بسم الله الرحمن الرحيم

الصف الافتراضي الثاني لمقرر

تفاضل وتكامل 2

التكاملات المعتلة وتطبيقات على

التكاملات القطبية

الأحد 14-6-2020

د. أحمد الكحلوت

المواضيع التي سنتناولها:

* التكاملات المعتلة
* تطبيقات على التكاملات القطبية .
* أسئلة اختيار من متعدد على الوحدة .

رابعاً :الحالة التي تحتوي التجزئة فيها كثيرات الحدود :

وتظهر هذه الحالة عندما تكون درجة بسط الكسر مساوية أو أكبر من درجة المقام .

سؤال 3 :

أوجد//

$$\int \frac{2x^3+x^2-3}{x^2-2x-3}dx$$

The solution :

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x+5 \\ \hline x^2-2x-3 & 2x^3+x^2-3 \\ & \underline{2x^3-4x^2-6x} \\ & 5x^2+6x-3 \\ & \underline{5x^2-10x-15} \\ & 16x+12 \end{array}$$

$$\therefore \frac{2x^3+x^2-3}{x^2-2x-3} = 2x+5+\frac{16x+12}{(x-3)(x+1)} = 2x+5+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$$

$$16x+12 = A(x+1)+B(x-3)$$

$$A=15, B=1$$

$$\int \frac{2x^3+x^2-3}{x^2-2x-3}dx = \int\left(2x+5+\frac{15}{x-3}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x^2+5x+15\ln|x-3|+\ln|x+1|+c$$

التكامل بالتعويض الغير مباشر وباستخدام الاقترانات المثلثية :

الصيغ الجبرية بمشتقات الاقترانات المثلثية العكسية وتكاملاتها تكون على الصورة التالية :

$$1-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$2-\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1} x + c$$

$$3-\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

سؤال ١ :أوجد//

$$\int \frac{1}{4+9x^2}dx$$

The solution:

$$\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{4\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\,dx$$

$$let \quad u = \frac{3}{2}x \Rightarrow du = \frac{3}{2}dx \Rightarrow \frac{2}{3}du = dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{2/3}{1+u^2}\,du = \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{6}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}x\right) + c$$

سؤال ٢ :أوجد//

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx$$

sol.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = 3\int \sqrt{1-\frac{1}{9}x^2}\,dx = 3\int \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}\,dx$$

$$Let\ \frac{1}{3}x = \sin u \Rightarrow x = 3\sin u$$

$$dx = 3\cos u\,du$$

$$3\int \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}\,dx = 3\int \sqrt{1-\sin^2 u}.3\cos u\,du$$

$$9\int \cos^2 u\,du = 9\int \left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)du = \frac{9}{2}\int (1+\cos 2u)\,du$$

$$= \frac{9}{2}\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right] + c = \frac{9}{2}\left[u + \frac{2\sin u \cos u}{2}\right] + c = \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + c$$

التكاملات المعتلة :

يسمى التكامل معتلاً في الحالتين التاليتين :

١- إذا كان أحد حدي التكامل أو كلاهما لا نهائياً أي ∞ أو -∞ ومثال ذلك :

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

٢- إذا وجد أن المكامل غير متصل عند نقطة أو عدة نقاط خلال فترة التكامل فمثلاً الاقتران

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ غير متصل عند x=0 لذلك فإن التكامل التالي يعتبر معتلاً: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$

ولإجراء التكاملات المعتلة السابقة نتبع الطريقة التالية :

أولاً في الحالة الأولى:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} f(x)dx + \lim_{c \to \infty} \int_{a}^{c} f(x)dx$$

وعند اجراء التكامل السابق و أخذ النهاية لناتجه فإننا سنكون أمام احدى حالتين :

١- إذا كانت النهاية عدداً محدوداً ، فإن التكامل المعتل تكامل تقاربي .

٢- إذا كانت النهاية تساوي ∞ أو $-\infty$ ، فإن التكامل تكاملاً معتلاً تباعدياً .

سؤال:بين فيما إذا كان التكامل المعتل التالي تقاربي أم تباعدي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

الحل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} a\right) + \lim_{b \to \infty} \left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0\right) = (0 - (-\frac{\pi}{2})) + (\frac{\pi}{2} - 0) = \pi$$

إذاً التكامل المعتل تكامل تقاربي .

الحالة الثانية :إذا كان الاقتران المكامل غير متصل عند نقطة أو أكثرفي مجاله :

سؤال :

بين فيما إذا كان التكامل التالي تقاربي أم تباعدي :

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx$$

$$The\ solution:$$

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}dx$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \lim_{b \to 2^-} \int_0^b \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{b \to 2^-} \left[\frac{-1}{x-2}\right]_0^b = \lim_{b \to 2^-} \left[\frac{-1}{b-2} - \frac{1}{2}\right] = \infty$$

بما أن الحد الأول من التكامل تباعدي ، إذاً التكامل كله تباعدي.

اختبارات التقارب والتباعد :

إذا كان الاقترانيين f(x), g(x) متصلان خلال الفترة $[a,\infty)$ ، وكان $0 \le f(x) \le g(x), \quad \forall x \in [a,\infty)$

فإن قواعد المقارنة التالية صحيحة :

١- إذا كان $\int_a^\infty g(x)dx$ تقاربياً، فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ تقاربي.

٢- إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ تباعدياً ، فإن $\int_a^\infty g(x)dx$ تباعدي .

مثال : استخدم اختبارات التقارب والتباعد لاثبات أن التكامل التالي تباعدي:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{x\sin x}$$

$sol.$

$$0 < \frac{1}{x} \le \frac{1}{x\sin x}, \quad 0 < x \le \pi/3$$

لاحظ أننا لم نضع x≥0 وذلك لأن قيمة 1/x عند الصفر غير معرفة.

