اسم المادة : جبر خطي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط **هنا**

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

[م. جبر خطي]

لملخص هو جزء من المقرر الدراسي فاحرص على قراءة الكتاب اولا

الوحدة الأولى

المصفوفات: هي ترتيبة على شكل مستطيل مرتبة على شكل صفوف وأعمدة ، ويشار إلى حجمها بعدد الصفوف m والأعمدة n، ويرمز لها بالحجم $m \times n$. ويرمز لها بأحرف انجليزية كبيرة وعناصرها الموجودة في الصفوف والأعمدة يرمز لها بأحرف انجليزية صغيرة.

أمثلة

$$A_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix} \qquad A_{3\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\\ 2 & -10\end{bmatrix} \qquad B_{1\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

وبشكل عام تكون المصفوفة على ذات الحجم $m \times n$

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \qquad or$$

$$A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right] \qquad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

تعريفات

منقول المصفوفة : يعرف منقول المصفوفة A على أنه اعادة تشكيل المصفوفة نفسها بحيث تكون صفوف المنقول هي أعمدة المصفوفة الاصلية والعكس. ويرمز له بالرمز A^t .

مثال: أوجد منقول المصفوفة

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 6\\ 4 & 2 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\\ 6 & -1\end{bmatrix}$$

تعريفات متفرقة:

1. **المصفوفة المربعة**: هي المصفوفة التي يكون عدد الصفوف و عدد الاعمدة متساوي.
$$A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right] \qquad i,j=1,2,\dots,n$$
2. **المصفوفة المثلثية العلوية**: هي المصفوفة التي يكون أسفل القطر الرئيسي لها أصفار.
$$A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right] \qquad i,j=1,2,\dots,n \qquad \ni a_{ij}=0 \quad \forall i \succ j$$
3. **المصفوفة المثلثية السفلية**: هي المصفوفة التي يكون أعلى القطر الرئيسي لها أصفار.
$$A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right] \qquad i,j=1,2,\dots,n \qquad \ni a_{ij}=0 \quad \forall i \prec j$$
4. **المصفوفة القطرية**: هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي.
$$A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right] \qquad i,j=1,2,\dots,n \qquad \ni a_{ij}=0 \quad \forall i \neq j$$
5. **المصفوفة الصفرية**: هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفار.
$$A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right] \qquad i,j=1,2,\dots,n \qquad \ni a_{ij}=0$$
6. **مصفوفة الوحدة**: هي مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي 1.

$$A_{n\times n}=\left[a_{ij}\right] \qquad i,j=1,2,\dots,n \qquad \ni a_{ij}=0 \ \ \forall i\neq j \quad a_{ij}=1 \ \ \forall i=j$$

7. المصفوفة المتماثلة: هي المصفوفة التي تحقق الشرط $A=A^t$.
8. المصفوفة شبه المتماثلة: هي المصفوفة التي تحقق الشرط $A=-A^t$.

العمليات على المصفوفات

1. إذا كانت المصفوفتين A, B من نفس الحجم فنعرف حاصل جمعهم على أنه
$$A=\left[a_{ij}\right] \quad B=\left[b_{ij}\right] \Rightarrow A\pm B=\left[a_{ij}\pm b_{ij}\right]$$
2. إذا كانت المصفوفتين A, B بحيث كان عدد أعمدة A مساوي لعدد صفوف B فنعرف حاصل ضربهم بالمصفوفة C على أنه
$$A=\left[a_{ij}\right] \quad B=\left[b_{ij}\right] \Rightarrow C=\left[c_{ij}\right] \quad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

ملاحظة: تعتبر مصفوفة الوحدة هي المصفوفة المحايدة في عملية ضرب على المصفوفات حيث أن أي مصفوفة A عند ضربها في مصفوفة الوحدة لا تتأثر.

الشكل الصف البسيط للمصفوفات وعمليات الصف البسيط

تكون المصفوفة على الشكل الصفي المميز إذا تحققت الشروط التالية:

1. إذا لم يكن الصف مكون بكامله من أصفار فيكون 1 هو العنصر الأول غير الصفري في هذا الصف (يسمى بالواحد المتقدم).
2. كل الصفوف المكونة بكاملها من أصفار (الصفوف الصفرية) تتواجد في أسفل المصفوفة.
3. في أي صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من أصفار الواحد المتقدم في الصف الاسفل على يمين الواحد المتقدم في الصف الاعلى.
4. جميع العناصر العمود المحتوي على 1 المتقدم أصفاراً في كل مكان عدا هذا العنصر.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&2&3\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

المصفوفات أعلاه على الشكل الصفي المميز.

عمليات الصف البسيط

1. تبديل صفين ببعضهما البعض.
2. ضرب صف في المصفوفة بعدد غير صفري.
3. ضرب صف في المصفوفة بعدد غير صفري واضافة الناتج لصف آخر.

تعريف: إذا كانت المصفوفة B هي المصفوفة الناتجة عن إجراء مجموعة من عمليات الصف البسيط على المصفوفة A فنقول أن A تكافئ المصفوفة B.

مثال: حول المصفوفة التالية على الشكل الصفي المميز

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 12 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_3+R_2]{R_3+R_1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2,R_3]{R_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_1+R_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_2+R_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_3]{R_2+R_3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ايجاد المعكوس الضرب

تعريف إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن المصفوفة B تسمى المعكوس الضربي لـA إذا كان $AB = I$ ،
ويرمز للمعكوس الضربي A^{-1} ،

طريقة المصفوفات الاولية في ايجاد المعكوس الضربي.

تعريف: المصفوفة E تسمى مصفوفة أولية إذا كانت ناتجة عن عملية صف بسيط واحدة تُجرى على مصفوفة الوحدة ومن امثلة عليها

$$E(1,2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad E(i,j)\equiv\xrightarrow[R_j]{R_i}\qquad E(1,2)\equiv\xrightarrow[R_2]{R_1}$$

$$E(3.2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad E(k.i)\equiv\xrightarrow{kR_i}\qquad E(3.2)\equiv\xrightarrow{3R_2}$$

$$E(-2.3+1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad E(k.i+j)\equiv\xrightarrow{kR_i+R_j}\qquad E(-2.3+1)\equiv\xrightarrow{-2R_3+R_1}$$

مثال: لنأخذ أي مصفوفة ونريد تحويلها باستخدام عملية صف بسيط واحدة كما في المثال السابق نريد أن نضرب الصف الثاني بالعدد 3 ونجمعه على الصف الاول

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{-3R_2+R_1}A_1=\begin{bmatrix}-8 & -7 & 2\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

المصفوفة الأولية الناتجة عن نفس عملية الصف البسيط

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow E(-3.2+1)=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

لو ضربنا المصفوفة A بالمصفوفة الأولية أي أن $E(-3.2+1)A$ أي أن

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -7 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

أي أن عملية الصف البسيط هي بالاصل عملية ضرب المصفوفة A نفسها بمصفوفة أولية.

