اسم المادة : مبادئ التحليل العددي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط هنا

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

الاستاذة: سارة عطانة

مبادئ التحليل العددي

الوحدة الثالثة

طرق حل المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

1) المعادلة الخطية $ax+b=0$ ولها حل واحد .

2) المعادلة التربيعية (غير خطية) $ax^2+bx+c=0$ ولها حلين أي جذرين اثنين

وتحلل الى عواملها عن طريق فتح الاقواس $(\quad x)(\quad x)$ او عن طريق المميز

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وهذان الجذران يكونان حقيقين مختلفين او متساوين مركبين .

مثال :- $x^2+2x+2=0$

جذران المعادلة التربيعية

$$= \left(\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}\right)$$

$$= -1\pm i \quad (\text{عدد مركب})$$

إذا كان z_0 جذراً للمعادلة فإن z_0^* المرافق هو جذر آخر للمعادلة ومرافق العدد المركب هو :

$z_0=a+bi$ المرافق $z_0^*=a-bi$

الجذور نوعين:
- بسيط لا يتكرر
- مضاعفة وهي التي تتكرر

3) المعادلة من الدرجة الثالثة والرابعة والخامسة (كثيرات الحدود) وما فوق وهنا نوعين

1) جبرية وهي التي تحتوي حدوداً على صيغة x^n (عدد صحيح موجب : n)

2) تصاعدية وهي التي تتضمن الصيغ x^n وتحتوي e^x و $\sin x, \cos x$ -- الخ

* يمكن كتابة المعادلات الجبرية على صيغة نسبة $\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث
$f(x)$ و $g(x)$ كثيرات حدود و $g(x) \neq$ صفر .

حل مثال 1 صفحة 59 وتدريب 1 صفحة 59

لإيجاد جذور معادلة غير خطية بمتغير واحد .

- open method.
  - القاطع
  - نيوتن رافسون — تقارب غير خطي
  - النقطة الثابتة — تقارب خطي
- Bracketing method الجذر المحصور .
  - حساب الخطأ — اختياري لن أقوم بشرحها
  - التنصيف — التقارب خطي
  - الرسم البياني او التمثيل البياني .

أهم ثلاث طرق سوف نستخدمها

نبدأ في

1) * الرسم البياني (التمثيل البياني)

الهدف من الرسم هنا ايجاد جذر المعادلة اي عندما $f(x)=0$ و الجذور هنا هي نقطة تقاطع المنحنى $y=f(x)$ من محور X اي عندما $y=0$.

* اذا كان $f(x)$ كثير حدود من درجات عالية نجزئ $f(x)$ الى اقترانين (مثال 2 صفحة 62)
* او نستخدم القسمة التركيبية تدريب 4 صفحة 66 او مثال صفحة 63
* العالم المسلم الذي اول من استخدم التمثيل البياني للجذور هو عمر الخيام

نظرية القيمة الوسطية : اذا كان الاقتران $f(x)$ حيث $f:[a,b]\to R$ بحيث $a<b$
وكان الاقتران f متصل على الفترة $[a,b]$ وقابل للاشتقاق على (a,b) فإنه يوجد
جذر للاقتران في الفترة $[a,b]$ اذا كان $f(a)f(b) < 0$

* يعني اذا حاصل الضرب سالب $f(a)f(b)$ اقل من صفر يوجد في الفترة $[a,b]$ جذر للمعادلة ونظرية القيمة الوسطية هي النظرية التي تستخدمها للبحث عن الجذر في فترة معينة باستخدام طريقة التنصيف

