طرق حل المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

المعادلات الخطية وغير الخطية

المعادلة الخطية هي المعادلة على الصورة $y = f(x) = ax + b$ وهي ابسط المعادلات الخطية وتعتبر المعادلة خطية إذا كانت x من الدرجة الأولى، أما المعادلات التي يكون فيها درجة x أكبر من 1 فتسمى غير خطية مثل المعادلات من الدرجة الثانية فتكون على الصورة $y = f(x) = ax^2 + bx + c$، وبشكل عام تعرف معادلة أو كثيرة الحدود من الدرجة n هي المعادلة على الشكل

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 \ldots + a_n x^n$$

المعادلات التصاعدية Transcendental

وهي المعادلات التي تحتوي حدود غير x^n مثل $\cos x, \sin x, \ln x \ldots$ مثل

$$f(x) = x^2 + \cos x - e^x$$

المعادلات الجبرية

وهي عبارة عن معادلات كسرية أو نسبية لحدوديتين على الشكل $f(x) = \dfrac{g(x)}{p(x)}$ حيث $g(x), p(x)$ هي حدوديات.

جذر المعادلة: هو القيمة x التي تجعل قيمة $f(x) = 0$ أو هي قيمة x التي يمر عندها خط المنحنى بمحور السينات.

وبالتالي سيكون جذر أو حل المعادلة الخطية السابقة هو $x = -\dfrac{b}{a}$، ويكون جذر معادلة الدرجة الثانية على الشكل $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ وهناك معادلات من الدرجة الثالثة إلخ... .

نظرية: إذا كان x_0 هي جذر المعادلة $f(x)$ فإن الدالة $f(x)$ تقسم على المقدار $x - x_0$ ويكون الناتج هي حدودية على الشكل $f(x) = (x - x_0) f_1(x)$ وإذا تكرر هذا الجذر مرة أخرى فإن $f_1(x_0) = 0$ فإن $f(x) = (x - x_0)^2 f_2(x)$ وإذا تكررت x_0 كجذر m من المرات فسيكون

$$f(x) = (x - x_0)^m f_m(x)$$

مثال: الدالة $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2 (x-1)$

الطرق المباشرة في ايجاد الجذور

هناك عدة طرق لايجاد الجذور منها الجبرية وغير الجبرية ومن هذه الطرق هي

طريقة القسمة التركيبية

مثال قسم المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ على $x - 1$

-1	-1	1	1	$x = 1$
1	2	1	0	
0	1	2	1	

فيكون الناتج $x^2 + 2x + 1$ أي أن $f(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 1)$

لكن السؤال إذا لم نستطيع إيجاد الجذور بالطرق المباشرة فسنضطر إلى الطرق العددية

<u>الطرق العددية في ايجاد جذور المعادلات الغير خطية</u>

تعريف: نقول أن المتتابعة $\{x_n\}$ تتقارب للعدد α إذا كان

$$\forall \varepsilon \succ 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ni |x_n - \alpha| \prec \in \ \forall n \succ N$$

ويرمز لذلك بالرمز $x_n \to \alpha$

وتكمن فكرة الطرق العددية في ايجاد متتابعة $\{x_n\}$ من الاعداد بالطرق العددية بحيث تتقارب هذه المتتابعة للجذر α.

تعريف: إذا كانت $x_n \to \alpha$ وكان $f(\alpha) = 0$ لنعرف $|e_n| = |\alpha - x_n|$ فنقول أن التقارب برتبة P والسرعة c إذا

$$|e_{n+1}| \le c\,|e_n|^P \qquad n \ge 0,\ \ c \succ 0$$

$$|\alpha - x_{n+1}| \le c\,|\alpha - x_n|^P$$

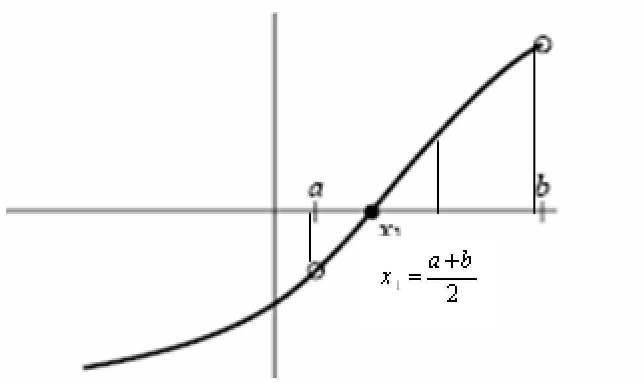
إذا كانت $P = 1$ يكون التقارب خطي و $0 \prec c \prec 1$ أي أن $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \le c$