وبناءً على ما سبق لو أجرينا عمليات الصف البسيط على المصفوفة الأصلية حتى نصل إلى مصفوفة الوحدة فكأننا نضرب بمصفوفات أولية حتى نصل إلى مصفوفة الوحدة، و بمفهوم آخر لو كانت المصفوفة A هي المصفوفة الناتجة عن عملية صف بسيط أي ضربها بمصفوفة أولية E_1 لنحصل على المصفوفة A_1 فإن $E_1A = A_1$ وعند إجراء عملية صف بسيط مرة أخرى على المصفوفة A_1 أي أننا نضرب بمصفوفة أولية E_2 لنحصل على المصفوفة A_2 أي أن $E_2A_1 = A_2$ أي أن $E_2E_1A = A_2$ وهكذا حتى نصل إلى مصفوفة الوحدة سيكون قد أجرينا n من عمليات الصف البسيط أي ضربنا المصفوفة الاصلية A بعدد n من المصفوفات الاولية وعليه سيكون $E_n \ldots E_2E_1A = I$ و بالتالي سيكون

$$E_n \ldots E_2E_1A = I \Rightarrow A^{-1} = E_n \ldots E_2E_1$$

ومما سبق نستطيع تبسيط عملية إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة A كما يلي:

1. نضع مصفوفة الوحدة المشابهة للمصفوفة $A_{n\times n}$ وهي I_n ونضعهم بمصفوفة على الشكل $[A : I_n]$.
2. نجري عمليات الصف البسيط على المصفوفة $A_{n\times n}$ والمصفوفة I_n بنفس الكيفية فتتحول المصفوفة A إلى مصفوفة الوحدة I_n وتتحول مصفوفة الوحدة المجاور إلى المعكوس الضربي A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} A_{n\times n} & & I_n \\ \Downarrow & : & \Downarrow \\ I_n & & A^{-1} \end{bmatrix}$$

مثال: أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة التالية باستخدام طريقة المصفوفات الاولية

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_3}{\overset{R_2}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{-R_2+R_1}{\overset{3R_2+R_3}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{\frac{R_3}{-5}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/5 & -3/5 \end{array}\right] \underset{-3R_3+R_1}{\overset{2R_3+R_2}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 6/10 & 8/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4/10 & -2/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2/10 & -6/10 \end{array}\right]$$

لاحظ أن

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6/10 & 8/10 \\ 1 & -4/10 & -2/10 \\ 1 & -2/10 & -6/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6/10 & 8/10 \\ 1 & -4/10 & -2/10 \\ 1 & -2/10 & -6/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: المصفوفة A لها معكوس ضربي إذا كانت تشابه مصفوفة الوحدة

السؤال الآن هل لكل مصفوفة معكوس ضربي أم لا؟
الاجابة ببساطة أنه لا فإذا لم نستطيع تحويل المصفوفة في الطريقة السابقة إلى مصفوفة الوحدة لن نستطيع ايجاد المعكوس الضربي لها وحين اذ تسمى بالمصفوفة المفردة singular

ملاحظة: إذا كانت المصفوفة غير مربعة فلن نستطيع وضع مصفوفة وحدة لها نفس الحجم أي أنه ليس لها معكوس ضربي.

مثال:

1. المصفوفة الصفرية ليس لها معكوس ضربي
2. المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي
3. المصفوفة التي عند اجراء عمليات الصف البسيط التي ينتج عنها صف صفري.

وهناك العديد من الامثلة لمصفوفات ليس لها معكوس ضربي.

انظمة المعادلات الخطية (المتجانسة وغير المتجانسة)

تعريف:

1. تسمىَ المعادلة التالية المكونة من عدد من n من المجاهيل بالمعادلة الخطية الغير المتجانسة (أي أنها من الدرجة الاولى) وتسمى متجانسة إذا كانت $b_1=0$.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \qquad \ni \forall j \qquad a_{ij}\in\Re$$

2. يسمى المجموعة من المعادلات الغير المتجانسة التالية بالنظام الخطي الغير المتجانس (عدد m من المعادلات المتجانسة المتكونة من عدد n من المجاهيل)

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\cdot\\
&a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=b_i\\
&\cdot\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m
\end{aligned}$$

يسمى النظام أنه متجانس إذا كان $b_1=b_2=..b_m=0$.

3. تسمى القيم $x_1,x_2,\dots,x_n$ مجموعة حل النظام.

ملاحظة:

1. نستطيع التعبير عن الانظمة الخطية باستخدام المصفوفات على الشكل التالي

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdot\\b_m\end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

تسمى المصفوفة A بمصفوفة المعاملات والمصفوفة X بمصفوفة المجاهيل والمصفوفة B بمصفوفة النتائج.

2. يمكن التعبير عن النظام باستخدام ما يسمى بالمصفوفة الممتدة كما يلي:

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

الآن ستكون مهمتنا ايجاد مجموعة الحلول لهذا النظام أي ايجاد قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

طرق حل الانظمة الخطية

هناك حالتين لحل الأنظمة الخطية

الحالة الأولى: مصفوفة المعاملات لها معكوس ضربي.

الحالة الثانية: مصفوفة المعاملات ليس لها معكوس ضربي.

طرق حل الانظمة الخطية في حالة وجود معكوس ضربي

1. طريقة ايجاد المعكوس الضربي

وهي طريقة معتمدة على ايجاد المعكوس الضربي لمصفوفة المعاملات (بأي طريقة) وبالتالي سيكون حل النظام على الشكل

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

مثال : إذا كان لديك النظام الخطي غير المتجانس التالي

$$x+y+z=3,\quad 2x-y+3z=4,\quad x+2y-z=2$$

أوجد مجموعة الحل؟

نحول النظام على شكل المصفوفات التالي

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 2\end{bmatrix}}_{B}$$

وبالتالي سنجد المعكوس الضربي باستخدام طريقة المصفوفات الاولية فيكون المعكوس الضربي على الشكل

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Longrightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 5/10 & 8/10\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4/10 & -2/10\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/10 & -6/10\end{array}\right]$$

وبالتالي ستكون مجموعة الحل هي

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 5/10 & 8/10\\ 1 & -4/10 & -2/10\\ 1 & -3/10 & -6/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كان النظام متجانس فسيكون الحل الصفري هو الحل الوحيد للنظام ويسمى بالحل التافه.

