اسم المادة : جبر خطي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط هنا

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء

(١)

جبر خطي

الوحدة الأولى

من بدايتها الى الأنظمة المتجانسة،
الأنظمة المتجانسة من صفحة ٣ فقط

تعريفات :

١- المصفوفة المربعة : هي المصفوفة التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها $(n \times n)$

- المصفوفة الصفرية : هي المصفوفة التي يكون جميع مدخلاتها أصفار

$a_{ij} = 0 \; , \; \forall \; 1 \le j \le n , \; 1 \le i \le n$

مثل $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3- المصفوفة القطرية : هي مصفوفة مربعة يكون القطر الرئيسي أعداداً والباقي أصفار. مثل

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

4- المصفوفة المثلثية العلوية : هي المصفوفة التي يكون جميع المدخلات التي تحت القطر الرئيسي أصفار

$A = \begin{cases} a_{ij} \; , & i \le j \\ 0 & i > j \end{cases}$

مثال : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

5- المصفوفة المثلثية السفلية : هي المصفوفة المربعة التي يكون جميع المدخلات التي فوق القطر الرئيسي أصفار

$A = \begin{cases} a_{ij} \; , & i \ge j \\ 0 & i < j \end{cases}$

مثال : $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

* تساوي المصفوفات : تكون المصفوفات A , B متساويتان اذا وفقط اذا كان ① لهما نفس الحجم (نفس الرتبة)
② $a_{ij} = b_{ij}$ لجميع قيم i , j
(المدخلات المتناظرة متساوية)

* ضرب المصفوفات : لضرب مصفوفتين A, B يجب أن يكون عدد الأعمدة في الأولى يساوي عدد الصفوف في الثانية والجواب مصفوفة رتبتها عدد صفوف الأولى X عدد أعمدة الثانية

$$A_{m\times r} \cdot B_{r\times n} = C_{m\times n}$$

$$A = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}} , \quad B = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}$$

$$C = A \cdot B = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2(7)+3(-2)+-4(0) & 2(1)+3(4 \\ 0(7)+5(-2)+1(0) & 0(1)+5(\\ 6(7)+-2(-2)+-3(0) & 6(1)+-2(4 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -10 & 25 \\ 46 & -17 \end{bmatrix}}$$

ملاحظة: ① عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية .

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

② من الممكن أن نجد $AB = AC$ ولكن $B \neq C$

③ من الممكن أن يكون $A \cdot B = 0$ حيث 0 المصفوفة الصفرية

ولا يكون $A = 0$ أو $B = 0$

مثال
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* المصفوفة المحايدة (مصفوفة الوحدة) :
هي مصفوفة مربعة يكون القطر الرئيسي عناصره جميعها 1 وباقي المدخلات أصفار ويرمز لها I

$$I = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

حيث $I \cdot A = A \cdot I = I$

* معكوس المصفوفة (نظير المصفوفة) : بعد أن تبين أنه يوجد I حيث $I \cdot A = A \cdot I = A$ ، هل يوجد مصفوفة ولتكن B حيث $A \cdot B = B \cdot A = I$ ؟ نعم وتسمى B في هذه الحالة معكوس المصفوفة ويرمز لها $B = A^{-1}$ (نظير A)

مثال: جد قيم x, y التي توجب التساوي للمصفوفتين :-

$$A = \begin{bmatrix} 2x+3 & 1 \\ x+y & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

بما أن $A = B$ اذن

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow x = 1$$
$$x + y = 4 \Rightarrow y = 3$$

* منقول المصفوفة :

اذا كانت A مصفوفة حجمها $m \times n$ فإن منقول المصفوفة A هو $n \times m$ ويرمز له بالرمز $A^t \Leftarrow$ اذا كان $a_{ij} \in A$ فإن $a_{ji} \in A^t$

مثال: جد A^t اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

* جمع المصفوفة وطرحها :

لجمع مصفوفتان أو طرحها فإنه يتم جمع المدخلات المتناظرة لذلك يجب أن يكونا من نفس الرتبة.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

* ضرب المصفوفة بعدد : اذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m \times n$

حيث $A = (a_{ij})$ فإن $cA = c(a_{ij})$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

* **قوانين حساب المصفوفات :**

اذا كان لدينا A, B, C مصفوفات وكان a, b أعداد حقيقية فإن

1) $A+B = B+A$ (تبديلية على الجمع)
2) $A+(B+C) = (A+B)+C$ (تجميعية على الجمع)
3) $(AB)C = A(BC)$ (تجميعية على الضرب)
4) $A(B+C) = AB+AC$ (توزيع الضرب على الجمع من اليسار)
5) $(B+C)A = BA+CA$ (توزيع الضرب على الجمع من اليمين)
6) $A(B-C) = AB-AC$ (توزيع الضرب على الطرح من اليسار)
7) $(B-C)A = BA-CA$ (" " " " اليمين)
8) $a(B+C) = aB+aC$ (توزيع عدد على مجموع مصفوفتين)
9) $a(B-C) = aB-aC$ (" " " " طرح ")
10) $(a+b)C = aC+bC$
11) $(ab)C = a(bC)$
12) $(a-b)C = aC-bC$
13) $a(BC) = (aB)C$

(مراجعة البراهين ص25)

* **خصائص منقول المصفوفة (A^t)**

1) $(A^t)^t = A$ مهم
2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
3) $(\ A)^t = kA^t$ حيث k عدد حقيقي
4) $(AB)^t = B^t A^t$

نلاحظ الخاصية الرابعة عند توزيع المنقول على الضرب نعكس المصفوفتين.

