اسم المادة : مبادئ التحليل العددي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط هنا

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

[1]

بسم الله الرحمن الرحيم
مادة الهياكل

* الوحدة الخامسة ← طريقة نيوتن والنقطة الثابتة لحل نظام من المعادلات غير الخطية

ام المجد

* تمثيل المعادلات غير الخطية
نفرض أن $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{bmatrix} = 0$$

المطلوب ايجاد متجه $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
يحقق المعادلة ← $\vec{f}(\vec{\alpha}) = 0$
بحيث يكون ←

$$f_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

المتجه $\vec{O}$ هو المتجه الصفري كل مركباته أصفار

* تعريف (1)
المنطقة D في الفضاء R^n حيث $n \geq 1$ ← منطقة مغلقة لأن أي متتالية متقاربة $\{\vec{X}_n\}$ عناصرها في هذه المنطقة D تكون نهايتها عنصراً في D

* تعريف (2)
المنطقة D في الفضاء R^n حيث $n \geq 1$ ← منطقة محدبة إذا كانت كل قطعة مستقيمة التي تصل بين أي نقطتين في D وتقع كلها في D

* اقتران التصغير هو تعميم لأسلوب النقطة الثابتة

2019/11/16 23:31

تعريف (3)

تسمى الاقتران g الذي ينقل متجهات حقيقية ذات بعد n إلى متجهات حقيقية ذات بعد n اقتران تصغير بالنسبة إلى مقياس ما $\|.\|$ على منطقة مغلقة D إذا ⇐

① $\vec{g}(\vec{x}) \in D \Leftarrow \vec{x} \in D$

② $\|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{y})\| \le K \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad , 0 \le K < 1$

مبرهنة (1)

إذا كان الاقتران التصغيري g معرفاً على منطقة مغلقة D وذلك بالنسبة إلى مقياس ما، فإن ⇐

① النظام $\vec{x} = \vec{g}(\vec{x})$ له حل متفرد $\vec{\alpha}$ من متجهات D أي أن $\vec{\alpha} = \vec{g}(\vec{\alpha})$

② لأي $\vec{x}_0 \in D$ فإن قيم المتتالية $\{\vec{x}_m\}$ المحسوبة حسب

$\vec{x}_{m+1} = \vec{g}(\vec{x}_m) \qquad m = 0, 1, 2, \dots$

تتقارب إلى α

كيف نحقق الشرط لنختبر الاقتران التصغيري ؟؟

$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \qquad j \le n \qquad 1 \le i$ متصلة في D

$g_i(\vec{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$

من مبرهنة تايلر ⇐

$$g_i(\vec{x}) - g_i(\vec{y}) = (x_1 - y_1)\frac{\partial g_i(\xi)}{\partial x_1} + \dots + (x_n - y_n)\frac{\partial g_i(\xi)}{\partial x_n}$$

$$g_{ij} = \sup_{\vec{x} \in R} \left| \frac{\partial g_i(\vec{x})}{\partial x_j} \right|$$

sup ⇒ القيمة العظمى لجميع x في D

$$|g(\vec{x}) - g(\vec{y})| \le G |\vec{x} - \vec{y}|$$

مهما كان المقياس ⇐

$$\|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{y})\|_p \le \|G\|_p \, \|\vec{x} - \vec{y}\|_p$$

مثال 3 نظام من المعادلات

$$x + 2y = 4$$
$$2x^2 + y^2 = 7$$

* نعرف اذا كان ينطبق على النظام الاقتران التصغيري نتبع الخطوات التالية ⟸

[1] نكتب المعادلات بدلالة x , y

$$y = \frac{4 - x}{2} \leftarrow g_2$$

$$x = \left(\frac{7 - y^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leftarrow g_1$$

[2] نجد المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} , \frac{\partial g_1}{\partial y} , \frac{\partial g_2}{\partial x} , \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \boxed{0}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{7 - y^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(7 - y^2 \cdot 0 - 2 \cdot -2y)}{4}$$

$$\boxed{= \frac{-y}{2}\left(\frac{7 - y^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \boxed{\frac{-1}{2}} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = \boxed{0}$$

[3] نكون المصفوفة G التي عناصرها ⟸

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

نختار العناصر حسب القيمة العظمى لل D

$$g_{ij} = \sup \left| \frac{\partial g_i (\bar{x})}{\partial x_j} \right|$$

$$g_{11} = \boxed{0} \qquad g_{21} = \left| \frac{-1}{2} \right| = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$g_{22} = \boxed{0}$$

$$g_{12} = \sup \left| \frac{-y}{2}\left(\frac{7 - y^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right| = \frac{-y}{2\sqrt{\frac{7 - y^2}{2}}}$$

$$g_{12} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{7-4}{2}}} = \left| \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right|$$

$$g_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

وتكون المصفوفة G ⇐
$$G=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ نجد المقاييس للمصفوفة G لجميع $P=1,2,\infty$

أم الحمد

$\times \|G\|_1 =$ أكبر مجاميع الأعمدة
$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = .8165 < 1$

$\times \|G\|_\infty =$ أكبر مجاميع الصفوف
$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = .8165 < 1$

$\times \|G\|_2 =$ (مقياس اقليدس) نربع كل القيم ثم نجمعها ونأخذ جذر الجواب
$$\left|\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{11}{12}\right|^{\frac{1}{2}} < 1$$

$\boxed{5}$ بما أن جميع مقاييس G لجميع $P=1,2,\infty$ أقل من 1
فإن المبرهنة تنطبق وهو اقترانه تصغيري

$\times$ طريقة نيوتن لحل المعادلات غير الخطية ذات متغيرين مستقلين

طريقة نيوتن رافسون سابقاً ⇐
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
بوجود نقطة البداية x_0

ثم تصبح ⇐
$$x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

نفرض أن $Z_n = x_{n+1} - x_n$ ⇐
$$Z_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow f'(x_n) \cdot Z_n = -f(x_n)$$

2019/11/16 23:32

* خطوات حل نظام من المعادلات غير الخطية بطريقة نيوتن

1. متجه البداية معلوم $\vec{X_0}$
2. نجد المتجه $\vec{Z_n}$ حسب المعادلة $J(\vec{X_n})\vec{Z_n} = -\vec{f}(\vec{X_n})$
بعد تحديد المصفوفة وايجاد الجاكوبيان والطرف الأيمن لها $-\vec{f}(\vec{X_n})$
3. نجد المتجه X_{n+1} من $\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n + \vec{Z}_n$ ثم نكرر الخطوات [2] و [3] حتى نحصل على تقارب

