حل المعادلات الخطية بالطرق المباشرة.

طرق تمثيل المعادلات الخطية

المعادلة الخطية ذات n من المجاهيل هي المعادلة على الشكل

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

و نقول أن مجموعة المعادلات ذات العدد m من المعادلات هي نظام خطي من المعادلات على الأشكال:

$$\begin{aligned}
&E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
&E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
&. \\
&E_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \\
&. \\
&E_m : a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned}
&E_1 : (a_{11}, a_{12}, ...a_{1n}).(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1 \\
&E_2 : (a_{21}, a_{22}, ...a_{2n}).(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2 \\
&. \\
&E_i : (a_{i1}, a_{i2}, ...a_{in}).(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \\
&. \\
&E_m : (a_{m1}, a_{m2}, ...a_{mn}).(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m
\end{aligned}$$

أو

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AX} = B$$

أو باستخدام المصفوفة الممتدة

$$\tilde{A} = [A : b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

تعريفات المصفوفات:

1. **الصفرية**: هي المصفوفة التي جميع أرقامها أصفار. $a_{ij} : i , j = 1, 2, ...$
2. **المربعة**: هي المصفوفة التي يكون عدد الصفوف مساوي لعدد الأعمدة.
3. **القطرية**: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا القطر الرئيسي ليس كله أصفار.
4. **الوحدة**: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا القطر الرئيسي جميع عناصره الواحد.
5. **المثلثية**: هي مصفوفة مربعة إما علوية أو سفلية.
6. **المثلثية العلوية**: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أسفل القطر الرئيسي أصفار ويرمز لها بالرمز U.

$$U_{ij} = \begin{cases} 0 & i \succ j \\ a_{ij} & i \le j \end{cases}$$

7. **المثلثية السفلية**: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أعلى القطر الرئيس أصفار ويرمز لها بالرمز L.

$$L_{ij} = \begin{cases} 0 & i \prec j \\ a_{ij} & i \ge j \end{cases}$$

8. **ثلاثية القطر**: وهي المصفوفة التي يكون أقطارها الرئيسية الثلاثية الوسطى هي العناصر الغير صفرية أما باقي العناصر فهي أصفار

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0.. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & a_{n-2n-2} & a_{n-2n-1} & a_{n-2n} \\ 0 & 0 & 0 & .. & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

9. **المصفوفة الغير مفردة**: هي مصفوفة مربعة غير قابلة للإنعكاس.

حل المعادلات باستخدام طريقة جاوس جوردن للحذف.

وهي عبارة عن طريق تحويل المعادلات من الشكل الممتد (المزيد) بواسطة عمليات الصف البسيط إلى الشكل التالي:

$$\tilde{\tilde{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_{11} & 0 & \dots & 0 & \bar{b}_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \dots & 0 & \bar{b}_2 \\ . & . & . & . & \\ 0 & 0 & .. & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \end{array}\right]$$

ويكون الحل على الشكل $x_i = \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_i}$

مثال: إذا كان لديك نظام المعادلات التالي أوجد مجموعة الحل باستخدام طريقة جاوس للحذف.

$$x + y + z = 1,\ 2x - y + 3z = 4,\ x + 2y - z = 2$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \underset{R_3}{\overset{R_2}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{3R_2+R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{5}R_3}{\Rightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{-R_2+R_1}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{-3R_3+R_1}{\overset{2R_3+R_2}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow x = y = z = 1$$

طريقة اختزال جاوس والتعويض العكسي

وهي نفس طريقة جاوس للحذف ولكن تقتصر الطريقة على تحويل المصفوفة الممتدة إلى مصفوفة مثلثية علوية أو سفلية.

مثال: في المثال السابق أوجد مجموعة الحل باستخدام طريقة اختزال جاوس والتعويض العكسي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \underset{R_3}{\overset{R_2}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{3R_2+R_3}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow -5z = -5 \Rightarrow z = 1$$

$$y - 2z = -1 \Rightarrow y - 2\times 2 = -1 \Rightarrow z = 1$$

$$x + y + z = 3 \Rightarrow x + 1 + 1 = 3 \Rightarrow x = 1$$

وبشكل عام إذا كانت مصفوفة الممتدة هي

$$\tilde{\tilde{A}}=\left[\begin{array}{cccc|c}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{11} & \ldots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1\\ 0 & \bar{a}_{22} & \ldots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2\\ . & . & . & . & \\ 0 & 0 & .. & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m\end{array}\right]\Rightarrow x_n=\frac{\bar{b}_m}{\bar{a}_{mn}} \qquad x_i=b_i-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_i$$