مثال اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

جد $(AB)^t$ ، $B^t . A^t$ ، $A^t B^t$

جبر خطي

(5) $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ الحل

$$A^t B^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+0 & 6+0 \\ -4+3 & -3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+3 & 0+9 \\ -2+2 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$(AB)^t \Rightarrow$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+-3 & -2+-2 \\ 0+9 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^t = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $(AB)^t = B^t A^t$

معكوس المصفوفة (نظير)

* معكوس المصفوفة (A) هي المصفوفة التي اذا ضربت في المصفوفة A تعطينا مصفوفة الوحدة (I).
* معكوس المصفوفة إن وجد يكون وحيداً.
* نرمز لمعكوس المصفوفة بالرمز (A^{-1})

$$A.B = B.A = I$$ اذن B هي معكوس A

ويمكن كتابتها

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

قواعد معكوس المصفوفة:

$\boxed{1}$ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$\boxed{2}$ منقول معكوس مصفوفة قابلة للانعكاس يساوي معكوس منقول هذه المصفوفة

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^{t})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (A^{-1})^{t} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

⑥

نلاحظ أن $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$

ملاحظة : يمكن ايجاد النظير بعدة طرق ، المصفوفة 2×2

ايجاد نظيرها سهوله كالتالي : نجد المحدد مثلاً

القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 1\times3 - 1\times2 = 1$$

عكس اشارة

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اشارة

تغيير موقع

وهو ضرب مقلوب المحدد وعكس الاشارة ، وتغيير موقع العناصر

وتوضيح هذه الطريقة موجود في الوحدة الثالثة .

ملاحظات :

① اذا كانت $A = A^{t}$ يسمى هذا النوع من المصفوفات المصفوفات المتماثلة

أمثلة : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

② اذا كانت $A = -A^{t}$ يسمى هذا النوع المصفوفات مختلفة التماثل .

③ اذا طلب ايجاد A^{3} مثلاً فإننا نجد حاصل ضرب $A^{3} = A.A.A$

A^{-3} ~ ~ ~ ~ $A^{-3} = A^{-1}.A^{-1}.A^{-1}$

7

عمليات الصف البسيطة على المصفوفات وا لمصفوفه في الشكل الصفي المميز صفياً

* عمليات الصف البسيطه :

النوع الأول : تبديل صفين . مثال : $R_1 \leftrightarrow R_2$

النوع الثاني : ضرب صف من المصفوفه المعطاة بعدد حقيقي

مثال : $3R_1$

النوع الثالث : ضرب صف من المصفوفه المعطاة بعدد حقيقي وجمع الناتج الى صف آخر مع اعادة الصف الذي ضرب بعدد الى ما كان عليه .

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ النوع الأول

2) $A \xrightarrow{4R_1} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ النوع الثاني : ضربنا الصف الأول بـ 4

نفس المصفوفه

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ النوع الثالث:

ملاحظة : ضربنا وجمعنا ولا يوجد طرح

ملاحظة : اذا بدأنا بمصفوفة A واجرينا عليها احدى عمليات الصف البسيطه سنحصل على سلسله متتاليه من عمليات الصف البسيطه وتعطي بالنهايه مصفوفة جديدة (تكون مكافئه) للمصفوفة A

9

الشكل الصفي المميز

تكون أية مصفوفة على الشكل الصفي المميز اذا حققت الشروط التالية

1. اذا لم يكن الصف مكوناً بكامله من الاصفار فيكون 1 هو العنصر الاول الصفري في هذا الصف (ويسمى العنصر المتقدم او الواحد المتقدم)
2. كل الصفوف المكونة بكاملها من اصفار (اي المصفوفة الصفرية) تتواجد اسفل المصفوفة.
3. في اي صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من اصفار يكون (1) المتقدم في الصف الاسفل على اليمين من (1) المتقدم في الصف الأعلى.
4. تكون جميع عناصر العمود المحتوي على 1 متقدم اصفاراً في كل مكان عدا هذا العنصر

امثلة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A على الشكل الصفي المميز

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$ ليست على الشكل الصفي المميز

راجع امثلة وتدريبات ص 38+ 39+ 40+ 41+ 42

ملاحظة:

اذا كان لدينا مصفوفة A ، وحولناها الى الشكل الصفي المميز B ، تسمى عدد الصفوف غير الصفرية من B رتبة المصفوفة A

مثل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

الرتبة 3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الرتبة 2

المصفوفات البسيطة والنظير الضربي (معكوس المصفوفة) ج٢٦

اذا كانت A مصفوفة مربعة ، ووجدت مصفوفة مربعة B حيث

$$A \cdot B = BA = I$$

فإن B (ان وجدت) هي نظير A او معكوس A

* المصفوفة التي ليس لها نظير تسمى مصفوفة منفردة .

المصفوفة الأولية (البسيطة)

هي مصفوفة حجمها $n \times n$ ويمكن الحصول عليها من مصفوفة الوحدة I_n بعد اجراء عملية واحدة من عمليات الصف البسيطة على مصفوفة الوحدة .

مصفوفة الوحدة I_2 . $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

مصفوفة الوحدة I_3 $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

* أمثلة لمصفوفات أولية :

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← أولية ، ناتجة من تبديل صفين (النوع الأول)
2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← أولية ، ناتجة من ضرب صف بعدد (النوع الثاني)
3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← أولية ، ناتجة من ضرب الصف الأول بـ 5 وجمعه للصف الثاني (النوع الثالث)
4. مصفوفات الوحدة I_n جميعها أولية

أنواع المصفوفات الأولية

① $E(i,j)$: نلاحظ وجود الفاصلة ، وهذه الحالة تعني النوع الأول (تبديل صفين).

مثال

$$E_1 = E(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فاصلة

2و3 تعني تبديل الصف الثاني بالثالث .

② $E(k \cdot i)$: نلاحظ وجود نقطة ، وتعني (ضرب الصف i بعدد k) (النوع الثاني)

عدد صف

مثال

$$E_2 = E(3 \cdot 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نقطة

$3 \cdot 2$: ضرب الصف الثاني بالعدد 3

③ $E(k \cdot i+j)$ ضرب الصف i بالعدد k وجمعه الى الصف j

مثال

$$E_3 = E(4 \cdot 1+3)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* في صفحة 47 توضيح لإيجاد النظير للمصفوفات الأولية .

