اسم المادة : جبر خطي

* الجبر الخطي : الوحدة الأولى : المصفوفات :-

← المصفوفات والعمليات الجبرية عليها :

مثال (4) ص 10 | جد قيم x و y و z التي تؤدي إلى تساوي المصفوفتين :

$$A=\begin{bmatrix} x+y & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & y \\ 3 & z & 4 \end{bmatrix}$$

$$x+y=1 \longrightarrow x=1-y=1-6=\boxed{-5}$$

$\boxed{6=y}$

$\boxed{1=z}$

P: فلسطين الطلاع
0599713459

تدريب (4) ص 10 | جد قيم x و y التي تؤدي الى تساوي المصفوفتين :

$$A=\begin{bmatrix} x+y & x-y \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x+y&=2 \\ \oplus \quad x-y&=3 \\ \hline 2x&=5 \Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

$$x-y=3$$

$$x-3=y$$

$$y=\frac{5}{2}-3=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \boxed{x=\frac{5}{2},\ y=-\frac{1}{2}}$$

* المصفوفة المثلثية العلوية:

هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها تحت القطر الرئيسي أصفار.

* المصفوفة المثلثية السفلية:

هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها ~~تحت~~ فوق القطر الرئيسي أصفار.

* المصفوفة المثلثية:

هي المصفوفة اذا كانت مثلثية علوية او سفلية.

* المصفوفة القطرية:

هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها اصفار فوق القطر الرئيسي وتحته.

* المصفوفة الصفرية:

هي المصفوفة التي جميع عناصرها اصفار بغض النظر عن حجمها.

| مثال (5) ص11 | أ. ملك طه الطلاع |
| تدريب (5) ص11 | 0599713459 |

وصف المصفوفات بطريقة جبرية: ص12

* المصفوفة المنقولة (A^t):

مثال (6) صـ12 | جد منقولات المصفوفات التالية:

$$B=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\\6&7\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&2&6\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}3&5&-2\\5&1&4\\-2&4&1\end{bmatrix}$$

$$B^t=\begin{bmatrix}2&4&6\\3&5&7\end{bmatrix},\quad C^t=\begin{bmatrix}1\\2\\6\end{bmatrix}$$

أ. فلسطين الطلاع
0599713459

$$D^t=\begin{bmatrix}3&5&-2\\5&1&4\\-2&4&1\end{bmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة:

هي المصفوفة التي تتساوى مع منقولها $(A=A^t)$.

* جمع مصفوفتين:

يمكن جمع المصفوفتين اذا كان:

* لهما نفس الرتبة.

حيث يتم جمع العناصر المتناظرة.

أ. فاطمة الطلاع
0599713459

مثال (7) ص13

تدريب (7) ص13 جد $A+B$ ، $A+C$ ، $B+C$ (ان وجدت)
بحيث ان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times2},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}_{2\times2},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$A+C \Rightarrow$ لا يجوز لعدم تساوي الرتبتين

$B+C \Rightarrow$ لا يجوز لعدم تساوي الرتبتين

* اذا كانت $A=a_{ij}$ وكان c عدد حقيقيا فان:

$$cA = ca_{ij}$$

مثال (8) ص 14 اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\\2&5\end{bmatrix}$ فأوجد:

أ. نسيبة الطلاع
0599713459

أ) $2A$

$$2A = 2\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\\2&5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4&2\\-2&6\\4&10\end{bmatrix}$$

ب) $(-1)A$

$$-1(A) = -1\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\\2&5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2&-1\\1&-3\\-2&-5\end{bmatrix}$$

تدريب (8) ص 14

اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&3&5&1\end{bmatrix}$ جد

أ) $3A$

$$3A = 3\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&3&5&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&6&9&12\\-3&9&15&3\end{bmatrix}$$

ب) $-1(A)$

$$(-1)A = -1\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&3&5&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&-2&-3&-4\\1&-3&-5&-1\end{bmatrix}$$

* $A-B = A+(-B)$
$= A + (-1)B$

مثال (9) ص 14 : اذا كانت

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

أ. ملك طه الطلاع
0599713459

جد $A-B$ ؛

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

تدريب (9) ص 15 جد $A-B$ ، $A-C$ (ان وجدت)

حيث أن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$A-B \Rightarrow$ لا يجوز لعدم تساوي الرتبتين

$$A-C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$A+(-C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

* ضرب المصفوفات :

يمكن ضرب مصفوفتين اذا كان عدد أعمدة الأولى تساوي عدد صفوف الثانية .