حل نظام المعادلات باستخدام طريقة النظير

وتكمن الطريقة بايجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات

$$\overrightarrow{AX}=\vec{b}\Rightarrow\vec{X}=A^{-1}\vec{b}$$

ولايجاد مصفوفة المعكوس الضربي نضع مصفوفة المعاملات بجانب مصفوفة الوحدة ونقوم بعمليات تحويل مصفوفة المعاملات لمصفوفة الوحدة فتتحول مصفوفة الوحدة لمصفوفة المعكوس الضربي

$$\left[A:I\right]\Rightarrow\left[I:A^{-1}\right]$$

مثال:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Rightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 6/10 & 6/10\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4/10 & -2/10\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/10 & -6/10\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 6/10 & 6/10\\ 1 & -4/10 & -2/10\\ 1 & -2/10 & -6/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام طريقة كرامر

تعريف: يرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$ ويحسب محدد المصفوفة ذات السعة $A_{2\times 2}$ كالتالي:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=ad-bc$$

ويحسب محدد المصفوفة بطريقة الاسهم كالتالي

مثال: فك محدد المصفوفة.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$(1\times1\times1)+(2\times1\times1)+(3\times-2\times1)-(3\times1\times1)-(2\times-2\times-1)-(1\times1\times1)$$

ملاحظة: الضرب باتجاه السهم من اليمين بالموجب ومن اليسار بالسالب

طريقة كرامر

لنفرض نظام المعادلات التالي

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{12}x_2+....a_{1n}x_n=b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+....a_{2n}x_n=b_2\\ &.\\ &.\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+....a_{nn}x_n=b_n\end{aligned}$$

المطلوب: ايجاد مجموعة الحل للمعادلات $x_1,x_2....x_n$ ولايجاد ذلك

نحول هذه المعادلات إلى مصفوفات

لنفرض أن $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ .\\ .\\ b_n\end{bmatrix}$ $\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ x_n\end{bmatrix}$ $\quad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n}\\ . & . & .. & .\\ a_{n1} & a_{11} & .. & a_{nn}\end{bmatrix},$

بالتالي يكون النظام أعلاه هو $AX = B$ حيث A هي مصفوفة المعاملات و X هي مصفوفة حلول نظام المعادلات وهو المطلوب و B هي مصفوفة النواتج لنظام المعادلات.

ولنفرض أن المصفوفة A_i هي المصفوفة الناتجة عن استبدال العمود i في المصفوفة A بمصفوفة النتائج B، كما هو أسفل في المصفوفات $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots.. & . \\ b_n & a_{11} & \ldots.. & a_{nn} \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots.. & . \\ a_{n1} & b_n & \ldots.. & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \ldots..A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & b_2 \\ . & . & .. & . \\ a_{n1} & a_{11} & .. & b_n \end{bmatrix}$$

فيكون قيم حلول X هي

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

حيث $|A|, |A_i|$ هي محددات المصفوفات

مثال: باستخدام طريقة كرامر أوجد مجموعة حل النظام التالي

$$x + y + z = 3, \quad y + z - 2x = 0, \quad x + y - z = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = -6$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \Rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \Rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 1$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \Rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

حل نظام المعادلات باستخدام طريقة التحليل لمصفوفات خاصة:

إذا كان النظام $AX = B$ فإن هذه الطريقة تكمن فكرة هذه الطريقة بتحليل مصفوفة المعاملات A (ثلاثية القطر) إلى حاصل ضرب مصفوفتين مثلثيتين علوية وسفلية بحيث أن $A = LU$ وبالتالي فإن $LUX = B$ وبفرض أن $UX = Z \Rightarrow LZ = B$، لنفرض أن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0.. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & a_{n-2n-2} & a_{n-2n-1} & a_{n-2n} \\ 0 & 0 & 0 & .. & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & e_3 & 1 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & 1 & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & . \\ 0 & 0 & .. & .. & e_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & e_n & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} d_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & d_2 & u_3 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & u_4 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & .. & 0 \\ . & . & .. & .. & .. & .. & .0 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & d_{n-1} & u_n \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

