اسم المادة : رياضيات منفصلة

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط **هنا**

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

رياضيات منفصلة

1

~~[illegible]~~

المتتاليات :

① متتالية حسابية : الفرق بين كل حد والذي قبله ثابت

$$x_n = x_1 + (n-1)a$$

الحد رقم n (الحد العام) — الحد الأول — الحد الثاني

x_1 (3,2)

مثال: جد الحد العام

$1, 3, 5, 7, \dots$

$x_n = 1 + 2(n-1)$

$= 1 + 2n - 2$

$\boxed{x_n = 2n - 1}$

مجموع الحدود لغاية n ← $S_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n)$

$x_n = x_1 + (n-1)a$

② المتتالية الهندسية : النسبة بين كل حد والذي قبله ثابت.
قسمة الحد التالي على السابق

مثال :

$2, 4, 8, 16, 32, \dots$

$a = 2$

$x_n = x_1 a^{n-1}$

$x_{11} = 2 \times 2^{10} =$

$S_n = \frac{x_1(a^n - 1)}{a - 1}$ حدود

$S_{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{1}$

* $S_\infty = \frac{x_1}{1 - a}$

مثال: جد مجموع أول 5 حدود لـ

① $9, 7, 5, 3, \ldots$

$$S_n = \frac{5}{2}(9 + 9 + 4 \times -2)$$

$$\frac{5}{2}(10)$$

② $3, 6, 12, 24, \ldots$

$$S_5 = 3\frac{(2^5 - 1)}{2-1}$$

$$= 3 \times 31 = 93$$

$$x_n = x_1 (n-1) a$$

$$9 + 9(5-1)2$$

$$9 +$$

2

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \wedge\ P \to R \\ \hline \Rightarrow R \vee Q \end{array}$$

* المسببات الرياضية.

ثلاث قضايا P, Q, R جد امكانيات قيم الصواب لها معاً

واثبت صحة الاستنتاج.

ثابت

اذا T تؤدي F يعني F

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \to R$	$P \vee Q \wedge P \to R$	$R \vee Q$	$P \vee Q \wedge P \to R \Rightarrow R \vee Q$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T

* ~~برهنة~~ برهان

$$\sim(P \vee Q) \overset{\text{عكس}}{\equiv} \sim P \wedge \sim Q$$

P	Q	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

$\equiv$

3

★ برهن صحة القضية التالية ←

اذا كانت $a,b \in R$

Q P

$e^a \neq e^b \Leftarrow a \neq b$

$\sim Q \Rightarrow \sim P \; (e^a = e^b \Rightarrow a = b)$

ناخذ ln للطرفين $\ln e^a = \ln e^b$

$a \ln e = b \ln e$

$a(1) = b(1)$

$a = b$ ✓

★ اثبت ان اذا كان

$-3x + 4 > 16$

$\Rightarrow x < -4$

$$-3x + 4 > 16$$
$$\quad -4 \quad\; -4$$

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{12}{-3}$$

$x < -4$ ✓

4

❋ برهن عدم صحة :-

كل عدد أولي هو فردي

العدد 2 هو عدد أولي وهو عدد زوجي اذن العبارة خاطئة

★ اثبت ان $\overset{P}{x+2}$ هو عدد زوجي فان $\overset{Q}{x}$ زوجي

$\sim Q \Rightarrow \sim P$

x فردي

يوجد $\exists k$ بحيث $x = 2k+1$

$x+2 = 2k+2+1$

$x+2 = 2(k+1)+1 \rightarrow$ فردي

★ هل تمثل القضية التالية تحصيل حاصل (صحيحة دائما) أو تناقض (خاطئة دائما) او توافق (مرة صح ومرة خطأ)

$P \wedge (Q \wedge \sim P)$

P	Q	$\sim P$	$Q \wedge \sim P$	$P \wedge (Q \wedge \sim P)$
T	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

تناقض

* أوجد:

$$\sim\left(\overset{\text{كل}}{\forall} x\, \forall y\, \overset{\text{يوجد}}{\exists} z\, (x+z=y)\right)$$

$$\exists x\, \exists y\, \forall z\, (x+z\neq y)$$

6

★ مثال: افرض ان المجموعة الشاملة هي N (اعداد طبيعية)
برهن أن $(\exists x\, A(x)) \wedge P \equiv \exists x\, (A(x) \wedge P)$

$\exists x\, (A(x) \wedge P)$

$(A(1)\wedge P) \vee (A(2)\wedge P) \vee (A(3)\wedge P) \vee \dots$

$(A(1) \vee A(2) \vee A(3) \vee \dots) \wedge P$

$(\exists x\, A(x)) \wedge P$ ⟸ وهو المطلوب

★ المجموعات:

① الاعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

② الاعداد الصحيحة $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

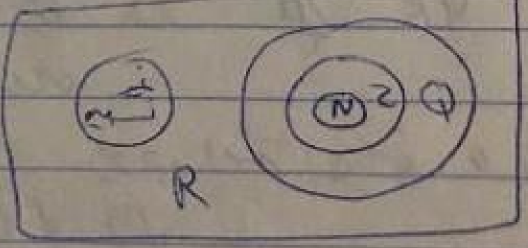
③ الاعداد النسبية Q

- تشمل اي عدد يمكن كتابته على صورة $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$
- تشمل اي عدد دوري منتظم مثل: $0.333\dots$

④ الاعداد غير النسبية

- جذور الاعداد غير المربعة مثل: $\sqrt{15}$, $\sqrt{11}$
- الاعداد الدورية غير المنتظمة مثل: $0.3156492\dots$
- π ، e

⑤ الاعداد الحقيقية R تشمل كل ما ورد سابقاً



8

مثال: صنف الاعداد التالية الى المجموعة المناسبة.

1- $\sqrt{25}$ ← N ، Z ، Q

2- $1.\overline{3}$ ← Q

3- π ← غير نسبي

4- $\sqrt{51}$ ← غير نسبي

5- 4.3 ← Q

6- 5 ← N ، Z ، Q

مثال: اثبت ان $\sqrt{2} \notin Q$

افرض أن $\sqrt{2} \in Q$

$$\exists a, b \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} \; , \; b \neq 0$$

افرض ايضاً لا يوجد اي مشترك بين a ، b

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\frac{2}{1} \times \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

∴ a^2 هو عدد زوجي

$2k = a$ نربع الطرفين

$$\frac{4k^2}{2} = \frac{2b^2}{2} \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

∴ b^2 هو عدد زوجي

$2k = b$ يوجد اشتراك بين a ، b

∴ $\sqrt{2} \notin Q$

مثال : اذا كانت

$A = \{2, 5, \{3\}, \{1,5\}\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$(A \overset{\text{أو}}{\underset{\text{اتحاد}}{\cup}} B) = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

$(A \overset{\text{و}}{\underset{\text{تقاطع}}{\cap}} B) = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

المجموعة الشاملة : اكبر مجموعة

$\bar{A} = \{x : x \notin A\}$ (مكملة A)

$A \cup \bar{A} =$ المجموعة الشاملة

المجموعة الخالية $\emptyset$: لا يوجد اي عنصر $\{\ \}$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

* مثال: لتكن المجموعة الشاملة $C = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

$A = \{3, 5, 7, 9\}$

$B = \{2, 4, 5, 7, 12, 15\}$

$B \cup A = \{, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15\}$

$B \cap A = \{5, 7\}$

$\bar{B} = \{1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$A - B = \{3, 9\}$

---

* المجموعة الاستقرائية مبدأ الحث:

لـ يعني اذا كانت $n \in A$ يجب $n+1 \in A$

مبدأ الحث:- اثبت ان الجملة صحيحة لـ $n = 1$

افترض ان الجملة صحيحة لـ $n = k$

اثبت ان الجملة صحيحة لـ $n = k+1$

مثال: برهن ان $\frac{6^n - 2^n}{4} \in N$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$

① $n = 1$ $\frac{6^1 - 2^1}{4} = 1 \in N$:. صحيحة

② افترض انه صحيحة $n = k$

③ اثبت انه صحيحة $n = k+1$

10

$$\frac{6^{k+1} - 2^{k+1}}{4}$$

$$\frac{6^k \cdot 6^1 - 2^k \cdot 2^1}{4}$$

$$\frac{6^k(4+2) - 2^k \cdot 2}{4}$$

$$\frac{\cancel{4} \cdot 6^k}{\cancel{4}} + \frac{2 \cdot 6^k}{4} - \frac{2^k \cdot 2}{4}$$

$$\cancel{6^k + \frac{2(6^k - 2^k)}{24}}$$

$$6^k + \frac{2(6^k - 2^k)}{4} \Rightarrow \in N$$

11

مثال: مستخدماً الاستقراء الرياضي اثبت صحة

$$(1+2+3+\dots+n)^2 \equiv 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$$

① $n=1$ ⇐ $1^2 = 1^3 = 1$

$\left(\frac{k}{2}(k+1)\right)^2$

② افترض ان الجملة صحيحة لـ $n=k$ ⇐ $(1+2+3+\dots+k)^2 \equiv 1^3+2^3+k^3$

③ اثبت ان الجملة صحيحة لـ $n=k+1$

$$(1+2+3+\dots+k+1)^2 \equiv \underline{1^3+2^3+3^3+\dots}+(k+1)^3$$

$$\left(\frac{k}{2}(k+1)\right)^2+(k+1)^3$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$ ← بنوحد المقامات

$$\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$ ← نخرج عامل مشترك $\frac{(k+1)^2}{4}$

$$\frac{(k+1)^2}{4}\left[k^2+4(k+1)\right]$$

$$\frac{(k+1)^2}{4}\left[k^2+4k+4\right]$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

$$(1+2+\dots+k+k+1)^2 \checkmark$$

12