1 نظير المصفوفة الأولية الناتجة من تبديل صفين : هو نفسه

$$(E(i,j))^{-1} = E(i,j)$$

$\boxed{2}$ نظير المصفوفة الناتجة من ضرب عدد هو مقلوب العدد

$$(E(k.i))^{-1} = E\left(\frac{1}{k}, i\right)$$

في المثال السابق نجد

$$E_2^{-1} = E_2\left(\frac{1}{3} . 2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ نظير المصفوفة الناتجة من ضرب عدد بصف وجمعه الى الصف الآخر
يكون بتغيير اشارة العدد

في المثال السابق

$$E_3^{-1} = E_3(-4 . 1+3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جد الشكل الصفي المميز

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_2}{-6}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_3}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

خوارزمية ايجاد النظير

① $[A : I_n]$

② اذا وجد صف صفري على الاشكل هذا يعني أن المصفوفة A غير قابلة للانعكاس .
وانه لا داعي لاكمال الخطوات على الشكل الصفي المميز للمصفوفة A . مثال (30) صفحة 54

ملاحظة : في الوحدة الثالثة يمكن فحص اذا كان للمصفوفة نظير (أي قابلة للانعكاس) من خلال ايجاد المحدد للمصفوفة $|A|$ حيث اذا كان $|A| = 0$ فإنها غير قابلة للانعكاس .

(13)

مثال باستخدام هذا خوارزمية ايجاد النظير جد A^{-1}

(جد نظير A)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل

$[A : I_3]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_1}{4}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_2}{3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 6 & 0 & 5 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-6R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{-4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$-\frac{6}{4} \times 4 + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{-32}{24} = -\frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_3}{5}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

مباشرة

اذن :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

١٤

الأنظمة المتجانسة وغير المتجانسة من المعادلات الخطية

Homogenuos and nonhomogenuous systems of the linear equations

المعادلة الخطية n من المتغيرات

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

حيث $a_1, a_2 \cdots a_n, b \in R$.

أمثلة

$2x + 2y = 5$	خطية
$\frac{3}{x} + 6y + z = 7$	غير خطية
$x_1 + \sqrt{x_2} = -1$	غير خطية
$x_1^2 + 2x_2 + x_3 = 0$	غير خطية

النظام الخطي (Linear system) $\boxed{AX = B}$

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

حيث $a_{ij}, b_i \in R$

ملاحظة هامة: اذا كانت $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$

يكون النظام م..

مصفوفة المعاملات والمصفوفة الممتدة للنظام الخطي

$$AX = B$$ غير متجانس

$$AX = 0$$ متجانس

حيث A مصفوفة المعاملات

X " المجاهيل

B " الثوابت

١٦

مثال النظام الخطي التالي:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 3x_4 = 4$$

① مصفوفة المعاملات A
coefficient Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

② المصفوفة الممتدة $= \bar{A}$
(Augmented Matrix)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

③ اكتب النظام على الشكل $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5) (16)

حل الأنظمة الخطية

ملاحظات هامة

[1] هل تشكل المتتالية 1 ، 2 ، -1 حلاً للنظام

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

نعم تشكل حلاً (من خلال التعويض)
$4 - 2 + 3(-1) = -1$

[2] في حالة النظام الخطي المتجانس $AX = 0$

a) اذا كانت رتبة A = عدد المجاهيل (n) اذن يوجد حل واحد وهو الحل التافه (trivial) مجموعة الحل كلها اصفار

b) " " رتبة A < عدد المجاهيل اذن عدد لانهائي من الحلول

مثال

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$$

الحل رتبة $A = 2$ (مصفوفة غير صفرية)
المجاهيل $n = 3$ اذن عدد لانهائي من الحلول

مثال

$$x_1 + 3x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 0$$

حل واحد حل تافه

مثال 3

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$-3x_1 + -3x_2 = 0$$

نلاحظ نفس المعادلة

اذن رتبة $A = 1$

n المجاهيل = 2

لدينا عدد لانهائي من الحلول .

$AX = B$ في حالة النظام الخطي غير المتجانس

ق

a) اذا كان لمصفوفة المعاملات A معكوس ضربي A^{-1} اذن هناك حل

b) " " " " لا يوجد معكوس ضربي اذن يكون لها عدد لانهائي من الحلول . أو لا يوجد حل .

17

5) 18

أولاً : حل النظام الخطي باستخدام النظير الضربي

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

تصلح فقط للأنظمة التي تكون فيها عدد المجاهيل مساوياً لعدد المعادلات

(أي مصفوفة المعاملات مربعة)

مثال

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 8x_3 = 17$$

حل النظام باستخدام النظير A^{-1}

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

19

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3}$$

$$\xrightarrow{-8R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7

ثانياً : حل النظام الخطي باستخدام طريقة الحذف لجاوس .

20

مثال 1) حل النظام الخطي التالي :

$$x + y + z = 3$$
$$2x - y + 3z = 4$$
$$x + 2y - z = 2$$

الحل) المصفوفة الممتدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-R_1 + R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$3R_2 + R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_3}{-5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-R_2 + R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2R_3 + R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل
$x = 1$
$y = 1$
$z = 1$

حل وحيد

مثال ٢)

$$x + y + z = 3$$
$$x - y + z = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

ح١

$$\frac{R_2}{-2} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-R_2 + R_1 \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

حاهزه

$$x + z = 2$$
$$y = 1$$
$$\Rightarrow \quad x = -z + 2$$
$$y = 1$$
$$z = t$$

عدد لانهائي من الحلول

مثال ٣)

$$x + y = 3$$
$$2x + 2y = 1$$

لا حل لها .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

٩ 23

مثال (12) حل النظام الخطي المتجانس التالي:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ الممتدة

$-2R_1 + R_2$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$-R_1 + R_3$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_2 + R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$-R_1 + R_2$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_3}{6}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{6} & 0 \end{array}\right]$$

$3R_3 + R_2$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{6} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_3 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{6} & 0 \end{array}\right]$$

$\frac{-7}{6}\times 3 + \frac{3\times 2}{2} = \frac{-1}{2}$ $\qquad$ $\frac{7}{3} + \frac{-2\times 3}{3} = \frac{1}{3}$