مثال (١٥) ص ١٦ | اذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

أ. نائل طيب الصلاح
0599713459

جد AB و BA ؛

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1*3)+(2*5)+(3*4) & (1*1)+(2*2)+(3*1) \\ (2*3)+(-1*5)+(4*4) & (2*1)+(-1*2)+(4*1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 8 \\ 17 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} (3*1)+(1*2) & (3*2)+(1*-1) & (3*3)+(1*4) \\ (5*1)+(2*2) & (5*2)+(2*-1) & (5*3)+(2*4) \\ (4*1)+(1*2) & (4*2)+(1*-1) & (4*3)+(1*4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 & 13 \\ 9 & 8 & 23 \\ 6 & 7 & 16 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : ضرب المصفوفات ليست تبديلية

$$AB \neq BA$$

* من الممكن ان يكون حاصل ضرب مصفوفتين غير صفريتين مصفوفة صفرية.

---

* **مصفوفة الوحدة :** (I) (I_n) n: حجم المصفوفة

هي المصفوفة القطرية التي جميع عناصر قطرها الرئيسي = $\boxed{1}$

$$IA = AI = A$$

أ. مصطفى الطلاع
0599713459

* **النظير (المعكوس) الضربي :-** $\boxed{AB = BA = I}$

تدريب (14) ص 20

هل المصفوفة B معكوس المصفوفة A ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\because AB = BA = I$$

$\therefore$ B هي نظير (معكوس) A

* قواعد حساب المصفوفات ، ص 24

مثال (16) ص 26 | اذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 6\\ 6 & 4 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

أ. فلسطين الطلاع
0599713459

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

جد AB ، BC ، $A(BC)$ ، $(AB)C$ ؟

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 6\\ 6 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 5 & 10\end{bmatrix}$$

$$BC=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 6\\ 7 & 6\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 5 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 12\\ 25 & 30\end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 6\\ 6 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 6\\ 7 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 12\\ 25 & 30\end{bmatrix}$$

$$(AB)C=A(BC)$$

$$(A^t)^t = A$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(kA)^t = kA^t$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

أ. فلسطين الطلاع
0599713459

مركز الفا

استعداد تام لتدريس كافة

مقررات تكنولوجيا المعلومات

* عمليات الصف البسيطة على المصفوفات و المصفوفة في الشكل الصفي المميز :

أ. فاطمة الطلاع
0599713459

← انواع عمليات الصف البسيطة :

1. تبديل صفين في المصفوفة المعطاة.
2. ضرب صف من المصفوفة بعدد حقيقي.
3. ضرب صف من المصفوفة بعدد حقيقي وجمع الناتج إلى صف آخر مع اعادة الصف الذي ضُرب بعدد الى ما كان عليه.

---

* نسمي المصفوفة D بانها تكافئ المصفوفة A اذا حصلنا على D من A باستخدام سلسلة متتالية من عمليات الصف البسيطة.

شروط الشكل الصفي المميز لأية مصفوفة

$\boxed{\text{ص } 36+37}$

* الجبر الخطي: الوحدة الأولى: المصفوفات:

مثال (24) ص 39 | حول المصفوفة

أ. علا طه الطلاع
0599713459

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 20 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل الصفي المميز:

$$\xrightarrow[\langle R_1, R_2\rangle]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -9 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -9 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-5R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{33}{2} & -\frac{45}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{33}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{15}{11} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{15}{11} \end{bmatrix}$$

م.فطين الطلاع

0599713459

$$\xrightarrow{-6R_3+R_1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & \frac{20}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{15}{11} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{5R_2+R_1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & \frac{45}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{15}{11} \end{bmatrix}$$

تدريب (24) ص 41 | حول المصفوفة التالية الى الشكل الصفي المميز؟

أ. فلسطين الطلاع
0599713959

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\langle R_1, R_2 \rangle} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\langle R_2, R_3 \rangle} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

أ. هالة شمس الفلاح
0599713459

$$\xrightarrow{-3R_3+R_1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_2+R_1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

* الجبر الخطي: الوحدة الثانية: المحددات:

مثال (1) ص 121 | جد متعاملات a_{11}, a_{12}, a_{23}

للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

أ. فلسطين العلاج

0599713459

---

* المحدد المتمم للعنصر a_{11} هو:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (0*4)-(2*2) = -4$$

وعليه فان متعامل a_{11} هو:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \boxed{-4}$$

---

* المحدد المتمم للعنصر a_{12} هو:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1*4)-(2*1) = -6$$

وعليه فان متعامل a_{12} هو:

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)(-6) = \boxed{6}$$

* المحدد المتمم للعنصر a_{23} هو:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1*2) - (1*2) = 0$$

