هكذا نكون انهينا مادة الامتحان النصفي ، على ان لا ننسى اهمية امثلة الكتاب المقرر والتدريبات المذكورة فيه☺

الوحدة الخامسة

القوانن التي تحكم اقتران e^x , lnx

قوانين اقتران الاس الطبيعي e^x

- اذا كان ln y=x فان $y= e^x$
- $e^{\ln y} = y$
- Ln e=1

قوانين الاسس:

- ضرب الاسس = جمعها $x^4 * x^5 = x^9$
- قسمة الاسس= طرحها $\frac{x^5}{x^4} = x$
- رفع الاسس = ضربها $(x^5)^4 = x^{20}$

قوانين اللوغاريتمات:

- Log xy=log x + log y
- Log x/y=log x- log y
- $\log x^y = y \log x$

العدد النيبيري e=2,7 اذا دخل على اللوغاريتم بصفة اساس يسمى لوغاريتم طبيعي رمزه

$$log_e x = \ln x$$

اقتران اسي مطلوب اشتقاقه وتكامله

ارجع للصفحة 257من الكتاب المقرر وانظر رسمة الاقتران الاسي واللوغاريتمي

ملاحظات:

$$\ln 1 = 0 \ , \ln e = 1 \ , a^0 = 1 \ , log_e e = 1$$

الاشتقاق اذا كان $y = a^{f(x)} --- y` = a^{f(x)} f`(x) \ln a$

** جد `y اذا كان ? $y = 3^{x^2}$

$y` = 3^{x^2}(2x)ln3$

اذا كان $y = e^{x^2-2x+1}$ ؟ $y` = (2x-2)(e^{x^2-2x+1})$

اشتقاق الاقترانـي اللوغاريتم الطبيعي والاس الطبيعي

- مشتقة الاقتران y=ln x تساوي $y` = \frac{1}{x}$
- اذا كانت u=g(x) وكانت $y = ln|u|$ فان :

$\frac{dy}{dx} = u` \left[\frac{1}{u}\right] = \frac{u`}{u}$ ومكننا التعبيلا عما سبق ب مشتقة اللوغاريتم الطبيعي لاقتران ما تساوي (مشتقة الاقتران قسمة الاقتران نفسه)

الاشتقاق باستخدام اللوغاريتمات:

- نكتب المعادلة على صيغة *y=f(x)*
- ناخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين : *ln y= ln f(x)*
- نبسط المقدار ، ونجد المشتقة باستخدام الاشتقاق الضمني فينتج لدينا

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln f(x)$$

- واخيرا نضرب الطرفين ب *y=f(x)* --- $\frac{dy}{dx} = y\ \frac{d}{dx}[\ln f(x)]$

الاقترانات الاسية واللوغاريتمية العامة

يعرف الاقتران الاسي العام بانه عبارة عنثابت مرفوع الى اس متغير مثل: $f(x) = a^x$
حيث متغير و a عدد ثابت موجب وله صور عدة مثل :

$$a^x = e^{x\ln a} = e^{x\ln a^x}$$

$$\ln a^u = \ln e^{u\ln a} = u\ln a$$

وتنطبق قوانين الاسس على هذا الاقتران تماما .

اشتقاق الاقتران الاسي العام:

- اذا كانت $y = a^x = e^{x\ln a}$
  فان : $y` = a^x lna$
- بصورة عامة :اذا كانت *u=g(x)* ،، $y = a^u$ فان $y` = ua^u lna`$

الاقتران اللوغاريتمي العام:

يعرف بانه : $x = log_a y$ كما يمكن كتابته $y= a^x$

مشتقه الاقتران اللوغاريتمي العام:

$$y = log_a x \quad ,y` = \frac{1}{u \ln a}$$

$$y = log_a u \qquad U=g(x) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{u`}{u\, lna}$$

انظر للجدول *265* يوضح مشتقات الاقترانات الاسية واللوغاريتمية العامة

مشتقة الاقترانات المثلثية العكسة:

لنعد الى الرسومات الموجودة ف الكتاب المقرر ونكمل :

مشتقة الاقتران	الاقتران
$\frac{u`}{\sqrt{(1-u^2)}}$	$sin^{-1}u$
$\frac{-u`}{\sqrt{(1-u^2)}}$	$cos^{-1}u$
$\frac{u`}{1+u^2}$	$tan^{-1}u$
$\frac{u`}{u\sqrt{(u^2-1)}}$	$sec^{-1}u$

تكاملات الاس الطبيعي و اللوغاريتم الطبيعي:

- $\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$
- $\int \frac{1}{u \ln a} du = log_a u + c$
- $\int e^u \, du = e^u + c$
- $\int a^u \ln a \, du = a^u + c$

في الحالتين الاخيرتين يجب الانتباه الى الاسس المرفوعه لها القوى مثل : e^{x^2} حيث نجد مشتقاتها ونضربها في الاقتران وتخرج خارج التكامل .

