اسم المادة : رياضيات منفصلة

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط هنا

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

١

محاضرة (١)

الأسس والنماذج

تعريف العلم: مجموعة من الطرق للحصول على المعرفة الإنسانية وتطويرها

مراحل الطريقة العلمية

① المشاهدة: جمع مشاهدة الحقائق المتعلقة بالمشكلة

② الفرضية: لتفسير الحقائق المشاهدة.

③ التنبؤ: استنتاج بعض الحقائق

④ التحقيق: يتم جمع حقائق جديدة للتحقق من مدى صحة التنبؤ

النموذج

صيغة رياضية لوصف ظاهرة معينة أو لتلخيص خواصها

مثال

النموذج الخطي $y = a + b x$ ويسمى من الإحصاء خط انحدار y على x.

مثال آخر:

علاقة ضغط الغاز مع حجمه وهي علاقة عكسية

$$P = \frac{c}{v}$$

حيث P الضغط

v الحجم ، c ثابت مناسب

٣

أهداف إنشاء النماذج

١) التعبير عن المعلومات بشكل مبسط غالباً من خلال بعض الرسومات لإعطاء فكرة مبدئية وسهلة لفهم العلاقات

٢) تحضير طريقة ملائمة للتعبير عن بعض الحسابات الاعتماد على شكلها الملائم للإحداثيات. حيث يتم تقريب العلاقات بين المتغيرات بواسطة الثوابت حدود من درجة مناسبة

٣) البحث والتنبؤ بالمستقبل
التوصل إلى نموذج رياضي يمكننا من خلاله التنبؤ بالمستقبل.

الأساس هو تعميم لمعرفة لعلاقة أو جزء من أو نماذج ذات معالم محددة أو مجهولة

(٣) النماذج الرياضية

نماذج رياضية نظرية

- نموذج هندسة اقليدس
- نموذج الزمرة من الجبر
- نموذج الاحتمالات

نماذج رياضية تجريبية

- نموذج خط الانحدار
- نموذج التوزيعات الاحصائية

ملاحظات هامة

① النموذج الرياضي هو الحد الأدنى من الصفات التي تعطى للنموذج بحيث تكون مستقلة عن بعضها البعض وغير متناقضة

② النماذج التي تصف الظواهر او وقائع فيزيائية غير رياضية لأنه علينا اكتشاف المزيد من المعرفة قد يؤدي الى تطوير النموذج

③ لكل نموذج لغته الخاصة به من حيث المفردات الأساسية غير المعرفة والألفاظ المعرفة والاصطلاحات والرموز الخاصة بموضوع النموذج الرياضي

نموذج الزمرة أو الحقل

مثال (١) عملية الجمع على مجموعة الأعداد الصحيحة (Z) $(Z,+)$

① العملية مغلقة بمعنى انه لكل $m,n \in Z$ يكون $n+m$ عدد صحيح

② العملية تجميعية بمعنى انه لكل n,m,r من Z يكون $(n+m)+r = n+(m+r)$

③ يوجد عنصر محايد هو الصفر بمعنى انه لكل n من Z يكون $0+n = n+0 = n$

④ يوجد لكل عنصر في Z عنصر نظير بمعنى انه لكل n في Z يوجد له نظير $-n$ في Z بحيث ان $n+(-n) = -n+n = 0$

٤

وعليه نقول ؟

إذا كانت A مجموعة غير خالية وكانت "*" عملية على A

بحيث تحقق الشروط الأربعة الانغلاق والتجميع ووجود

العنصر المحايد ووجود النظير متوفرة لـ A

(A, *) نموذج رياضي يسمى زمرة .

النموذج الاحتمالي :

هو ذلك النموذج الذي يصف الأحداث التي

تحصل بالصدفة أو بشكل عشوائي .

مراحل مرّ بها مفهوم الاحتمالات ونموذجها

1 مرحلة ظاهرة ثبات التكرار النسبي

تقوم على أن احتمال حادث ما هو نسبة حدوث هذا الحادث

عند إجراء عدد كبير جداً من التجارب

مثال ألقاء قطعة نقود ٢٠٠ مرة وظهرت الصورة ١٥

فيكون احتمال ظهور الصورة = $\frac{15}{200}$

ـ لا نستطيع للتجارب بالتكرار لعدد كبير من المرات .