وعليه فإن متعامل a_{23} هو:

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = \boxed{0}$$

أ. سامي الطلاع
0599713459

مركز ألفا
~~ا~~ستعدادات للتدريس كافة
مهارات تكنولوجيا المعلومات

* تدريب (1) ص 122 | جد متعاملات a_{12}, a_{23}, a_{32}

للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

---

*

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1*0)-(2*3) = -6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}(-6) = (-1)(-6) = \boxed{6}$$

---

*

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1*1)-(2*-1) = \boxed{3}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}(3) = (-1)(3) = \boxed{-3}$$

---

*

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أ. نائل سليم الطلاع
0599713459

$$C_{32} = \boxed{0}$$

* مثال (3) ص 123 | جد محدد A حيث

$$A = \begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

أ. نظير الطلاع
0599713459

1 الطريقة الأولى:

$$|A| = +1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +1(4\times5 - 1\times1) - 0 + 2(3\times1 - 0\times4)$$

$$= 19 - 0 + 6 = \boxed{25}$$

---

2 الطريقة الثانية:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \qquad\qquad 20 \quad 0 \quad 6$$

$$|A| = (20 + 0 + 6) - (0 + 1 + 0)$$

$$= 26 - 1 = \boxed{25}$$

تدريب (٢) ص 124 | جد محدد A باستخدام طريقة الشكل السهمي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

أ. فلسطين العلاء
0599713459

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}$$

$$0 \quad 2 \quad 15 \qquad\qquad -5 \quad 0 \quad 4$$

$$|A| = (-5+0+4) - (0+2+15)$$

$$= (-1) - (17) = \boxed{-18}$$

مثال (4) ص 125 | جد محدد المصفوفة A
باستخدام الصف الثاني ثم باستخدام العمود الثالث:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

أ. فلسطين الطلاع
0599713459

① باستخدام الصف الثاني:

$$|A| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + a_{24}C_{24}$$

$$= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23} + a_{24}M_{24}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3) - 0 + 1(3) = \boxed{-3}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3) - 0 + 1(0) = \boxed{-3}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1) - 2(-1) + 1(-1)$$

$$= \boxed{2}$$

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3) - 2(0) + 0(0) = \boxed{3}$$

أ.م عيسى الطلاعة

0599713459

$\boxed{\text{معلم}}$

$$|A| = -1(-1)(-3) + (2)(-3) - (3)(2)$$

$$+ (1)(3) = \boxed{-12}$$

② باستخدام العمود الثالث:

$$|A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}$$

$$= a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33} - a_{43}M_{43}$$

م. فلسطين الفلاحي
0599713939

$$= -a_{23}M_{23} - a_{43}M_{43}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1) - 2(-1) + 1(-1)$$

$$= 1 - -2 - 1 \ \boxed{2}$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1) - 2(-1) + 1(-1)$$

$$= 1 + 2 - 1 = \boxed{2}$$

$$|A| = -3(2) - 3(2) = \boxed{-12}$$

تدريب (3) ص 126

جد محدد المصفوفة :

أ. فلسطين الفلاح
0599713489

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* نستخدم العمود الأول لاحتوائه أكبر عدد من الأصفار :

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41}$$

$$= a_{21}C_{21} + a_{41}C_{41}$$

$$= -a_{21}M_{21} - a_{41}M_{41}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1) - 2(2) + 1(2)$$

$$= -1 - 4 + 2 = \boxed{-3}$$

$$M_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & +1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2) - 2(-4) + 1(-4)$$

$$= 2 + 8 - 4 = \boxed{6}$$

$$|A| = (-1)(-1)(-3) - (1)(6) = -3 - 6 = \boxed{-9}$$

* خواص الاقتران المحدد :

مثال (5) ص 128 لتمكن

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

جد $|A|$ ، $|A^t|$.

أ. نا طيبه الطلاع
0599713459

$$|A| \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}$$

$$60 \quad 0 \quad 0 \qquad\qquad 0 \quad 0 \quad -3$$

$$|A| = (0+0+-3)-(60+0+0) = \boxed{-63}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A^t| \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

$$60 \quad 0 \quad 0 \qquad\qquad 0 \quad -3 \quad 0$$

$$|A^t| = (0+-3+0)-(60+0+0) = \boxed{-63}$$

$$|A| = |A^t|$$

مثال (6) ص 129 | جد محدد المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

أ. فلسطين الطلاع
0599713459

$$|A| = 0$$

لاحتواء المصفوفة A على

صف صفري.

تدريب (5) ص 129 | جد محدد المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0$$

لاحتواء المصفوفة A على

عمود صفري.

