1\right)+2\times f\left(2\right)+6\times f\left(3\right)=$

$$=0\times\frac{1}{8}+0\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}$$

مثال: اثبت أنه اذا كان X متغير عشوائي متصل وكان $X\geq 0$ فإن

$$E\left(X\right)=\int\limits_0^\infty\left[1-F\left(x\right)\right]dx$$

الاثبات:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[1-F\left(x\right)\right]=-f\left(x\right)\Rightarrow\partial\left[1-F\left(x\right)\right]=-f\left(x\right)dx\Rightarrow$$

$$E\left(X\right)=\int\limits_0^\infty xf\left(x\right)dx=\int\limits_0^\infty -x\partial\left[1-F\left(x\right)\right]\Rightarrow\begin{cases}u=x & \partial v=-\partial\left[1-F\left(x\right)\right]\\ du=dx & v=-\left[1-F\left(x\right)\right]\end{cases}$$

$$E\left(X\right)=\int\limits_0^\infty -x\partial\left[1-F\left(x\right)\right]=x\left[1-F\left(x\right)\right]\Big|_0^\infty-\int\limits_0^\infty -\left[1-F\left(x\right)\right]dx$$

$$E\left(X\right)=\int\limits_0^\infty\left[1-F\left(x\right)\right]dx$$

نظرية: إذا كان X متغير عشوائي، واقتران كثافته الاحتمالي هو $f(x)$ وإذا كان $U(x)$ اقتران معرف باستخدام X فإن

1. $E[aX+b]=aE[X]+b$
2. $E[aU(X)+b]=aE[U(X)]+b$
3. $E[U(X)+G(X)]=E[U(X)]+E[G(X)]$

الاثبات

1. في حالة تامتغير العشوائي المتصل

$$1.\ E[aX+b]=\int_{X\in A_X}(ax+b)f(x)dx=$$

$$a\left[\int_{X\in A_X}xf(x)dx\right]+b\left[\int_{X\in A_X}f(x)dx\right]=aE[X]+b$$

$$2.\ E[aU(X)+b]=\int_{X\in A_X}(aU(x)+b)f(x)dx=$$

$$a\left[\int_{X\in A_X}U(x)f(x)dx\right]+b\left[\int_{X\in A_X}f(x)dx\right]=aE[U(X)]+b$$

$$3.\ E[U(X)+G(X)]=\int_{X\in A_X}[U(X)+G(X)]f(x)dx=$$

$$=\int_{X\in A_X}U(x)f(x)dx+\int_{X\in A_X}G(x)f(x)dx=E[U(X)]+E[G(X)]$$

2. في حالة المتغير العشوائي المنفصل.

يترك كواجب للطلاب

تعريف: يعرف تباين المتغير العشوائي X على أنه

$$\sigma^2=Var(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]=E\left[(X-\mu)^2\right]$$

نظرية: $\sigma^2=E[X^2]-E^2[X]$

$$\sigma^2=E\left[(X-\mu)^2\right]=E\left[X^2-2\mu X+\mu^2\right]=E[X^2]-2\mu E[X]+E[\mu^2]$$

$$=E[X^2]-2\mu^2+\mu^2=E[X^2]-\mu^2=E[X^2]-E^2[X]$$

نظرية: إذا كان X متغير عشوائي توقعه μ وتباينه $\sigma^2 = Var(X)$ فاثبت ما يلي:

1. $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$
2. $Var(U(X) \pm G(X)) = Var(U(X)) + Var(G(X))$

$$1.\ Var(aX+b) = E\left[(aX+b)^2\right] - \left(E\left[(aX+b)\right]\right)^2 =$$

$$E\left[a^2X^2 + 2abX + b^2\right] - \left(aE(X)+b\right)^2 =$$

$$\left(a^2E\left[X^2\right] + 2abE[X] + b^2\right) - \left(a^2\mu^2 + 2ab\mu + b^2\right)$$