2. **طريقة جاوس للحذف**

وهي طريقة تعتمد على وضع النظام على صورة المصفوفة الممتدة وتحولها للمصفوفة المثلثية العلوية أو السفلية باستخدام عمليات الصف البسيط

مثال: في المثال السابق أوجد مجموعة الحل باستخدام طريقة جاوس للحذف.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-1&3&4\\1&2&-1&2\end{array}\right]\underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Rightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&1&-2\\0&1&-2&-1\end{array}\right]\underset{R_3}{\overset{R_2}{\Rightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&-2&-1\\0&-3&1&-2\end{array}\right]\overset{3R_2+R_3}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&-2&-1\\0&0&-5&-5\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}-5z=-5\Rightarrow z=1\Rightarrow\\ y-2z=-1\Rightarrow y-2=-1\Rightarrow y=1\\ x+y+z=3\Rightarrow x+1+1=3\Rightarrow x=1\end{array}\right\}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

الحالة الثانية: عندما لا يكون لمصفوفة المعاملات معكوس ضربي

مثال: أوجد مجموعة حل النظام الخطي التالي

$$x+y+z=3\quad 2x-y+z=2\quad 4x+y+3z=8$$

نحول النظام على شكل المصفوفة الممتدة

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-1&1&2\\4&1&3&8\end{array}\right]\underset{-4R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Rightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-4\\0&-3&-1&-4\end{array}\right]\overset{-R_2+R_3}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-4\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}-3y-z=-4\Rightarrow z=-3y+4\Rightarrow\\ x+y+z=3\Rightarrow x+y+(-3y+4)=3\Rightarrow x-2y=-1\Rightarrow x=2y-1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y-1\\y\\-3y+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y\\y\\-3y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix}$$

ملاحظة: لو وضعنا أي قيمة مكان y سيكون الناتج هو حل للمصفوفة

مثلا لو وضعنا مكان y القيمة صفر سيكون الحل هو $(x,y,z)=(-1,0,4)$ هو حل للنظام و لو وضعنا مكان y الرقم 1 سيكون الحل هو $(x,y,z)=(1,1,1)$ وهو أيضا حل للنظام وعليه كلما وضعنا قيمة مكان y كان الناتج حل للنظام وعليه فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول للنظام.

السؤال الآن هل لكل نظام خطي حل أم لا؟

الجواب لا فمثلا لو استبدلنا النظام السابق بنظام شبيه فلن يكون له حل

$$x+y+z=3\quad 2x-y+z=2\quad 4x+y+3z=0$$

ستكون المصفوفة الممتدة هي على الشكل

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-1&1&2\\4&1&3&0\end{array}\right]\underset{-4R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Rightarrow}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-4\\0&-3&-1&-12\end{array}\right]\overset{-R_2+R_3}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-4\\0&0&0&-4\end{array}\right]$$

وعليه فإن $0x+0y+0z=-4$ وهذا غير ممكن و بالتالي النظام ليس له حل.

وبالتالي ممكن استنتاج المقولة التالية:

استنتاج

1. إذا كان لمصفوفة المعاملات معكوس ضربي فللنظام حل وحيد.
2. إذا كان لا يوجد معكوس ضربي لمصفوفة المعاملات فإن إما أن يكون لها عدد لا نهائي من الحلول أو أن يكون لا يوجد لها حل.
3. في حالة النظام الخطي المتجانس يكون حالتين إما الحل التافه أو عدد لا نهائي من الحلول.

تعريف: يسمى عدد الصفوف غير الصفرية الناتجة عن تحويل المصفوفة على الشكل الصفي المميز برتبة المصفوفة ويرمز له بالرمز r .

ممكن اعادة صياغة الاستنتاج السابق كما يلي

1. إذا كانت رتبة مصفوفة معاملات الخطي المتجانس مساوي لعدد المجاهيل فإن للنظام حل وحيد وهو الحل التافه.
2. إذا كانت الرتبة أقل من عدد المجاهيل فسيكون عدد لا نهائي من الحلول.

الوحدة الثانية

المحددات

يعرف المحدد على أنه اقتران معرف مجاله فضاء المصفوفات ومداه الاعداد الحقيقية أي أنه $|\ |:M_{m\times n}(\Re)\longrightarrow\Re$ وأحيانا يسمى مفكوك لابلاس.

تعريف:

1. يرمز لمحدد المصفوفة الاحادية $A=[a]$ على الشكل وقيمته هي $|A|=a$.
2. يعرف محدد المصفوفة الثنائية $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ على أنه هو $|A|=ad-bc$.
3. يعتمد محدد المصفوفات ذات الحجم الأكبر على الأصغر منها أي لمعرفة محدد المصفوفة الثلاثية يجب تعريف الثنائية هكذا.

تعريف: المحدد المتمم والمتعامل

لتكن A مصفوفة مربعة، يسمى محدد المصفوفة الجزئية من A والناتج عن حذف الصف i و العمود j على أنه المحدد المتمم للعنصر a_{ij} ويرمز له بالرمز M_{ij} ويسمى $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ على أنه متعامل العنصر a_{ij}.

مثال(1): أوجد محددات ومتعاملات عناصر المصفوفة التالية

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0+12=12 \quad \Rightarrow C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}12=12$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}=0-30=-30 \Rightarrow C_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}(-30)=30$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}=8-0=8 \quad \Rightarrow C_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^{1+3}(8)=8$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0+6=6 \quad \Rightarrow C_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}6=-6$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}=0+15=15 \quad \Rightarrow C_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^{2+2}(15)=15$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}=8-0=8 \quad \Rightarrow C_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}(8)=8$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}=-12-0=-12 \Rightarrow C_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^{3+1}(-12)=-12$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=-6-12=-18 \Rightarrow C_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^{3+2}(-18)=18$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=0-8=-8 \quad \Rightarrow C_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^{3+3}(-8)=-8$$

طرق ايجاد المحددات

1. طريقة المتعاملات

تعريف: يعرف محدد المصفوفة A باستخدام اي صف على أنه

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$$

أو باستخدام أي عمود على أنه

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}$$

مثال(2): أوجد محدد المصفوفة في المثال السابق باستخدام العمود الثاني

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}C_{ij} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} = 2\times30 + 0\times15 + 2\times18 = 96$$