مثال (7) ص 130

جد محدد كل من المصفوفات التالية :

(أ)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (2*5) - (1*0) = \boxed{10}$$

(ب)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

أ. فلسطين العلاقع
0599713459

$$|B| = (1)(0)(5) = \boxed{0}$$

(جـ)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|C| = (1)(4)(-1)(6) = \boxed{-24}$$

تدريب (6) ص 131 | جد محدد المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$$

أ. أسامة عليه الطلاع
0599713459

مثال (8) ص 131 | إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

جد $|A|$ ، $|B|$ ، AB ، $|AB|$:

$$|A| = (1*5) - (-1*2) = \boxed{7}$$

$$|B| = (3*2) - (-1*4) = \boxed{10}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 17 & 11 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = (11*11) - (3*17) = \boxed{70}$$

$$|A|\,|B| = \boxed{70}$$

$$\therefore\ |AB| = |A|\,|B|$$

مثال (٩) ص133 | جد نظير المصفوفة A (ان وجد)

حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

م. فلسطين الطلاع
0599713459

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-4) - 2(4) + 3(4)$$

$$= -4 - 8 + 12 = \boxed{0}$$

$\because |A| = 0$

$\therefore$ المصفوفة A غير قابلة للانعكاس وعليه فلا يوجد لها نظير.

تدريب (8) ص 134 | جد نظير المصفوفة ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

أ. فلسطين الطلاع
0599713459

ثم حقق العلاقة

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{array}$$

م. فلسطين الطلاع
0599713459

$$15 \quad 0 \quad 32 \qquad 40 \quad 6 \quad 0$$

$$|A| = (40+6+0) - (15+0+32)$$

$$= 46 - 47 = \boxed{-1}$$

$$|A^{-1}| \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} -40 & 16 & 9 & -40 & 16 \\ 13 & -5 & -3 & 13 & -5 \\ 5 & -2 & -1 & 5 & -2 \end{array}$$

$$-225 \quad -240 \quad -208 \qquad -200 \quad -240 \quad -234$$

$$|A^{-1}| = (-200+-240+-234) - (-225+-240+-208)$$

$$= -674 + 673 = \boxed{-1}$$

$$\therefore \ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

مثال (11) ص 134 :

جد محددات كل من :

أ. فلسطين العلاع
0599713459

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-2) - 4(0) = \boxed{-2}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-8) - 4(0) = \boxed{-8}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

أ. فلسطين الطلاع

0599713459

$$|A_2| = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = -1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-2) + 4(0) = \boxed{2}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A_3| = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-7) - 2(-4) + 3(1) = \boxed{4}$$

مثال (12) ص135

ليكن لدينا المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

أ. فلسطين العلاج
0599713459

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

جد العلاقة بين $|A|$ و $|B|$.

بما أن المصفوفة B نتجت من A بعد ضرب الصف الثاني من A بالعدد k

فإن $\boxed{|B| = k|A|}$

مثال (13) ص 136

جد قيمة $|A|$ حيث ان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\langle R_1, R_3 \rangle} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

أ. فلسطين الفلاح

0599713459

$$\xrightarrow[-3R_1 + R_2]{-2R_1 + R_3} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{4}{6}R_2 + R_3} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & \frac{14}{6} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(1)(6)\left(\frac{14}{6}\right) = \boxed{-14}$$

تدريب (9) ص 136

استخدم عمليات الصف البسيطة لايجاد |A| حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{<R_1, R_2>} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}R_1 + R_2} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

P. فلسطين الطلاع

0599713459

$$\xrightarrow{-\frac{4}{11}R_2 + R_3} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{9}{11} \end{vmatrix}$$

$$= -(\cancel{2})\left(\frac{\cancel{11}}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{9}{\cancel{11}}\right) = \boxed{-9}$$

مثال (14) ص 137

جد قيمة $|A|$ حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\langle R_1, R_2 \rangle} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3R_1+R_3]{-2R_1+R_2} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

أ. منال عطا الطلاع

0599713459

$$\xrightarrow{-R_2+R_3} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-)(1)(-1)(0) = \boxed{0}$$

تدريب (١٥) ص 137

جد $|A|$ حيث أن

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 4 & 6 & 8\\ 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\ 4 & 6 & 8\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix}\xrightarrow{<R_1,R_3>} = -\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 4 & 6 & 8\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2R_1+R_3]{-4R_1+R_2} = -\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & -6 & -20\\ 0 & -7 & -9\end{vmatrix} = -(-6)\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 1 & \frac{10}{3}\\ 0 & -7 & -9\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{7R_2+R_3} = (6)\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ 0 & 1 & \frac{10}{3}\\ 0 & 0 & \frac{43}{3}\end{vmatrix}$$