1. **طريقة التنصيف Bisection Method.**

لنفرض أن الدالة $f(x) = 0$ وأن $f(\alpha) = 0$ والمطلوب ايجاد عدد $x_n \ni f(x_n) \approx 0$ وتختصر الطريقة بالخطوات التالية

- نجد فترة $[a_0, b_0]$ بحيث أن $\alpha \in [a_0, b_0]$ وأن $f(a_0) f(b_0) \prec 0$.

- نحسب $x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
- نحسب $f(a_0)f(x_1)$ إذا كانت سالبة نعتمد الفترة الجديدة $[a_0, x_1] = [a_1, b_1]$ وإذا كانت موجبة نعتمد الفترة $[x_1, b_0] = [a_1, b_1]$
- لنفرض أن $f(a_0)f(x_1) \prec 0$ نحسب $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ ونعيد الكرة مرات عديدة حتى نحصل على الشرط المطلوب



مثال: إذا كان جذر المعادلة $f(x) = x^2 - 5x + 4$ هو $x = 4$ فاوجد جذر هذه المعادلة عدديا باستخدام طريقة التنصيف حتى تحصل على خطأ في تقدير الجذر أقل من 0.1.

n	$[a_n, b_n]$	x_n	$f(x_n)$	Sign(f)	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$e_n = x_n - \alpha$
0		2	-2	-		-2
1	$[2,8]$	8	28	+	6	4
2	$[2,5]$	5	4	+	3	1
3	$[3.5,5]$	3.5	-1.25	-	1.5	-0.5
4	$[3.5,4.25]$	4.25	0.8125	+	0.75	0.25
5	$[3.875,4.25]$	3.875	-0.359375	-	0.375	-0.125
6	$[3.875,4.0625]$	4.0625	0.19140625	+	0.1875	0.0625

لاحظ في الجدول أعلاه أن النسبة بين $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|} = \frac{1}{2} = 0.5$ وهو ما يسمى بمعدل التقارب.

نظرية: إذا كان جذر الدالة $f(x)$ هو α فإن $|e_n| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$.

الاثبات: لنفرض أن

$$\alpha \in [a,b],\ x_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow |\alpha - x_1| \le \frac{b-a}{2} \Rightarrow$$

$$|\alpha - x_2| \le \frac{1}{2}|\alpha - x_1| \le \frac{b-a}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b-a) \Rightarrow$$

$$|\alpha - x_n| \le \dots \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} |\alpha - x_2| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |\alpha - x_1| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (b-a)$$

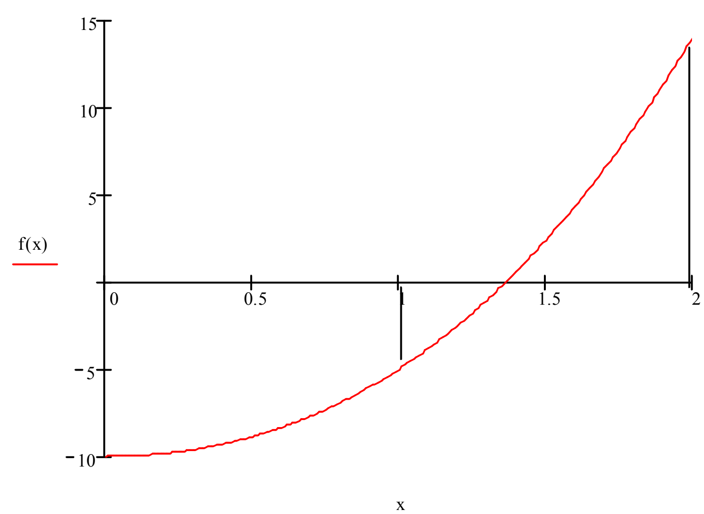
قاعدة: إذا كانت $f(\alpha) = 0$ وأن $\{x_n\}$ متتابعة تتقارب للجذر α باستخدام طريقة التنصيف برتبة تقارب P أي أن