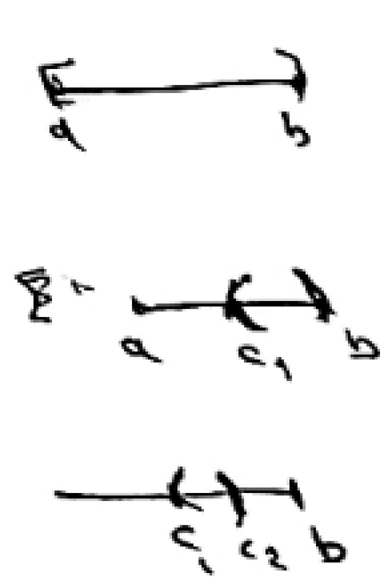
$\boxed{2}$ طريقة التنصيف :- الهدف إيجاد جذر تقريبي α للمعادلة $f(x)=0$

1. نجد الفترة $[a,b]$ حيث $f(a)f(b)<0$
2. نجد $c = \frac{a+b}{2}$.
3. نحسب $f(a), f(b), f(c)$ ونجد فترة الصفر تمثل $f(a)$ or $f(b) . f(c) <0$

وبهذا نحصر الجذر في فترة الصفر ونستمر في ذلك لعدة محاولات .

مثال جد جذراً للاقتران $f(x)=x^2-3=0$ باستخدام طريقة التنصيف في الفترة $[1,2]$,

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$c=\frac{a+b}{2}$	$f(c)$	التبديل
1	2	-2	1	$\frac{1+2}{2} = 1.5$	-0.75	نبدل مكان $a=1$ الى $c=1.5$ $[1.5, 2]$
1.5	2	-0.75	1	$\frac{1+1.5}{2} = 1.75$	+0.062	$b=c$ $[1.5, 1.75]$
1.5	1.75	-0.75	0.062	$\frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$	0.399	$a=c$



ونستمر بالحل

حل مثال 4 صفحة 68 تدريب 5 صفحة 70

* طريقة التنصيف : التقارب خطي وثابت التقارب هو $\frac{1}{2}$ لجميع المعادلات مهما كانت قيم a, b

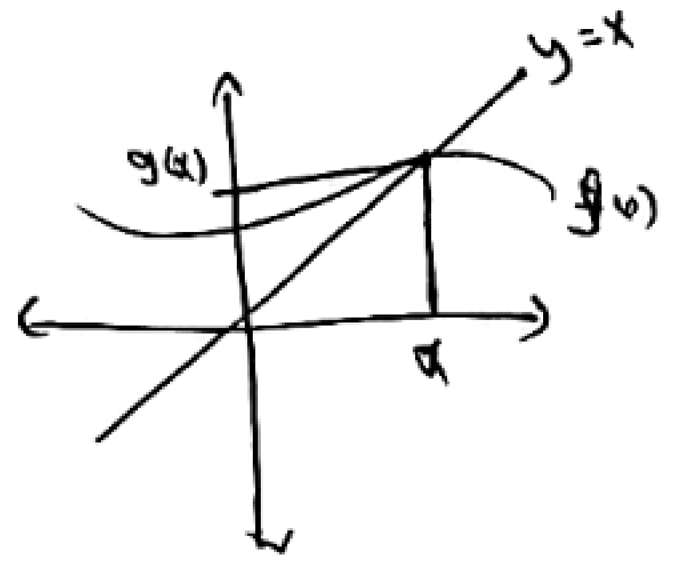
③ طريقة النقطة الثابتة :-

لإيجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ اي لحل المعادلة نحول صيغتها الى $x=g(x)$

حيث اذا كان هناك $f(\alpha)=0$ فان $\alpha=g(\alpha)$ وتسمى α نقطة ثابتة لـ g

* اذا كانت α نقطة ثابتة

$$\boxed{f(\alpha)=0 \quad \text{و} \quad g(\alpha)=\alpha}$$



مثال : اذا كان $f(x)=0$ وكان $g(4)=4$ فان :-

4 تسمى نقطة ثابتة حيث $f(4)=0$

كيف نجد g(x) ماهي صيغتها ؟.

على سبيل المثال اذا اخترنا متتالية قيم تتابعية $\{X_n\}$ حيث

$X_{n+1}=g(X_n)$.