ملاحظة: في الكحالة الاخيرة اذا لم يكن $a^u = \ln a$ نقسم ونضربها في *ln a* فيكون الجواب

$$\frac{a^u}{\ln a}$$

تكامل اقترانات نواتجها اقترانات مثلثية عكسية

يحل بطريقتين ، اما قانون ويطبق عليه او كما نحل التكامل الغير مباشر :

- $\int \frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)}} = -sin^{-1}u + c$ وهذا قانون للحفظ
- $\int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1} u + c$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{(u^2-1)}} = \sec^{-1} u + c$

....

الوحدة السادسة

الاقترانات الزائدية:

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ تقرا سنش x
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ كوش x
- Tanh x=$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ تانش x
- Coth x=$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ كوتش x
- Sech x=$\frac{2}{e^x + e^{-x}}$ سيشx
- Coseh x=$\frac{2}{e^x - e^{-x}}$

ملاحظة: احفظ رسومات الزائدية او كون جدول بفرض نقاط العلاقة بين الاقترانات الزائدية (حفظ)

- $cos^2x + \sin^2x = 1$ و $cosh^2x - \sinh^2x = 1$
- $sec^2x = 1 + \tan^2x$ و $sech^2x = 1 - \tanh^2x$
- $cosec^2x = cot^2x + 1$ و $cosech^2x = coth^2x - 1$

الاقترانات الزائدية العكسية :

حفظ صيغ الاقترانات الزائدية العكسية اللوغاريتمية:

- $sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{(x^2+1)}$
- $cosh^{-1}x = (x + \sqrt{(x^2-1)}$ حيث $|x| \geq 1$
- $tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $-1 < x < 1$
- $sech^{-1}x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ $0 < x \leq 1$

تفاضل الاقترانات الزائدية :

مشتقة الاقتران	الاقتران
Cosh(x)	Sinh(x)
-sinh(x)	Cosh(x)
$\sec^2 h(x)$	Tanh(x)
-Tanh (x) sech(x)	sech(x)
-cosech(x) coth(x)	Cosec(c)
$-cosec^2h(x)$	Coth(x)

تفاضل الاقترانات الزائدية العكسية:

الاقتران	مشتقة الاقتران
$sinh^{-1}\mathrm{u}$	$\frac{u`}{\sqrt{(1-\mathrm{u}^2)}}$
$cosh^{-1}\mathrm{u}$	$\frac{-u`}{\sqrt{(1-\mathrm{u}^2)}}$
$tanh^{-1}\mathrm{u}$	$\frac{\mathrm{u}`}{1+\mathrm{u}^2}$
$sech^{-1}\mathrm{u}$	$\frac{u`}{\mathrm{u}\sqrt{(\mathrm{u}^2-1)}}$

تفاضل الاقترانات الزائدية والعكسية

يمكن ايجاد مشتقة الاقترانات الزائدية والعكسية وذلك بالتعبير عن تلك الاقترانات باللوغاريتمات الطبيعية اولا ثم اجراء عملية الاشتقاق ثانيا

تكامل الاقترانات الزائدية

اجري تكامل لمشتقة كل اقتران عكسي تحصل على الاقتران الاولي

حل المعادلات التفاضلية :

$\frac{dy}{dx} = \frac{2+\sin x}{2y+\sin^2 y}$ الحل بالضرب التبادلي نحصل على $\frac{2y^2}{2} + \tan y = 2x - \cos x$

بتكامل الطرفين:

$$y^2 + tanx = 2x - cosx$$

الوحدة السابعه:

المساحة بين المنحنيات:

اذا طلب مساحة تحت منحنى f(x) من x=a الى x=b فهي":$\int_a^b f(x)dx$

واذا طلب مساحة بين f(x) , g(x) على الفترة [a,b] فهي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

اما اذا كان [a,b] غير معطاة في السؤال ، نساوي f(x)=g(x) لايجاد نقاط التقاطع

....

الحجوم الدورانية:

طريقه الاقراص: $v = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

$$v = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx$$

طريقة القشرة:

$$v = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

المقاطع الموازية: $v = \int_a^b a(x)dx$

ملاحظة: اذا كانت مساحة المقطع ثابته وتساوي a كما في موازي المستطيلات فان حجم الجسم يساوي مساحة المقطع في متوازي المستطيلات v=A(b-a)

....

طول منحنى مستوى

طول القطعة المستقيمة = $l = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

طول المنحنى : $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

طول المنحنى المعطى بدلالة معادلتين وسيطيتين:

$$l = \int_{ta}^{tb} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

....

مساحة السطح الدوراني:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f`(x)\right)^2}\, dx$$ عادي

اما اذا كان وسيطيتان:

$$A = 2\pi \int_{ta}^{tb} x\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\, dt$$

****