6.6 الاحتمـــــالات

تعريف :

الاحتمال هو مقياس كمي لفرصة وقوع حادثة معينة يكون محصورا بين 0 و 1.

1. احتمال هطول المطر هذا اليوم (بمشيئة الله) = 0.5
2. احتمال فشل هذه التجربة = 0.002
3. نجاح عملية استئصا ل اللوزتين (بإذن الله) باحتمال = 0.99

P(A) = A احتمال وقوع الحادثه

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

6.6 الاحتمــــالات

التعريف التقليدي:

- تجربة عشوائية عدد عناصرها $n(S)$
- حادثة A جزئية من S عدد عناصرها $n(A)$
- احتمال حدوث A هو:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر حادثة } A}{\text{عدد عناصر } S}$$

4.6 الحادثة أو الحدث

مثال 1: رمي حجر نرد متزن مرة واحدة ⇐ فراغ العينة = S = {1,2,3,4,5,6}

الحوادث:

1. A = حادثة ظهور عدد زوجي = {2,4,6} $\quad n(A) = 3$

P(A) = 3/6 = 0.5

2. B = حادثة ظهور عدد فردي = {1,3,5} $\quad n(B) = 3$

P(B) = 3/6 = 0.5

3. C = حادثة ظهور عدد أقل من 6 = {1,2,3,4,5} $\quad n(C) = 5$

P(C) = 5/6 = 0.833

4. D = حادثة ظهور عدد 6 على الأقل = {6} $\quad n(D) = 1$

P(D) = 1/6 = 0.167

5. E = حادثة ظهور عدد 7 على الأقل = { } $\quad n(E) = 0$

P(E) = 0/6 = 0

6. F = حادثة ظهور عدد أقل من 10 = {1,2,3,4,5,6} $\quad n(F) = 6$

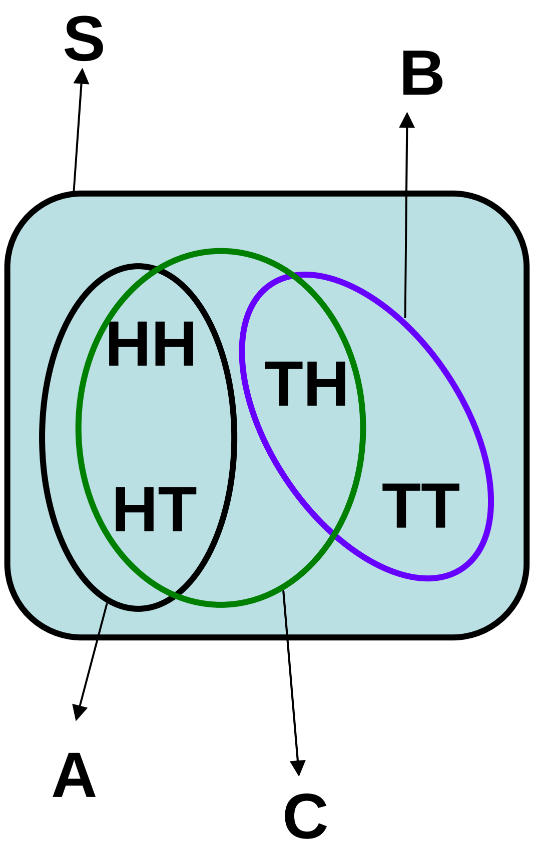
P(F) = 6/6 = 1.0

6.6 الاحتمـــالات

مثال 2 :

التجربة العشوائية : رمي قطعتي نقود مرة واحدة

S ={(H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T)}



<u>الحوادث:</u>

A. = حادثة ظهور صورة H في الرمية الأولى

= {(H,H) , (H,T)}= A   n(A) = 2

P(A) = 2/4 = 0.5

B. = حادثة ظهور كتابة T في الرمية الأولى

= {(T,H) , (T,T)}= B   n(B) = 2

P(B) = 2/4 = 0.5

C. = حادثة ظهور صورة H واحدة على الأقل

= { (H,H) , (H,T), (T,H) }= C   n(A) = 3

P(C) = 3/4 = 0.75

6.6 الاحتمـــــالات

مثال-3 :

التجربة العشوائية : رمي حجر نرد متزن مرتين $n(S) = 36$

الحوادث:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A. = مجموع الرميتين = 5

$n(A) = 4$

$\mathbf{P(A) = 4/36 = 0.111}$

B. = ظهور العدد 6

$n(B) = 11$

$\mathbf{P(B) = 11/36 = 0.306}$

C. = ظهور عددين متساويين

$n(C) = 6$

$\mathbf{P(C) = 6/36 = 0.167}$

6.6 الاحتمـــالات

تعريف الاحتمال النسبي:

- تجربة عشوائية مكررة n مرة
- حادثة A جزئية أحد نتائج التجربة تكررت $r_n(A)$ مرة
- احتمال حدوث A هو:

$$\mathbf{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n(A)}{n}}$$

6.6 الاحتمـــالات

تعريف الاحتمال النسبي:

مثال :

يحاول صاحب أحد المتاجر معرفة نسبة السيارات ذات اللون الأبيض التي تمر أمام متجره.