2 مرحلة الاحتمال الشخصي

يقوم الشخص بتقدير الاحتمال .

مثل التنبؤ بكمية تساقط الأمطار .

لهذا عيوب [قد يتم التوصل لتقديرات مختلفة]

٧ النموذج الاحتمالي المنتظم

احتمال الحادث A = $\dfrac{\text{النسبة بين عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني } S}$

عيوب النموذج: صعوبة التأكد أن كافة عناصر S لها نفس امكانية الحدوث.

٤ النموذج الرياضي للاحتمال

الاحتمال هو مقياس للحوادث بحيث أن

١ احتمال أي حادث هو عدد غير سالب

٢ احتمال الفضاء العيني S يساوي واحد صحيح

٣ احتمال اتحاد حادثين منفصلين هو مجموع احتماليهما

النموذج الرياضي للاحتمال هو تعميم للنموذج الاحتمالي المنتظم هو ...

مثال ٩

4 الخوارزميات

الترميز الوصفي Pesedo code

هو طريقة التعبير المعتمدة للخوارزمية بعيداً عن الرموز المكتوبة بطريقة منظمة متسلسلة تؤدي الى التعبير عن مسألة ما وطريقة إيجاد حلها

١ حساب مساحة المربع

الخطوة الأولى: يجب معرفة طول ضلع المربع

الخطوة الثانية: تطبيق قانون لإيجاد مساحة المربع

الخطوة الثالثة: لطباعة الجواب

(6)

مثال [11]

مثال [12]

تعريف المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو أصغر عدد يقبل القسمة على العددين بدون باقي.

الطريقة الترميز الوصفي

الخطوة الأولى: نقرأ العددين

الخطوة الثانية: نقارن بين العددين ونسمي الأكبر س والأصغر ص

الخطوة الثالثة: نرمز للمضاعف المشترك بالرمز م ونضع م تساوي س

الخطوة الرابعة: نقسم م على ص فإن تمت القسمة بدون باقي كان م هو الجواب المطلوب ونتوقف

الخطوة الخامسة: نضيف س الى م أي نجمع س مع المقدار م ومن هنا نغير المقدار م

الخطوة السادسة: نعود الى الخطوة الرابعة

مثال تطبيقي

(م.م.أ) للعددين 2479 ,201

الخطوة الأولى: نقرأ العددين 2479 و 201

الخطوة الثانية: نعرف س = 2479 و ص = 201

الخطوة الثالثة: نعرف م = س = 2479

الخطوة الرابعة: نقسم م على ص أي 2479 على 201 يكون الباقي 6 نستمر

الخطوة الخامسة: نجمع س 2479 مع م فيصبح م = 4958

الخطوة السادسة: نعود الى الخطوة الرابعة

الخطوة السابعة: نقسم م على ص فيكون الباقي 134

الخطوة الخامسة : نجمع 2479 إلى م فتصبح القيمة م = 7437

الخطوة السادسة : نعود إلى الخطوة الرابعة

الخطوة الرابعة : نقسم م على ص فيكون الباقي صفراً

إذن م = 7347 هو المضاعف المشترك
الأصغر المطلوب

تعريف :

القاسم المشترك الأكبر لعددين هو أكبر عدد يقبل العددان القسمة
عليه بدون باقي .