الاسئلة المطروحة علينا :-

① ماهي صيغه g(x) حتى تتقارب من $\{X_n\}$.
② كيف نختار قيم X_0 حتى تحقق التقارب
③ ما نوع التقارب

سنجيب عن الاسئلة بالمثال التالي :

6

مثال (7) صفحة 75

لإيجاد الجذر التربيعي للعدد 5 أي $x^2 = 5$.

$f(x) = x^2 - 5 = 0$

سنجد جذر او حل المعادلة عن طريق النقطة الثابتة اذا علمنا ان ايجاد $g(x)$ على صورة $x = g(x)$ هناك طرق مختلفة :.

① اضافة x الى طرفي المعادلة

$$0 = x^2 - 5$$

اضافة x للطرفين

$$0 + x = \underbrace{x^2 - 5 + x}_{g(x)}$$

تصبح الان على صيغة $x = g(x)$

$$\boxed{x = x^2 - 5 + x} \quad —— ①$$

② نقسم على x طرفي المعادلة

$$x^2 = 5$$

نقسم على x

$$x = \underbrace{\frac{5}{x}}_{g(x)}$$

$$② —— \boxed{x = \frac{x}{5}}$$

③ نقسم على x ثم نضيف x

$x^2 = 5$ / نقسم على x

$x = \frac{5}{x}$ ثم نضيف x

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{x} + x\right]} \Leftarrow 2x = \frac{5}{x} + x \Longleftarrow x + x = \frac{5}{x} + x$$

③

٤) نضيف 2X الى طرفي المعادلة

$0 = X^2 - 5$ / نضيف 2X

$2X = X^2 - 5 + 2X$ نقسم على 2

$$\boxed{X = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left[X^2 - 5 + 2X\right]}_{g(x)}} \leftarrow ④$$

الان لدينا اربع صيغ لـ $X = g(x)$ سوف نحسب X_n لكل صيغه ونرى التقارب لهم. $\boxed{X_0 = 2 \text{ نفرض}}$

n	الصيغه ①	الصيغه 2	الصيغه ③	الصيغه ④
0	2	2	2	2
1	1	2.5	2.25	1.5
2	-3	2	2.236	-1.25
3	1	2.5	2.2360	-2.03
4	-3	2	2.3606	-2.065

نفرض عند n=0 في الصيغ الاربع قيمة $X_0 = 2$
نفرض عند n=1 في الصيغ الاربع قيمة X_0 الناتجة من ~~سابقا~~
وهكذا نستمر.

من الواضح أن صيغ $\{X_n\}$ عند الصيغه الثالثه تتقارب حيث

X_n (عند الصيغه الثالثه) $= \{2, 2.25, 2.236, 2.2360, 2.3606 \ldots\}$

اذاً الأنسب $x = g(x)$ نستطيع ان نستخدمها لايجاد الحل هي الصيغه الثالثة $x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$.

كيف نستطيع ان نعرف أن صيغه $x=g(x)$ مناسبة لإيجاد متتالية متقاربة من دون ان نعوض قيم x على شكل متتاليه كما في الجدول السابق .

عن طريق المبرهنة التالية :

* اذا كان $g(x)$ متصلاً على الفترة $[a,b]$ وان $a \le g(x) \le b$ فيوجد للداله $g(x)$ نقطة ثابتة في $[a,b]$ حيث $x = g(x)$ اذا كانت $g'(x)$ موجوده (a,b) ووجد ثابت K موجب (ثابت التقارب) $(0<K<1)$ حيث

$$|g'(x)| \le K < 1 \quad \text{لكل} \quad x \in (a,b).$$

$\boxed{|g'(x)| \le K < 1}$ مهم .

K ثابت التقارب

تابع مثال (7) صفحه 78 نستخدم المبرهنة السابقة :-

نفرض تابع الصيغ الاربعه السابقة $x = g(x)$.

