بسم الله الرحمن الرحيم
الصف الافتراضي الرابع لمقرر

تفاضل وتكامل 2
متسلسلات القوى

الأحد 28-6-2020

د. أحمد الكحلوت

متسلسلات القوى- تعريفها وفترات تقاربها .

تعريفها : إذا كانت $a_0, a_1, a_2, \ldots$ أعداداً حقيقية ، فإن المتسلسلة $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

تسمى متسلسلة قوى في x وباستبدال المتغير x بالمتغير x-c في متسلسلة قوى x ، نحصل على المتسلسلة التالية :

$$a_0 + a_1(x-c) + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

وهي متسلسلة قوى في (x-c) حيث c عدد حقيقي .

فترات تقارب متسلسلات القوى :

لإيجاد فترة تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ فإننا نستخدم اختبار النسبة أو اختبار الجذر النوني كالتالي :

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right|$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\left| a_n x^n \right|}$$

بعد ذلك نجد قيم x التي عندها يكون ρ أو R أقل من الواحد الصحيح ، ثم ندرس تقارب متسلسلة القوى عندما تكون ρ أو R تساوي الواحد الصحيح .

وتكون فترة التقارب ونصف قطر التقارب إحدى المجموعات التالية :

١- {0} ، ونصف قطر التقارب 0 ، أي أن المتسلسلة تقاربية عند x=0 فقط .

٢- $(-\infty,\infty)$ ، ونصف قطر التقارب يساوي ∞ أي أن المتسلسلة تقاربية لجميع قيم x الحقيقية.

٣- $(-r,r)$ حيث r عدد حقيقي ، ونصف قطر التقارب يساوي r .

سؤال 1 :

أوجد فترة التقارب لمتسلسلة القوى التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

solution :

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(x-2)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right|}=|x-2|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=|x-2|<1$$

$$-1<x-2<1\Rightarrow 1<x<3$$

$$\text{when } x=3\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(3-2)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$ تباعدية

$$\text{and when } x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$ تباعدية

إذاً فترة التقارب $=(1,3)$

سؤال 2 :

أوجد فترة التقارب للمتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

$solution:$

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=|x|<1$$

$$\therefore -1<x<1$$

$$when\ x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ تقاربية

$$when\ x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$ تقاربية تقارباً مطلقاً

إذاً فترة التقارب $=[-1,1]$

متسلسلات القوى للاقترانات :

إذا فرضنا أن $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ فإن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تسمى متسلسلة الاقتران f(x) (عند النقطة x=0)

سؤال 1 : أوجد متسلسلة القوى للاقتران :f(x)=1/(1-x) حيث |x| <1.

الحل :

متسلسلة القوى يجب أن تكون متسلسلة هندسية حدها الأول 1 وأساسها x وتكون على الصورة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

سؤال 2 :

أوجد متسلسلة القوى للاقتران $f(x)=x^2/(1+2x)$ حيث $|x|<1/2$.

الحل : المتسلسلة متسلسلة هندسية حدها الأول x^2 وأساسها $-2x$ وتكون على الصورة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^{n+2}$$

سؤال 3 :

أوجد متسلسلة القوى للاقتران $f(x)=x/(5-x^2)$ حيث

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

الحل : المتسلسلة متسلسلة هندسية حدها الأول $x/5$ وأساسها $x^2/5$

وتكون على الصورة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x/5)\left(\frac{x^2}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}}$$

اشتقاق وتكامل متسلسلات القوى للاقترانات :

نظرية ١ : إذا كان r نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ فإن الاقتران $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

أ- قابل للاشتقاق على الفترة (-r,r) وأن : $f^{\backslash}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

ب- قابل للتكامل على الفترة [0,x] بحيث أن [0,x]⊂(-r,r) و أن : $\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

سؤال 1 : أوجد متسلسلة القوى للاقتران $f(x)=x^2/(1-x)^2$ حيث $|x|<1$.

الحل: بما أن

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+1}$$

سؤال 2 :

أوجد متسلسلة القوى للاقتران $f(x)=\ln|x+1|$ حيث $|x|<1$.

