اسم المقرر: تفاضل وتكامل(2)
رقم المقرر: 5261
مدة الامتحان: ساعة ونصف
عدد الاسئلة: 4 أسئلة

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة القدس المفتوحة
إجابة الامتحان النصفي
للفصل الثاني "1132"
2014/2013

اسم الطالب: ....
رقم الطالب: ....
تاريخ الامتحان: ..19../ .3. /2014

-- الاجابة--

جدول رقم (1)

اجابة السؤال رقم (   ) من نوع (أجب بنعم أو لا) او (√ او×) (20 علامة)(2 علامات لكل فرع)

الفرع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الصحيحه	x	√	√	√	x	x	x	x	√	x										

السؤال الثاني: أوجد التكاملات التالية (30 علامة) (10 علامات للفرع الأول و7 للثاني و7 للثالث و6الرابع)

$$\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)^2} = \int \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + c(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

1- $x^2 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx + C$ (10 علامات)

$$\therefore A = \frac{1}{4}, B = 3/4, C = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + C$$

2- $\int \frac{1}{2+3x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+1.5x^2}dx$

$$let 1,5x^2 = \tan^2 u \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}\tan u -} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{3}\sec^2 u$$

(7 علامات)

$$\int \frac{1}{2+3x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\sec^2 u}{1+\tan^2 u}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int du$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}u + c$$

3- $\int_{-3}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = (1-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

$= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}]_{-3}^{1} - \int \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ **(7 علامات)**

$= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}]_{-3}^{1} + \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}]_{-3}^{1} = -7\frac{7}{15}$

4- $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$

التكامل غير متصل عند $x = 3$ لذا نطبق القاعدة الأولى

$\lim_{t\to 3-}[-2\sqrt{3x}]_0^t$

(6 علامات)

$\lim_{t\to 3+}[-2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}] = 0 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

اذن التكامل معتل تقاربي قيمته $2\sqrt{3}$

السؤال الثالث: **(20علامة)**

1- **أوجد فترة تقارب متسلسلة القوى** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n}$ **(7علامات)**

باستخدام اختبار الجذر النوني ينتج أن $R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^n x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3|x|}{\sqrt[n]{n}} = 3|x|$

Let $R < 1 \Rightarrow 3|x| \Rightarrow |x| < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$

عند $x = \frac{1}{3}$ **تصبح المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **متسلسلة تباعدية لأن** $p = 1$

عند $x = -\frac{1}{3}$ **تصبح المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ **تقاربية باستخدام ليبنز**

اذن فترة التقارب هي $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

2- **أوجد متسلسلة القوى للاقتران** $\frac{1}{1+x}$ **(7علامات)**

$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$

وباستبدال المتغير $(-x)$ بالمتغير x في المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty}x^n = 1 + x + x^2 + ...$ **حيث** $1 < |x|$ **أي أن** $|-x|$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x)^n = \sum_{ى=0}^{\infty}(-x)^n$ **هي متسلسلة القوى للاقتران** $\frac{1}{1+x}$ **حيث** $x \in (-1,1)$

3- **3- أوجد متسلسلة تايلور للاقتران** $f(x) = e^x$ **حول النقطة** $x = 3$ **(6علامات)**

$\because e^x = e^3 e^{x-3} = e^3 e^y, y = x-3$

$\because e^y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}$

$e^{x-3} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k!} \Rightarrow e^x = e^3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^3}{k!}(x-3)^k$

السؤال الرابع: (30علامة)

1- 1- حدد اذا ما كان التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ تقاربي أم تباعدي وجد قيمته في حالة التقارب (10 علامات)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{b}^{0}\frac{1}{1+x^n}dx = \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1}]_{b}^{\infty} = \frac{\Pi}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1}]_{0}^{b} = \frac{\Pi}{2}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2dx} = \frac{\Pi}{2}+\frac{\Pi}{2} = \Pi$$

2- أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n}$ تقاربية تقاربا مشروطا (10 علامات)

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\right|\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ **وهي متسلسلة تباعدية لأن** $p=1$

اذن المتسلسلة متناوبة الاشارة لذلك نستخدم نظرية ليبنز بعد التحقق من صحتها

$$1-a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, an = \frac{1}{n}$$

$$a_{n+1} \le a_n.$$

$$2-\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

اذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n}$ **تقاربية**

اذن من (1) و(2) ينتج أن المتسلسلة تقاربية تقاربا مشروطا

3- بين ما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ تقاربية أم لا ..وضح اجابتك (5 علامات)

$let a_n = \frac{\ln n}{n}, c_n = \frac{1}{n}$ **ولاحظ أن** $a_n \ge c_n$

وحيث أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ **تباعدية لأن** $p=1$ **اذن المتسلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ **تباعدية**

4- حدد اذا كان التكامل المعتل $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}$ تكامل تقاربي أم تباعدي؟ (5علامات)

$$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{b\to\infty}[\frac{-1}{x-1}]_{2}^{0} = 0+1 = 1$$

اذن تكامل تقاربي قيمته =1

انتهت الاجابة