1. الصيغه الاولى $g(x) = x^2+x-5 \Leftarrow g'(x) = 2x+1$
2. الصيغه الثانيه $g(x) = \frac{x}{5} \Leftarrow g'(x) = \frac{-5}{x^2}$
3. الصيغه الثالثة $g(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{x}+x\right] \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{x^2}\right)$
4. الصيغه الرابعة $g(x) = \frac{1}{2}\left[x^2-5+2x\right] \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{2}(2x+2)$

نعوض قيمة $\boxed{\alpha \approx 2.5}$ بناءً على ما توصلنا اليه في الجدول السابق :-

1. الصيغه الاولى $g'(x) \approx 5.4 > 1$ ولكن $K<1$ وهذا ينفي المبرهنة ,
2. الصيغه الثانيه $g'(x) \approx 1$ وهذا غير مناسب $K<1$
3. الصيغه الثالثه $g'(x) \approx 0$ وهذ مناسب $0 \le K < 1$
4. الصيغه الرابعة $g'(x) \approx 3$ وهذا غير مناسب $3>1$

مما سبق نستنتج انه يوجد للاقتران $g(x)$ نقطة ثابتة اذا كانت $|g'(x)| \leq k < 1$ على الفترة $[a, b]$ وهي تكون وحيدة ومفردة اي .

① $g(x) = x$ لها حل متفرد α في $[a, b]$.

مثال أثبت أنه يوجد نقطة ثابتة $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ على الفترة $[-1, 1]$ وأنها وحيدة :-

① $g(x)$ متصل على الفترة $[-1, 1]$.

② $g'(x)$ قابل الاشتقاق من $(-1, 1)$

وعليه $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$

$\boxed{g'(x) \; \frac{2}{3}x}$

$g'(-1) = \left|\frac{-2}{3}\right| < 1$

$g'(1) = \left|\frac{2}{3}\right| < 1$

اذا كان $g(-1)g(1) < 0$ اذا حسب القيمة الوسطية يوجد جذر للمعادلة $g(x)$ في الفترة $[a, b]$ وهو وحيد ومفرد .

حل تدريب 11 صفحة 84 و تدريب 12 صفحة 85

هون حل على المبرهنة $|g'(x)| \leq k < 1$

كيف نجد قيمة ثابت التقارب K

$$K = \max_{x \in (a,b)} |g'(x)| < 1 .$$

كيف نختار قيم x_0 تكون قريبة من الجذر α

مبرهنة اذا كان $f(x)$ لا مشتقة متصلة على الفترة $[a,b]$ وان $\boxed{0 < K \leq f'(x)}$ فان المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α في الفترة بين 0 و $-\frac{f(0)}{K}$

K هنا يختلف عن ثابت التقارب، K هنا يمكن ان يكون اكبر من واحد.

بالنسبة للمثال السابق $f(x) = x^2 - 5$.

$\boxed{0 < K \leq f'(x)} \longrightarrow f'(x) = 2x > 2 . > 0$

$f(0) = -5 .$

اذا هناك حل للمعادلة بين الصفر و $-\frac{f(0)}{2}$

$\left(-\frac{-5}{2}, 0\right)$

$[2.5, 0] \Leftarrow$ في هذه الفترة يوجد صفر المعادلة

في المثال السابق اوجدنا عدة صيغ لـ $x = g(x)$ ثم اختبرنا أحد هذه الصيغ اما الآن سنجد طريقة مباشرة لإيجاد $g(x)$.

