بسم الله الرحمن الرحيم

الصف الافتراضي الخامس لمقرر تفاضل وتكامل (٢)

الاقترانات ذات المتغيرات المتعددة

الأحد 2020-7-5

د. أحمد الكحلوت

الاقترانات ذات المتغيرين أو أكثر

هناك الكثير من المسائل العملية يعتمد فيها الاقتران على متغيرين مستقلين أو أكثر فمثلاً إذا كان طول مستطيل يساوي x وعرضه بساوي y فإن مساحته يعبر عنها بالاقتران :

$A=f(x,y)=xy$

وكذلك حجم متوازي المستطيلات الذي طول قاعدته x وعرضها y وارتفاعه z يعبر عنه بالاقتران : $V=f(x,y,z)=xyz$

مجال الاقترانات ذات المتغيرات المتعددة:

وهو قيم المتغيرين أو المتغيرات التي يكون عندها للاقتران قيم حقيقية .

أمثلة :

مثال : أوجد مجال الاقتران: $f(x,y)=\sqrt{8-x-2y}$

الحل :

$$8-x-2y\geq 0\Rightarrow 2y\leq 8-x\Rightarrow y\leq 4-\frac{1}{2}x$$

المجال هو : جميع قيم (x,y)التي تقع تحت وعلى الخط المستقيم y=4-(1/2)x .

مثال: جد مجال الاقتران : $h(x,y)=\ln(x^2+y^2-4)+\frac{xy^2}{x^2-y}$

الحل: $x^2+y^2-4>0$ إذا $x^2+y^2>4$ وكذلك $x^2-y\neq 0$

إذاً المجال هو جميع قيم (x,y) التي تقع خارج الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2=4$ والتي لا تقع على منحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y=x^2$

النهايات والاتصال :

النهايات :

تعريف : إذا كان $f(x,y)$ اقتراناً بمتغيرين وكان L عدداً حقيقياً ، فإذا اقترب الاقتران $f(x,y)$ من L وذلك عند اقتراب النقطة (x,y) من النقطة (x_0,y_0) نقول أن للاقتران $f(x,y)$ نهاية عند النقطة (x_0,y_0) مقدارها L ويرمز لها بالرمز : $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

ملاحظة : يمكن تمثيل النقطة (x_0,y_0) كنقطة في المستوى البياني وعليه فهناك عدة مسارات أو منحنيات يمكن عن طريقها الاقتراب من النقطة (x_0,y_0) فمثلا قد تقترب من النقطة (x_0,y_0)

عبر خطوط مستقيمة .

وقد تقترب من النقطة (x_0,y_0) عبر منحنيات ، وبالتالي لإثبات أن للاقتران $f(x,y)$ نهاية عند النقطة (x_0,y_0) يتوجب علينا أن نتفحص قيم الاقتران $f(x,y)$ عندما تقترب النقطة (x,y) من النقطة (x_0,y_0) عبر جميع المنحنيات المؤدية للنقطة (x_0,y_0) .

وحيث أنه لا يمكن حصر جميع المنحنيات المؤدية إلى النقطة (x_0,y_0) فمن المتعذر علينا اثبات وجود النهاية للاقتران بهذا الأسلوب .

مثال :أثبت أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+5y^4}$ غير موجودة .

الحل:

عبر المستقيم y=0 $\lim_{x\to 0} \frac{3x*0^2}{x^2+0}=0$

عبر المنحنى $x=y^2$ $\lim_{(y^2,y)\to(0,0)} \frac{3y^2.y^2}{y^4+5y^4}=\frac{1}{2}$

وبما أن النهايتان غير متساويتان المستقيم y=0 والمنحنى $x=y^2$ يمران بالنقطة (0,0)

إذا النهاية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+5y^4}$ غير موجودة .

الاتصال :

تعريف : الاقتران $f(x,y)$ اقتران متصل عند النقطة (x_0,y_0) ، حيث (x_0,y_0) تقع في مجال الاقتران إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

(أ) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

(ب) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

إذا لم يتحقق أي شرط من الشرطين السابقين ، فإن الاقتران $f(x,y)$ منفصل أو غير متصل عند النقطة (x_0,y_0) .

نظرية :

إذا كان $f(x,y)$ و $g(x,y)$ اقترانين متصلين عند نقطة (x_0,y_0) فإن :

أ- الاقترانات $f(x,y)+g(x,y)$ ، $f(x,y)-g(x,y)$ ، $cf(x,y)$.

ب- الاقتران $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ متصل عند النقطة (x_0,y_0) شريطة أن يكون $g(x,y)\neq 0$.