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

اذا كان $\vec{X_0}$ المتجه الابتدائي
$\vec{\alpha}$ متجه الحل
فإن ←

$$\vec{0} = \vec{f}(\vec{X}) + J(\vec{X_0})(\vec{\alpha} - \vec{X_0}).$$

$$J(\vec{X_0}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{X_0})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(\vec{X_0})}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_2(\vec{X_0})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(\vec{X_0})}{\partial x} \end{vmatrix}$$

← $J(\vec{X_0})$ جاكوبيان النظام

$$J(\vec{X_0})(\vec{X} - \vec{X_0}) = -\vec{f}(\vec{X_0})$$

* مثال 4 + مثال 5 + تدريب 5 نفس خطوات الحل
والحل الموجود هنا بالدفتر أسهل من الكتاب

تمرين 5 جد حل النظام بطريقة نيوتن

$$f_1(x,y)=x+2y-3=0$$
$$f_2(x,y)=2x^2+y^2-5=0$$

$\vec{x}_0=(1.0\,,1.5)$ جد $\vec{x}_1,\vec{x}_2$ واحسب $\vec{f}(\vec{x}_2)$

[1] $(x_0,y_0)=(1.5\,,1.5)$

~~[1] نجد الجاكوبيان~~

[2] نجد $f(x_0)$

$$\vec{f}(\vec{x}_0)=\begin{bmatrix}1.5+2(1.5)-3\\ 2(1.5)^2+(1.5)^2\end{bmatrix}$$

$$f(\vec{x}_0)=\begin{bmatrix}.5\\ .5\end{bmatrix}$$

[3] نجد الجاكوبيان

$$F(x_0)=J(x_0)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4x & 2y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4(1.5) & 2(1.5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & 2\end{vmatrix}=2-12=\boxed{-10}$$

[4] أوجد نظير الجاكوبيان

$$J^{-1}=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -6 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{10} & \frac{2}{10}\\ \frac{6}{10} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

[5] نحسب قيم X_2, X_1 من خلال ⇐ $X_{n+1}=X_n-f^{-1}(X_n)\,f(X_n)$

$n=0 \Rightarrow X_1=X_0-f^{-1}(X_0)\cdot f(x_0)$

$$X_1=\begin{bmatrix}1.5\\ 1.0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-.2 & .2\\ .6 & -.1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}.5\\ .5\end{bmatrix}\qquad X_1=\begin{bmatrix}1.5\\ 0.75\end{bmatrix}$$

$$X_2=X_1-f^{-1}(X_1)\cdot f(X_1)\qquad X_2=\begin{bmatrix}1.48810\\ 0.75595\end{bmatrix}$$

2019/11/16 23:32

* طريقة نيوتن العامة في البعد n

تصبح معادلة نيوتن باستعمال المتجهات بالصيغة العامة ⟵

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n - J^{-1}(\vec{X}_n) \cdot f(\vec{X}_n)$$

$$\equiv g(\vec{X}_n)$$

* في حالة متغير واحد طريقة نيوتن ذات تقارب من الرتبة الثانية

* تمثيل طريقة نيوتن على شكل مصفوفات

نفرض نظاما من المعادلات غير الخطية

$$\vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$D = \{\vec{X} \mid a_i \leq x_i \leq b_i \; , \; 1 \leq i < n\}$$

المنطقة D تعميم لفكرة الفترة المغلقة

نكتب متجه الاقترانات $f(\vec{X})$ ⟸

$$f(\vec{X}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{X}) \\ f_2(\vec{X}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{X}) \end{bmatrix}$$

ونجد حل النظام وهو $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

يحقق $f(\alpha) = 0$

$$g'(\vec{X}) \equiv J(\vec{X}) = \frac{\partial g_i(\vec{X})}{\partial x_j}$$

ام المجد

2019/11/16 23:32

* الوحدة السادسة ← التقريب
* المقياس ‖‖ على C[a,b] ← هو اقتران مداه الاعداد الحقيقية غير السالبة ويحقق الشروط ←

1. $\|f\| \geq 0$
2. $\|f\| = 0 \Rightarrow f \equiv 0$
3. $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$ ← α لأي عدد حقيقي
4. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ← المتباينة المثلثية

* من أنواع المقاييس ← المقياس الأقصى أو مقياس (تشبيشف) أو مقياس اللانهاية أو المقياس المنتظم
* تعريف (1)

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad , f \in C[a,b]$$

* ويستعمل لتحديد قرب اقترانين مع بعضهما

$$\|f-g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \equiv D(f,g)$$

D(f,g) ← المسافة بين f, g

$$D(f,g) \leq D(f,h) + D(h,g)$$

* معكوس المتباينة المثلثية

$$\|f\| - \|g\| \leq \|f-g\|$$

* مبرهنة (1) (فيرستراس)

اذا كان $f(x)$ متصلاً على $[a,b]$ واذا $\epsilon > 0$ فإنه توجد حدودية $P(x)$ تحقق ←

$$\|f(x) - P(x)\| < \epsilon \qquad a \leq x \leq b$$

2019/11/16 23:32

* من أنواع المقاييس على $C[a,b]$

(1) $\|f-g\|_1 = \int_a^b |f(x)-g(x)|\, w(x)\, dx$

(2) $\|f-g\|_2 = \left[\int_a^b \{f(x)-g(x)\}^2 w(x)\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$

(3) $\|f-g\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)-g(x)|$

$w(x)$ اقتران متصل موجب (اقتران الوزن)

* وجميع هذه المقاييس تندرج تحت هذه الصيغة ⇐

$$* \quad \|f-g\|_p = \left[\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\, w(x)\, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

* مبرهنة (2)

اذا كان $f(x)$ متصلاً على $C[a,b]$، واذا كان n عدد صحيح موجب وافرض $\|\cdot\|$ أي مقياس من المقاييس $p = 1, 2, \infty$ فإنه يوجد حدودية وحيدة $p^*(x)$ درجتها أقل من n أو يساويها تحقق ⇐