$$|\alpha - x_{n+1}| \le c\,|\alpha - x_n|^P \qquad n \ge 0, c \succ 0$$

فإن

$$|\alpha - x_{n+1}| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (b-a)$$

مثال: جد جذر الدالة $x \in [1,2] \quad f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ بحيث يكون $|x_{n+1} - x_n| \le 0.005$



n	$[a_n,b_n]$	x_n	$f(x_n)$	Sign(f)
0		1	-5	-
1	$[1,2]$	2	14	+
2	$[1.5,2]$	1.5	2.375	+
3	$[1.25,2]$	1.25	-1.79688	-
4	$[1.25,1.375]$	1.375	0.162109	+
5	$[1.34375,1.375]$	1.3125	-0.84839	-

2. طريقة النقطة الثابتة

تكمن فكرة هذه الطريقة بتحويل الدالة $f(x)=0$ إلى دالة أخرى بحيث أن $x=g(x)$ وباعتبار $f(\alpha)=0$ هذا سيؤدي إلى أن $\alpha=g(\alpha)$

مثال: الدالة $f(x)=x^2-2$ يمكن تحويلها للاشكال التالية

$$x=g(x)=x^2+x-2$$

$$x=g(x)=\frac{2}{x}$$

$$x=g(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

لاحظ ان $\sqrt{2}=g\left(\sqrt{2}\right)$ في جميع الدوال السابقة.

وتكمن فكرة الطريقة باعتبار $x_{n+1}=g(x_n)$، وباستخدام صيغة تايلور فإن

$$x_{n+1}=g(x_n)=g(\alpha+(x_n-\alpha))$$

$$x_{n+1}=g(x_n)=g(\alpha)+g'(\varepsilon_n)(x_n-\alpha)+\frac{g''(\varepsilon_n)}{2!}(x_n-\alpha)^2\ldots \ni \varepsilon_n\in(x_n,x_{n+1})$$

$$=\alpha+g'(\varepsilon_n)(x_n-\alpha)+\ldots\Rightarrow$$

$$x_{n+1}-\alpha=g'(\varepsilon_n)(x_n-\alpha)\Rightarrow$$

$$|x_{n+1}-\alpha|\le|g'(\varepsilon_n)||x_n-\alpha|$$

وبالتالي إذا كان $\forall\varepsilon_n\in(x_n,x_{n+1})\quad |g'(\varepsilon_n)|\prec 1$ هذا يؤدي إلى أن

$$|x_{n+1}-\alpha|\le|x_n-\alpha|\Rightarrow$$

$$|e_{n+1}|\le|e_n|$$

وبالتالي فإن هذه الدالة $g(x)$ ستكون مجدية للوصول إلى الجذر α إذا كانت

$$|g'(x)| \prec 1 \qquad \forall x$$

وبالتالي يجب عند تغيير شكل $f(x)=0$ إلى شكل $x=g(x)$ يجب ان يكون $\forall x \quad |g'(x)| \prec 1$.

نظرية: ليكن $g(x)$ متصلا على الفترة $[a,b]$ وأن $\forall x \in [a,b] \quad a \le g(x) \le b$ وافرض وجود $0 \prec \delta \prec 1$ وأن $x_i \in [a,b] \quad |g(x_1)-g(x_2)| \le \delta |x_1 - x_2|$ فإن للدالة $g(x)=x$ لها حل منفرد وهو $\alpha \in [a,b]$ وأنه لأي قيمة $x_0 \in [a,b]$ يوجد متتابعة $x_{n+1}=g(x_n) \to \alpha$

أولاً: اثبات أن $g(\alpha)=\alpha$

$$Let \qquad h(x)=g(x)-x \qquad x \in [a,b] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a \le g(a) \le b \Rightarrow \qquad a-a \le g(a)-a \le b-a \Rightarrow 0 \le h(a) \le b-a \\ a \le g(b) \le b \Rightarrow a-b \le g(b)-b \le b-b \Rightarrow a-b \le h(b) \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