$$a^2\left(E\left[X^2\right] - \mu^2\right) = a^2 Var(X)$$

$$2.\ Var(U(X) \pm G(X)) = Var(U(X)) + Var(G(X))$$

مثال: أوجد توقع وتباين المتغير العشوائي X إذا كان

$$1.\ f(0) = \frac{8}{27} \quad f(1) = \frac{12}{27} \quad f(2) = \frac{6}{27} \quad f(3) = \frac{1}{27}$$

$$2.\ f(x) = \frac{1+|x-3|}{11} \qquad x = 1,2,3,4,5$$

$$1.\ E[X] = \sum_{0}^{3} xf(x) = 0\times\frac{8}{27} + 1\times\frac{12}{27} + 2\times\frac{6}{27} + 3\times\frac{1}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

$$E\left[X^2\right] = \sum_{0}^{3} x^2 f(x) = 0^2\times\frac{8}{27} + 1^2\times\frac{12}{27} + 2^2\times\frac{6}{27} + 3^2\times\frac{1}{27} = \frac{45}{27}$$

$$\sigma^2 = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \frac{45}{27} - 1 = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$2.\ f(1) = \frac{1+|1-3|}{11} = \frac{3}{11}\quad f(2) = \frac{2}{11},\ f(3) = \frac{1}{11},\ f(4) = \frac{2}{11},\ f(5) = \frac{3}{11}$$

$$E[X] = \sum_{0}^{5} xf(x) = 1\times\frac{3}{11} + 2\times\frac{2}{11} + 3\times\frac{1}{11} + 4\times\frac{2}{11} + 5\times\frac{3}{11} = \frac{33}{11} = 3$$

$$E\left[X^2\right] = \sum_{0}^{3} x^2 f(x) = 1^2\times\frac{3}{11} + 2^2\times\frac{2}{11} + 3^2\times\frac{1}{11} + 4^2\times\frac{2}{11} + 5^2\times\frac{3}{11} = \frac{127}{11}$$

$$\sigma^2 = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \frac{127}{11} - 3^2 = \frac{28}{11}$$

مثال: أوجد توقع وتباين المتغير العشوائي X التالي

$$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha} \qquad x \in (\alpha,\beta) \subseteq \Re$$

$$E[X]=\int_{X\in A_X} xf(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\frac{x^2}{2}\Big|_{\alpha}^{\beta}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$E\left[X^2\right]=\int_{X\in A_X} x^2f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} x^2\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\frac{x^3}{3}\Big|_{\alpha}^{\beta}=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)}=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

$$\sigma^2=E\left[X^2\right]-E^2[X]=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}-\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}-\frac{\beta^2+2\alpha\beta+\alpha^2}{4}$$

$$\frac{4\beta^2+4\alpha\beta+4\alpha^2}{3}-\frac{3\beta^2+6\alpha\beta+3\alpha^2}{4}=\frac{\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2}{12}=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

الاقتران المولد للعزوم

تعريف: إذا كان X هو متغير عشوائي وكان $h\in+^{+}$، يعرف الاقتران المولد للعزوم على أنه توقع الاقتران $U(x)=e^{tx}$ ويرمز له بالرمز $\mu(t)$

1. المتغير المتصل

$$\mu_X(t)=E\left[e^{tx}\right]=\int_{X\in A_X} e^{tx}f(x)dx$$

2. المتغر المنفصل

$$\mu_X(t)=E\left[e^{tx}\right]=\sum_{X\in A_X} e^{tx}f(x)$$

مثال: إذا كان اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير المنفصل X فأوجد ما يلي:

X	1	3	5	6	المجموع
$f(X)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1

اوجد الاقتران المودل للعزوم

$$\mu_X(t)=\sum_{X\in A_X} e^{tx}f(x)=f(0)+e^{t}f(1)+e^{2t}f(2)+\dots.$$
$$=0.1e^{t}+0.2e^{3t}+0.3e^{5t}+0.4e^{6t}$$