جميع الحدوديات التي درجتها $\le n$ $\quad \|f-p^*\| \le \|f-p\|$

* من الحدوديات المستقلة ⇐ حدوديات برنشتاين

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \le x \le 1$$

معرفة على $[0,1]$

وبالصيغة التي تقرب $f(x)$ على $[a,b]$ حسب فيرستراس

اذا كان $f(x)$ محدوداً على $[0,1]$ فإن ⇐

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

2019/11/16 23:33

مثال 2 جد حدودية برنشتاين وحدودية تايلر للاقتران $f(x)=e^x$ من الدرجة $n=4$ على $[0,1]$

$k=0,1,2,3,4$

برنشتاين

$$B_4(x)=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} f\left(\frac{k}{4}\right) x^k (1-x)^{4-k}$$

$$=\binom{4}{0} f\left(\frac{0}{4}\right) x^0 (1-x)^4+\binom{4}{1} f\left(\frac{1}{4}\right) x^1 (1-x)^3+$$

$$\binom{4}{2} f\left(\frac{2}{4}\right) x^2 (1-x)^2+\binom{4}{3} f\left(\frac{3}{4}\right) x^3 (1-x)^1+$$

$$\binom{4}{4} f\left(\frac{4}{4}\right) x^4 (1-x)^0$$

$$=e^0(1-x)^4+4e^{\frac{1}{4}}x(1-x)^3+6e^{\frac{1}{2}}x^2(1-x)^2+$$

$$4e^{\frac{3}{4}}x^3(1-x)+ex^4$$

$$=1+1.1361x+0.4840x^2+.09165x^3+.0065x^4$$

تايلر $$T_4(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\dots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

$$=1+x+.5x^2+0.1667x^3+0.04167x^4$$

قانون تحويل الفترة $[a,b]$ إلى $[-1,1]$

$$t=\frac{2x-(a+b)}{b-a}$$

* التقريب باستخدام اقتران أسي

وتسمى ← اخطاء البيانات

القاعدة العامة لها ←

$$y = C\exp(Ax) \Rightarrow Ce^{Ax}$$

لحساب C ← $C = e^{B}$

$$y = Ce^{Ax}$$

$$\ln y = \ln C + \ln e^{Ax}$$

$$\ln y = \ln C + Ax$$

$$\Rightarrow Y = AX + B$$

$$① \quad A\left(\sum x_k^2\right) + B\left(\sum x_k\right) = \sum_{k=1}^{N} X_k \ln(y_k)$$

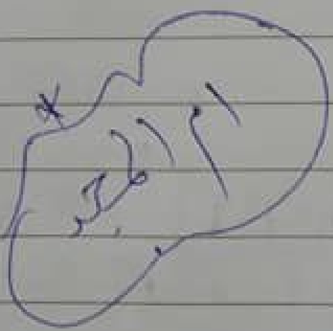
$$② \quad A\left(\sum x_k\right) + BN = \sum_{k=1}^{N} \ln(y_k)$$

N ← عدد القيم

مثال: يعطيناقيم x, y

x_k	y_k	$\ln y_k$	x_k^2	$x_k \ln(y_k)$

1. نحسب $\ln y$
2. نحسب x_k^2
3. نحسب $x \ln y$
4. نجد المجاميع
5. نعوض في القاعدتين ① و ②
6. نحسب قيم A ، B بعد التعويض
7. نعوضها في $C = e^{B}$ لايجاد C
8. نكتب المعادلة النهائية $y = Ce^{Ax}$



2019/11/16 23:34

* تقريب البيانات المتصلة (اقترانات) $[c_0, d_0]$

$$I([a_k]) = \int_{c_0}^{d_0} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - f(x) \right]^2 dx$$

لتقريب اقتران $f(x)$ على (c_0, d_0) المطلوب حساب المعاملات a_k حسب المقياس الثاني أي ايجاد a_k التي تحقق المجموع السابق أصغر ما يمكن

والشرط اللازم لتحقيق ذلك هو

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\int_{c_0}^{d_0} x^{k+j} dx \right) a = \int_{d_0} x^j f(x)\, dx \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

نفرض أن ⇐

$$V_i = \int_{c_0}^{d_0} x^i dx \qquad W_i = \int_{x_0}^{d_0} x^i f(x)\, dx$$

ويصبح النظام ⇐

$$V_0 a_0 + V_1 a_1 + \dots + V_n a_n = W_0$$
$$V_1 a_0 + V_2 a_1 + \dots + V_{n+1} a_n = W_1$$
$$\vdots$$
$$V_n a_0 + V_{n+1} a_1 + \dots + V_{2n} a_n = W_n$$

حيث أن W هو اقتران الوزن

على الفترة $[1, 0]$ ⇐

$$V_i = \frac{1}{i+1}$$

محددة النظام ⇐

$$V = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod [(n-i)!]^2}{\prod \frac{(n+i-1)!}{(i-1)!}}$$

عندما يكبر n فإن V تصغر

مثال 2 جد تقريباً من الدرجة الأولى والثانية للاقتران $f(x)=e^{x}$
على $[1,-1]$
نجد المستقيم الملائم
عن الخطوات

$\boxed{1}$ نحسب w_0 , w_1 حسب القاعدة ⇐ $w_i=\int_{-1}^{1} x^{i} f(x)\,dx$

$w_0=\int_{-1}^{1} e^{x}\,dx = \boxed{e^{1}-e^{-1}=w_0}$

٢١ المحور

$w_1=\int_{-1}^{1} x\,e^{x}\,dx=\boxed{2e^{-1}=w_1}$

$\boxed{2}$ نحسب V_0 , V_1 , V_2 حسب القاعدة ⇐ $V_i=\int_{-1}^{1} x^{i}\,dx$

$V_0=\int_{-1}^{1} 1\,dx=\boxed{2}$ $\quad V_1=\int_{-1}^{1} x\,dx=\boxed{0}$ $\quad V_2=\int_{-1}^{1} x^{2}\,dx=\boxed{\frac{2}{3}}$

$V_0=\int x^{0}$ $\quad V_1=\int x^{1}$ $\quad V_2=\int x^{2}\dots$ ⇐ دائماً

$\boxed{3}$ نعوض القيم السابقة في نظام معادلات حسب المتغيرات الموجودة

⇐ $V_0a_0+V_1a_1+\cancel{V_2a_2}=w_0$

$2a_0+0a_1=e^{1}-e^{-1} \Rightarrow \frac{\cancel{2}a_0}{\cancel{2}}=\frac{e-e^{-1}}{2}$ $\quad \boxed{a_0=\frac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right)}$