وحسب نظرية القيمة الوسطى

$$\exists \alpha \in [a,b] \ni 0 = h(\alpha) = g(\alpha)-\alpha \Rightarrow g(\alpha)=\alpha$$

ثانياً: الحل الوحيد

لنفرض وجود حل آخر وهو β فإن

$$|\alpha-\beta| = |g(\alpha)-g(\beta)| \le \delta|\alpha-\beta| \prec |\alpha-\beta| \Rightarrow \alpha=\beta$$

ثالثاً: ايجاد المتتابعة والتقارب

$$Let \qquad x_{n+1}=g(x_n) \in [a,b] \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\alpha - x_{n+1}| = |g(\alpha)-g(x_{n+1})| \le \delta|\alpha - x_n|$$

$$|\alpha - x_{n+1}| \le \delta|\alpha-x_n| \le \delta^2|\alpha-x_{n-1}| \le \delta^3|\alpha - x_{n-2}| \ldots \le \delta^{n+1}|\alpha-x_0| \Rightarrow$$

$$x_{n+1} \to \alpha$$

مثال: الدالة $f(x)=x^2-2$ يمكن تحويلها للاشكال التالية

$$x = g(x) = x^2+x-2$$

$$x = g(x) = \frac{2}{x}$$

$$x = g(x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

أي الدوال السابقة تتقارب للحل

$$x=g(x)=x^2+x-2\Rightarrow\left|g'(x)\right|=\left|2x+1\right|\prec 1\Rightarrow x\in(-1,0)$$

$$x=g(x)=\frac{2}{x}\Rightarrow\left|g'(x)\right|=\left|\frac{-2}{x^2}\right|=\left|\frac{2}{x^2}\right|\prec 1\Rightarrow x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

$$x=g(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)\Rightarrow\left|g'(x)\right|=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\prec 1\Rightarrow x\in\Re/\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

شرح كيفية عمل الطريقة:

تكمن فكرة الطريقة بتغيير شكل $f(x)=0$ إلى شكل $x=g(x)$ بحيث يكون $\forall x \quad \left|g'(x)\right|\prec 1$

وإذا لم نستطيع ايجاد هذه الدالة نتبع الخطوات التالية:

- نفرض الدالة $x=G(x)=x+f(x)$ و نحول الدالة على الشكل

$$x=G(x)=x+f(x)\Rightarrow \lambda x+x=\lambda x+G(x)\Rightarrow$$

$$x=g(x)=\frac{\lambda x+G(x)}{1+\lambda}\qquad \lambda\neq 1$$

- نختار λ بحيث أن $\forall x \quad \left|g'(x)\right|\prec 1$ مع اعتبار أن قيمة λ اختيارية ومن المفضل أن تكون بحيث $G(x)=-\lambda$
- نختار نقطة البداية x_0 بحيث أن $x_0\in\left(0,\dfrac{-f(0)}{k}\right)$ مع العلم أن $0\prec k\prec f'(x)$.
- وبناءً على الخطوات السابقة سيكون سرعة التقارب هو $\delta=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|g'(x)\right|$ ويكون التقارب خطي حيث أن $\left|\alpha-x_{n+1}\right|\le\delta^{n+1}\left|\alpha-x_0\right|$

مثال: أوجذ جذر الدالة $x\in[2,3] \qquad f(x)=21x^3-23x^2-96x+68$ بحيث أن $\left|x_{n+1}-x_n\right|\le 0.001$

لنأخذ الشكل $x\in[2,3] \qquad x=g(x)=21x^3-23x^2-97x+68$ لكن لاحظ أن $g'(x)=42x^2-46x-97\Rightarrow\left|g'(2.5)\right|\succ 1$ بالتالي فإن $\delta=\max\limits_{x\in[a,b]}\left|g'(x)\right|\succ 1$ وهذا الشكل لا يصلح وعليه ممكن أن نغير الشكل إلى

$$x=g(x)=\frac{1}{96}\left(21x^3-23x^2+68\right)\Rightarrow\left|g'(x)\right|\succ 1$$

ولكن الشكل $\forall x\in[2,3] \qquad x=g(x)=\frac{1}{21}\left(23-\frac{96}{x}+\frac{68}{x^2}\right)\Rightarrow\left|g'(x)\right|\prec 1$