طريقة الخوارزمي :

ق.م.أ (س، ص) = ق.م.أ (ص، باقي)
حيث ب هو باقي قسمة س على ص

خوارزمية ق.م.أ

الخطوة الأولى : نقرأ العددين ع ، ع

الخطوة الثانية : نقارن العددين ونرمز للأكبر س والأصغر ص

الخطوة الثالثة : نقسم العدد س على العدد ص فينتج عددان
أولهما هو خارج القسمة والثاني هو باقي القسمة ونسميه ب

الخطوة الرابعة : إذا كان خارج القسمة ب يساوي صفراً فهذا
يعني أن س تقبل القسمة على ص فيكون ص هو ق.م.أ

الخطوة الخامسة : نعيد تعريف المتغيرين س و ص بحيث تصبح س تساوي ص
وتصبح ص تساوي ب

الخطوة السادسة : نرجع إلى الخطوة الثالثة ونعيد التكرار

(8) مثال تطبيقي: 201 ، 2479

جد القاسم المشترك الأعلى للعددين

الخطوة الأولى: نتعرف على العددين $ع_1$ = 2479 ، $ع_2$ = 201

الخطوة الثانية: نحدد المقارنة س = 2479 ، ص = 201

الخطوة الثالثة: نقسم س على ص

2479 ÷ 201 = 12 والباقي 67 .

فتكون ب = 67

الخطوة الرابعة: الباقي 67 لا يساوي صفر

الخطوة الخامسة: نعيد تعريف س ، ص س = 201

و ص = 67

الخطوة السادسة: نذهب إلى الخطوة الثالثة .

الخطوة الثالثة: نقسم 201 ÷ 67 = 3 والباقي صفر .

يعني هذا أن 67 تقسم العدد 201 وأن 67 هو

ق.م.أ للعددين (201 ، 67) ونتوقف عن الاستمرار بالحل

مثال (13) ، (14) .

(8)

المتتاليات :

المتتالية : (X_n)

هي ترتيب من العناصر حسب قاعدة معينة حيث $n=1,2,3,4,\dots$ ويسمى X_n الحد النوني في المتتالية

مثال

الحد الرابع للمتتالية

$$X_{n+1} = X_n + 3n \quad , X_1 = 2$$

$$n = 1 \qquad X_2 = X_1 + 3.1 = 2+3 = 5$$

$$n = 2 \qquad X_3 = X_2 + 3.2 = 5+6 = 11$$

$$n = 3 \qquad X_4 = X_3 + 3.3 = 11+9 = 20$$

الحد الرابع $20 = X_4$

مثال (2)

اوجد اول خمسة حدود من المتتالية X_n حيث ان

$$X_n = (-1)^n$$

$$-1 , 1, -1, 1, -1 , \dots$$

⑧ هذا تطبيق

⑨

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
مفهومها	يكون الفرق بين الحد والحد الذي يليه عدد ثابت لكل حدود المتتالية ويسمى أساس المتتالية	حاصل قسمة الحد التالي على الحد الحالي مقدار ثابت لكل حدود المتتالية وهو أساس المتتالية
تعريف (1) بدلالة الحد السابق	لتكن $n=1,2,3$ ولتكن a عدداً ثابتاً غير صفري تسمى المتتالية X_n متتالية حسابية إذا كانت $X_{n+1} - X_n = a \quad (n \forall)$ ويسمى a أساس المتتالية	تسمى المتتالية X_n هندسية إذا كانت $X_{n+1} / X_n = a$ ويسمى $\underline{a}$ أساس المتتالية
حدها العام بدلالة أساسها والحد الأول	$X_n = X_1 + (n-1)a$	$X_n = a^{n-1} X_1$
مثال	$5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots$ حسابية حدها الأول $\underline{5}$ وأساسها $8-5=\underline{3}$	$3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots$ هندسية حدها الأول 3 وأساسها $12/6 = 6/3 = 2$
نظرية 1	إذا كانت X_n متتالية حسابية حدها الأول X_1 وأساسها a مجموع أول n من الحدود هو $S_n = \frac{n}{2}(X_1 + X_n)$	إذا كانت X_n متتالية هندسية حدها الأول X_1 وأساسها a فإن مجموع أول n من الحدود $S_n = \begin{cases} X_1 (a^n - 1)/(a-1) & a \neq 1 \\ n X_1 & a = 1 \end{cases}$

مثال: أوجد قيمة الحد العاشر من المتتالية

$(48, 24, 12, \ldots)$

الحل:-
المتتالية هندسية حدها الأول 48 وأساسها $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$

$$X_n = a^{n-1} \cdot X_1$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} \cdot 48 = \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cdot 48$$
$$= \frac{3}{32}$$