$V_1a_0+V_2a_1=w_1$

$0a_0+\frac{2}{3}a_1=2e^{-1} \Rightarrow \frac{2}{3}a_1=2e^{-1}$

$\boxed{a_1=3e^{-1}}$

$y=a_0-a_1x$ ⇐ المستقيم الملائم

$y=\frac{e-e^{-1}}{2}-3e^{-1}x$

* احادية التعامد حالة خاصة من الحدوديات المتعامدة

تعريف (3)

نقول أن $w(x)$ اقتران وزن غير سالب على (a,b) اذا حقق

(1) المقدار موجب قابل للتكامل ← $\int_a^b |x|^n w(x)\,dx$

(2) اقتران الوزن لا يساوي صفر ← $\int_a^b w(x)\,g(x)\,dx = 0$

$w(x) \neq 0 \;\therefore\; g(x) \geq 0$

ملاحظة حفظ الحالات مع الاشتقاق للاقترانات والمساواة

* تعريف (4)

اذا $w(x)$ اقتران وزن، واذا $f,g \in C[a,b]$، نعرف ما هو الضرب الداخلي للاقترانين ←

$$(f,g) \Leftrightarrow \langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,w(x)\,dx$$

من خواصه ←

(1) لأي a عدد قياسي $(af,g) = (f,ag) = a(f,g)$

(2) $(f_1+f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g)$

$$(f,g_1+g_2) = (f,g_1) + (f,g_2)$$

(3) تبديلي $(f,g) = (g,f)$

(4) $(f,f) \geq 0 \,,\, (f,f) = 0$ if $f = 0$

* تعريف (5)

نعرف المقياس الثاني (الاقليدي) للاقتران ←

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b w(x)\{f(x)\}^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{f,f}$$

$$(\|f\|_2)^2 = f,f$$

* مبرهنة (3)

متباينة كوشي - شفارتز لأي f, g في الفضاء C[a,b] فإن

$$|(f,g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

* مبرهنة (4)

المتباينة المثلثية لأي اقترانين f, g في الفضاء C[a,b] فإن

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

* تعريف 6

اذا كان f, g اقترانين في الفضاء C[a,b] فإنهما متعامدان اذا كان

$$(f,g) = 0$$

* مبرهنة (5)

(جرام - شميدت) توجد متتالية من الحدوديات $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}$ إذ أن

درجة φ_n هي n تحقق ما يلي ←

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0 \quad , n \neq m$$

حيث ← [1] $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$ ← أحادية التعامد :

[2] معامل x_n في φ_n موجب

وهذه المتتالية منفردة ,

* الصيغة العامة للحدوديات

$$\gamma_n(x) = x^n + a_{n,n-1}\varphi_{n-1}(x) + \dots + a_{n,0}\varphi_0(x)$$

$$a_{n,k} = -(x^n, \varphi_k) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m \quad \text{مختلفات} \\ 1 & n = m \quad \text{متشابهات} \end{cases}$$

2019/11/16 23:34

* لإيجاد قيمة $\varphi_n(x)$ حسب القاعدة ⇐

* $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \; P_n(x)$

* ونجد قيمة $P_n(X)$ من خلال القاعدة ⇐

* $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^2\right] \quad , n \geq 1$

وهذه معادلة رودرجز وفترتها $[1, -1]$

* وهذه الحدوديات ثابتة حسب معادلة رودرجز ⇐

$\boxed{P_0(x) = 1}$ $\boxed{P_1(X) = X}$ $\boxed{P_2(X) = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)}$ حفظ

(حدوديات لي مبشر)

مثال 9 وتدريب 12

احسب ⇐

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2(0)+1}{2}} \; P_0(x)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \; (1) = \boxed{\sqrt{\frac{1}{2}} = \varphi_0(x)}$$ حفظ *

حفظ *

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2(1)+1}{2}} \; P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \; x = \boxed{\sqrt{\frac{5}{2}} \; x = \varphi_1(x)}$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{2(2)+1}{2}} \; P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \; \frac{1}{2} \left(3x^2 - 1\right)$$

$$\boxed{\varphi_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \left(3x^2 - 1\right)}$$ حفظ

× حدوديات لاجير على الفترة $[0,\infty)$ ← رمزها $L_n(x)$

واقتران الوزن لها ← $w(x) = e^{-x}$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!\,e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n}\left[n^{x} e^{-x}\right] \qquad n \geq 0$$

أم الفقد

$\|L_n(x)\|_n = 1 \Leftarrow$ دائمًا

$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \Leftarrow$ دائمًا

$$(L_n, L_m) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

× حدوديات تشيبي شيف على الفترة $(-1,1)$ ← $-1 < x < 1$

اقتران الوزن لها $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ رمزها $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \qquad n \geq 0$$

هي حدوديات متعامدة درجتها $= n$ حيث

$x = \cos\phi \Leftarrow \cos^{-1} x = \phi$

$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1$ مهم

$T_3(x) = 4x^3 - 2x \Longleftrightarrow 2x(2x^2 - 1) - x$

$T_n(1) = 1$

$$(T_n, T_n) = \begin{cases} \pi & n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n > 0 \end{cases}$$

× حدوديات لاجير على الفترة $[0,\infty)$ ← رمزها $L_n(x)$
واقترانه الوزن لها ← $W(x) = e^{-x}$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!\, e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right] \qquad n \geq 0$$

مهم للحفظ

$\|L_n(x)\|_n = 1$ ⟸ دائماً

$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ⟸ دائماً

$$(L_n, L_m) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

× حدوديات تشيبي تشف على الفترة $(-1,1)$ ← $-1 < x < 1$
اقترانه الوزن لها $W(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ رمزها $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \qquad n \geq 0$$

وهي حدوديات متعامدة درجتها $= n$ حيث

$\cos^{-1} x = \phi \Leftarrow x = \cos\phi$

$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 2x \Leftrightarrow 2x(2x^2-1) - x$

حفظ

$T_n(1) = 1$

$$(T_n, T_n) = \begin{cases} \pi & n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n > 0 \end{cases}$$

2019/11/16 23:35

* نتيجة (3) (متباينة بزل)

$$\|Q_n\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} (f, \phi_j)^2 \leq \|f\|_2^2$$

* نتيجة (4) (مساواة بارسفال)

$$\|f\|_2 = \left[\sum_{j=0}^{\infty} (f, \phi_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

* اذا كانت $k \geq 2$ فإن ⇐

$$\phi_k(x) = (x - a_k)\,\phi_{k-1}(x) - b_k\,\phi_{k-2}(x)$$

المطلوب لحساب ϕ_k هو ايجاد ϕ_{k-1} ، ϕ_{k-2}

تسمى علاقة التوليد الثلاثية.