مثال: أوجد الاقتران المولد للعزوم للمتغير X الذي اقتران كثافته الاحتمالي هو $f(x)=e^{-x}\quad x\succ 0$

$$\mu_X(t)=E\left[e^{tx}\right]=\int_{X\in A_X} e^{tx}f(x)dx=\int_{0}^{\infty}\left(e^{tx}\right)\left(e^{-x}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-x(1-t)}dx=\frac{1}{1-t}\int_{0}^{\infty}(1-t)e^{-x(1-t)}dx=\frac{1}{1-t}$$

مثال: أوجد الاقتران المولد للعزوم للمتغير X في توزيع ذات الحدين الذي اقتران كثافته الاحتمالي

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}\qquad x=0,1,2,\dots,n$$

$$\mu_X(t)=E\left[e^{tx}\right]=\sum_{X\in A_X}e^{tx}f(x)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^xq^{n-x}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(pe^t\right)^xq^{n-x}=\left(q+pe^t\right)^n$$

كتطبيق على المثال أعلاه، اذا رمي قطعة نقد 3 مرات وكان X يمثل عدد مرتا ظهور الصور اوجد الاقتران المولد للعزوم

بما ان رمي حجر النرد يمثل ذات الحدين فسيكون الاقتران المولد للعزوم هو

$$\left(0.5+0.5e^t\right)^3=\left(0.5\left(1+e^t\right)\right)^3$$

مثال: اذا كان الاقتران المولد للعزوم هو $\mu_X(t)=0.3+0.2e^t+0.5e^{3t}$ فاوجد اقتران الكثافة الاحتمالي واقتران التوزيع الاحتمالي

بما ان الاقتران المولد للعزوم تعريفه هو $\mu_X(t)=\sum_{X\in A_X}e^{tx}f(x)=f(0)+e^tf(1)+e^{2t}f(2)+....$

بمقارنته بالمعطى يكون اقتران الكثافة الاحتمالي

X	0	1	3	Total
$f(x)$	0.3	0.2	0.5	1
$F(x)$	0.3	0.5	1	

مثال: اثبت ان $\mu'(0)=E(X)$ و ان $\mu_X{}^k(0)=E(X^k)$

$$\mu'_X(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{X\in A_X}e^{tx}f(x)dx\right)=\int_{X\in A_X}xe^{tx}f(x)dx\Rightarrow\mu'(0)=\int_{X\in A_X}xf(x)dx=E(X)$$

$$\mu_X{}^{(k)}(t)=\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\int_{X\in A_X}e^{tx}f(x)dx\right)=\int_{X\in A_X}x^kf(x)e^{tx}dx\Rightarrow\mu^{(k)}(0)=\int_{X\in A_X}x^kf(x)dx=E(X^k)$$

نتيجة: $Var(X)=\mu''_X(0)-\left[\mu'_X(0)\right]^2$

وهي تستخدم عادة طالما ان الاقتران المولد للعزوم معروف كما سنرى ذلك في الوحدة الثالثة

مثال: اذا كان الاقتران المولد للعزوم لمتتغير ما هو $\left(0.3+0.7e^t\right)^2$ فاوجد توقع وتباين المتغير

الحل الأول : من المثال السابق هذا الاقتران المولد للعزوم لذات الحدين وعليه فإن $q=0.3, p=0.7, n=10$ فيكون اقتران الكثافة الاحتمالي هو

X	0	1	2	Total
$f(x)$	0.09	0.42	0.49	1
$E(X)$	0	0.42	0.98	1.4
$E(X^2)$	0	0.42	1.96	2.38

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=2.38-(1.4)^2=2.38-1.96=0.42$$

الحل الثاني

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\mu_X{}''(0)-\left[\mu_X{}'(0)\right]^2=2.38-(1.4)^2=2.38-1.96=0.42$$

ملاحظات

1. **يمكن معرفة التوقع والتباين كما يلي**

$$e^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\Rightarrow$$

$$E\left(e^{tx}\right)=E\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}E\left(x^n\right)\frac{t^n}{n!}\Rightarrow$$

$$=1+E(x)\frac{t}{1!}+E\left(x^2\right)\frac{t^2}{2!}+E\left(x^3\right)\frac{t^3}{3!}+....+\frac{t^n\times E\left(X^n\right)}{n!}$$