الحل :

إذاً

$$f^{\backslash}(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x)^n$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt=\ln|x+1|=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

سؤال 3 :

أوجد متسلسلة القوى للاقتران $\tan^{-1}(x)$

الحل:

نقوم باشتقاق $\tan^{-1}(x)$ بالنسبة ل x

$$\left(\tan^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\therefore \tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

تطبيقات على اقترانات متسلسلات القوى :

سؤال 1 : أوجد قيمة المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{2^n}{3^{n-1}}$$

solution :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{2^n}{3^{n-1}} = 2\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{\left(1-2/3\right)^2} = 18$$

سؤال 2 :

أوجد قيمة المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n}}{5^{2n+1}(2n+1)}$$

The solution :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n}}{5^{2n+1}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n}}{5^{2n+1}(2n+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

كثير الحدود من ماكلورين و متسلسلات ماكلورين :

كثير الحدود من ماكلورين يعطى بالعلاقة : $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$

متسلسلة ماكلورين تعطى بالعلاقة : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$

سؤال 1 :

أوجد متسلسلة ماكلورين للاقتران e^x ومتسلسلة تايلور حول النقطة x=3 .

الحل :أولاً متسلسلة ماكلورين

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f(0) = 1$$

$$f^{\backslash}(x) = e^x \Longrightarrow f^{\backslash}(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(k)}(0) = 1$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

كثير الحدود من تايلور ومتسلسلة تايلور حول النقطة x=c :

كثير الحدود من تايلور للاقتران f(x) حول النقطة x=c يعطى بالعلاقة : $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)(x-c)^{k}}{k!}$

متسلسلة تايلور للاقتران f(x) حول النقطة x=c يعطى بالعلاقة : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^{n}}{n!}$

سؤال٢ :

أوجد متسلسلة تايلور حول النقطة x=3 للاقتران $f(x)=e^x$.

الحل :

$$f(x)=e^x \Rightarrow f(3)=e^3$$

$$f^{\backslash}(x)=e^x \Rightarrow f^{\backslash}(3)=e^3$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(k)}(3)=e^3$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k = e^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k!}$$

القيم التقريبية :

سؤال١ : أوجد القيمة التقريبية للعدد النيبيري e .

الحل :

بواسطة متسلسلة ماكلورين في المثال السابق حيث تصبح المتسلسلة على الصورة :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ldots \approx 2.27$$

سؤال ٢ :

قرب التكامل $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ بأخذ أول ثلاث حدود في المتسلسلة .

الحل :

متسلسلة ماكلورين المناظرة للاقتران e^{-x^2} هي :

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\therefore \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n+1}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!(5)} = .77$$

الصور غير المحدودة :
سؤال : باستخدام متسلسلات القوى جد قيمة :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

The solution :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots)}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\ldots)}{x(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots)} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\ldots\right)}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots} = 0$$

متسلسلة ذات الحدين :

نظرية ذات الحدين للعددين a,b المجموعين والمرفوعين للأس الموجب k كما يلي :

$$\left(a+b\right)^{k}=a^{k}+ka^{k-1}b+\frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^{2}+\ldots+\frac{k(k-1)..(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^{n}+\ldots b^{k}$$

إذا فرضنا أن a=1 ، b=x فإن :

$$\left(1+x\right)^{k}=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{k(k-1)..(k-n+1)}{n!}x^{n}+\ldots+x^{k}$$

وفي حالة كون k عدداً سالباً أو صفراً ، فلابد من دراسة المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ حيث لكل n≥1 تصبح العلاقة السابقة على الصورة التالية :

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)..(k-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

وهذه تسمى متسلسلة ذات الحدين .

ويمكن اثبات أن $\lim_{n \to \infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n \to \infty}\left|\frac{k-n}{n+1}\right||x| = |x|$

وباستخدام اختبار النسبة يمكن اثبات أن متسلسلة ذات الحدين تقاربية إذا كان $|x| > 1$

وبالتالي فإن متسلسلة ذات الحدين تساوي الاقتران التالي : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : |x| > 1$

في حالة $|x| < 1$ يمكننا الوصول إلى النتيجة التالية :

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)..(k-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

مثال:

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل $\sqrt[3]{1+x}$

الحل: باستخدام الصيغة الأخيرة نجد (k=1/3)

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^n + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2(2!)}x^2 + \frac{(1)(2)(5)}{3^3(3!)}x^3 + (-1)^{n+1}\frac{(1)(2)\ldots(3n-4)}{3^n(n!)}x^n + \ldots \quad : |x<1|$$

تمت بحمد الله .