* علاقة التوليد الثلاثية لحدوديات (ليجندر) ⇐

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}\, x\, P_n(x) - \frac{n}{n+1}\, P_{n-1}(x)$$

* علاقة التوليد الثلاثية لحدوديات (لاجير) ⇐

$$L_{n-1}(x) = \frac{1}{n+1}(2n+1-x)\,L_n(x) - \frac{n}{n+1}\,L_{n-1}(x)$$

* علاقة التوليد الثلاثية لحدوديات (تشيبي شيف)

$$T_n(x) = L_n(x) = \frac{1}{n!\,e^{-x}}\frac{d^n}{dx^n}\left[n^x e^{-x}\right]$$

ام المجد

2019/11/16 23:35

★ التقريب بحدوديات تشيبي شيف

اعرف أن $\{T_n\}_{n=0}$ هي متتالية حدوديات تشيبي شيف المتعامدة فالحدوديات أحادية التعامد المرافقة لها هي

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n(x) \qquad n\geq 1$$

تقريب اقتران $f(x)$ متصل على $[-1,1]$ باستخدام تشبي شيف

$$C_n(x)=\sum_{j=0}^{n}(f,\varphi_j)\,\varphi_j(x) \quad , \quad (f,\varphi_j)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,\varphi_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

وبدلالة $T_j(x)$ ⟸

$$C_n(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\,T_j(x) \qquad c_j=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

★ بعض حدوديات تشيبي شيف <u>حفظ أول خمسة على الأقل</u>

$T_0=1 \quad | \quad T_1=x \quad | \quad T_2=2x^2-1 \quad | \quad T_3=4x^3-3x$

$T_4=8x^4-8x^2-1 \qquad T_5=16x^5-20x^3+5x$

كتابة x^k بدلالة T_j ⟸

$x^0=1=T_0 \qquad x^1=T_1$

$x^2=\frac{1}{2}(T_0+T_2) \qquad x^3=\frac{1}{4}(3T_1+T_3)$

$x^4=\frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4) \qquad x^5=\frac{1}{16}(10T_1+5T_3+T_5)$

أم الماجد

2019/11/16 23:36

مثال 16 جد تقريب $f(t)=t^2$ على $[0,1]$ باستخدام تشيبي شيف

[1] ننظر للفترة يجب أن تكون على $[-1,1]$ لذلك يلزم تحويلها حسب قاعدة التحويل

$$t=\frac{2x-(a+b)}{b-a} \Rightarrow \frac{2x-(1)}{1}=2x-1=t$$

$$t^2=(2x-1)^2=4x^2+2x+1=\frac{1}{4}(x^2+2x+1)$$

[2] نبحث في حدوديات تشيبي شيف عن تعويضات عن $1, x, x^2$

$T_0=1 \qquad T_1=x \qquad x^2=\frac{1}{2}(T_0+T_2)$

نعوض ←

$$C_1(x)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(T_0+T_2)+2T_1+T_0\right]$$

$$=\frac{1}{8}T_0+\frac{1}{8}T_2+2T_1+\frac{1}{8}T_2=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}x$$

* يوجد في الكتاب طريقتين للحل ← الثانية أسهل لحالي مثال 16 وكذلك مثال 17

انتهت الوحدة السادسة

ام الحسن

* الوحدة السابعة ⟸ الاستكمال

اذا كان لدينا أزواج مرتبة $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ فالمطلوب ايجاد حدودية $P(x)$ تشكل هذه البيانات ⟸

$$P(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$
$$= f(x_i)$$

سيمى محدد النظام ⟸ محدد فاندرموندي ويحسب من المعادلة ⟸

$$V = \prod_{0 \le j < k \le n} (x_j - x_k)$$

حاصل ضرب العوامل ⟸ $\prod$

اذا كانت $x_j \neq x_k$ لجميع $j \neq k$ فالمحدد $\neq 0$، والحل متفرد فالحدودية $P(x)$ موجودة ودرجتها $\le n$.

* من حدوديات الاستكمال (تايلر)

المشتقة من الرتبة (j) ⟸ $f^{j}(x)$

$$P_n^{(j)}(x) = f^{(j)}(x_0) \qquad j = 0, 1, \dots, n$$

وتصبح الصيغة العامة لحدوديات تايلر ⟸ (من الدرجة $n=3$)

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots$$
$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{n}(x_0)$$

* مبرهنة (1) مبرهنة تايلر

اذا كانت $f^{i}(x)$ موجودة لجميع قيم $i = 0, 1, \dots, n$ ومتصلة على $[a, b]$، وكان $f^{n+1}(x)$ موجود عندما $a < x < b$ ، $P_n(x)$ رمز حدودية تايلر فإنه لكل $x \in [a, b]$ يوجد نقطة ε بين x, x_0 ⟸

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\varepsilon_{n})$$

2019/11/16 23:36

سؤال مهم

* حدودية لاجرانج للاستكمال (مهم جداً للحل)

$$L_j(x) = \prod_{i=0}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} \Rightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{y_i}_{\text{المعطيات}} \; \underbrace{L_i(x)}_{\text{من القاعدة}}$$ ⇐ قانون ايجاد الحدودية

$$= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \dots$$

مثال 2 مهم

حدودية الاستكمال الداخلي

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	-1	0	2	3
y	4 y_0	1 y_1	0 y_2	2 y_3

[1] نسمي المعطيات $x_0, x_1, \dots$ $y_0, y_1, \dots$

[2] نكتب حدوديات لاجرانج وذلك بايجاد $L_i(x)$ أولاً حسب عدد المعطيات

① $$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

نبدأ بـ x ولا يوجد فيه x_0 ⇐ (البسط)

نبدأ بـ x_0 ولا نطرح منها x_0 ⇐ (المقام)

$$= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} = \frac{-1}{12}\, x^3 - 5x^2 + 6x$$

② $$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)}$$

$$= \frac{1}{6}(x^3 - 4x^2 + x + 6)$$

③ $$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)}$$

$$= \frac{-1}{6}(x^3 - 2x^2 - 3x)$$

2019/11/16 23:36

(4) $L_3(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \dfrac{(x-1)(x-0)(x-2)}{(3-1)(3-0)(3-2)}$