مثال(3): أوجد محدد المصفوفة في المثال السابق باستخدام الصف الثالث

$$|A| = \sum a_{ij}C_{ij} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + + a_{33}C_{33} = -5\times-12 + 2\times18 + 0\times-8 = 96$$

2. طريقة الاسهم

ويحسب محدد المصفوفة بطريقة الاسهم كالتالي

مثال(4): فك محدد المصفوفة باستخدام طريقة الاسهم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

نكتب المصفوفة على الشكل التالي بحيث نكتب ا مرة أخرى بجانب أعمدة المصفوفة ما عدا العمود الاخير

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(1\times1\times-1) + (2\times1\times1) + (3\times-2\times1) - (3\times1\times1) - (2\times-2\times-1) - (1\times1\times1) = -13$$

ملاحظة: الضرب باتجاه السهم من اليمين بالموجب ومن اليسار بالسالب

خواص اقتران المحدد

1. $|A|=|A^t|$.
2. إذا كانت A تحتوي صف(عمود) صفري فإن المحدد الناتج $|A|=0$.
3. إذا كانت A مثلثية أو قطرية فإن محددها هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي لها.
4. إذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين ومن نفس الحجم فإن $|AB|=|A||B|$.
5. إذا كانت A_1 هي المصفوفة الناتجة عن ضرب صف(عمود) من صفوف A بعدد ثابت k فإن $|A_1|=k|A|$.

$$\begin{vmatrix}2&4\\1&6\end{vmatrix}=2\times6-4\times1=8$$

$$\begin{vmatrix}2&4\\1&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2\\1&6\end{vmatrix}=2\times2\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2\times2(3-1)=8$$

6. إذا كانت A_2 هي المصفوفة الناتجة عن إبدال صفين(عمودين) من صفوف A فإن $|A_2|=-|A|$

$$\begin{vmatrix}2&4\\1&6\end{vmatrix}=2\times6-4\times1=8 \qquad \begin{vmatrix}1&6\\2&4\end{vmatrix}=1\times4-6\times2=-8$$

7. إذا كانت A_3 هي المصفوفة الناتجة عن ضرب صف(عمود) من صفوف A بعدد ثابت k ومن ثم جمعه على صف (عمود) آخر فإن $|A_3|=|A|$.

$$\begin{vmatrix}2&4\\1&6\end{vmatrix}=2\times6-4\times1=8$$

$$\begin{vmatrix}2&4\\1&6\end{vmatrix}\xrightarrow{3R_1+R_2}\begin{vmatrix}2&4\\7&18\end{vmatrix}=2\times18-4\times7=8$$

مثال(5): أوجد ناتج محدد المصفوفة التالية دون فك المحدد

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\-4&2&2\\1&1&-1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}\underset{-R_1+R_3}{\overset{2R_1+R_2}{\Rightarrow}}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&5&7\\0&-1&-4\end{vmatrix}\underset{R_3}{\overset{R_2}{\Rightarrow}}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-4\\0&5&7\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&5&7\end{vmatrix}\overset{-5R_2+R_3}{\Rightarrow}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&-13\end{vmatrix}$$

إيجاد المعكوس الضربي باستخدام طريقة القرين

إذا كانت لديك المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&..&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&..&a_{2n}\\.&.&..&.\\a_{n1}&a_{11}&..&a_{nn}\end{bmatrix}$$

فأن تتلخص طريقة القرين بالخطوات التالية

- نحسب مصفوفة متعاملات المصفوفة A، ونسميها C،

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & .. & c_{2n} \\ . & . & .. & . \\ c_{n1} & c_{11} & .. & c_{nn} \end{bmatrix} \quad و \quad C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

حسب المصفوفة $adj(A)=C'$

- يكون المعكوس الضربي هو $A^{-1}=|A|^{-1}adj(A)$

مثال: أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة في المثال رقم 1

لقد كانت المصفوفة هي

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad |A|=1\times12+2\times30+3\times8=96$$

$$C=\begin{bmatrix} 12 & 30 & 8 \\ -6 & 15 & 8 \\ -12 & 18 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow adj(A)=C'=\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 \\ 30 & 15 & 18 \\ 8 & 8 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{96}\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 \\ 30 & 15 & 18 \\ 8 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

٣) طريقة كرامر في حل الأنظمة الخطية

لنفرض نظام المعادلات التالي

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots a_{2n}x_n=b_2$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots a_{nn}x_n=b_n$$

المطلوب: ايجاد مجموعة الحل للمعادلات $x_1,x_2 \dots x_n$ ولايجاد ذلك نحول هذه المعادلات إلى مصفوفات

لنفرض أن
$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ . & . & .. & . \\ a_{n1} & a_{11} & .. & a_{nn} \end{bmatrix},$$

بالتالي يكون النظام أعلاه هو $AX=B$ حيث A هي مصفوفة المعاملات و X هي مصفوفة حلول نظام المعادلات وهو المطلوب و B هي مصفوفة النواتج لنظام المعادلات.

ولنفرض أن المصفوفة A_i هي المصفوفة الناتجة عن استبدال العمود i في المصفوفة A بمصفوفة النتائج B، كما هو أسفل في المصفوفات $A_1,A_2,\dots A_n$

$$A_1=\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ b_n & a_{11} & \cdots\cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots\cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ a_{n1} & b_n & \cdots\cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{11} & \cdots & b_n\end{bmatrix}$$

فيكون قيم حلول X هي

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$$

حيث $|A|,|A_i|$ هي محددات المصفوفات

مثال: باستخدام طريقة كرامر أوجد مجموعة حل النظام التالي

$$x+y+z=3, \quad y+z-2x=0, \quad x+y-z=1$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$|A|=-6$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-6, \Rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=1$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-6, \Rightarrow y=\frac{|A_y|}{|A|}=1$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-6, \Rightarrow z=\frac{|A_z|}{|A|}=1$$

م. الجبر الخطي الوحدة الثالثة

الفضاءات الاقليدي

تعريف: يعرف الفضاء الاقليدي $\Re^n$ على أنه $\Re^n = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \Re \ \forall i\}$.