أ. فاطمة العلاونة
0599713459

$$= \overset{2}{\cancel{6}}(1)(1)\left(\frac{43}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right) = \boxed{86}$$

مثال (15) ص ١٤٠

م. فلسطين الطلاع
0599713459

لتكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ فجد $|A|$ و $adj(A)$؟

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (1) \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13$

$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$

$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = 34$

$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$

$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (1) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$

$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -18$

$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (1) \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 21$

$$C = \begin{bmatrix} 13 & -8 & 3 \\ -9 & 7 & -5 \\ 3 & -18 & 21 \end{bmatrix}$$

أ. [illegible]
0599913459

$$adj(A) = C^t = \begin{bmatrix} 13 & -9 & 3 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= 3(13) + 1(-8) + (-4)(3)$$

$$= 39 - 8 - 12 = \boxed{19}$$

مثال (16) ص 143

جد نظير المصفوفة الواردة في مثال (15) مستخدماً نظرية (5).

$\because |A| = 19 \neq 0$

$\therefore$ المصفوفة A قابلة للانعكاس

أ. نائل طه العلاونة
0599713459

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13}{19} & -\frac{9}{19} & \frac{34}{19} \\ \frac{-8}{19} & \frac{7}{19} & \frac{-18}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{-5}{19} & \frac{21}{19} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,adj(A)}$$

مثال (18) ص 148

حل النظام الخطي التالي مستخدماً قاعدة كرامير:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = -2$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 19$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

أ. محمد الطلاع
0599713439

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{x_1} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 19 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A_{x_1}| = 10\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 19 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 19 & 3 \end{vmatrix} = 27$$

$$A_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 19 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A_{x_2}| = 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 19 & -1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 36$$

$$A_{x_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 19 \end{bmatrix}$$

$$|A_{x_3}| = 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$X_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{27}{9} = \boxed{3}$$

أ.فاطمة العلاء
0599713459

$$X_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{36}{9} = \boxed{4}$$

$$X_3 = \frac{|A_{x_3}|}{|A|} = \frac{-9}{9} = \boxed{-1}$$

تدريب (14) ص 148

حل النظام الخطي التالي مستخدمًا قاعدة كرامر .

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

أ. فاطمة الطلاع
0599715459

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{x_1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A_{x_1}| = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A_{x_2}| = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{x_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

أ. [illegible]
0599713459

$$|A_{x_3}| = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$x_1 = \frac{|A_{x_1}|}{|A|} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$x_3 = \frac{|A_{x_3}|}{|A|} = \frac{-5}{-5} = 1$$

* الجبر الخطي: الوحدة الثالثة: الفضاء الخطي:

مثال (1) ص 172 / أوجد قيم x, y, z التي تجعل المتجهين

$$u = (x+y,\ y+z,\ z+x)$$

$$v = (0, 4, 6)$$

متساويين.

أ. فاطمة الطلاع

0599713459

$$x + y = 0 \quad \text{——} \quad (1)$$

$$y + z = 4 \quad \text{——} \quad (2)$$

$$z + x = 6 \quad \text{——} \quad (3)$$

$$\begin{array}{r} x + \cancel{y} = 0 \\ -\ \cancel{y} + z = 4 \\ \hline x - z = -4 \end{array} \quad \text{——} \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} x + \cancel{z} = 6 \\ +\ x - \cancel{z} = -4 \\ \hline 2x = 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$x + z = 6$$

$$1 + z = 6 \Rightarrow \boxed{z = 5}$$

$$x + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$\therefore \quad x = 1 \ /\ y = -1 \ /\ z = 5$$

مثال (2) ص173 | اداكان

$u=(2,-1,1)$, $v=(1,1,7)$

$w=(1,2,6,8)$

فاحسب كلا من

$3u, u+v, 2u+(-3)v, v+w$

$3u = 3(2,-1,1) = (6,-3,3)$

$u+v = (2,-1,1)+(1,1,7) = (3,0,8)$

$2u+-3v = 2(2,-1,1) + -3(1,1,7)$

$= (4,-2,2) + (-3,-3,-21)$

$= (1,-5,-19)$

$v+w \Rightarrow$ غير معرف

لان $v \in R^3$

$w \in R^4$

أ. فاطمة العلاونة

0599713459

مثال (3) ص 173 | احسب قيم x, y, z التي تحقق:

$$x(2,0,3,0)+y(1,1,0,0)+z(-1,4,0,5)$$
$$=(8,19,6,15)$$

$$(2x,0,3x,0)+(y,y,0,0)+(-z,4z,0,5z)$$

$$=(2x+y+-z,\ y+4z,\ 3x,\ 5z)$$
$$=(8,19,6,15)$$

أ. فاطمة الطلاع
0599713459

$2x+y-z=8$ —— (1)