$x_1 + \frac{1}{3}x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{3}x_4$

$x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_4$

$x_3 - \frac{7}{6}x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{7}{6}x_4$

نفرض $x_4 = t$

$x_1 = \frac{-1}{3}t$

$x_2 = \frac{1}{2}t$

$x_3 = \frac{7}{6}t$

عدد لانهائي من الحلول

ص 79

مراجعة تدريب 39 صفحة 80

س. الشروط الواجب توافرها في الطرف الأيمن حتى يكون النظام الخطي متآلفاً (له حل)

مثال 23

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b_3$$

الحل: المصفوفة الممتدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 1 & 3 & b_2 \\ 1 & 2 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2b_1+b_2 \\ 1 & 2 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2b_1-b_2 \\ 0 & 1 & 1 & -b_1+b_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1+b_2-b_1+b_3 = -3b_1+b_2+b_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2b_1+b_2+b_1 = -b_1+b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3b_1+b_2+b_3 \end{bmatrix}$$

$b_3 = 3b_1 - b_2$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 3b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

(1) جبر خطي

الوحدة الثانية: المحددات

- تعريف الاقتران المحدد باستخدام المتعاملات :

١- اذا كانت A مصفوفة مربعة فنرمز الى محدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

٢- ״ ״ ״ ״ أحادية فإن $|A| = a$ اي يوجد في المصفوفة عدد واحد $A=[3]$ اذن محدد A او $|A| = 3$

٣- ״ ״ A من الرتبة 2X2 ، $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فإن

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ فإن

$$|A| = 2(6) - (-1)(3) = 12 - -3 = 15$$

٤- ״ ״ A حجمها فوق 2 حيث A مصفوفة مربعة يسمى محدد المصفوفة الجزئية المتبقية بعد حذف الصف i والعمود j من A <u>المحدد المتمم</u> للعنصر a_{ij} ويرمز له M_{ij} ، وعليه فإن <u>متعامل</u> العنصر a_{ij} هو:

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

حيث M_{ij} محددة مصفوفة مربعة ناتجة من حذف الصف i والعمود j من المصفوفة الأصلية

<u>مثال</u> :- اذا كان لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

جد متعاملات العناصر a_{23} ، a_{12} ، a_{11}

① المحدد المتمم للعنصر a_{11}

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 5(1) - 6(2) = 5 - 12 = -7$$

وعليه فإن <u>متعامل</u> العنصر a_{11}

$$c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2(-7) = -7$$

② المحدد المتمم للعنصر a_{12}

(صف أول عمود ثاني)

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 4(1) - 6(7)$$

$$= 4 - 42$$

$$= -38$$

معامل العنصر a_{12}

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{3}(-38) = 38$$

③ المحدد المتمم للعنصر a_{23}

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3(2) - (-1)(7)$$

$$= 6 + 7$$

$$= 13$$

وعليه فإن معامل a_{23}

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^{5}(13) = -13$$

تعريف محدد المصفوفة

نعرف محدد المصفوفة المربعة A بالعلاقة التالية

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

3)

مثال: جد محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

من التعريف سنستنتج ان محدد المصفوفة A هو

$$|A| = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$$

لذلك نحتاج لايجاد C_{11} ، C_{12} ، C_{13}

$$|A| = 3 \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 3\,(5(1) - 6(2)) + 1\,(4(1) - 6(7)) + 2\,(4(2) - 7(5))$$

$$= 3\,(5 - 12) + (4 - 42) + 2\,(8 - 35)$$

$$= 3\,(-7) + (-38) + 2\,(-27)$$

$$= -21 + -38 - 54$$

$$= -113$$

استخدام حيلة الشكل السهمي لايجاد محدد A :

$$\ominus 70 \quad \ominus 36 \quad \ominus -4 \quad = 102$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{array}$$

$$\oplus 15 \quad \oplus -42 \quad \oplus 16 \quad = -11$$

$$|A| = -11 - 102 = -113$$

بعد اضافة العمودين الاول والثاني من المصفوفة A الى يمينها

ثم نجمع حواصل ضرب العناصر الموجودة على الاسهم المشار اليها $\oplus$

ونطرح منها حواصل ضرب العناصر الموجودة على الاسهم المشار اليها $\ominus$

27

ملاحظة يمكن حساب محدد المصفوفة A ذات الحجم $n \times n$ بضرب العناصر في أي صف (أو عمود) في متعاملاتها وجمع حواصل الضرب الناتجة أي أن، لكل $1 \le i \le n$ ، $1 \le j \le n$

نظرية (1) ص ١٢٩

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

(المفكوك باستخدام متعاملات عناصر العمود j)

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

(المفكوك باستخدام متعاملات عناصر الصف i)

أي أنه يمكن اعطاء محدد A باستخدام الصف الثاني مثلاً

$$|A| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24}$$

وهذا لمصفوفة حجم 4×4 على سبيل المثال.

سؤال جد قيمة λ حيث أن $|A| = 0$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

الحل

$$|A| = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 1(-2) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 2, 3$$

خواص الاقتران المحدد

خصائص المحددات :

1. اذا كانت A مصفوفة مربعة حجمها $n \times n$ فإن

$$|A^t| = |A|$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad |A| = 1(4) - 2(3) = -2$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad |A^t| = 1(4) - 2(3) = -2$$

2. اذا كانت A مصفوفة مربعة تحتوي على صف أو عمود صفري فإن محددة A يساوي صفراً

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad |A| = 1(0-0) - 2(0-0) + 3(0-0) =$$

ونتيجة من هذه الخاصية :

اذا كان هناك صف من مضاعفات صف آخر أو عموداً من مضاعفات عمود آخر فإن المحددة = صفر أيضاً

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}, \quad |A| = 5(14) - 7(10) = 0$$

3. اذا كانت A مصفوفة مثلثية أو مصفوفة قطرية فإن محدد A يساوي حاصل ضرب العناصر الواقعة على قطرها الرئيسي .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

المصفوفة A قطرية اذن

$$|A| = 5 \times 1 \times 2 = 10$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