بالتالي هذا الشكل يتقارب

مثال: أوجد جذر الدالة $x \succ 0$ $f(x) = x - e^{-x}$ بحيث أن $|x_{n+1} - x_n| \le 0.0001$

نجد الدالة $x = G(x) = x + f(x) = 2x - e^{-x}$ وبالتالي فإن $G'(x) = 2 + e^{-x}$ لاحظ أن

$\forall x \succ 0$ $|G'(x)| \le 3$ وبالتالي لنفرض أن $\lambda = -3$ وبالتالي فإن الدالة

$$g(x) = \frac{1}{1+-3}\left[-3x + 2x - e^{-x}\right] = \frac{1}{2}\left[x + e^{-x}\right] \Rightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-x}\right] \le \frac{1}{2}\left[1 - e^{-x}\right] \le \frac{1}{2} \qquad \forall x \succ 0$$

وبالتالي نأخذ

$$x = g(x) = \frac{1}{2}\left(x + e^{-x}\right) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + e^{-x_n}\right)$$

الآن لتحديد نقطة البداية فإن

$$f'(x) = 1 + e^{-x} \Rightarrow |f'(x)| = |1 + e^{-x}| \le 2 \,\&\, f(0) = -1 \Rightarrow 1 \le |f'(x)| \le 2$$

وبما أن $0 \prec k \prec f'(x)$ نأخذ $k = \min\{f'(x)\} = 1 \Rightarrow x_0 \in [0,1]$ لنأخذ $x_0 = 0.5$

الآن $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + e^{-x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(0.5 + e^{-0.5}\right) = 0.553265$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0.5	0.553265	0.5641	0.5665	0.567	0.5671	0.56713	0.56714
$f(x_n)$	0.106531	0.021804	0.004772	0.001008	0.000225	6.78E-05	2.08E-05	5.15655E-06

لاحظ أن $|x_6 - x_5| \le 0.0001$

ولحساب ثابت التقارب فإن $\delta = \max\limits_{x \in [a,b]} |g'(x)| = \frac{1}{2}$ والتقارب خطي دائما كما سبق.

مثال: بدون استخدام الطريقة أعلاه

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3, -1$$

إبدأ من النقطة $x_0 = 4$

1. لو حولنا المعادلة على الشكل $x = g_1(x) = \sqrt{2x+3} \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$

n	0	1	2	3	4
x_n	4	3.31662	3.10375	3.03439	3.01144
$f(x_n)$	5	1.366728	0.425764	0.138743	0.045891

يتقارب للجذر 3.

2. لو حولناها على شكل آخر $x = g_2(x) = \frac{3}{x-2} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{3}{x_n - 2}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	4	1.5	-6	-0.375	-1.263158	-0.919355	-1.02762	-0.990876	-1.00305
$f(x_n)$	5	-3.75	45	-2.10938	1.121884	-0.31608	0.111242864	-0.03641	0.012209

يتقارب من الجذر 1−

3. الشكل الثالث $x = g_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 - 3)$

n	0	1	2	3
x_n	4	6.5	19.625	191.070
$f(x_n)$	5	26.25	342.8906	36122.6

تتباعد

3. طريقة نيوتن رافسون

تعتمد طريقة نيوتن رافسون اعتماد نقطة x_n كتقريب للجذر α وبالتالي فإن

$$f'(x_n)=\tan\theta=\frac{f(x_n)}{x_n-x_{n+1}}$$

$$(x_n-x_{n+1})f'(x_n)=f(x_n)$$

$$f'(x_n)(x_n-x_{n+1})=f(x_n)\Rightarrow x_nf'(x_n)-x_{n+1}f'(x_n)\Rightarrow x_{n+1}=\frac{x_nf'(x_n)-f(x_n)}{f'(x_n)}\Rightarrow$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