*الاقترانات كثيرات الحدود بمتغيرين والتي على الصورة

$$f(x,y)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{jk}x^j y^k = a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+\dots+a_{mn}x^m y^n$$

حيث $a_{00},a_{10},a_{01},\dots,a_{mn}$ أعداد حقيقية .هي اقترانات متصلة عند جميع النقط (x,y) في المستوى البياني .

فمثلاً :
$$f(x,y)=x^3+2x^2y+5y-2x$$
$$g(x,y)=7+2xy+x^3y^4$$

اقترانان متصلان عند جميع النقط في المستوى .

مثال : هل الاقتران
$$f(x,y,z)=\begin{cases}(x+2)e^z\cos y & , \quad (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & , \quad (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$
متصل عند النقطة (x,y,z)=(0,0,0) .

الحل : $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x+2)e^{z}\cos y = 2 \neq f(0,0,0) = 0$

إذا الاقتران f(x,y,z) منفصل عند النقطة (x,y,z)=(0,0,0) .

الاشتقاق الجزئي :

تعريف : إذا كان f(x,y) اقتراناً ذا متغيرين ، وكانت (x_0,y_0) نقطة في مجال الاقتران ، فتعرف المشتقة الجزئية للاقتران f(x,y) عند النقطة (x_0,y_0) وبالنسبة للمتغير x بأنها

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = D_1 f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

شريطة أن تكون النهاية موجودة.

وبالمثل تعرف المشتقة الجزئية للاقتران f(x,y) عند النقطة (x_0,y_0) بالنسبة للمتغير y بأنها

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=D_2 f(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

شريطة أن تكون النهاية موجودة .

وحيث أن الاشتقاق الجزئي لاقتران ذي متغيرين أو أكثر هو معدل تغير الاقتران بالنسبة لمتغير واحد مع بقاء المتغيرات الأخرى ثابتة، فلايجاد المشتقات الجزئية يمكن استخدام قواعد الاشتقاق للاقترانات ذات المتغير الواحد .

مثال: جد f_x,f_y للاقتران $f(x,y)=x\sin(xy)$.

الحل: $f_x=\sin(xy)+yx\cos(xy)$ و $f_y=x^2\cos(xy)$.

تعريف :

إذا كان $f(x_1,x_2,...,x_n)$ اقتراناً ما ، فإن المشتقة الجزئية للاقتران f بالنسبة x_i عند النقطة $(t_1,t_2,...,t_n)$ هي :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t_1,t_2,...,t_n)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(t_1,t_2,..,t_{i-1},t_i+h,...,t_n)-f(t_1,...,t_n)}{h}$$

شريطة أن تكون النهاية موجودة .

مثال : جد قيمة $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ للاقتران $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2x_2+\sin(x_3x_4)$ عند النقطة $(2,1,\pi,1/4)$.

الحل :

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=x_4\cos(x_3x_4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}\left(2,1,\pi,\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

المشتقات الجزئية العليا:

إذا كان f(x,y) اقتراناً بمتغيرين ، فتعرف المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية له كما يلي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_x\right)=f_{xx}=D_{11}f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_y\right)=f_{yx}=D_{21}f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_x\right)=f_{xy}=D_{12}f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_x\right)=f_{xx}=D_{11}f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_y\right)=f_{yy}=D_{22}f$$

مثال : أثبت أن الاقتران $f(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos(5z)$ يحقق معادلة لابلاس .

الحل :

$$f_x = 3e^{3x+4y}\cos(5z),\ f_{xx} = 9e^{3x+4y}\cos(5z)$$
$$f_y = 4e^{3x+4y}\cos(5z),\ f_{yy} = 16e^{3x+4y}\cos(5z)$$
$$f_z = -5e^{3x+4y}\sin(5z),\ f_{zz} = -25e^{3x+4y}\cos(5z)$$
$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 9e^{3x+4y}\cos(5z) + 16e^{3x+4y}\cos(5z) - 25e^{3x+4y}\cos(5z) = 0$$

قانون السلسلة :

إذا كان $w=f(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$ فإن $\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ بشرط أن للاقتران

$f(x,y)$ مشتقات جزئية متصلة و أن $x^\backslash(t), y^\backslash(t)$ موجودة .

مثال :جد $\frac{dw}{dt}$ للاقتران $w=2x^2+3xy-4y^2$ إذا كان $x=\cos t$ و $y=\sin t$.