مثال:
متتالية حسابية حدها الأول 4 وأساسها 3
مجموع أول 9 حدود منها:

$$S_n = \frac{n}{2}(X_1 + X_n)$$
$$S_9 = \frac{9}{2}(X_1 + X_9)$$
$$X_n = X_1 + (n-1)a$$
$$X_9 = 4 + (9-1) \cdot 3$$
$$= 28$$
$$S_9 = \frac{9}{2}[4 + 28] = 144$$

أمثلة رقم 21 ، 22

11

الوحدة الثانية

المسببات الرياضية

تعريف (١)

القضية هي جملة خبرية نستطيع تحديد كونها صائبة أم خاطئة دون أن يختلف اثنان على تحديد الصواب من الخطأ فيها

مثال

① $3+7=15$

قضية F

② $17 > 13$

قضية T

③ $X+5=16$

ليست قضية لأننا لا نستطيع تحديد صواب الجملة قبل معرفة قيمة X. فمثلاً إذا كانت $X=11$ الجواب صحيح.

وإذا كانت $X=2$ فالجواب خاطئ.

④ $\sin(x)$

ليست قضية.

⇐ القضية لها إمكانيتين T أو F

جدول قيم الصواب للقضية p

p
T
F

بعض المراجع تضع 0 عن الخطأ

1 عن الصواب.

⇐ نفي القضية نستخدم الرمز $\sim p$

مثال

$p: 3+7=5$

$\sim p: 3+7 \neq 5$

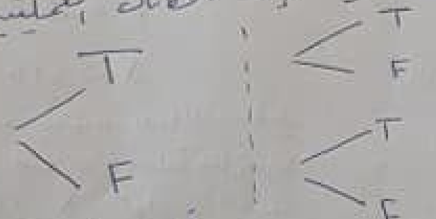
p	$\sim p$
T	F
F	T

٣ قاعدة العد:

إذا كان عدد إمكانات عملية معينة هو n_1 وعدد إمكانات عملية أخرى هو n_2 فإن عدد إمكانات العمليتين معاً

$$\boxed{n_1 \times n_2}$$

مثال: لو كان لدينا قضيتين P, Q وعدد إمكانات كل قضية هو ٢ فإن امكانات العمليتين هو ٢×٢=٤



قيم صواب P

قيم صواب Q

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

إمكانات قيم صواب P, Q هي
TT , TF , FT , FF

إذا كان لدينا ٣ قضايا وكل قضية لها إمكانيتين فإن قيم الصواب ٢×٢×٢ = ٨

٢

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

TTT
TTF
TFT
TFF
FTT
FTF
FFT
FFF

تعريف (2) لتكن P, Q قضيتين فإن الرمز $P \wedge Q$ ونقرأ (P, Q)
وجدول قيم صواب $P \wedge Q$ هو:

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تكون صحيحة في حالة واحدة فقط عندما تكون كل من P, Q صحيحة

أداة الربط AND
ورمزها $\wedge$

تعريف (3) لتكن P, Q قضيتين فإن الرمز $P \vee Q$ ونقرأ (P أو Q)
وجدول قيم صواب $P \vee Q$ هو:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تكون خاطئة في حالة واحدة فقط عندما تكون كل من P, Q خاطئة

أداة الفصل (OR)
ورمزها $\vee$

٤ تعريف (٩)

لتكن P, Q قضيتين فإن الرمز $P \Rightarrow Q$ قضية وجدول صدقها هو:

$P \Rightarrow Q$ قضية شرطية

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تكون خاطئة في حالة واحدة فقط عندما P صائبة بينما Q خاطئة

نستخدم القضية الشرطية في البرهان ولهذا فإن القضية $P \Rightarrow Q$ تسمى P المفروض أو المقدم وتسمى Q المطلوب أو النتيجة أو التالي.