$= \dfrac{1}{12}(x^3 - x^2 - 2x)$

أم المجد

$\boxed{3}$ تحسب

$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i(x)$$

$$= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$= 4\left(\frac{-1}{12}(x^3 - 5x^2 + 6x)\right) + 1\left(\frac{1}{6}(x^3 - 4x^2 + x + 6)\right) + 0 + 2\left(\frac{1}{12}(x^3 - x^2 - 2x)\right)$$

$$= \frac{1}{6}(5x^2 - 13x + 6)$$

* درجته $3 \geq 2$
دائماً أقل بواحد

نتيجة (1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$

$$L_j(x) = 1 - \sum L_i(x)$$

في حالة $n=1$ أي وجود نقطتين فقط $\{(x_0, y_0)(x_1, y_1)\}$

نستخدم صيغة الاستكمال الخطية دائماً

$$P(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0)$$

تقدير الخطأ عند $(x_0) \Leftarrow$

$$E(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0)$$

2019/11/16 23:39

ام المجس *

* خوارزمية ايتكين

فوائدها

① تتجاوز احدى مشكلات صعوبة لاجراء الاستكمال

② يكون الاستكمال عند نقطة واحدة

③ يسمى هذا الاسلوب استكمال خطي تتابعي

مبرهنة (4) حفظ القوانين

← المحدد

$f_i = f(x_i)$

(x) ← القيمة المطلوب استكمالها

$$* \; P_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}$$

$$* \; P_{02}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

$$* \; P_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{01} & x_1 - x \\ P_{02} & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1} \quad \Longleftrightarrow$$

① نحسب P_{01}

② نحسب P_{02}

③ نعوض بالقانون

الصيغة العامة

$$* \; P_{0k} = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_k & x_k - x \end{vmatrix}}{x_k - 0}$$

الصيغة العامة

$$* \; P_{01k} = \frac{\begin{vmatrix} P_{01} & x_1 - x \\ P_{0k} & x_k - x \end{vmatrix}}{x_k - x_1}$$

* الفروق المقسومة وحدودياتها
* تتجاوز عيوب حدودية لاجرانج أو طوارزمية ايتكن
* تنفع في ايجاد الاستكمال المعكوس
* عندما تكون الفروق بين القيم $(x_{j+1} - x_j)$ مختلفة

* الصيغة العامة لحدودية الاستكمال بالفروق المقسومة

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(\dots)(x - x_{n-1})$$

* يجب حساب قيم $a_0, a_1 \dots a_n$ لكتابة الحدودية حيث أن ⇐

$a_0 = f(x_0)$ دائماً

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$ الفرق المقسوم الأول

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$ الفرق المقسوم الثاني

* الصيغة العامة لحساب قيمة a_k ⇐

$$a_k = \frac{f[x_0, x_1, \dots x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \dots x_k]}{x_k - x_0}$$

ام المجد

2019/11/22 22:34

سؤال

معطيات

	X	y $f(x_i)$	a_1 : $f[1]$	a_2 : $f[11]$	a_3 : $f[111]$ ...
x_0	.5	y_0 1.6487			
x_1	1	y_1 2.7182	$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ = 2.13912	1.38769	
x_2	1.5	y_2 4.48168	3.52687		0.600153
x_3	2	y_3 7.389	5.814734	2.28792	

حساب a_1 الفرق خطوتين

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{2.7182-1.6487}{1-.5} = \boxed{2.13912}$$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4.48168-2.7187}{1.5-1} = \boxed{3.52687}$$

$$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{7.389-4.48168}{2-1.5} = \boxed{5.814734}$$

حساب a_2 الفرق 3 خطوات

$$a_1 \Rightarrow \frac{3.52687-2.13912}{1.5-.5} = \boxed{1.38769}$$

$$a_1 \Rightarrow \frac{5.814734-3.52687}{2-1} = \boxed{2.28792}$$

$$a_1 \Rightarrow \frac{2.28792-1.38769}{2-.5} = 0.600153$$ الفرق 4 خطوات حساب a_3

١٢/١ د.

خطوات ايجاد a_1, a_2, a_3

a_0 أول رقم   الرقم الثاني

$$P(x) \Rightarrow 1.6487 + 2.139123\,(x - x_0.5) - 1.38769\,(x-1)(x-.5)$$
$$+\ 0.600153\,(x-1.5)(x-1)(x-.5)$$

* نكتب الحدودية حسب القاعدة 18 ص 62

* الفروق المتساوية، صيغة نيوتن للفروق المتقدمة (الأمامية)
يكون الفرق بين أي قيمتين ثابت وهو h ⟸ $h = x_{i+1} - x_i$

عامل الفروق المتقدمة رمزه Δ حيث أن

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta f(x) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = \Delta f$$

إذا كانت $m > 1$ ⟸

$$\Delta^{m+1} f(x) = \Delta^m f(x+h) - \Delta^m f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$
$$= [f(x+h+h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)]$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

ام الطيب

* القاعدة العامة لنيوتن للفروق المتقدمة

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} -(-1)^k f(x+(n-k)h)$$

$$\binom{k}{k} = \binom{k}{0} = 1$$

* العلاقة التي تربط الفروق المقسومة والمتقدمة
* مبرهنة (5)

اذا كانت $k \geq 0$ فان ←

$$f[x_0, x_1, \dots x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k}$$

المقسومة ↑ ↖ المتقدمة

* لايجاد قيمة μ ←

$$\mu = \frac{x - x_0}{h}$$

القيمة التي نتكلم عنها ← x

الفرق الثابت بين القيم ← h

* صيغة نيوتن للفروق المتقدمة ←

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\mu}{k} \Delta^k f(x_0)$$

$$\boxed{x_i = x_0 + i h}$$

لايجاد قيم x_i

$$x_1 = x_0 + 1h$$
$$x_2 = x_0 + 2h$$

2019/11/22 22:34

$P(1.75)$

نفس مثال (14)