يسمى X بالمتجه و x_i هي احداثيات للمتجه

تعريف: تعرف عملية جمع المتجهات والضرب بعدد حقيقي للفضاء $\Re^n$ المعرفين وهما حسب القواعد التالية

1. $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \Rightarrow$

   $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$

2. $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \Rightarrow cu = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n) \qquad c \in \Re$

مثال(1): إذا كان $v = (0,-2,3) \quad u = (1,5,-3)$ فاوجد ما يلي

$u = (1,5,-3) \qquad v = (0,-2,3)$

1. $u + v = (1,3,0)$
2. $2u + 6v = 2(1,5,-3) + 6(0,-2,3) = (2,10,-6) + (0,-12,18) = (2,-2,12)$
3. $u - v = (1,5,-3) - (0,-2,3) = (1,7,-6)$

مثال(2): إذا كان $w = (1,6,1) \quad v = (-5,2,6) \quad u = (1,1,4)$ احسب قيم x, y, z الذي يحقق المعادلة

$$xu + yv + zw = (-21,29,37)$$

الحل:

$-21,29,37$

$$xu + yv + zw = (\cancel{1,3,5,-1}) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x(1,1,4) + y(-5,2,6) + z(1,6,1) = (-21,29,37) \Rightarrow \\ (x,x,4x) + (-5y,2y,6y) + (z,6z,z) = (-21,29,37) \Rightarrow \\ (x - 5y + z, x + 2y + 6z, 4x + 6y + z) = (-21,29,37) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 5y + z = -21 \\ x + 2y + 6z = 29 \\ 4x + 6y + z = 37 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -21 \\ 29 \\ 37 \end{bmatrix}}_{B}$$

وهو نظام خطي من المعادلات الغير متجانسة له، ويمكن حله بأحد الطرق السابقة مثل طريقة المعكوس الضربي أو كرامر إذا كان لمصفوفة المعاملات معكوس ضربي أو بطريقة عمليات الصف البسيط (جاوس) إذا لم يكن لها معكوس ضربي $|A| = 105$ وبالتالي لها معكوس ضربي وعليه فإن

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تعريف: نفسه إذا وجد عدد c موجب بحيث يكون $u = cv$، نقول أن للمتجهين u, v لهما الاتجاه نفسه إذا كان $c \in \mathbb{R}^+$ ويكون لهما اتجاهين متعاكسين إذا كان $c \in \mathbb{R}^-$.

م. الجبر الخطي

الفضاءات الخطية

إذا كانت $V \neq \varphi$ معرف عليها عملية الجمع بين عناصرها وعملية الضرب بعدد حقيقي فنقول أن $(V,+,.)$ فضاء خطي Vector or Linear Space إذا تحققت الشروط التالية على عملية الجمع والضرب:

Addition Axioms

$A_0.\ \forall u,v \in V \Rightarrow u+v \in V$

$A_1.\ \forall u,v \in V \Rightarrow u+v = v+u$

$A_2.\ \forall u,v,w \in V \Rightarrow u+(v+w) = (u+v)+w$

$A_3.\ \exists\ \theta \in V \ \ni u+\theta = \theta+u = u$

$A_4.\ \forall -u, \in V \ \ni u+(-u) = \theta$

Multiplication Axioms

$M_0.\ \forall u \in V \quad \forall c \in \Re \Rightarrow cu \in V$

$M_1.\ \forall u,v \in V \quad \forall c \in \Re \Rightarrow c(u+v) = cu+cv$

$M_2.\ \forall u \in V \quad \forall c,d \in \Re \Rightarrow (c+d)u = cu+du$

$M_3.\ \forall u \in V \quad \forall c,d \in \Re \Rightarrow c(du) = (cd)u$

$M_4.\ \forall u \in V \Rightarrow 1u = u$

نظرية: إذا كان $(V,+,.)$ فضاء خطي والمتجه الصفري في V هو θ فإن

1. $c\theta = \theta$
2. $0u = \theta \qquad \forall u \in V$
3. $cu = \theta \Rightarrow c = 0 \quad or \quad u = \theta$
4. $(-c)u = c(-u) = -(cu)$
5. $-iu = -u$
6. $c(u-v) = cu - cv$

مثال3: بين أن $(\Re^2,+,.)$ المعرف عليها عملية الجمع والضرب التالية لا يمثل فضاء خطي معرفيم كالتالي

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1y_2, y_1x_2)$$
$$c(x_1,y_1) = (cx_1, cy_1)$$

الحل:

$$(1,2)+(3,-1) = (1\times -1, 2\times 3) = (-1,6) \neq (3,-1)+(1,2) = (3\times 2, 1\times -1) = (6,-1)$$

عملية الجمع ليس ابدالية

مثال4: بين أن $(\Re^2,+,.)$ التالي لا يمثل فضاء خطي إذا كانت عملية الجمع والضرب معرفيم كالتالي

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$
$$c(x_1,y_1) = (cx_1, y_1)$$

الحل:

$$0(x_1,y_1)=(0,y_1)\neq\theta$$

مثال5: بين أن $(\Re^2,+,.)$ التالي لا يمثل فضاء خطي إذا كانت عملية الجمع والضرب معرفيم كالتالي

$$1.\ (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$c(x_1,y_1)=(cx_1y_1,y_1)$$
$$2.\ (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+y_2,x_2+y_1)$$
$$c(x_1,y_1)=(cx_1,cy_1)$$

الحل: رقم 1 لا يمثل فضاء خطي بينما 2 يمثل فضاء خطي

$$1(x_1,0)=(0,0)\neq(x_1,0)$$

ملاحظة: راجع الامثلة الموجودة في الكتاب من 166-173

الفضاءات الجزئية

ليكن $(V,+,.)$ فضاء خطي، و $W\subseteq V$ فنقول أن $(W,+,.)$ فضاء جزئي من $(V,+,.)$ إذا كانت تحقق شروط الفضاء الخطي العشرة.

مثال6: $(\Re^3,+,.)$ فضاء خطي، لنعرف $W_1=\{(x,y,z):\ \ni x+y+z=0\}$ فإن $(W_1,+,.)$ فضاء جزئي من $(\Re^3,+,.)$، لكن $W_2=\{(x,y,z):\ \ni x^2+y^2+z^2=1\}$ ليست فضاء جزئي من $(\Re^3,+,.)$ لأن مثلا المتجه الصفري غير موجود أصلا في W_2.

مثال7: $(M_{2\times2}(\Re),+,.)$ فضاء خطي و المجموعة $W_1=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\ a+d=0\right\}$ فضاء جزئ لكن $W_2=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\ ad-bc=0\right\}$ ليست فضاء جزئي لأن $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 6 & 0\end{bmatrix}\notin W_2$.