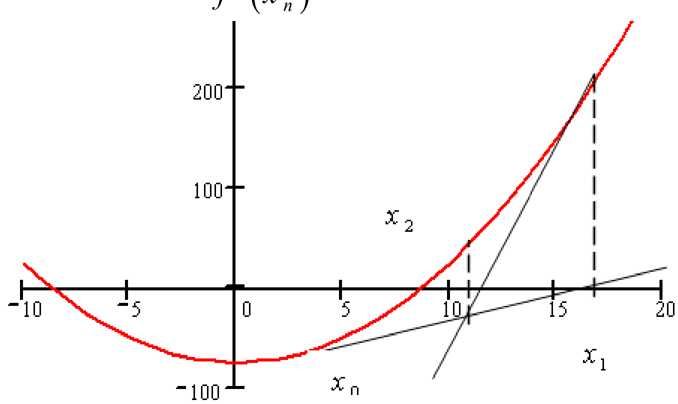
وممكن اثبات هذه الطريقة باستخدام **مفكوك تايلور** حول النقطة x_n كتقريب للجذر α حيث

$$f(x)=f(x_n)+\frac{f'(x_n)}{1!}(x-x_n)+\frac{f''(x_n)}{2!}(x-x_n)^2+\ldots$$

باعتبار x_{n+1} هو الجذر التقريبي فإن

$$0=f(x_{n+1})=f(x_n)+(x_{n+1}-x_n)\frac{f'(x_n)}{1!}\Rightarrow$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



مثال: أوجد جذر الدالة $x\geq 0$ $f(x)=x-e^{-x}$ باستخدام نيوتن رافسون مبتدأً من القيمة $x_0=0$

$$f(x)=x-e^{-x}\Rightarrow f'(x)=1+e^{-x}\Rightarrow\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{x-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

n	0	1	2	3	4
x_n	0	0.5	0.566311	0.567143	0.56714329
$f(x_n)$	-1	-0.10653	-0.001304515	-4.55114E-07	-6.4219E-10

مثال: أوجد جذر الدالة $f(x)=e^x+3x$ مبتدأً من القيمة $x_0=0$

$$f(x)=e^x+3x \Rightarrow f'(x)=e^x+3 \Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{e^x+3x}{e^x+3}$$

n	0	1	2	3	4
x_n	0	-0.25	-0.25761672	-0.25627653	-0.25627653
$f(x_n)$	1	0.534025	0.520993	0.52328	0.52328

نظرية: إذا كان f'' متصل وكان $f'(x)\neq 0$ في فترة مفتوحة تحتوي الجذر α فإنه يوجد $\varepsilon \succ 0$ بحيث أن طريقة نيوتن تتقارب من الدرجة الثانية بحيث أن $|x_0-\alpha|\prec\varepsilon$.

الاثبات

من تعريف التقارب فإن $|\alpha-x_{n+1}|\le c\,|\alpha-x_n|^p$ حيث P هو ثابت التقارب وسرعته C.

من نظرية تايلور فإن

$$0=f(\alpha)=f(x_n)+(\alpha-x_n)\frac{f'(x_n)}{1!}+(\alpha-x_n)^2\frac{f''(x_n)}{2!}+O(\alpha-x)\Rightarrow$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=-\left[(\alpha-x_n)+(\alpha-x_n)^2\frac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)}\right]\Rightarrow$$

$$(\alpha-x_n)+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=-(\alpha-x_n)^2\frac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)}\Rightarrow$$

$$\alpha-\left[x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]=-(\alpha-x_n)^2\frac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)}\Rightarrow$$

$$\alpha-x_{n+1}=-(\alpha-x_n)^2\frac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)}\Rightarrow$$

$$|\alpha-x_{n+1}|\le|\alpha-x_n|^2\left|\frac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)}\right|\Rightarrow let \qquad p=2,\ c=\left|\frac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)}\right|$$

$$|\alpha-x_{n+1}|\le c\,|\alpha-x_n|^p$$

وبالتالي فإنها تتقارب من الدرجة الثانية بسرعة مقدارها $\left|\dfrac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)}\right|$.

المسافة المثلى لاستخدام نيوتن رافسون

$$I=[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon] \qquad |\alpha-x_0|\prec\frac{\min\limits_{x\in I}|f'(x)|}{\max\limits_{x\in I}|f'(x)|}$$

الحالات التي لا يمكن استخدام طريقة نيوتن رافسون

- $\forall n \quad f'(x_n)=0$.
- أن يكون $\forall n\neq m \quad x_n=x_m$.