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
.5	1.64			
1	2.718	1.078		
1.5	4.481	1.763	.685	0.46
2	7.389	2.908	1.145	

$$2.718 - 1.64 = 1.078$$

$$4.481 - 2.718 = 1.763$$

$$7.389 - 4.481 = 2.908$$

حساب Δ

$$1.763 - 1.078 = .46$$

حساب Δ^3

نكتب الحدودية

$$P(x) = \cancel{1.64 + 1.078 \binom{\mu}{1}} +$$

$$1.64 + \binom{\mu}{1} 1.078 + \binom{\mu}{2} 0.685 + \binom{\mu}{3} 0.46$$

عالحاسبة

عالحاسبة

على التوافيق

$$\boxed{5.76}$$

نحسب μ لنعوضها

$$\mu = \frac{1.75 - .5}{.5} = 2.5$$

$$P(x) = 1.64 + \binom{2.5}{1} 1.078 + \binom{2.5}{2} 0.685 + \binom{2.5}{3} .46$$

بدها توافيق

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\ \cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

2019/11/22 22:35

* صيغة نيوتن للفروق الرجعية

عامل الفروق الرجعية ⟸ ∇

* $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

* $\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$

* $\nabla^m f_k = \nabla^m f_k - \nabla^m f_{k-1}$

$$\nabla^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x - kh)$$ ⟸ القاعدة العامة

* لإيجاد قيمة المعلم v ⟸ بدل س

$$v = \frac{x - x_0}{h} \qquad x - x_{n-m} = (v+m)h$$

* صيغة الفروق الرجعية

$$P_n(x) = P_n(x_n + vh)$$
$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{-v}{j} \nabla^j f_n$$

نفس مثال 15 كون جدول الفروق الرجعية واحسب $P(.73)$

x	y	∇	∇^2	∇^3	∇^4
0.2	0.203	.220	~~0.044~~		
0.4	0.423	.261	0.041		
0.6	0.684	.346	0.085	0.044	
0.8	1.030	.527	0.181	.090	.052
$x_n \to 1$	1.557				

$$P(x) = 1.557 - \quad + \quad - \quad + \quad -$$

نحسب r

$$r = \frac{x - x_n}{h} = \frac{.73 - 1}{.2} = \boxed{1.35}$$

$$P(x) = 1.557 - 0.527(1.35) + \frac{1.35(1.35-1)}{2}$$

$$= \boxed{.924}$$ الجواب النهائي

ام المجد

$S_i(x)$ رمزها ← الاستكمال بالسبلاينات التكعيبية
(فيها أسئلة موضوعية كثيرة)
← سيتم شرحها في نهاية المحاضرة

$$S_i(x) = d_i + c_i(x - x_i) + b_i(x - x_i)^2 + a_i(x - x_i)^3 \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

يلزمنا ايجاد قيم d_i, c_i, b_i, a_i

شروطها

$\boxed{1}$ $S_i(x_i) = f(x_i)$

$S_i(x_i) = y_i$

ام المجد

$\boxed{2}$ $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$

$\boxed{3}$ $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$

$\boxed{4}$ $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$

شرط السبلاين الطبيعية $S''(x_0) = 0, \; S_{n-1}''(x_n) = 0$

قانون الحل ←

المعادلة

$\boxed{1}$ $h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_i + h_i)M_i + h_i M_{i+1} = 6\left[\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \left(\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)\right]$

$\boxed{2}$ $a_i = \dfrac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$ $\quad \boxed{3}$ $b_i = \dfrac{M_i}{2}$

$\boxed{4}$ $c_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \cancel{\left(\dfrac{M_{i+1} + 2M_i}{6}\right) d_i} = -\left(\dfrac{M_{i+1} + 2M_i}{6}\right) h_i$

$\boxed{7}$ $h_i = x_{i+1} - x_i$ ← الفرق بين كل قيمتين

$\boxed{5}$ $d_i = y_i$

$\boxed{6}$ $M_0 = S''(x_0) = 0$ $\quad M_2 = S_{n-1}''(x_n) = 0$
$= 0 \qquad = 0$

شروط طبيعية

2019/11/27 23:33

أوجد قيمة تقريبية $S(3.5)$ بالبيانات التكعيبية (سبلاين طبيعية)

	x_0	x_1	x_2
x	1	2	3
y	2	3	5
	y_0	y_1	y_2

$\mu_0 = 0 \qquad \mu_2 = 0$ $\qquad h_0 = 1 \quad h_1 = 1$

$\boxed{i=1}$ نعوض بالقانون $\boxed{1}$

$$h_0\mu_0 + 2(h_0+h_1)\mu_1 + h_1\mu_2 = 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0}\right)$$

$$\underbrace{\mu_0}_{\text{صفر}} + 2(1+1)\mu_1 + \underbrace{\mu_2}_{\text{صفر}} = 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0}\right)$$

$$= 6(y_2 - y_1 - y_1 - y_0)$$

$$\Rightarrow 4\mu_1 = 6(5-3-3-2) \Rightarrow \boxed{\mu_1 = \frac{3}{2}}$$

$\boxed{i=0}$ $a_0 = \dfrac{\mu_1 - \mu_0}{6h_0} = \dfrac{\frac{3}{2} - 0}{6(1)} = \dfrac{3}{2} \div 6 = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

$b_0 = \dfrac{\mu_0}{2} = \boxed{0}$

$c_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - \left(\dfrac{\mu_1 + 2\underbrace{\mu_0}_{\text{صفر}}}{6}\right)h_0 = \dfrac{3-2}{1} - \left(\dfrac{3}{2}/6\right)1 = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

$d_0 = y_0 = \boxed{2}$

$a_1 = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{6h_1} = \dfrac{-1}{4} \qquad b_1 = \dfrac{\mu_1}{2} = \dfrac{3}{4} \qquad c_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \left(\dfrac{\mu_2 + 2\mu_1}{6}\right)h_1$

ام الحجد

أم المجد

* الوحدة الثامنة ← التكاملات العددية
* أنواع التكاملات البسيطة

[1] قاعدة منتصف الفترة $N=0$ تكون باستخدام نقطة واحدة فقط

يرمزلها ← I_1

* نختار النقطة المناسبة بحيث تكون $x=\frac{a+b}{2}$ وهي منتصف الفترة $[a,b]$

القاعدة الحل ←

$$I_1=(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

قيمة الخطأ لها ←

$$E(I_1)=\int_a^b f'(c)\,(x-x_0)\,dx$$

نجد المشتقة الأولى ثم نعوض قيمة c

حيث c تنتمي للفترة $[a,b]$ قد تكون البداية أو النهاية

* كذلك يمكن ايجاد الخطأ لجميع الحالات والتكاملات ←

مقدار الخطأ = القيمة الحقيقية ـ القيمة التقريبية

مثال 3 $f(x)=3x^2 \qquad 0\leq x\leq 2$

(أ) أوجد القيمة الدقيقة للتكامل (الحقيقية)