المصفوفة B مثلثية سفلية اذن

$$|B| = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

4 اذا كانت المصفوفتان A ، B مربعتان ومن نفس الحجم فإن

$$\boxed{|AB| = |A||B|}$$

نلاحظ نفس الحجم 2x2

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = -3-2 = \boxed{-5}$, $|B| = 5-8 = \boxed{-3}$ $= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$

$|AB| = -7 + 22 = \boxed{15}$

$|AB| = |A||B|$

5 اذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس فإن محدد A لا يساوي صفراً وان محدد A^{-1} يساوي مقلوب محدد A

أي أن

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

اثبات الخاصية :

$A^{-1}A = I$

$|A^{-1}A| = |I|$

$|A^{-1}||A| = 1$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

6 المصفوفة A مصفوفة قابلة للانعكاس اذا وفقط اذا كانت $|A| \neq 0$

مثال

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$

فإن المصفوفة A غير قابلة للانعكاس أي لا يوجد لها نظير A^{-1}

7) 30

أمثلة :

اذا كانت $|A|=3$ ، $|B|=2$ جد ما يلي (حيث حجم A، B هو 3x3) :-

$$2|A| \ ، \ |A^{-1}| \ ، \ |B^{-1}| \ ، \ |2A^{-1}| \ ، \ |(2A)^{-1}|$$

الحل

ملاحظة هامة جداً : اذا كانت A مصفوفة مربعة من الحجم $n \times n$ فإن $|kA| = k^n|A|$ حيث k عدد حقيقي

① $2|A| = 2 \times 3 = 6$

② $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3}$ من الخاصية الخامسة $\boxed{5}$

③ $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{2}$

حجمها 3x3

④ $|2A^{-1}| = 2^{3}|A^{-1}| = 8\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$

حسب الملاحظة حيث حجم A هو 3x3

⑤ $|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{2^3|A|} = \dfrac{1}{8 \times 3} =$

اذا كانت A مصفوفة معكوسة من الحجم $n \times n$ فإن

$$|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

اثباتها :

من نظرية (4) ص 142

$A \cdot \operatorname{adj} A = |A| I$

نأخذ المحددة للطرفين

$|A \cdot \operatorname{adj} A| = ||A| I|$

$|A|\,|\operatorname{adj} A| = |A|^n$

$|\operatorname{adj} A| = \dfrac{|A|^n}{|A|}$

$= |A|^{n-1}$

$|I| = 1$ لأن

مثال : مصفوفة حجمها 3x3 وكانت $|A| = 5$

فإن

$|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{3-1}$

$= |A|^2$

$= 5^2 = 25$

31

نظرية (2) لتكن A مصفوفة مربعة حجمها $n\times n$

a) اذا كانت A_1 هي المصفوفة الناتجة من ضرب صف من A بعدد ثابت K فإن

$$|A_1| = k|A|$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الصف الثاني مضروب بـ $\underline{\underline{2}}$

$|A| = -13$ و $|A_1| = -26$

أي أن

$$|A_1| = 2|A|$$

b) اذا كانت A_2 هي المصفوفة الناتجة من إبدال صفين من صفوف A

فإن $|A_2| = -|A|$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad و \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = -14$ و $|A_2| = 14$

c) اذا كانت A_3 هي المصفوفة الناتجة من ضرب اي صف من A بعدد ثابت و إضافة الناتج لصف آخر من A

فإن $|A_3| = |A|$

لتكن:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad و \quad A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -10 & -3 \end{bmatrix}$$

نتجت A_3 من $-2R_1 + R_2$

نلاحظ:

$$|A| = 6-4 = 2 \qquad |A_3| = -18+20 = 2$$

ا. مجد (13) [illegible]

9)

سؤال 11 ص 139

إذا كانت A ، B مصفوفتان مربعتان حجم كل منها $n \times n$
أثبت أن $|B| = |A^{-1}BA|$ في حالة كون المصفوفة A معكوسة.

الحل : نأخذ الطرف الأيمن $|A^{-1}BA|$

37

$$|A^{-1}BA| = |A^{-1}||B||A|$$

وهذا من الخاصية الرابعة

$$|A^{-1}BA| = \frac{1}{\cancel{|A|}}|B|\cancel{|A|}$$

عوضنا $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ من الخاصية الخامسة للمحددات.

$$|A^{-1}BA| = |B|$$

وهو الطرف الأيسر

وهو المطلوب.

سؤال 12 ص 139

جد قيم K التي تجعل المصفوفة التالية غير معكوسة.

$$A = \begin{bmatrix} K-2 & -2 \\ -2 & K-2 \end{bmatrix}$$

حتى تكون غير معكوسة : $|A| = 0$

$$|A| = (K-2)(K-2) - (-2 \times -2) = 0$$

$$K^2 - 4K + \cancel{4} - \cancel{4} = 0$$

$$K^2 - 4K = 0$$

$$K(K-4) = 0 \rightarrow K = 0$$

33

قرين المصفوفة والنظير الضربي للمصفوفة

إذا كان لدينا المصفوفة A التي حجمها $n \times n$ وكان c_{ij} مرافق a_{ij} فإننا نسمي المصفوفة

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة المتعاملات من A ونسمي المصفوفة C^t قرين (adjoint) المصفوفة A ونرمز لها (adj A)

$$\boxed{adj(A) = C^t}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

جد $|A|$ ، $adj(A)$

$c_{11} = (-1)^2(0--4) = 4$, $c_{12} = (-1)^3(-6-8) = 14$, $c_{13} = (-1)^4(-3) = -3$

$c_{21} = (-1)^3(4--3) = -7$, $c_{22} = (-1)^4(-2-6) = -8$, $c_{23} = (-1)^5(-1+4) = -3$

$c_{31} = -8$, $c_{32} = 5$, $c_{33} = 6$

① $C = \begin{bmatrix} 4 & 14 & -3 \\ -7 & -8 & -3 \\ -8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow adj(A) = C^t = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -8 \\ 14 & -8 & 5 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