أمثلة

① تقع يافا على البحر الأبيض المتوسط أو تقع القدس على نهر الأردن

لتكن P: تقع يافا على البحر الأبيض المتوسط وهي قضية صائبة

ولتكن Q: تقع القدس على نهر الأردن وهي قضية خاطئة

والجملة المعطاه على صيغة $P \vee Q$ ولهذا القضية صائبة T

② $6<8$ و $7=2$

لتكن P: $6<8$ وهي قضية T

Q: $7=2$ وهي قضية F

الجملة على صيغة $P \wedge Q$ إذن الجملة F

③ إذا كانت أريحا مدينة أثرية فإن البتراء مدينة أردنية

P:T   Q:T

$[P \Rightarrow Q]$ T

④ قاعدة العد:

إذا كان عدد إمكانات عملية معينة هو n_1 وعدد إمكانات عملية أخرى هو n_2 فإن عدد إمكانات العمليتين معا

$$\boxed{n_1 \times n_2}$$

مثال: لو كانت لدينا قضيتين P, Q وعدد إمكانات كل قضية هو 2 فإن الإمكانات لـ ...

⑤ تعريف (5)

تكون القضيتان متكافئتين إذا كانت لهما قيم الصواب نفسها في الإمكانات المتناظرة

مثال: هل القضية $P \Rightarrow Q \vee R$ تكافئ القضية $P \wedge \sim Q \Rightarrow R$؟

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Rightarrow Q \vee R$	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$	$(P \wedge \sim Q) \Rightarrow R$
T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	F	T

متكافئتين

مثال (4) ، (5) والتدريب (4)

إذا كان عدد إمكانات عملية معينة هو n_1 وعدد إمكانات عملية أخرى هو n_2 فإن عدد إمكانات العمليتين معاً

$$\boxed{n_1 \times n_2}$$

مثال لو كانت لدينا قضيتين P, Q وعدد إمكانات كل قضية هو 2 فإن الإمكانات للعمليتين هو $2 \times 2 = 4$

6

تعريف (6)

إذا كانت $P \Rightarrow Q$ قضية شرطية فإن

(أ) $Q \Rightarrow P$ تسمى معكوس $P \Rightarrow Q$

(ب) $\sim Q \Rightarrow \sim P$ تسمى المعاكس الإيجابي للقضية $P \Rightarrow Q$

(ج) $P \Leftrightarrow Q$ تسمى القضية ثنائية الشرط وتعني

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

وتقرأ $P \Leftrightarrow Q$ P إذا وفقط إذا Q

مثال (7)

كوّن جدول قيم الصواب للقضية ثنائية الشرط $P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

$P \Leftrightarrow Q$

القضية $P \Leftrightarrow Q$ صائبة إذا كانت قيم الصواب لكل من P, Q من نفس النوع إما صائبتين معاً أو خاطئتين معاً.

وتكون خاطئة إذا كانت قيم الصواب لكل من P, Q متعاكسة أي إحداهما صائبة والأخرى خاطئة

مثال

$P \vee (\sim P)$

P	$\sim P$	$P \vee (\sim P)$
T	F	T
F	T	T

دائماً صائبة

$P \wedge (\sim P)$

P	$\sim P$	$P \wedge (\sim P)$
T	F	F
F	T	F

دائماً خاطئة

(٧)

تعريف (٧)

١) تسمى القضية تحصيل حاصل إذا كانت صائبة دائماً.

٢) تسمى القضية تناقضاً إذا كانت خاطئة دائماً.

٣) تسمى القضية توافقاً إذا كانت خاطئة في بعض الحالات وصائبة في حالات أخرى.

الحقائق الأساسية المتعلقة بخواص العمليات المنطقية ص ٤٢

أسئلة التقويم الذاتي (١)

أ) $P \Leftrightarrow Q$ القضية توافقاً

ب)

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$P \wedge Q$	P	$P \wedge Q \Rightarrow P$
T	T	T
F	T	T
F	F	T
F	F	T

القضية تحصيل حاصل.

ج)

$$P \wedge (Q \wedge \sim P)$$

P	Q	$\sim P$	$Q \wedge \sim P$	$P \wedge (Q \wedge \sim P)$
T	T	F	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

القضية تناقضاً لأنها خاطئة دائماً.