حيث بالنسبة للمتغير المتصل ايضا

$$\mu_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\int_{X\in A_X}e^{tX}f(x)\,dx=\int_{X\in A_X}\left(1+tx+\frac{(tx)^2}{2!}+...+\frac{(tx)^n}{n!}+....\right)f(x)\,dx$$

$$=1+t\times E(X)+\frac{t\times E\left(X^2\right)}{2!}+....\frac{t^n\times E\left(X^n\right)}{n!}+....$$

2. **اذا كانت** $R(t)=\ln\mu_X(t)$ **فإن**

$$R'(0)=E(X)\qquad R''(0)=Var(X)$$

بما أن

$$R(t)=\ln\mu_X(t)\Rightarrow R'(t)=\frac{\mu_X'(t)}{\mu_X(t)}\Rightarrow R'(0)=\frac{\mu_X'(0)}{\mu_X(0)}=\frac{E(X)}{1}=E(X)$$

$$R''(t)=\frac{\mu_X''(t)\mu_X(t)-\left[\mu_X'(t)\right]^2}{\left[\mu_X(t)\right]^2}\Rightarrow$$

$$R''(0)=\frac{\mu_X''(0)\mu_X(0)-\left[\mu_X'(0)\right]^2}{\left[\mu_X(0)\right]^2}=\frac{E\left(X^2\right)\times1-\left[E(X)\right]^2}{1^2}=Var(X)$$

.3

$$\mu_{aX+b}(t)=E\left[e^{t(aX+b)}\right]=\int_{X\in A_X}e^{t(aX+b)}f(x)\,dx=e^{bt}\mu_X(at)$$

مثال:

إذا كان $M(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$ الإقتران المولد للعزوم للمتغير العشوائي X أوجد:

أ- $E(X)$ ب- $E(X^4)$ ج- $E(X^5)$

$$M(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}t^2)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}t^{2n}$$

$$=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2^2 2!}t^4+\frac{1}{2^3 3!}t^6+\ldots$$

$$=1+1\frac{t^2}{2!}+\frac{4!}{8}\frac{t^4}{4!}+\frac{6!}{8(3!)}\frac{t^6}{6!}+\ldots$$

منها نستنتج أن:

$$E(X)=0,\ E(X^2)=1,\ E(X^3)=0$$

$$E(X^4)=\frac{4!}{8},\ E(X^5)=0$$

مثال: اذا كان $x=1,2,3,\ldots$ $f(x)=2\left(\frac{1}{3}\right)^x$ هو اقتران كثافة احتمال اوجد الاقتران المولد للعزوم

$$\mu_X(t)=E\left(e^{tx}\right)=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}f(x)=\sum_{x=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^x e^{tx}=-2+\sum_{x=0}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^x e^{tx}$$

$$=-2+\sum_{x=0}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}e^t\right)^x=-2+\frac{2}{1-\frac{1}{3}e^t}=-2+\frac{6}{3-e^t}=\frac{-6+2e^t+6}{3-e^t}=\frac{2e^t}{3-e^t}$$

نظرية:(متباينة تشبيشيف) إذا كان X متغير عشوائي وكان $\forall x$ $U(X)\geq 0$ أي اقتران في X فإن

$$P\left(U(x)\geq c\right)\leq\frac{E\left[U(x)\right]}{c}$$

الاثبات: حالة المتغير المنفصل.

$$E\left[U(x)\right]=\sum_{X\in A_X}U(x)f(x)$$

لنأخذ $A_1=\{x\in A_x:U(x)\geq c\}$ و $A_2=\{x\in A_x:U(x)\prec c\}$ بالتالي $A_1\bigcup A_2=A_x$ و $A_1\bigcap A_2=\phi$

وعليه فإن

$$E\left[U(x)\right]=\sum_{X\in A_X}U(x)f(x)=\sum_{X\in A_1}U(x)f(x)+\sum_{X\in A_2}U(x)f(x)\Rightarrow$$

$$E\left[U(x)\right]\geq\sum_{X\in A_1}U(x)f(x)\geq\sum_{X\in A_1}cf(x)=c\sum_{X\in A_1}f(x)\Rightarrow$$

$$\frac{E\left[U(x)\right]}{c}\geq\sum_{X\in A_1}f(x)=P(U(x)\geq c)\Rightarrow$$

$$P(U(x)\geq c)\leq\frac{E\left[U(x)\right]}{c}$$

في الكتاب مثبت في حالة المتغير المتصل.