$y+4z=19$ —— (2)

$3x=6 \Longrightarrow x=2$

$5z=15 \Longrightarrow z=3$

$$y+4z=19$$
$$y+4(3)=19$$
$$y+12=19 \Rightarrow \boxed{y=7}$$

$2(2)+(7)-(3)=8$ ✓

$\therefore\ x=2$

$y=7$

$z=3$

تدريب (1) ص 174

نجد قيم x, y, z التي تحقق:

$$z(1,1,0) + x(2,3,6) + y(5,4,-6) = (6,8,6)$$

$$(z,z,0) + (2x,3x,6x) + (5y,4y,-6y)$$
$$= (z+2x+5y,\ z+3x+4y,\ 6x-6y)$$
$$= (6,8,6)$$

أ. نائل طه الطلاع
0599713439

$$z + 2x + 5y = 6 \quad \text{——} \quad (1)$$
$$z + 3x + 4y = 8 \quad \text{——} \quad (2)$$
$$6x - 6y = 6 \quad \text{——} \quad (3)$$

نطرح (2) من (1)

$$\begin{array}{r} z + 2x + 5y = 6 \\ - \quad z + 3x + 4y = 8 \\ \hline -x + y = -2 \end{array} \quad \text{——} \quad (4)$$

$$(6x - 6y = 6) \div -6$$
$$-x + y = -1 \quad \text{——} \quad (5)$$

المعادلة (4) تناقض (5) وبهذا فلا يمكن ايجاد قيم لـ x, y, z تحقق المطلوب.

مثال (4) ص 175 | الكتاب

$$u = (1, -4, 11, 5)$$
$$v = (2, 1, 2, 6)$$

احسب كلا من

$$-u\,,\; 2u - 3v$$

م. نائل طيب الطلاع
0599713459

$$-u = -(1, -4, 11, 5)$$
$$= (-1, 4, -11, -5)$$

$$2u - 3v = 2(1, -4, 11, 5) - 3(2, 1, 2, 6)$$
$$= (2, -8, 22, 10) - (6, 3, 6, 18)$$
$$= (-4, -11, 16, -8)$$

تدريب (2) ص 175 | الأذكان

$$u=(-1,1,-4,0) \text{ ، } v=(6,-3,3,-4)$$

$$w=(3,2,3)$$

أ. فاطمة الطلاع
0599713459

حاسب كلاً من:

$$5v-3u \text{ , } u+v+w \text{ , } 2u-v$$

$$5v-3u=5(6,-3,3,-4)-3(-1,1,-4,0)$$

$$=(30,-15,15,-20)-(-3,3,-12,0)$$

$$=(33,-18,27,-20)$$

$u+v+w \Rightarrow$ غير معرف

$$2u-v=2(-1,1,-4,0)-(6,-3,3,-4)$$

$$=(-2,2,-8,0)-(6,-3,3,-4)$$

$$=(-8,5,-11,4)$$

مثال (5) ص 176 | ليكن $u=(1,2), v=(2,1)$ متجهين في R^2 وليكن $a\neq 0, b\neq 0$ عددين في R برهن انه اذا كان للمتجهين $au+bv, bu+av$ نفس الاتجاه فانهما يكونان متساويين؟

بما أن المتجهين لهما نفس الاتجاه فانه يوجد عدد موجب (c) حيث أن

أ. ملك حسن الطلاع
0599713459

$$au+bv=c(bu+av) \quad \text{——— } ①$$

$$au+bv-c(bu+av)=0$$

$$au+bv-cbu-acv=0$$

$$au-cbu+bv-acv=0$$

$$(a-cb)u+(b-ca)v=0$$

$$(a-cb)(1,2)+(b-ca)(2,1)=(0,0)$$

$$(a-cb,2a-2cb)+(2b-2ca,b-ca)=(0,0)$$

$$(a-cb+2b-2ca,2a-2cb+b-ca)=(0,0)$$

$$a-cb+2b-2ca=0$$

$$a-2ca+2b-cb=0$$

$$a(1-2c)+b(2-c)=0 \quad \text{——— } ②$$

$$2a-2cb+b-ca=0$$

$$2a-ca+b-2cb=0$$

$$a(2-c)+b(1-2c)=0 \quad \text{——— } ③$$

من (٢)،(٣) وحيث ان $a \neq 0, b \neq 0$

أ. أمل طه الطلاع
0599713459

فإن
$$x = a$$
$$y = b$$

هو حل غير تافه للنظام الخطي المتجانس.