نظرية: إذا كان $W\subseteq V$ فنقول أن أن $(W,+,.)$ فضاء جزئي من $(V,+,.)$ إذا كانت تحقق الشروط التالية:

1. $\theta\in W$
2. $u+v\in W\quad\forall u,v\in W$
3. $cu\in W\quad\forall u\in W\quad\forall c\in\Re$

أو

1. $\theta\in W$
2. $cu+dv\in W\quad\forall u,v\in W\quad\forall c\in\Re$

م. الجبر الخطي الوحدة الثالثة

نظرية: إذا كان $(V,+,\cdot)$ فضاء خطي وكان $(W_i,+,\cdot)$ فضاءات جزئية $\forall i$ فإن $\left(W=\bigcap_i W_i,+,\cdot\right)$ فضاء جزئي أيضاً.

المجموعات المولدة

تعريف: لتكن $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subseteq V$ فإن $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n$ تسمى تركيبة خطية من متجهات S. ويرمز لمجموعة كل التركيبات الخطية بالرمز $L(S)$ أو بالرمز $L(v_1,v_2,\dots,v_n)$.

تعريف: إذا كانت $\Re^n$ الفضاء الاقليدي لنعرف المتجه $S=\{e_1,e_2,\dots,e_i,\dots,e_n\}$ حيث

$$e_1=(1,0,0,\dots,0),e_2=(0,1,0,\dots,0),e_3=(0,0,1,\dots,0)\dots$$
$$e_i=\left(0,0,0,\dots\underset{i^{th}}{1}\dots,0\right)\dots \qquad e_2=(0,0,0,\dots,1)$$

لاحظ أن أي متجه في $\Re^n$ هو عبارة عن تركيبة خطية باستخدام $S=\{e_1,e_2,\dots,e_i,\dots,e_n\}$ حيث أن المتجه مثلا

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$$

وبالتالي $L(S)=\Re^n$.

بالعودة إلى مثال 2 لنفرض $S=\{(1,1,4),(-5,2,6),(1,6,1)\}$ فإن المتجه $(1,35,-1)$ هو تركيبة خطية بمتجهات S حيث كانت $(1,35,-1)=3(1,1,4)+5(-5,2,6)+(1,6,1)$ حيث كان السبب هو وجود معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix}1&-5&1\\1&2&6\\4&6&1\end{bmatrix}$.

ملاحظة: أعمدة المصفوفة هي أحداثيات متجهات S.

ممكن استخدام طريقة المصفوفة الممتدة من خلال طريقة جاوس عن طريق ما يلي

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-5&1&1\\1&2&6&35\\4&6&1&-1\end{array}\right]$$

والمضي بعمليات الصف البسيط محاولين ايجاد حل النظام الخطي وممكن أن يكون حل وحيد أو عدد لا نهائي من الحلول.

مثال7: بين إذا كان ممكنا كتابة المتجه $(2,-1,-3)$ على شكل تركيبة خطية من $S=\{(1,1,0),(1,2,1),(0,1,1)\}$ ؟

الحل:
نكتب مصفوفة النظام بحيث يكون متجهات S هي أعمدة المصفوفة الممتدة والمتجه المراد كتابته على شكل تركيبة خطية كعمود النتائج.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\1&2&1&-1\\0&1&1&-3\end{array}\right]\xrightarrow{-R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&1&1&-3\\0&1&1&-3\end{array}\right]\xrightarrow{-R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y=2\Rightarrow x=2-y\\y+z=-3\Rightarrow z=-3-y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-y\\y\\-3-y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}$$

وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول أي يوجد تكريبات خطية كثيرة

ملاحظة: المثال 17.3 موجود صفحة 185 وحله خاطئ في الكتاب.

مثال8: بين إذا كان ممكنا كتابة المتجه $(2,-1,3)$ على شكل تركيبة خطية من المتجهات في المثال السابق؟

الحل:
نكتب مصفوفة النظام بحيث يكون متجهات S هي أعمدة المصفوفة الممتدة والمتجه المراد كتابته على شكل تركيبة خطية كعمود النتائج.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\1&2&1&-1\\0&1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{-R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&1&1&-3\\0&1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{-R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&1&1&-3\\0&0&0&6\end{array}\right]$$

وبالتالي لا يوجد حل للنظام وعليه لا يمكن كتابته على شكل تركيب خطية.

نظرية: إذا كانت $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ جزئية من الفضاء الخطي V فإن الفضاء $L(S)$ هو أصغر فضاء جزئي من V يحتوي S ولا يتغير إذا استبدلنا أي من متجهات S بأحد المتجهات التالية:

1. استبدال أي متجه v_i بالمتجه $0\neq c\in\Re$ cv_i.
2. استبدال أي متجه v_i بالمتجه $0\neq c\in\Re\ \&\ i\neq j$ v_i+cv_j.
3. استبدال ترتيب المتجهين v_i و v_j.

نظرية: إذا كانت المصفوفة S هي المصفوفة التي صفوفها أحداثيات متجهات $S=\{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n\}$ وكانت B هي المصفوفة التي صفوفها أحداثيات متجهات $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ فإن $L(B)=L(S)$ إذا كانت المصفوفة S تكافئ B.

أي أنه إذا كان

$$\left.\begin{array}{l}\nu_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1m})\\ \nu_2=(a_{21},a_{22},\dots,a_{2m})\\ .\\ \nu_n=(a_{n1},a_{n2},\dots,a_{nm})\end{array}\right\} \Rightarrow S=\begin{bmatrix}\nu_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ \nu_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ . & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \nu_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}b_1=(b_{11},b_{12},\dots,b_{1m})\\ b_2=(b_{21},b_{22},\dots,b_{2m})\\ .\\ b_n=(b_{n1},b_{n2},\dots,b_{nm})\end{array}\right\} \Rightarrow B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm}\end{bmatrix}$$

أي بمعنى آخر إذا وضعنا المتجهات على شكل صفوف مصفوفة وباستخدام عمليات الصف البسيط إلى أي مجموعة متجهات أخرى (صفوف أخرى) سيكون في كل الحالات لها نفس الفضاء الناتج عنها·

فإن إذا استطعنا تحويل S إلى B باستخدام عمليات الصف البسيط فإن $L(B)=L(S)$

مثال9: في حالة $\Re^n$ إذا استطعنا تحويل مصفوفة متجهات $S=\{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_i,\dots,\nu_n\}$ إلى مصفوفة الوحدة $I=(e_1,e_2,\dots,e_i,\dots,e_n)$ فإن $L(S)=\Re^n$.