1

المقاييس والعمليات المنطقية

لدينا مجموعة من الجمل الرياضية التي تظهر في صورة مقاييس أو مرسلات او عمليات منطقية مثل

1. يوجد عدد صحيح فردي
2. أي عدد صحيح هو عدد زوجي أو فردي .
3. العدد الأولي الزوجي الوحيد هو العدد 2 .
4. يوجد عدد واحد فقط أولي وزوجي .

باستخدام الرموز .

$O(X)$: X عدد صحيح فردي

$E(X)$: X عدد صحيح زوجي

$P(X)$: X عدد صحيح أولي

حـ المجموعة الشاملة في هذه الدالة هي مجموعة الاعداد الصحيحة

1. $(\exists X)O(X)$
2. $(\forall x)(E(X) \vee O(X))$
3. $(\forall x)\,[E(X) \cap P(X) \Rightarrow X=2]$
4. $(\exists! x)[P(X) \cap E(X)]$

نظرية (1)

1. نفي المقياس $(\exists x)\,P(x)$ هو $\forall x(\sim P(x))$

البرهان :

هناك حالتان يجب أخذهما بعين الاعتبار هما

أولاً : أفرض أن $\sim(\exists x)P(x)$ صائبة

إذن $\exists(x)P(x)$ خاطئة

إذن مهما كانت قيمة x فإن $P(x)$ خاطئة

أي مهما كانت قيمة x فإن $\sim P(x)$ صائبة .

وهذا يعني أن $(\forall x)(\sim P(x))$ صائبة

ب) نفي القياس $(\forall x)p(x)$ هو $(\exists x)(\sim p(x))$

~~البرهان~~

~~افرض أن $\sim[(\forall x)p(x)]$ خاطئة~~

ثانياً: افرض أن $\sim(\exists x)p(x)$ خاطئة

إذن $(\exists x)p(x)$ صائبة

إذن مهما تكن x فإن $\sim p(x)$ خاطئة

أي $(\forall x)(\sim p(x))$ صائبة

وهكذا فإن $\sim[\exists(x)p(x)]$ و $(\forall x)(\sim p(x))$ خاطئتين معاً

* إذا كانت $(\forall x)(\sim p(x))$ صائبة فإن $\sim[\exists(x)p(x)]$

وكذلك إذا كانت $(\forall x)(\sim p(x))$ خاطئة فإن $\sim[\exists(x)p(x)]$ خاطئة

$\boxed{ب}$ نفي القياس $(\forall x)p(x)$ هو $(\exists x)(\sim p(x))$

مثال (12)

أوجد جملة تكافئ $\sim(\exists x\,\forall y\,\forall z\,(x+z=3y))$

الحل: نلاحظ أن $\exists x\,\forall y\,\forall z\,(x+z=3y)$

تعني $\exists x\,[\forall y\,\forall z\,(x+z=3y)]$

إذن $\sim[\exists x\,\forall y\,\forall z\,(x+z=3y)]$

تكافئ $\rightarrow \boxed{\forall x\,[\sim(\forall y\,\forall z\,(x+z=3y))]}$

ومما كانت $\forall y\,\forall z\,(x+z=3y)$

تعني $\forall y\,(\forall z\,(x+z=3y))$

إذن $\sim(\forall y\,\forall z\,(x+z=3y))$

تكافئ $\exists y\,(\sim(\forall z\,(x+z=3y)))$

$\rightarrow \boxed{\exists y\,(\exists z\,(x+z\neq 3y))}$

وبناء على ما سبق الجملة المطلوبة تكافئ

$\forall x\,\exists y\,\exists z\,(x+z\neq 3y)$

تدريب ٩

أوجد $\sim[\forall x\, \forall y\, \exists z(x+z=y)]$

$$\exists x\,(\sim[\forall y\, \exists z\,(x+z=y)]$$

$$\exists x\,(\sim[\forall y\,(\exists z\,(x+z=y)]]$$

$$\exists x\, \exists y \sim(\exists z\,(x+z=y)]$$

$$\exists x\, \exists y\, \forall z\,(x+z\neq y)$$

الفرق بين مدلول المتغير x في كون الجمل الآتية

١) $P(x)$: المتغير x متغير حر

٢) $(\exists x)\, P(x)$ المتغير x مقيد بأداة الوجود $(\exists)$

٣) $(\forall x)\, P(x)$ المتغير x مقيد بأداة الكلية $(\forall)$

مدى المقياس هو ذلك الجزء من الجملة التي تكون فيها المتغيرات مقيدة بأداة الوجود أو أداة الكلية