② $|A| = 1(4) - 2(14) + 3(-3) = -33$

or $|A| = 3(-7) + 0(-8) + 4(-3) = -33$

or $|A| = 2(-8) + (-1)(5) + (-2)(6) = -33$

11) (39)

نظرية (3) ص 141

اذا كانت A مصفوفة مربعة حجمها $n \times n$ فإن

$$a_{i1} C_{j1} + a_{i2} C_{j2} + \cdots + a_{in} C_{jn} = \begin{cases} |A| , & i=j \\ 0 , & i \neq j \end{cases}$$

لجميع قيم $i, j = 1, 2, \ldots, n$

نظرية (4) ص 142

اذا كانت A مصفوفة مربعة حجمها $n \times n$ فإن :

$$A \cdot adj(A) = |A| I$$

نظرية (5) ص 143

اذا كانت المصفوفة المربعة A التي حجمها $n \times n$ معكوسة فإن

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)}$$

البرهان : حسب نظرية (4)

$$A \, adj(A) = |A| I$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot adj(A) = A^{-1} |A| I \qquad \text{ضرب الطرفين بـ } A^{-1}$$

$$adj(A) = A^{-1} |A|$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

مثال) في المثال السابق كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

جد نظير المصفوفة A

وجدنا في المثال السابق أن

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -8 \\ 14 & -8 & 5 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

35

$$|A| = -33$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

$$= \frac{1}{-33} \begin{bmatrix} 4 & -7 & -8 \\ 14 & -8 & 5 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-4}{33} & \frac{7}{33} & \frac{8}{33} \\ \frac{-14}{33} & \frac{8}{33} & \frac{-5}{33} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix}$$

مثال) لتكن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جد نظيرها A^{-1}

الحل

$$C_{11} = (-1)^2(-1) = -1$$
$$C_{12} = (-1)^3(1) = -1$$
$$C_{21} = (-1)^3(3) = -3$$
$$C_{22} = (-1)^4(2) = 2$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad , |A| = 2(-1) - 3(1) = -5$$

$$\Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = adj(A)$$

حسب النظرية

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

$$= \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

13

36

سؤال (6) صفحة 145

اذا كانت A مصفوفة معكوسة من الحجم $n\times n$
فاثبت أن
$$|adj(A)| = |A|^{n-1}$$

البرهان من النظرية السابقة

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

نأخذ المحدد للطرفين

$$|A^{-1}| = \left|\frac{1}{|A|} adj A\right|$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{لكن } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \\ \text{أيضاً } |kA| = k^n|A| \end{array}}$$

اذن

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|^n} |adj(A)|$$

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^n} |adj(A)|$$

$$\frac{|A|^n}{|A|} = |adj(A)| \Rightarrow |adj(A)| = |A|^{n-1}$$

مثال اذا كانت المصفوفة A حجمها $A_{3\times3}$ وكان محددها $|A| = 4$ جد $|adj(A)|$

الحل

بما أن

$$|adj(A)| = |A|^{n-1}$$

$$|adj(A)| = (4)^{3-1} = 4^2 = 16$$

قاعدة كرامر :

اذا كانت A مصفوفة معكوسة من الحجم nxn فإن الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = B$ هو :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

حيث A_i هي المصفوفة الناتجة من A باستبدال العمود i من A بالعمود B

$\boxed{\text{مثال}}$ اوجد حل نظام المعادلات الخطي التالي باستخدام قاعدة كرامر :

$$x + 2y + z = 10$$
$$x - y + z = -2$$
$$2x + 3y - z = 19$$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 19 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 19 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 19 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(1-3) - 2(-1-2) + 1(3+2) = -2 + 6 + 5 = 9$$
$$|A_1| = 10(1-3) - 2(2-19) + 1(-6+19) = -20 + 34 + 13 = 27$$
$$|A_2| = 1(2-19) - 10(-1-2) + 1(19+4) = -17 + 30 + 23 = 36$$
$$|A_3| = 1(-19-6) - 2(19-4) + 10(3-2) = -13 - 46 + 50 = -9$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{27}{9} = 3$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{36}{9} = 4$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{9} = -1$$

1) جبر خطي (جزء من الوحدة الثالثة)

38

الفضاء الاقليدي R^n (ذو البعد n) ص 172

هو مجموعة كل المرتبات $(x_1, \dots x_n)$

حيث $x_1 \dots x_n \in R$

يسمى العنصر $X = (x_1 \dots x_n)$ متجهاً أو نقطة في R^n

تسمى الأعداد $x_1 \dots x_n$ مركبات احداثيات ذلك المتجه او النقطة

مثال

المتجه (1،2) هو متجه ذو احداثيين وهو بالتالي عنصر في R^2

المتجه (1، 2، -1) متجه او عنصر في R^3

ملاحظة: اذا كان:

$$X = (x_1 \dots x_n)$$
$$y = (y_1 \dots y_m)$$

متساويان اذا وفقط اذا كانت $\boxed{n = m}$ وكانت

$$x_i = y_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n = m.$$

مثال ص 172 اوجد قيم x, y, z التي تجعل المتجهين متساويان

$$u = (x, y + z, x - z)$$
$$v = (3, 4, 1)$$

الحل

$$\boxed{x = 3}$$
$$y + z = 4 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$
$$x - z = 1 \Rightarrow 3 - z = 1 \Rightarrow \boxed{z = 2}$$

جمع المتجهات

إذا كان: $u = (2, -1, 1)$ ، $v = (1, 1, 5)$

$w = (1, 2, 6, 8)$

39

فاحسب كلاً من

1) $u + v = (2, -1, 1) + (1, 1, 5)$
$= (2+1, -1+1, 1+5)$
$= (3, 0, 6)$

2) $3v = 3(1, 1, 5) = (3, 3, 15)$

3) $2u = 2(2, -1, 1) = (4, -2, 2)$

4) $2u + 3v = (4, -2, 2) + (3, 3, 15) = (7, 1, 17)$

5) $v + w =$ لا يمكن لأن
$w \in R^4$ أما
$v \in R^3$

تدريب (1) ص 179 : أوجد إذا كان ذلك ممكناً قيم x, y, z التي تحقق :