ملاحظة: إذا كان هناك مضاعفة للجذور أي إذا كانت الدالة

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=\ldots=f^{m}(\alpha)=0,h(\alpha)\neq 0 \qquad f(x)=(x-\alpha)^m h(x)\Rightarrow$$

وبالتالي عند تطبيق نيوتن رافسون فإن

$$x_{n+1}=g(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\Rightarrow$$

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\Rightarrow$$

$$g(x)=x-\frac{(x-\alpha)^m h(x)}{(x-\alpha)^m h'(x)+m(x-\alpha)^{m-1}h(x)}\Rightarrow$$

$$=x-\frac{(x-\alpha)h(x)}{(x-\alpha)h'(x)+m\,h(x)}$$

وبما أن سرعة التقارب $c=\lim\limits_{x\to\alpha}g'(x)$ باستخدام النقطة الثابتة فإن

$$g(x)=x-\frac{(x-\alpha)h(x)}{(x-\alpha)h'(x)+m\,h(x)}\Rightarrow$$

$$g'(x)=1-\left\{\frac{h(x)}{(x-\alpha)h'(x)+m\,h(x)}+(x-\alpha)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h(x)}{(x-\alpha)h'(x)+m\,h(x)}\right]\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\alpha}g'(x)=\lim_{x\to\alpha}1-\left\{\frac{h(x)}{(x-\alpha)h'(x)+m\,h(x)}+(x-\alpha)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h(x)}{(x-\alpha)h'(x)+m\,h(x)}\right]\right\}=$$

$$\lim_{x\to\alpha}g'(x)=1-\frac{1}{m}$$

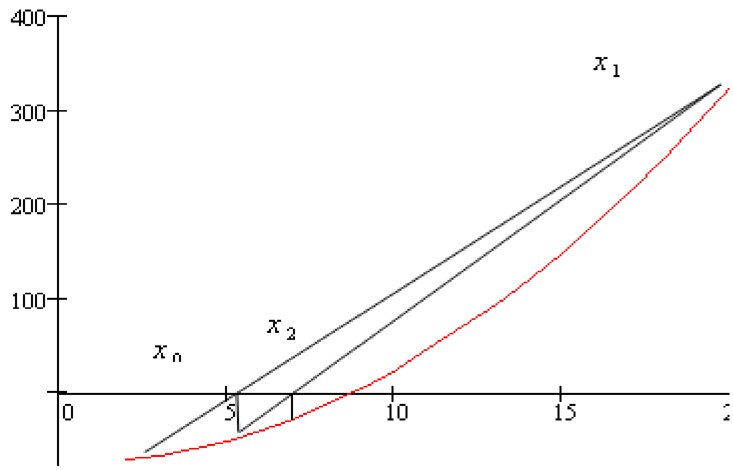
وبالتالي تتقارب نيوتن رافسون بالمقدار $1-\frac{1}{m}$. وبالتالي فإنه يجب استخدام الصيغة

$$x_{n+1}=x_n-m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

<u>انظر مثال رقم 16 صفحة 94 في الكتاب لترى الفرق.</u>

4. طريقة القاطع

تعتمد طريقة القاطع البدء بنقطتين تحصران جذر الدالة مثل البدء بالنقطتين x_0,x_1 بحيث أن



$\Delta x_n=x_n-x_{n-1}\to 0$ يكون $=f'(x_n)$ $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\to\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_n}$ وبالتالي فإن

$$f'(x_n)\approx\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

وباستخدام نيوتن رافسون فإن

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{f(x_n)}{\left(\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right)}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}(x_n-x_{n-1})$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}(x_n-x_{n-1})\ OR$$

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

مثال: أوجد جذر الدالة $f(x)=e^x+3x$ باستخدام طريقة القاطع مبتدأً من النقطتين -0.5 و 0.

n	0	1	2	3	4
x_n	-0.5	0	-0.264066	-0.257808	-0.257622
$f(x_n)$	-0.89	1	-0.0242751	-0.006845	-0.00021328

ملاحظة: تتقارب $x_n \to \alpha$ بشكل غير خطي حيث تكون قيمة $P = 1.618 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وتسمى P النسبة الذهبية.