- جمع عدد السيارات التي مرت أمام متجره خلال شهر $= n = 1000$
- تحديد عدد السيارات البيضاء وليكن $r_n(A) = 269$
- احتمال (نسبة) مرور سيارة بيضاء تقريبا هو:

$$P(A) = \frac{r_n(A)}{n} = \frac{269}{1000} = 0.269$$

6.6 الاحتمــــالات

تعريف الاحتمال النسبي:

- سهل الحساب لأي تجربة
- زيادة عدد مرات تكرار التجربة تعطي قيمة أدق للاحتمال
- كل تكرار للتجربة يعطي نتيجة مختلفة
- قد لا توجد نهاية لاحتمال وقوع الحادثة
- اختيار أعداد كبيرة جدا لتكرار التجربة

6.6 الاحتمـــالات

تعريف الاحتمال النسبي:

مثال :

أعطي شخص قطعة نقود يعلم أنها غير متزنة ويريد تحديد احتمال ظهور H و T . فعمل على رمي قطعة النقود وتسجيل عدد مرات ظهور H في كل 10 رميات فكانت النتائج التالية

عدد الرميات	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
عدد H	7	15	22	28	36	44	52	59	66	73	79	87	94	100
P(H)	0.7	0.75	0.73	0.7	0.73	0.74	0.74	0.73	0.72	0.73	0.72	0.73	0.72	0.71

7.6 مسلمـات الاحتمـــال

تعريف :

لأي تجربة عشوائية فراغ العينة لها هو S فإن الاحتمالات المعرفة على فراغ العينة يجب أن تحقق الآتي :

1. أي حادثة A مجموعة جزئية من S : $P(A) \geq 0$
2. احتمال وقوع فراغ العينة : $P(S) = 1$
3. لأي عدد من الحوادث المتنافية $A_1, A_2, A_3, \ldots$

$$A_i \cap A_j = \phi \quad , \quad i \neq j$$

فإن

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

7.6 مسلمـــات الاحتمـــــال

نتائج المسلمات

1. $P(\phi) = \dfrac{n(\phi)}{n(S)} = \dfrac{0}{n(S)} = 0$

2. $A_1, A_2, A_3, \ldots$ حوادث المتنافية

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

3. $P(A) + P(A^c) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A^c) = 1 - P(A)$

4. A, B لأي حادثتين

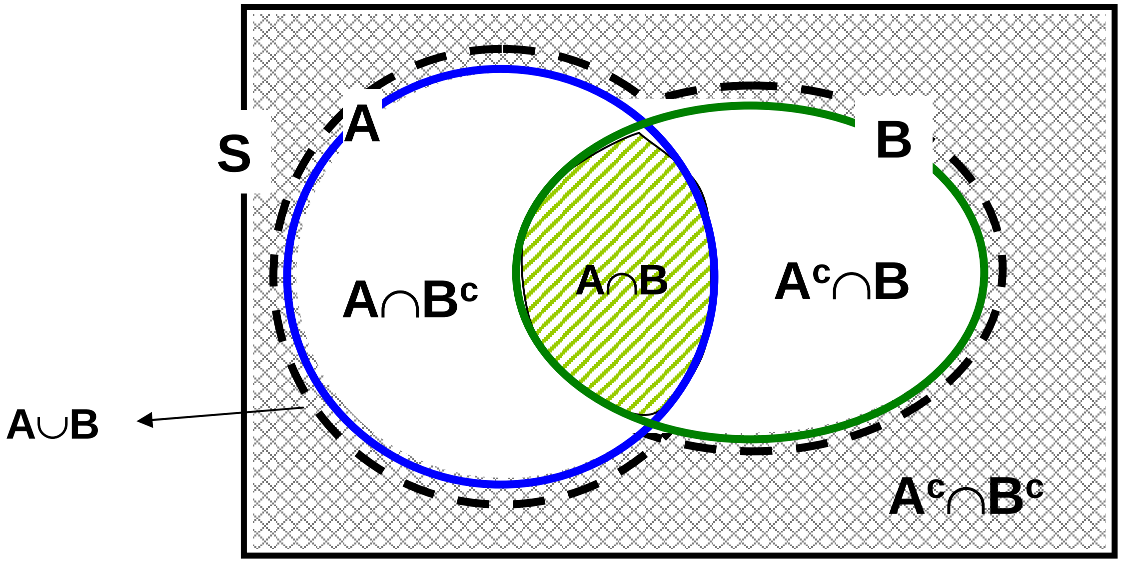
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. A, B لأي حادثتين