$z(1, 1, 0) + x(2, 3, 6) + y(5, 4, -6) = (6, 8, 6)$

$z + 2x + 5y = 6$
$z + 3x + 4y = 8$
$6x - 6y = 6$

نحذف z من معادلة (1) و (2) ينتج $x - y = 2$

و نأخذ معادلة (3) ونقسم الطرفين على 6 ينتج $x - y = 1$

مراجعة مثال (3) في الكتاب

3)

90

تعريف (٤) ص 175

نقول أن للمتجهين u, v في R^n نفس الاتجاه اذا أمكن ايجاد عدد حقيقي موجب c بحيث أن

$\boxed{u = cv}$

كما نقول أن لهما اتجاهين متعاكسين اذا أمكن ايجاد عدد حقيقي سالب c بحيث أن

$\boxed{-u = cv}$

مثال ١

$u = (1, -1, 6)$
$v = (5, -5, 30)$

نلاحظ أن $v = 5u$

اذن u, v لهما نفس الاتجاه

مثال ٢

$u = (1, -1, 6)$
$v = (-2, 2, -12)$

اتجاهان متعاكسان لأن $v = (-2)u$

نظرية (١) ص 177 اذا كانت u, v, w متجهات في R^n وكانت c, d أعدادا في R فإن

1) $u + v = v + u$ (تبديلية)
2) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (تجميعية)
3) $0 + u = u + 0 = u$ (المحايد الجمعي)
4) $u + (-1)u = 0$ (النظير الجمعي)
5) $c(u + v) = cu + cv$ (توزيع الضرب على الجمع)
6) $(c + d)u = cu + du$ من اليسار
7) $c(du) = cd(u)$
8) $Iu = u$

سؤال ص 179 برهن انه اذا كان $u \neq \theta$, $v \neq \theta$ متجهين في R_n وكان للمتجهين $u+v$, $u-v$ نفس الاتجاه فانه يكون للمتجهين u,v نفس الاتجاه او اتجاهان متعاكسان .

61

البرهان

من التعريف السابق (4)

بما انه للمتجهين $u+v$, $u-v$ نفس الاتجاه اذن يوجد عدد موجب c بحيث

$$u+v = c(u-v) \quad \text{—— ①}$$

$$u+v = cu - cv \Rightarrow v + cv = cu - u$$

$$v(1+c) = u(c-1)$$

$$v = u\,\frac{(c-1)}{(c+1)}$$

c: عدد موجب اذن مستحيل (لايمكن) ان يساوي -1

اي المقام $c+1$ لايساوي صفراً

لو كان $c=1$ لتعوض المعادلة ① ان

$$u+v = (1)(u-v)$$

$$2v = 0$$

وبالتالي ان v هو المتجه الصفري وهذا يناقض الفرض حيث ($v \neq \theta$) وهذا يعني ان $c \neq 1$

$$d = \frac{(c-1)}{(c+1)} \neq 0$$

فيكون

$$v = u\,d$$ وبالتالي لهما نفس

الاتجاه اذا كانت d موجبه

واتجاهين متعاكسين اذا كانت d سالبة

5)

الفضاءات الخطية ص ١٨٠

لتكن V مجموعة غير خالية مزودة بعملية الجمع (بمعنى أنه لكل عنصرين u ، $v \in V$ عنصراً في V فإن

$$u+v \in V$$

مزودة بعملية ضرب بعدد (بمعنى أنه يوجد لكل $v \in V$ ولكل $c \in R$ فإنه $cv \in V$)

نسمي V فضاءً خطياً إذا تحققت الخواص التالية :-

خصائص الجمع

1) $u+v = v+u$ لكل $u, v \in V$

2) $u+(v+w) = (u+v)+w$ لكل $u, v, w \in V$

3) يوجد عنصر 0 في V (يسمى المتجه الصفري) بحيث
$0+u = u+0 = u$ لكل $u \in V$

4) لكل $u \in V$ يوجد عنصر $-u$ في V (يسمى النظير الجمعي أو سالب u) بحيث أن
$u+(-u) = (-u)+u = 0$

خصائص الضرب

5) $c(u+v) = cu+cv$ لكل $c \in R$ ولكل $u, v \in V$
(توزيع عدد حقيقي على متجهين)

6) $(c+d)u = cu+du$ لكل $c \in R$ ، $u \in V$
توزيع متجه على عددين.

7) $c(du) = (cd)u$ لكل $c, d \in R$ ولكل $u \in V$

8) $1u = u$ لكل $u \in V$

الفضاء الاقليدي هو فضاء خطي

ص181

نظرية(٥): افرض أن V فضاء خطي على R وأن u متجه في V وأن c عدد حقيقي. لنرمز للمتجه الصفري بالرمز Θ بدلاً من 0. لنعرف الطرح في V بالعلاقة

$$u - v = u + (-1)v$$

لكل $u, v \in V$

43

الخصائص:-

1) $c\Theta = \Theta$ (مضروب بعدد)

2) $0u = \Theta$ (مضروب بمتجه)

3) إذا كان $cu = \Theta$ فإما $c = 0$ أو $= \Theta$

4) $-(cu) = (-c)u = c(-u)$

5) $-u = (-1)u$

6) $c(u - v) = cu - cv$

مراجعة البراهين ص182

الإثباتات لهذه الخصائص في صفحة 182

(ملاحظة): يجب فحص الانغلاق بالنسبة للضرب والجمع قبل فحص هذه الخصائص، فالانغلاق هو الشرط الأساسي للفضاء الخطي.

مثال (A) ص183

مثال (B) ص186 يبين أن R^{∞} (فضاء متتاليات) هو فضاء خطي.

تمرين (6) ص189

7)

الفضاءات الجزئية : ص ١٩٦

ليكن V فضاء خطياً ولتكن W مجموعة جزئية من V
نقول ان W فضاء (خطي) جزئي من V اذا كانت
W فضاءً خطياً بالنسبة للعمليات التي ترثها W من V .