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 3x^2\,dx=\frac{3x^3}{3}\Big]_0^2 \qquad x^3\Big]_0^2=\boxed{8}$$

(ب) أوجد قيمة I_1 (التقريبية)

$$I_1=b-a\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=2-0\,f\left(\frac{0+2}{2}\right)=2\,f(1)=\boxed{6}$$

* مقدار الخطأ = الحقيقية ـ التقريبية

$$\boxed{2}=\quad 6-8$$

2019/11/27 23:35

[2] قاعدة شبه المنحرف للتكاملات البسيطة رمزها $\boxed{I_2}$

* باستخدام نقطتين x_0, x_1 من الفترة $[a, b]$

* نفرض أن ⇐ $x_0 = a$ ⇐ $x_1 = b$ ⇐ $h = b - a$

* قاعدة الحل ⇐

$$I_2 = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

أم الحجر

$$I_2 = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

* قيمة الخطأ ⇐

$$E(I_2) = \frac{-h^3}{12} f''(c) \qquad c \in [a, b]$$

مثال 4

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [0, 2]$$

(أ) أوجد القيمة الدقيقة للتكامل

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

(ب) أوجد القيمة التقريبية

$h = b - a = 2 - 0 = 2$

$f(0) = 0$

$f(2) = 4$

$$I_2 = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$= \frac{2}{2}\left[0 + 4\right] = \boxed{4}$$

* مقدار الخطأ = الحقيقية - التقريبية

$$\boxed{-1.33} = 4 - \frac{8}{3}$$

* أو باستخدام القانون عندما $c = 2$

$$E(I_2) = \frac{-h^3}{12} f''(c)$$

$f' = 2x$

$f'' = x$

$$\frac{-(2)^3}{12} x = \frac{-8}{12}(2) = \boxed{-1.33}$$

✗ [3] قاعدة سمبسون للتكاملات البسيطة ورمزها $[I_3]$

* باستخدام ثلاث نقاط x_0 , x_1 , x_2

* نفرض أن $x_0 = a$ ⇐ $x_2 = b$ ⇐ $x_1 = \frac{a+b}{2}$ ⇐ $h = \frac{b-a}{2}$

* قاعدة الحل ⇐

$$I_3 = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

* قيمة الخطأ ⇐

$$E(I_3) = \frac{-h^2}{90} f^{4}(c) \qquad c \in [a,b]$$

مثال 5

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [0,2]$$

(أ) أوجد القيمة الحقيقية

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \boxed{\frac{8}{3}}$$

(ب) القيمة التقريبية

$$h = \frac{b-a}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

$$I_3 = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[f(0) + 4f(1) + f(2)\right]$$

$$\frac{1}{3}\left[0 + 4 + 4\right] = \boxed{\frac{8}{3}}$$

* قيمة الخطأ = الحقيقية - التقريبية

صفر $= \frac{8}{3} - \frac{8}{3}$

أم المجد

* طريقة اشتقاق المعادلات غير المحددة درجة مع التكاملات والأخطاء (هذا الموضوع غالباً ما يأتي بالأسئلة الموضوعية فقط)

* التكاملات العددية المتراكبة وطرق بنائها

[1] قاعدة شبه المنحرف المتراكبة

$[a,b]$ $\quad h=\frac{b-a}{m}$ $\quad m=$ عدد الفترات الفرعية

قيمة التكامل ←

$$I_2=\frac{h}{2}\left[y_0+y_n+2(y_1+y_2+\dots y_{n-1})\right]$$

صورة بداية الفترة ، صورة نهاية الفترة ، بقية الصور

قيمة الخطأ ←

$$E(I_2)=\frac{(b-a)h^2}{12}f''(c)$$

مثال 7

$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ $\quad 1\leq x\leq 3$

أوجد قيمة التكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف المتراكبة عندما $\boxed{m=1}$

$h=\frac{b-a}{m}=\frac{3-1}{1}=\boxed{2}$

$1\leq x\leq 3$

نقسم الفترة حسب m

عندما $m=1$ ← نقفز خطوة فقط

عندما $m=2$ ← نقفز خطوتين

x	1 (x_0)	3 (x_1)
y	$.5$ (y_0)	$.3$ (y_1)

نجد $.5=f(1)$

$.3=f(3)$

نطبق بالقاعدة ←

$$I_2=\frac{h}{2}\left[y_0+y_1\right]$$

$$\frac{2}{2}\left[.5+.3\right]=\boxed{.8}$$

عندما $m=2$ ← $h=\frac{3-1}{2}=\boxed{1}$

x	1	2	3
y	$.5$ (y_0)	$.4$ (y_1)	$.3$ (y_2)

$f(2)=.4$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[.5+.3+2(.4)\right]=\boxed{.8}$$

وبكمل البقية على نفس النمط

2019/11/27 23:35

* قاعدة سمبسون المتراكبة

$[a,b]$ عدد الفترات الفرعية ← $2m$ طول الفترة ← $h = \frac{b-a}{2m}$

$x_i = a + ih$

قاعدة الحل ←

$$I_3 = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots) + 4(y_1 + y_3 + y_5 \dots)\right]$$

صورة البداية ← y_0 ، صورة النهاية ← y_n ، الزوجية ← $(y_2 + y_4 + \dots)$ ، الفردية ← $(y_1 + y_3 + y_5 \dots)$

قيمة الخطأ

$$E(I_3) = \frac{(b-a)h^4}{180} f^4(c)$$

مثال 7 على طريقة سمبسون $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $[1,3]$

عندما $2m = 4$

$$h = \frac{b-a}{2m} = \frac{3-1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

x	1	1.5	2	2.5	3
y	.5	.46153	.4	.3448	.3
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

$$I_3 = \frac{.5}{3}\left[y_0 + y_4 + 2(y_2) + 4(y_1 + y_3)\right]$$

$$= \frac{.5}{3}\left[.5 + .3 + 2(.4) + 4(.46153 + .344)\right]$$

$$= \boxed{.8042}$$

* طريقة سمبسون أكثر دقة من طريقة شبه المنحرف

انتهت مادة النهائي

أم المجد

2019/11/27 23:35