الأن نجري التكامل التالي :

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{x} = \left[\ln|x|\right]_0^{\pi/3} = \ln\frac{\pi}{3} - \ln 0 = \infty$$

أي أن $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{x}$ تباعدي .

إذا حسب اختبار التقارب والتباعد $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{x\sin x}$ تباعدي

مثال استخدم اختبارات التقارب والتباعد لتقرر ما إذا كانت التكامل التالي تقاربي أم تباعدي :

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\ln x}$$

$sol.$

$$\because\ x^2 \le x^2+\ln x, \quad \forall x \in [1,\infty)$$

$$\therefore\ \frac{1}{x^2+\ln x} \le \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in [1,\infty)$$

$$Now \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 0-(-1) = 1$$

التكامل السابق تقاربي ، إذا حسب اختبار التقارب والتباعد $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\ln x}dx$ تقاربي .

تطبيقات على التكاملات القطبية :

العلاقة بين الاحداثيات القطبية والدكارتية :

$x=r\cos\theta,\ x=r\sin\theta,\ x^2+y^2=r^2, \theta=\tan^{-1}(y/x)$

المعادلات القطبية للأشكال القلبية :

$r=a\pm b\cos\theta$ - 1

$r=a\pm b\sin\theta$ - 2

إيجاد المساحات :

لإيجاد المساحة A للمنطقة المحصورة بين المنحنيات :

$r=f(\theta),\ \theta=a,\ \theta=b$

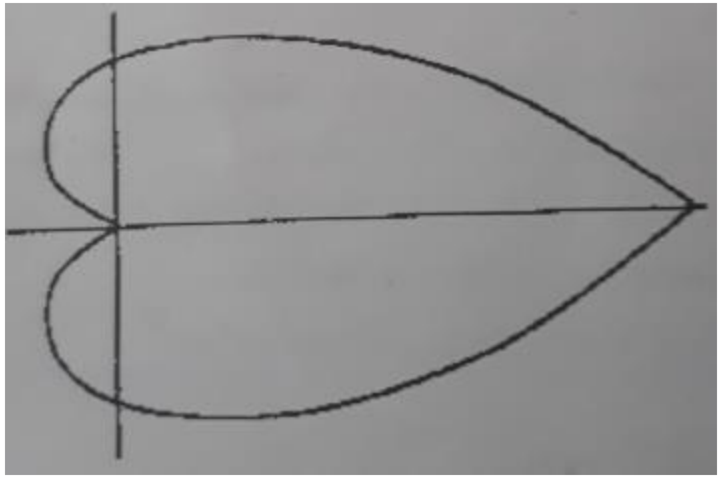
فإننا نطبق المعادلة التالية :

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$$

جد المساحة للاقتران r=1+cosθ

الحل :

1



2

$$A=2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\theta=\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta=\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\theta+2\sin\theta\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta=\pi+\int_0^{\pi}\left[\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$=\pi+\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi}=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

إيجاد طول منحنى :

نفرض $r=f(\theta)$ اقتران قطبي غير سالب على الفترة المغلقة [a,b] ، حيث :

$$0 \le b-a \le 2\pi$$

فإن طول المنحنى القطبي يعطى بالعلاقة :

$$L=\int_a^b \sqrt{f^2(\theta)+\left(f'(\theta)\right)^2}\,d\theta$$

مثال: أثبت أن طول المنحنى القطبي r=2cosθ يساوي 2π

الحل :

$$\frac{dr}{d\theta} = -2\sin\theta$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4$$

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4}\, d\theta = 2\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] = 2\pi$$

اختر الإجابة الصحيحة :

1- $\int_{-2}^{0} (x+2)^3 \, dx =$

أ- 8/3 ب- 4 ج- 0 د- 16/3

2- $\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\, dx =$

أ- 15/4 ب- 4/15 ج- 0 د- -4/15

3- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

أ- $\cos^{-1}x+c$ ب- $\sin^{-1}x+c$ ج- $\tan^{-1}x+c$ د- $\sec^{-1}x+c$

4- التعويض المناسب ل $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$ هو :

أ- x=2tanu ب- x=2sinu ج- x=2secu د- x=2cosu.

5- احدى التكاملات المعتلة التالية يعتبر تكامل تباعدي:

أ- $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ب- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ ج- $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ د- $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$.

6- $\int_{2}^{5} \frac{1}{x-2}\,dx$ يساوي

أ. $\lim_{b\to 2^-} \int_{b}^{5} \frac{1}{x-2}\,dx$ ب. $\lim_{b\to 2^+} \int_{b}^{5} \frac{1}{x-2}\,dx$ ج. $\lim_{b\to 2^+} \int_{-\infty}^{5} \frac{1}{x-2}\,dx$ د. $\lim_{b\to 2^+} \int_{\infty}^{5} \frac{1}{x-2}\,dx$

7 - اوجد قيم p التي تجعل التكامل $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{p+1}}\,dx$ متقارب

تعديل $p<1$ تعديل $p<2$

أ. $p<-1$ ب. $p>0$ ج. $p>1$ د. $p>2$

8 - التعويض المناسب لحساب التكامل $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ هو

ب أوج

أ. $x=\sin t$ ب. $x=2\sin t$ ج. $x=2\cos t$ د. $x=\cos t$

9 - لاجراء $\int x^3 \sin x\,dx$ بالاجزاء فاننا نختار

أ. $u=x^2, dv=x\sin x\,dx$ ب. $u=\sin x, dv=x^3\,dx$ ج. $u=x^3, dv=\sin x\,dx$ د. غير ذلك

تمت بحمد اللّٰه.