$$(1-2c)x + (2-c)y = 0$$
$$(2-c)x + (1-2c)y = 0$$

أي ان المحدد = صفر

$$\begin{vmatrix} 1-2c & 2-c \\ 2-c & 1-2c \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-2c)^2 - (2-c)^2 = 0$$
$$1 - 4c + 4c^2 - (4 - 4c + c^2) = 0$$
$$1 \cancel{-4c} + 4c^2 - 4 \cancel{+4c} - c^2 = 0$$
$$\left[3c^2 - 3 = 0\right] \div 3$$
$$c^2 - 1 = 0$$
$$c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

وبما ان c عدد موجب

فإن $\boxed{c=1}$ وبالتعويض عن $c=1$

في المعادلة (١) ينتج أن

$$\boxed{au + bv = bu + av}$$

تدريب (3) ص 177 | التكن

$u=(7,10)$, $v=(0,1)$, $w=(1,1)$
متجهات في R^2 ، أوجد (إن أمكن) عددين $a,b \in R$
بحيث يكون للمتجهين w و $au+bv$ نفس الاتجاه
و للمتجهين u و $(2a)u-bv$ نفس الاتجاه أيضاً .

بما أن المتجهين w و $au+bv$ لهما نفس الاتجاه
فإنه يوجد عدد موجب مثل c حيث $\boxed{c>0}$ ——— ①

أ. ملك طيبة الطلاع
0599713459

بحيث

$$au+bv=cw$$

$$a(7,10)+b(0,1)=c(1,1)$$

$$(7a,10a)+(0,b)=(c,c)$$

$$7a=c$$
$$10a+b=c$$

$$7a=10a+b$$

$$\boxed{3a+b=0}$$ ——— ②

---

* بما أن المتجهين u و $2au-bv$ نفس الاتجاه
فإنه يوجد عدد مثل d موجب بحيث

$$2au-bv=du$$

$$2a(7,10)-b(0,1)=d(7,10)$$

$(14a, 20a) = (a, b) = (7d, 10d)$

$14a = 7d \Rightarrow \boxed{d = 2a}$

$20a - b = 10d$

بالتعويض عن d في المعادلة (1)

$20a - b = 10d$

$20a - b = 10(2a)$ 0599113459

$20a - b = 20a$

$-b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

وبالتعويض عن $b = 0$ في المعادلة (2)

$3a + b = 0$

$3a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

وبالتعويض عن $a = b = 0$ في المعادلة (3)

$10a + b = c$

$0 + 0 = c \Rightarrow \boxed{c = 0}$

مما يناقض المعادلة (1) أن $c \neq 0$

وهكذا فإنه من غير الممكن أن يكون هناك عددان a, b بالمواصفات المطلوبة.

* الفضاءات الخطية

يسمى V فضاء خطيا اذا تحققت الخواص التالية :

خاصة بعملية الجمع:

1- $u+v = v+u$

2- $(u+v)+w = u+(v+w)$

3- يوجد صفر 0 في V يسمى المتجه الصفري

4- لكل u يوجد $-u$ في V يسمى النظير الجمعي

خاصة بعملية الضرب:

5- $c(u+v) = cu+cv$

6- $(c+d)u = cu+du$

7- $c(du) = (cd)u$

8- $1u = u$

---

* R^n تعتبر فضاء خطيا وعند $n=1$ تصبح $R^n = R$.

أ. فلسطين الطلاع
0599713459

* R^∞ تعتبر فضاء خطيا .

* $M_{(n,m)}(R)$ المكونة من جميع المصفوفات الحقيقية ذات الحجم $n \times m$ تعتبر فضاء خطيا .

* الفضاء $R[x]$ المكون من جميع الحدوديات الحقيقية في متغير واحد x يعتبر فضاءً خطياً.

* المجموعة $F(R)$ المكونة من كل الاقترانات $f: R \longrightarrow R$ تعتبر فضاءً خطياً.