مثال10: بين ما إذا كان $S=\{(1,1,1),(2,-1,3),(1,2,-1)\}$ تولد $\Re^3$.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&3\\1&2&-1\end{bmatrix}\underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-3&1\\0&1&-2\end{bmatrix}\underset{R_3}{\overset{R_2}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&-3&1\end{bmatrix}\underset{-R_2+R1}{\overset{3R_2+R_3}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&-5\end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{R_3}{-5}}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\underset{-3R_3+R_1}{\overset{2R_3+R_2}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

وعليه بما أن مصفوفة S تكافئ مصفوفة الوحدة فإن $L(S)=\Re^3$.

مثال11: بين ما إذا كان $S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&6\\15&9\end{bmatrix}\right\}$ تولد الفضاء $M_{2\times2}(\Re)$.

ستكون مصفوفة المتجهات هي

$$S=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&1\\0&1&0&8\\5&6&15&9\end{bmatrix}$$

م. الجبر الخطي

من الواضح أن الفضاء $M_{2\times2}(\Re)$ نستطيع توليده باستخدام المجموعات التالية

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$ وعليه

$$S=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&1\\0&1&0&8\\5&6&15&9\end{bmatrix}\xrightarrow{-5R_1+R_4}\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&1\\0&1&0&8\\0&6&0&-1\end{bmatrix}\underset{-R_2+R_3}{\xrightarrow{-6R_2+R_4}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&1\\0&0&0&7\\0&0&0&-7\end{bmatrix}\underset{\frac{R_3}{7}}{\xrightarrow{R_3+R_4}}\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

وهي لا تكافئ مصفوفة B وهي مصفوفة الوحدة، وعليه فإن S لا تولد الفضاء $M_{2\times2}(\Re)$.

الاستقلال الخطي: نقول أن المجموعة $S=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ مرتبطة خطيا إذا أمكن كتابة أحد متجهاتها على شكل تركيبة خطية من المتجهات الباقية، وإذا لم يمكن ذلك نسميها بالمستقلة خطياً.

بمعنى آخر نقول أن المتجهات في S مستقلة خطية إذا تحقق الشرط التالي وهو

$$0\in L(S)\Rightarrow 0=c_1v_1+c_2v_2+....+c_nv_n\Rightarrow c_i=0\quad\forall i$$

لو كان العكس فإن

$$0\in L(S)\Rightarrow$$

$$\exists i\ \ni c_i\neq0\Rightarrow 0=c_1v_1+c_2v_2+..+c_iv_i+..+c_nv_n\Rightarrow v_i=\frac{-1}{c_i}(c_1v_1+c_2v_2+....+c_nv_n)$$

وبالتالي نستطيع كتابة متجه من S كتركيبة خطية من باقي المتجهات وبالتالي تكون S مرتبطة خطياً.

ملاحظات:

1. إذا كان أحد متجهات S المتجه الصفري مباشرة تكون S مستقلة خطياً.
2. إذا كان متجهين مرتبطين فإن أحدهما هو مضاعف الثاني (يكون المتجهين بنفس الاتجاه أو باتجاهين متعاكسن).
3. من الواضح أن المتجهات في الأمثلة 7، 9، 11 هي مستقلة خطياً.

مثال12: بين ما اذا كانت $S=\{(1,5,-1),(2,4,6),(-2,5,7)\}$ مستقلة خطياً·

الحل: لنضع

$$0=k_1(1,5,-1)+k_2(2,4,6)+k_3(-2,5,7)\Rightarrow$$
$$(0,0,0)=(k_1,5k_1,-k_1)+(2k_2,4k_2,6k_2)+(-2k_3,5k_3,7k_3)\Rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}0=k_1+2k_2+-2k_3\\0=5k_1+4k_2+5k_3\\0=-k_1+6k_2+7k_3\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-2\\5&4&5\\-1&6&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{vmatrix}1&2&-2\\5&4&5\\-1&6&7\end{vmatrix}\neq 0$$

بما أن محددها لا يساوي الصفر في نظام خطي متجانس بالتالي يوجد حل وحيد للنظام وهو الحل التافة أي أن $0=k_1=k_2=k_3$ بالتالي فإن S مستقلة خطياً·

ملاحظة: لاحظ أن في حالة دراسة الاستقلال سيتكون لدينا نظام خطي متجانس بحيث تتكون مصفوفة معاملات النظام من أعمدة المصفوفة كما في المثال أعلاه·

مثال13: بين أن المجموعة $S=\{(1,2,4),(1,-1,1),(1,1,3)\}$ غير مستقلة

نضع المتجهات على أعمدة للمصفوفة وبالتالي سيكون

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\4&1&3\end{vmatrix}=0$$

وبالتالي سيكون للنظام الخطي المتجانس المتكون عدد لانهائي من الحلول غير الحل التافة وبالتالي S مرتبطة خطياً·

الاساس والبعد

تعريف: نقول أن المجموعة $S\subseteq V$ الجزئية من الفضاء هي اساس له إذا كانت تولده ومستقلة خطيا·

ملاحظة: من خاصية التوليد فإن أي متجه من الفضاء V نستطيع تكوينه أو توليده من المجموعة S وبالتالي خاصية الاستقلال ستضمن وحدانية شكل التركيبة الخطية المولدة، وعليه نستطيع دراسة خواص هذا الفضاء من خلال اساسه فقط·

نظرية:

1. إذا كانت $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subseteq\Re^n$ مستقلة خطيا فإنها تشكل أساس للفضاء $\Re^n$·
2. إذا كانت $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subseteq\Re^n$ وإذا كانت $L(S)=\Re^n$ فإنها تشكل للفضاء $\Re^n$·
3. إذا كانت $n\neq m$ $S=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}\subseteq\Re^n$ فإن S لا يمكن أن تكون أساس $\Re^n$·

تعريف: البعد هو عدد المتجهات التي تولد الفضاء

م- الجبر الخطي

ملاحظة: بناء على التعريف أعلاه إذا كان بعد الفضاء هو n فيكون عدد متجهات أحد اساساته هو n.

مثال14: أوجد بعد الفضاء $L(S)$ حيث $S=\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$.