صور أخرى لمتباينة تشيبيتشيف: ممكن كتابتها على الصور التالية

$$P(|X-\theta|\geq\varepsilon)\leq\frac{E(X-\theta)^2}{\varepsilon}\qquad\text{where } E(X)=\theta$$

$$P(|X-\theta|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{E(X-\theta)^2}{\varepsilon}\qquad\text{where } E(X)=\theta$$

$$P\left(|X-E(X)|\geq\sqrt{k^2 Var(X)}\right)\leq\frac{1}{k^2}\qquad P\left(|X-E(X)|\leq\sqrt{k^2 Var(X)}\right)\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

مثال: استخدم متباينة تشيبشيف لاثبات ما يلي:

$$P(X\geq a)\leq e^{-at}\mu(t)$$

الاثبات

$$\{x\in A_X : X\geq a\}=\{x\in A_X : tX\geq at\}=\{x\in A_X : e^{tX}\geq e^{at}\}\Rightarrow$$

$$P(X\geq a)=P\left(e^{tX}\geq e^{at}\right)$$

لنأخذ $U(X)=e^{tX}$ في متباينة تشبيشيف و $c=e^{at}$ بالتالي فإن

$$P\left(e^{tX}\geq e^{at}\right)\leq\frac{E\left[e^{tX}\right]}{e^{at}}=e^{-at}\mu(t)$$

مثال: اذا كان X متغير عشوائي وسطه 4 وتباينه 9 اوجد الحد الأدنى لاحتمال $P(-2<X<10)$ باستخدام تشيبيتشف

$$P(-2<X<10)=P(-2-4<X-4<10-4)=P(-6<X-4<6)$$

$$=P\Bigg(|X-4|<\underbrace{6}_{k\sigma}\Bigg)\geq 1-\frac{1}{k^2}=1-\frac{1}{2^2}=0.75$$

مثال: اذا كان الاقتران المولد للعزوم للمتغير X هو $\mu_X(t)=\dfrac{1}{(1-3t)^2}$ اوجد الحد الأدنى لاحتمال $P(1<X<11)$ باستخدام تشيبيتشف

$$X \sim G(2,3) \Rightarrow E(X)=6,\ \ Var(X)=18$$

$$P(1<X<11)=P(1-6<X-6<11-6)=P\left(|X-6|\le \underbrace{5}_{k\sigma}\right)$$

$$k\sqrt{18}=5 \Rightarrow k=\frac{5}{\sqrt{18}} \Rightarrow k^2=\frac{25}{18}$$

$$P(1<X<11)=P(|X-6|\le 5)\ge 1-\frac{25}{18}=\frac{7}{25}$$

مثال: اذا كان $\mu_X(t)=\dfrac{2}{2-t}$ اوجد الحد الأدنى لاحتمال $P(-0.5<X<1.5)$ باستخدام تشيبيتشف

$$\mu_X(t)=\frac{2}{2-t} \Rightarrow E(X)=\mu_X'(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow Var(X)=\mu_X''(0)-\left[\mu_X'(0)\right]^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(-0.5<X<1.5)=P(-0.5-0.5<X-0.5<1.5-0.5)=P\left(|X-0.5|\le \underbrace{1}_{k\sigma}\right)$$

$$0.5k=1 \Rightarrow k=2 \Rightarrow k^2=4$$

$$P(-0.5<X<1.5)=P(|X-0.5|\le 1)\ge 1-\frac{1}{4}=0.75$$