* انه من $f(x) = 0$

نقوم بإضافة x لكل الاطراف

$$f(x) + x = x \cancel{f(x)}.$$

نضيف λx لكل الاطراف

$$\underbrace{f(x) + x}_{G(x)} + \lambda x = x + \lambda x.$$

$$G(x) + \lambda x = x(1+\lambda)$$

نقسم على $\frac{1}{1+\lambda}$

$$\boxed{x = \frac{1}{1+\lambda}\left[G(x) + \lambda x\right] = g(x)}$$

هذه صيغة مباشرة لإيجاد $g(x)$.

$$g'(x) = \frac{1}{1+\lambda}\left[\lambda + G'(x)\right].$$

حتى تحقق $g'(x) < 1$ نختار $\boxed{\lambda = -G'(x)}$

اذا $\boxed{-G'(x) = \lambda}$

$$\boxed{G(x) = f(x) + x}$$

مثال: اذا كانت $F(x)=x^2+4x$ اوجد قيمة λ ؟؟

$\lambda = -F'(x)$

$\lambda = -(2x+4)$

مثال 9 صفحة 80

افرض $f(x)=x-e^{-x}$ لكل $x>0$

$G(x)=f(x)+x$.

$G(x)=x-e^{-x}+x = 2x-e^{-x}$

$G'(x)=2+e^{-x}$

بما انه $x>0$ فإن $\boxed{e^{-x}<1}$ وعليه $\boxed{G'(x)<3}$

$G'(x)=2+e^{-x}$

هذه القيمة اقل من 1 وعليه $G'(x)=2+e^{-x}$

$G'(x)<3 \Leftarrow G'(x)\approx +3$

$\lambda=-G'(x)=-3$

وعليه نفرض ان $\boxed{\lambda=-3}$

$$g'(x)=\frac{1}{1+\lambda}\left[\lambda+G'(x)\right]$$

$$=\frac{1}{1+(-3)}\left[-3+2+e^{-x}\right].$$

$$=\frac{1}{-2}\left[-1+e^{-x}\right].$$

$$|g'(x)|=\frac{1}{2}\left[e^{-x}-1\right].$$

وعليه $0<g'(x)<\frac{1}{2}$ اذا تحقق $\boxed{g'(x)<k<1}$

وعليه فان الصيغة $g(x)$ تؤدي الى متتالية $\{x_n\}$ لقيم متقاربة.

نجد g(x)

$$g(x) = \frac{1}{\lambda+1}\left[\lambda x + f(x)\right].$$

$$= \frac{1}{-3+1}\left[-3x + 2x - e^{-x}\right]$$

$$= \frac{1}{-2}\left[-x - e^{-x}\right].$$

$$g(x). = \frac{1}{2}\left[x + e^{-x}\right].$$

نبدأ من $0.5 = x_0$

ونكون متتاليه x_n

x_0	x_n
n=0	0.5.
n=1	0.55
n=2	0.566
n=3	0.567
⋮	⋮

التقارب يظهر نوعياً.

في تدريب 9 صفحه 18 نستبدل $\lambda = -3$ إلى $\lambda = -2.5$.

الحسب لحد $n = 7$

3 طريقة نيوتن - رافسون : هي إحدى طرق النقط الثابتة ولكن ذات تقارب غير خطي .

طريقة نيوتن رافسون (احفظ)

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \Rightarrow \text{مهم .}$$

مثال حل المعادلة التالية بطريقة نيوتن - رافسون :-
جد x_1 و x_2 حيث $x_0 = 0.5$

$$f(x) = x e^x - 1 = 0.$$

$$f'(x) = e^x + x e^x$$

$$f'(x) = (1+x) e^x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

$$= 0.5 - \frac{0.5 e^{0.5} - 1}{(1+0.5) e^{0.5}}$$

$$= 0.571.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= 0.57 - \frac{0.571 e^{0.571} - 1}{(1+0.571) e^{0.571}}.$$

$$= .5671.$$

نسبة التقارب

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$$

٤ طريقة القاطع : هي ليست من طرق النقطة الثابتة لاننا نحتاج الى قيمتين لنحسب قيمة جديدة

$$X_{n+1} = X_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

وهي طريقة وسط بين طريقة حساب الخطأين وطريقة نيوتن (التقارب فيها غير خطي) ورتبة تقاربها هو $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$ فهي سريعة ولا تحتاج لحساب المشتقة كما في نيوتن ،