السؤال الاول هذه المتجهات هي من الفضاء $\Re^3$ فهل تولده

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}=0$$

وبالتالي لا يمكن أن تكون S مستقلة خطياً وبالتالي $L(S)\neq\Re^3$ أي أنها مرتبطة خطياً أي أن أحد هذه المتجات ممكن كتابتها على شكل تركيبة خطية من باقي المتجهات وعلينا ايجاد المتجهات التي تولده وعليه نضعهم على شكل صفوف مصفوفة لتحويلها لمصفوفة على الشكل الصفي البسيط:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\underset{-7R_1+R_3}{\overset{-4R_1+R_2}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -12\end{bmatrix}\underset{-\frac{1}{3}R_2}{\overset{-2R_2+R_3}{\Longrightarrow}}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\overset{-2R_2+R_1}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المتجه الثالث يتكون من تركيبة من المتجهين الأول والثاني وبالتالي ممكن ملاحظة ما يلي

1. المتجهات غير الصفرية الباقية هي متجهات مستقلة.
2. عدد المتجهات الباقي هو رتبة المصفوفة وهو بعد الفضاء $L(S)$.
3. المتجهات غير الصفرية هي المتجهات التي تولد الفضاء $L(S)$ وبما أنها مستقلة فإن رتبة المصفوفة الغير صفرية هي بعد أساس الفضاء أي أن بعد $L(S)$ هو 2 وإن $L(S)\subseteq\mathbb{R}^3$.
4. $L(S)=\{x(1,0,3)+y(0,1,0):x,y\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,3x):x,y\in\mathbb{R}\}$.

م. الجبر الخطي الوحدة الثالثة

التحويلات الخطية

تعريف: التحويل الخطي T هو اقتران بين فضائين $T: V \to W$ يحقق الخواص التالية

1. $\forall u,v \in V \Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $\forall u \in V \ \forall a \in \Re \Rightarrow T(au) = aT(u)$

مثال15: التحويل الاسقاط Projection Transformation $T: \Re^3 \to \Re^2$ حيث

$$T(x,y,z) = (x,y)$$

مثال16: $T: \Re^2 \to \Re^3$

$$T(x,y) = (x,y,x)$$

مثال17: $T: \Re^2 \to \Re^3$

$$T(x,y) = (x,y,x+y)$$

مثال18: $T: \Re^2 \to \Re^3$

$$T(x,y) = (x+y,y,x-y)$$

مثال19: $T: \Re^3 \to \Re^3$

$$T(x,y,z) = (x+y,y+z,z+x)$$

مثال20: هل الاقتران التالي تحويل خطي

$$T(x,y) = xy$$

الجواب لا لأن

$$T((0,1)+(1,0)) = T(1,1) = 1 \neq 0 = 0+0 = T((0,1)) + T((1,0))$$

خصائص التحويل الخطي

1. $T0 = 0$
2. $T(-u) = -T(u)$
3. $T(u-v) = T(u) - T(v)$
4. $T(au+bv) = aT(u) + bT(v)$

نواة ومدى التحويل الخطي

1. تعرف نواة التحويل الخطي على أنها $Ker(T) = \{u \in V \ \ T(u) = 0\}$.
2. يعرف مدى التحويل الخطي على أنه $Rng(T) = \{w \in W \ \ w = T(v) \ \ for\ some\ v \in V\}$

نظرية: إذا كان $T: \Re^n \to \Re^m$ تحويلاً خطيا فإن $n = \dim(Ker(T)) + \dim(Rng(T))$

م. الجبر الخطي

مثال21: أوجد نواة مدى التحويلات التالية

1. $T:\Re^3 \to \Re^2 \qquad T(x,y,z)=(x,y)$
2. $T:\Re^3 \to \Re^2 \qquad T(x,y,z)=(x+y,y-x)$
3. $T:\Re^2 \to \Re^2 \qquad T(x,y)=(x+y,y-x)$
4. $T:\Re^3 \to \Re^3 \qquad T(x,y,z)=(x+y+z,y-x+z,z-2x+y)$
5. $T:\Re^3 \to \Re^3 \qquad T(x,y,z)=(0,0,0)$

الحل:

1. $T:\Re^3 \to \Re^2 \qquad T(x,y,z)=(x,y)$

$T(x,y,z)=(x,y)(0,0) \Leftrightarrow KerT=\{(0,0,z) \;\; z\in\Re\} \Rightarrow$

$n=\dim(Ker(T))+\dim(Rng(T)) \Rightarrow 3=1+\dim(Rng(T)) \Rightarrow \dim(Rng(T))=2$

$Rng\,T=\Re^2$

2. $T:\Re^3 \to \Re^2 \qquad T(x,y,z)=(x+y,y-x)$

$T(x,y,z)=(x+y,y-x)=(0,0) \Rightarrow x+y=0 \;\; y-x=0 \Rightarrow x=y=0$

$\Leftrightarrow KerT=\{(0,0,z) \;\; z\in\Re\} \Rightarrow$

$n=\dim(Ker(T))+\dim(Rng(T)) \Rightarrow 3=1+\dim(Rng(T)) \Rightarrow \dim(Rng(T))=2$

$Rng\,T=\Re^2$

3. $T:\Re^2 \to \Re^2 \qquad T(x,y)=(x+y,y-x)$

$T(x,y)=(x+y,y-x)=(0,0) \Rightarrow x+y=0 \;\; y-x=0 \Rightarrow x=y=0$

$\Leftrightarrow KerT=\{(0,0)\} \Rightarrow Rng\,T=\Re^2$

4. $T:\Re^3 \to \Re^3 \qquad T(x,y,z)=(x+y+z,y-x+z,z-2x+y)=(0,0,0) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y-x+z=0 \\ z-2x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{-R_1+R_3}{\overset{-R_1+R_2}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{3R_2+R_3}{\overset{-\frac{1}{2}R_2}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$x+y+z=0 \qquad x=0 \Rightarrow y+z=0 \Rightarrow y=-z \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix}=z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow KerT=\{z(0,-1,1) \;\; z\in\Re\} \;\; or$$

الوحدة الثالثة

$$x+y+z=0 \qquad x=0 \Rightarrow y+z=0 \Rightarrow z=-y \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow KerT = \{y\,(0,1,-1) \;\; z \in \Re\}$$

لايجاد $Rng\,(T)$ نحسب منقول مصفوفة المعاملات ومن ثم نجد ابعادها بالطريقة المعتادة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{-R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$2y+3z=0 \Rightarrow y=-\tfrac{3}{2}z \Rightarrow x-y-2z=0 \Rightarrow x+\tfrac{3}{2}z-2z=0 \Rightarrow x=\tfrac{1}{2}z$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}z \\ -\tfrac{3}{2}z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Rng\,(T) = \{z\,(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, 1) : z \in \mathbb{R}\}$$

5. $T:\Re^3 \to \Re^3 \qquad T\,(x,y,z)=(0,0,0)$

$$n=\dim(Ker\,(T))+\dim(Rng\,(T)) \Rightarrow 3=0+\dim(Rng\,(T)) \Rightarrow \dim(Rng\,(T))=3$$

$$Rng\,(T)=\Re^3$$