لنأخذ $LU = A$ بالتالي سيكون

$$LU = \begin{bmatrix} d_1 & u_2 & 0 & 0 & .. & .. & 0 \\ e_2 d_1 & e_2 u_2 + d_2 & u_3 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & e_3 d_2 & e_3 u_3 + d_3 & u_4 & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & e_4 d_3 & e_3 u_3 + d_3 & u_5 & .. & . \\ . & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & e_{n-1} d_{n-2} & e_{n-1} u_{n-1} + d_{n-1} & u_n \\ 0 & 0 & . & .. & .. & e_n d_{n-1} & e_n u_n + d_n \end{bmatrix}$$

بمقارنة LU مع A ينتج ما يلي:

$$d_1 = a_{11},\ u_i = a_{i-1i}$$
$$e_i = \frac{a_{ii-1}}{d_{i-1}}$$
$$d_i = a_{ii} - e_i u_i$$

حالة $A_{3\times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 \\ 0 & e_3 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} d_1 & u_2 & 0 \\ 0 & d_2 & u_3 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$LU = \begin{bmatrix} d_1 & u_2 & 0 \\ e_2 d_1 & e_2 u_2 + d_2 & u_3 \\ 0 & e_3 d_2 & e_3 u_3 + d_3 \end{bmatrix}$$

وبالمقارنة مع مصفوفة A يكون

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = d_1 \Rightarrow a_{12} = u_2 \Rightarrow a_{23} = u_3 \\ e_2 d_1 = a_{21} \Rightarrow e_2 = \dfrac{a_{21}}{d_1},\ e_2 u_2 + d_2 = a_{22} \Rightarrow d_2 = a_{22} - e_2 u_2 \Rightarrow \\ e_3 d_2 = a_{32} \Rightarrow e_3 = \dfrac{a_{32}}{d_2} \Rightarrow e_3 u_3 + d_3 = a_{33} \Rightarrow d_3 = a_{33} - e_3 u_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 \\ 0 & e_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/d_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32}/d_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & u_2 & 0 \\ 0 & d_2 & u_3 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} - e_2 u_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - e_3 u_3 \end{bmatrix}$$

مثال: لنفرض النظام التالي

$$5x_1 + 5x_2 = 10 \qquad 8x_1 - x_2 + 12x_3 = 19 \qquad 9x_2 + 2x_3 = 11$$

أوجد مجموعة الحل باستخدام طريقة التحليل للمصفوفات الخاصة.

أولا: نكتب مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 8 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

نقوم بتحليل المصفوفة

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{5} & 1 & 0 \\ & \frac{9}{-9} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

الآن لنفرض أن $UX = Z \Rightarrow LZ = B$ بالتالي نقوم بعملية التعويض الأمامي Forward substitution

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8/5 & 1 & 0 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$z_1 = 10$$

$$8/5\, z_1 + z_2 = 19 \Rightarrow (8/5)10 + z_2 = 19 \Rightarrow z_2 = 3$$

$$-z_2 + z_3 = 11 \Rightarrow -3 + z_3 = 11 \Rightarrow z_3 = 14$$

$$z_1 = 10 \qquad z_2 = 3 \qquad z_3 = 14$$

وبالتالي فإن $UX = Z$ بالتالي نقوم بعملية التعويض العكسي Backward substitution

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$14x_3 = 14 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-9x_2 + 12x_3 = 3 \Rightarrow -9x_2 + 12 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$5x_1 + 5x_2 = 10 \Rightarrow 5x_1 + 5 = 10 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 1$$

مثال: أوجد مجموعة الحل باستخدام طريقة التحليل للمصفوفات الخاصة

$$6x_1 + x_2 = 7 \qquad 18x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 27 \qquad -x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 2 \qquad 10x_3 + 13x_4 = 36$$

أولا: نكتب مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

نقوم بتحليل المصفوفة

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

الآن لنفرض أن $UX = Z \Rightarrow LZ = B$ و نقوم بعملية التعويض الأمامي Forward substitution

$$z_1 = 7 \qquad z_2 = 6 \qquad z_3 = 8 \qquad z_4 = -4$$

وبالتالي فإن $UX = Z$ و نقوم بعملية التعويض العكسي Backward substitution لنحصل على مجموعة الحل

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 1 \qquad x_4 = 2$$