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$$

7.6 مسلمــات الاحتمـــال

تمثيل الحوادث بيانيا



$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) = P(A) + [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$P(A \cup B) = P(B) - P(A \cap B^c) = P(B) + [P(A) - P(A \cap B)]$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

7.6 مسلمــات الاحتمــــال

مثال-1 :

احتمال نجاح محمد في مقرر الإحصاء = 0.6 فما احتمال الرسوب له؟

تعريف الحوادث :

$A =$ {نجاح محمد في الإحصاء}

$\Leftarrow$ {عدم نجاح محمد في الإحصاء} $= A^c$.

من مسلمات الاحتمال

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

7.6 مسلمـــات الاحتمـــــال

مثال-2 :

طالب جامعي سجل في مادتي الإحصاء والرياضيات ، وكان احتمال نجاحه في المادتين هو 0.3 واحتمال أن ينجح في الرياضيات فقط هو 0.2 واحتمال أن ينجح في الإحصاء فقط هو 0.5 فما احتمال أن ينجح هذا الطالب في الرياضيات أو الإحصاء؟

تعريف الحوادث :

$A =$ {نجاح الطالب في الإحصاء} $B =$ {نجاح الطالب في الرياضيات}

احتمال نجاح الطالب في المادتين = احتمال أن ينجح في الرياضيات والإحصاء $= P(A \cap B) = 0.3$

احتمال نجاح الطالب في الاحصاء فقط = احتمال أن ينجح في الإحصاء ويرسب في الرياضيات $= P(A \cap B^c) = 0.5$

احتمال نجاح الطالب في الرياضيات فقط = احتمال أن ينجح في الرياضيات ويرسب في الإحصاء $= P(A^c \cap B) = 0.2$

مثال-2 :

A = {نجاح الطالب في الإحصاء}   B = {نجاح الطالب في الرياضيات}

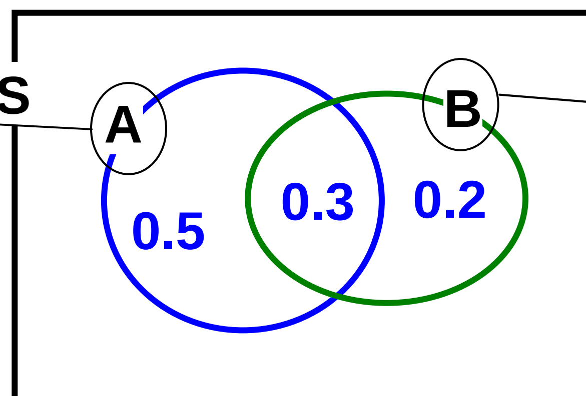
احتمال نجاح الطالب في المادتين = احتمال أن ينجح في الرياضيات والإحصاء = $P(A \cap B) = 0.3$

احتمال نجاح الطالب في الاحصاء فقط = احتمال أن ينجح في الإحصاء ويرسب في الرياضيات = $P(A \cap B^c) = 0.5$

احتمال نجاح الطالب في الرياضيات فقط = احتمال أن ينجح في الرياضيات ويرسب في الإحصاء = $P(A^c \cap B) = 0.2$

المطلوب $P(A \cup B)$ ؟؟؟

$P(A) =$
$P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$
$= 0.5 + 0.3 = 0.8$



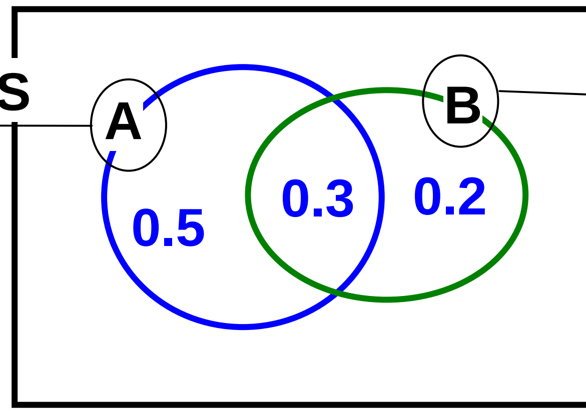
$P(B) =$
$P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$
$= 0.2 + 0.3 = 0.5$