٤٩

رموز : $C(R)$ تعني فضاءات الاقترانات المتصلة .
$F(R)$ — — — —
$D(R)$ — — — القابلة للاشتقاق
$M(R)$ — — المصفوفات .

نجد ان $D(R)$ هي فضاء جزئي من $C(R)$ ، $F(R)$
لذلك كل الشروط التي تتحقق على $C(R)$ ، $F(R)$ تحققها $D(R)$

نظرية :

اذا كانت W مجموعة جزئية من الفضاء الخطي V فان W
تشكل فضاءً جزئياً من V اذا وفقط اذا تحققت
الشروط :-

1) $0 \in W$
2) $u+v \in W$
3) $cu \in W$

أو شرطان مكافئان

1) $0 \in W$
2) $cu+dv \in W \quad , \forall u, v \in W, \forall c, d \in R$

مثال :

لتكن $R^2 = \{(x,y) : x,y \in R\}$

هو فضاء خطي ، بيّن فيما اذا كان

$$V = \{(x,y) : x,y \geq 0\}$$

فضاء جزئي .

الحل : نقول أن V لا تمثل فضاء جزئي وذلك لأن

اذا كان $(x,y) \in V$ فإن $-(x,y) \notin V$

$$(x,y) + -(x,y) = (x-x, y-y) \overset{\text{حيث}}{=} (0,0)$$

مثال : قرر فيما اذا كانت المجموعات التالية فضاءات جزئية من الفضاء الاقليدي R^3

a) $U = \{(x,y,z), x \geq 1\}$

b) $V = \{(x,y,z), x,y,z \in N\}$

c) $W = \{(x,y,z), x = y\}$

d) $P = \{(x,y,z), y > z\}$

الحل : a) نأخذ $U = \{(x,y,z), x \geq 1\}$

نبحث في الشروط

$0 \in W$

لكن $(0,0,0) \notin U$

لأن $x \geq 1$ لا يتحقق ليست فضاء جزئي

(ملاحظة: تكفي بديهية واحدة لاثبات عدم صلاحية واحدة فقط من تلك البديهيات)

9)

b) $V = \{(x,y,z) , x,y,z \in N\}$

الشروط : $0 \in V$

$(0,0,0) \in N \rightarrow 0 \in N$

96

لنأخذ $c = \frac{1}{2} \in R$

$c(x,y,z)$

$\frac{1}{2}(x,y,z) = (\frac{1}{2}x , \frac{1}{2}y , \frac{1}{2}z)$

وهذا لا ينتمي إلى V لأن

$\frac{1}{2}x , \frac{1}{2}y , \frac{1}{2}z \notin N$

∴ ليست فضاء جزئي .

c) $W = \{(x,y,z) , x=y\}$

الشرط ① : $\leftarrow (0,0,0) \in W$ لأن $0=0$

الآن نفرض أن $V,u \in W$ حيث

$u = (x,y,z) \rightarrow x=y$

$V = (x',y',z') \rightarrow x'=y'$

② $u+v = (x+x' , y+y' , z+z')$

$x+x' = y+y'$

وبالتالي $u+v \in W$

هنا استخدم ٣ شروط حرث وليس الشرطان المختصر

الآن نفرض أن $c \in R$ و $(x,y,z) \in W \rightarrow x=y$

③ $c(x,y,z) = (cx , cy , cz)$

وبالتالي $cx = cy$ اذن

$(x,y,z) \in W$

∴ شكلت فضاءً جزئياً .

١٨

تدريب (3) أعط وصفاً هندسياً :
ص 212

15

$P = \{(x, y, z) : y > z\}$

d)

الشروط ← هل $0 \in P$

$(0,0,0) \notin P$

47

لأن الشرط $y > z$ غير متحقق

إذن لا تشكل فضاء جزئي .

سؤال : قرر فيما اذا كانت مجموعة كل المصفوفات ذات المحدد صفر ، فضاء جزئي من الفضاء .

الحل : V ليس فضاءً جزئياً لأنه لا يحقق الخاصية (2)

نأخذ المصفوفتان

$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $|A| = 0$ $|B| = 0$

$|A| = 2(5) - 1(10) = 0$ لأن A, B ينتميان الى V

$|B| = 3(4) - 2(6) = 0$

$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \notin P$ لكن

حيث $|A + B| = 55 - 48 \neq 0$

هام جداً : مثال (8) ص 198

مثال (10) ص 201

مثال (12) ص 203 : أن تقاطع أي عدد من الفضاءات الجزئية يشكل فضاءً جزئياً

تدريب (12) ص 204

تدريب (13) ص 205

1) مجموعة كل المتتاليات التي تؤول للصفر هي فضاء جزئي

2) ~ المتتاليات المتقاربة أيضاً

تدريب (14) ص 205 : 1) مجموعة المصفوفات المثلثية علوية فضاء جزئي

2) ~ ~ متماثلة التماثل : فضاء جزئي

205 ، 1 ، 2

11) اعطِ وصفاً هندسياً للفضاء الحل. سؤال (4) ص 211

$$x + y + z = 0$$
$$x + y - z = 0$$
$$10x + 10y + 4z = 0$$

48

الحل

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 10 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

بعد عمليات الصف البسط ينتج

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 0$$
$$z = 0$$

بما ان $z=0$ اذن xy تمثل المستوى.

ومجموعة الحل هي الخط المستقيم الواقع في المستوى xy المعطى بالمعادلة $x+y=0$

$$y = -x$$

والمعادلات الوسيطية $\{x=-t, y=t, z=0\}$

تدريب (3) أعط وصفاً هندسياً للفضاء الحلي والمكون من مجموعة حل النظام

ص 212

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$x - y + z = 0$$
$$7x + 2y + 2z = 0$$

٤٠٦

هل هو نقطة أم خط مستقيم أو مستوى أو الفضاء كله؟

الحل النظام يمثل المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

نحوله بعمليات الصف البسيط : $-R_1 + R_2$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-7R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -12 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{R_2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -12 & -19 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{R_3}{11}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3}R_3+R_2} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

اذن

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$

وهذه تمثل نقطة وهو نقطة الأصل

$$(0, 0, 0)$$