الحل:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(4x+3y)(-\sin t)+(3x-8y)\cos t$$

تعميم قاعدة السلسلة :

إذا كان $w=f(x,y)$ ، $x=x(t,s)$ ، $y=y(t,s)$

وكان للاقتران f مشتقات جزئية متصلة ، وكان للاقترانيين y,x مشتقات جزئية ، فإن للاقتران المركب $w=f(x(t,s),y(t,s))$ مشتقات جزئية بالنسبة للمتغيرين معطاة بالعلاقة :

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال :جد $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial t}$ باستخدام قانون السلسلة للاقتران:

$$w = 1 - x^2 - y^2, \; x = t\cos u \; , \; y = t\sin u$$

الحل :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (-2x)\cos u + (-2y)\sin u$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2xt\sin u - 2y\cos u$$

المشتقات المتجهة ودرجة ميل الاقتران :

إذا كان $f(x,y,z)$ اقتراناً معطى وكانت $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ نقطة في مجال الاقتران فإن :

$f_x(p_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)$ تمثل معدل تغير الاقتران f عند النقطة p_0 باتجاه محور السينات .

ويسمى معدل تغير f عند النقطة p_0 في اتجاه $\vec{u}$ بالمشتقة المتجهة للاقتران f عند النقطة p_0

ويرمز لها بالرمز $D_{\vec{u}} f(x_0,y_0,z_0)$ أو $D_{\vec{u}} f(p_0)$

ملاحظة : المشتقات الجزئية هي حالات خاصة من المشتقات المتجهة وذلك بأخذ

$$\vec{u}=i \quad or \quad \vec{u}=j \quad or \quad \vec{u}=k$$

$$D_i f(p_0)=D_i f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)=f_x(p_0)$$
$$D_j f(p_0)=D_j f(x_0,y_0,z_0)=f_y(x_0,y_0,z_0)=f_y(p_0)$$
$$D_k f(p_0)=D_k f(x_0,y_0,z_0)=f_z(x_0,y_0,z_0)=f_z(p_0)$$

درجة ميل الاقتران :

درجة ميل الاقتران $f=f(x,y,z)$ عند النقطة $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ تعطى بالعلاقة :

$$\vec{\nabla} f(p_0) = f_x(p_0) + f_y(p_0) + f_z(p_0)$$

مثال : جد درجة ميل الاقتران $f(x,y)=x^2\sin y$ عند النقطة $p_0=(3,\pi/3)$.

الحل : $f_x=2x\sin y$ ، $f_x(3,\pi/3)=6*(\sqrt{3})/2=3\sqrt{3}$

$f_y=x^2\cos y$ ، $f_y(3,\pi/3)=9/2$

$$\vec{\nabla} f\left(3,\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}\hat{i} + \frac{9}{2}\hat{j}$$

المشتقة المتجهة :

المشتقة المتجهة للاقتران $f=f(x,y,z)$ عند النقطة $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ باتجاه متجه الوحدة $\vec{u}$

تعطى بالعلاقة : $D_{\vec{u}} f(p_0) = \vec{\nabla} f(p_0).\vec{u}$

مثال :

جد المشتقة المتجهة للاقتران $a=i-3j+k$,$f(x,y,z)=xy^2e^{zy},p_0=(3,-2,0)$.

الحل:

$$f_x = y^2 e^{zy} \Rightarrow f_x(3,-2,0) = 4$$

$$f_y = 2xye^{zy} + xy^2 ze^{zy} \Rightarrow f_y(3,-2,0) = -12$$

$$f_z = xy^3 e^{zy} \Rightarrow f_z(3,-2,0) = -24$$

$$\vec{\nabla} f\left(3,-2,0\right) = 4\hat{i} - 12\hat{j} - 24\hat{k}$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{1+9+1}} = \frac{\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{11}}$$

$$\therefore D_{\vec{u}} f(p_0) = (4\hat{i} - 12\hat{j} - 24\hat{k}).(\frac{\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{11}}) = \frac{4}{\sqrt{11}} + \frac{36}{\sqrt{11}} + \frac{24}{\sqrt{11}} = \frac{64}{\sqrt{11}}$$

مثال (22): إذا كان f(x,y)=xy . جد متجه وحدة $\vec{u}$ بحيث يكون $D_{\vec{u}} f(3,4)=0$.

الحل:

إذاً $f_x=y,\ f_y=x$ $\quad \vec{\nabla} f(3,4)=4\hat{i}+3\hat{j}$

إذا كانت

$$\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$$

$$\therefore D_{\vec{u}} f(3,4)=\vec{u}.\vec{\nabla} f(3,4)=(u_1\hat{i}+u_2\hat{j}).(4\hat{i}+3\hat{j})=4u_1+3u_2=0...(1)$$

$$u_1^2+u_2^2=1...(2)$$

من المعادلة (1) ينتج أن : $u_1=(-3/4)u_2$

بالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن :

$$\left(\frac{-3}{4}u_2\right)^2 + u_2^2 = 1 \Rightarrow \frac{25}{16}u_2^2 = 1$$

$$\therefore u_2 = \pm\frac{4}{5}$$

$$u_1 = \mp\frac{3}{5} \Rightarrow \vec{u} = \frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j} \quad or \quad \vec{u} = -\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

تمت بحمد الله