* لتكن V مجموعة غير خالية مزودة بعمليتي الجمع والضرب، تسمى V فضاءً خطياً إذا تحققت الشروط:

* $u+v \in V$
* $u+v = v+u$
* $(u+v)+w = u+(v+w)$
* يوجد صفر 0 في V بحيث $\boxed{0 = 0+u = u+0}$
* يوجد نظير جمعي $-u \in V$ ، $\forall u \in V$
* $cu \in V$
* $c(u+v) = cu+cv$
* $(c+d)u = cu+du$
* $c(du) = (cd)u$
* $1u = u$

أ. فلسطين الطلاع
0599713459

* لو عرفنا عمليات الجمع والضرب بعدد على المجموعة

$$R^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in R\}$$

بالعلاقات:

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

فان الفضاء ليس خطيا وذلك لانه لا يحقق

الخاصية $\boxed{1u = u}$

* الفضاءات الجزئية :

* اذا كان V فضاءً خطياً و W مجموعة جزئية من V ، تكون W فضاء خطي جزئي من V اذا كانت W فضاء خطي بالنسبة للعمليات التي ترثها من V.

* اذا كانت W مجموعة جزئية من الفضاء الخطي V فان W تشكل فضاء جزئي من V اذا تحققت الشروط التالية :

* $0 \in W$
* $u+v \in W$
* $cu \in W$

أو الشرطان المتكافئان :

* $0 \in W$
* $cu+cv \in W$

أ.فلسطين الطلاع

05997134 59

مثال هل $u=\{(x,y,z) ، x+y+z=0\}$

فضاء جزئي من R^3 ؟

① $(0,0,0)\in u$

حيث $0+0+0=0$

②

نفرض $v=(x_1,y_1,z_1)$

$u=(x_2,y_2,z_2)$

بحيث $x_1+y_1+z_1=0$

و $x_2+y_2+z_2=0$

$u+v=(x_1+x_2 , y_1+y_2 , z_1+z_2)\in u$

$cu\in u$

بحيث $0=cx_1+cy_1+cz_1$

∴ تحققت الشروط

∴ u فضاء جزئي من R^3

أ. نافع عبد العال

0599713459

*

① $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+d=0$

② $W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : b=c$

تعتبر فضاءات جزئية من $M_{2\times2}$

م. فلسطين الطلاع

0599713459

* تقاطع أي عدد من الفضاءات الجزئية يشكل فضاء جزئي.

* اذا كانت ⊛ نظام متجانس من المعادلات الخطية في المجاهيل $x_1, \dots, x_n$ فإن مجموعة الحل $S(*)$ لهذا النظام هي فضاء جزئي من R^n والعكس صحيح.

$\boxed{\text{مثال}}$ أعط وصفاً هندسياً للفضاء الحلي المكون من مجموعة حل النظام :

$$(*) = \begin{cases} x+y-z=0 \\ 5x-y+7z=0 \\ 3x-3y+9z=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 7 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{الصف البسيطة}]{\text{بعد اجراء عمليات}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اذن حل النظام:

$$x+z=0$$
$$y-2z=0$$

ومنها

$$x=-z$$
$$y=2z$$

وهو يمثل خط مستقيم.

أ. فاطمه الفلاح
0599713459

* المجموعات المولدة :-

اذا كانت $v_1, \dots, v_n$ متجهات في فضاء خطي معطى V فاننا نسمي كل عبارة على الشكل

$$\sum c_i v_i = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

تركيبة خطية ويرمز لها بالرمز $L(v_1, \dots, v_n)$

مثال اكتب المتجه $V=(0,1,4)\in R^3$ على شكل تركيبة خطية للمتجهات :

$$u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,-1,1)$$
$$u_3=(1,0,2)$$

أ. فلسطين
الطلاع
05997/3459

$$x u_1 + y u_2 + z u_3 = V$$

$$x(1,1,0)+y(1,-1,1)+z(1,0,2)=(0,1,4)$$

$$(x,x,0)+(y,-y,y)+(z,0,2z)=(0,1,4)$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \\ y+2z=4 \end{cases}$$

بحل المعادلات ينتج :

$$x=-1,\ y=-2,\ z=3$$

اذاً

$$\boxed{V=-u_1-2u_2+3u_3}$$

* اذا كانت S مجموعة جزئية من فضاء خطي V
فإن $L(S)$ هي أصغر فضاء يحتوي على S
بمعنى ان $L(S)$ هي الفضاء الجزئي الذي يحتوي
على S و يحتوي عليه كل فضاء خطي جزئي
يحتوي على S . أ. فلسطين الطلاع

0599713459

$\boxed{\text{مثال}}$ برهن أن

$$S=\{(1,3,2),(4,12,9),(0,1,1)\}$$

تولد الفضاء R^3 ؟

$$\begin{bmatrix}1&3&2\\4&12&9\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-4R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&3&2\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{<R_2,R_3>}\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_3+R_1}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-3R_2+R_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

فبما ان $L(B)=R^3$

$\therefore\ L(S)=R^3$