7.6 مسلمـــات الاحتمـــــال

مثال-2 :

المطلوب $P(A \cup B)$ ؟؟؟

$P(A) =$
$P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$
$= 0.5 + 0.3 = 0.8$



$P(B) =$
$P(A^{}\cap B^c) + P(A \cap B)$
$= 0.2 + 0.3 = 0.5$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.8 + 0.5 - 0.3 = 1.0$$

7.6 مسلمـــات الاحتمـــال

مثال-3 :

احتمال نجاح محمد في الاختبار = 0.25 واحتمال رسوب أحمد في الاختبار = 0.3 واحتمال نجاح محمد وأحمد معا = 0.1 فما احتمال نجاح أحدهماعلى الأقل؟

تعريف الحوادث :

A = {نجاح محمد} $P(A) = 0.25$

B = {نجاح أحمد}   احتمال رسوب أحمد = $P(B^c)$ = 0.3

احتمال نجاح محمد وأحمد = $P(A \cap B) = 0.1$

احتمال نجاح أحدهما على الأقل = $P(A \cup B)$ ؟؟؟

7.6 مسلمات الاحتمال

مثال-3 :

$A =$ {نجاح محمد} $\qquad P(A) = 0.25$

$B =$ {نجاح أحمد} $\qquad 0.3 = P(B^c) =$ احتمال رسوب أحمد

$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.3 = 0.7$

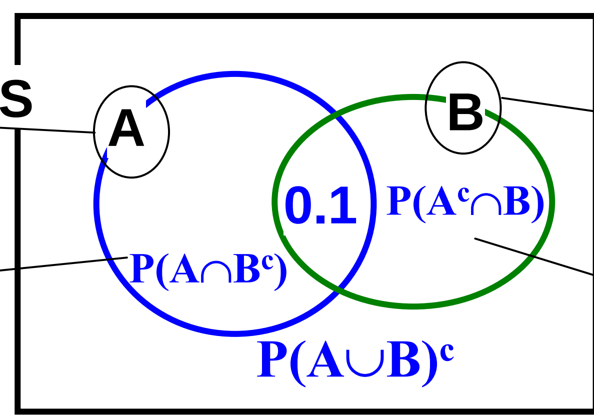
$0.1 = P(A \cap B) =$ احتمال نجاح محمد وأحمد

المطلوب $\quad$ **$P(A \cup B)$ ؟؟؟**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.7 - 0.1 = 0.85$$

$$P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.85 = 0.15$$

$P(A) = 0.25$



$P(B) = 0.7$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
$= 0.25 - 0.1 = 0.15$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
$= 0.7 - 0.1 = 0.6$

7.6 مسلمـات الاحتمـــال

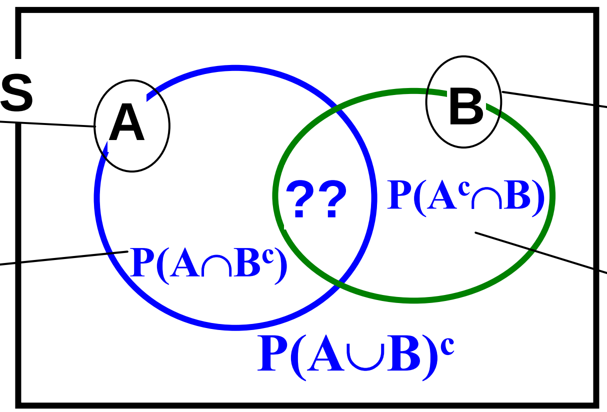
مثال-4 : ليكن

$$P(A) = 0.2 \quad , \quad P(B) = 0.4 \quad , \quad P(A \cup B) = 0.5$$

أوجد

$$P(A \cap B) \; , \; P(A \cap B^c) \; , \; P(A^c \cap B) \; , \; P(A^c \cap B^c)$$

P(A) =0.2



P(B) = 0.4

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

7.6 مسلمــات الاحتمـــال

مثال-4 : ليكن

$P(A) = 0.2 \quad , \quad P(B) = 0.4 \quad , \quad P(A \cup B) = 0.5$

أوجد

$P(A \cap B) \; , \; P(A \cap B^c) \; , \; P(A^c \cap B) \; , \; P(A^c \cap B^c)$

$P(A \cap B)$

$P(A \cap B^c)$

$P(A^c \cap B)$

$P(A^c \cap B^c)$