مثال (١٢)

١) $(\forall x)\,\underbrace{(P(x) \Rightarrow (A \wedge B))}_{\text{مدى مقياس الكلية}}$

٣) $\underbrace{(\forall x\; P(x))}_{\text{مدى الكلية}} \Rightarrow \underbrace{\exists x\, Q(x))}_{\text{مدى مقياس الوجود}}$

٢) $(\forall (x)\,\underbrace{(P(x)) \vee Q(x))}_{\text{مدى مقياس الكلية}}$

٤) $(\forall x\,\underbrace{P(x)}_{\text{مدى مقياس الكلية}}) \vee Q(x)\}$

٥) $\exists x\; \underline{Q(x)} \wedge P(x)$

مقياس وجود $Q(x)$

---

٦) $\forall x\, \underbrace{P(x)} \vee Q(x)$

مقياس كلية $P(x)$

٧) $\exists x\,(Q(x) \cap P(x))$

$P(x) \cap P(x)$

مقياس وجود

٤ قاعدة ١

إذا ظهرت قضية في مدى المقياس مرتبطة عن الرابعة ٨,٧ فإنه بالإمكان حذفها من مدى المقياس .

مثال

الجملة $\forall x(A(x) \vee p)$ تكافئ $(\forall x A(x)) \vee p$

مدى مقياس الكلية في الجملة الأولى هو $A(x) \vee p$

مدى مقياس الكلية في الجملة الثانية هو $A(x)$

لفحص التكافؤ

الجملة $\forall x(A(x) \vee p)$ تكافئ

$(A(1) \vee p) \wedge (A(2) \vee p) \wedge (A(3) \vee p) ---$

$(A(1) \wedge A(2) \wedge A(3) ---) \vee p$

وهذه تكافئ $(\forall x A(x)) \vee p$

إذن الجملتين متكافئتين .

مثال ١٠ الجملة $\exists x(A(x) \vee p)$ تكافئ $(\exists x A(x)) \vee p$

نعرف أن مقياس الوجود بأداة الفصل $\vee$

$(A(1) \vee p) \vee (A(2) \vee p) \vee (A(3) \vee p) ---$

$(A(1) \vee A(2) \vee A(3) ---) \vee p$

$(\exists A(x)) \vee p$

هو المطلوب .

قاعدة $\boxed{2}$

تعامل المسورات التي متغيراتها غير مقيدة بالقياس معاملة القضايا الواردة في القاعدة (1)

مثال (16)

إذا كانت المجموعة الكلية للمتغير X هي مجموعة الأعداد الطبيعية

العبارة $\forall x\ (p(x) \vee Q(y))$

تكافئ $(\forall x\, p(x)) \vee Q(y)$

لأن $Q(y)$ مستقلة بعيدة عن المتغير x.

قاعدة (3)

$\boxed{1}$ المقياس الكلي $\forall$ يتوزع على عملية الربط المنطقية

أي أن

$\forall x\ (p(x) \wedge Q(x))$ تكافئ $(\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$

$\boxed{2}$ مقياس الوجود لا يتوزع على عملية الربط المنطقية

$\exists x\ (p(x) \wedge Q(x))$ لا تكافئ $(\exists x\, p(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$

لتوضيح صحة القاعدة

(1) إذا كانت المجموعة الشاملة لقيم x هي مجموعة الأعداد الصحيحة فإن

$\forall x\ (p(x) \wedge Q(x))$ تكافئ

$(p(1) \wedge Q(1)) \wedge (p(2) \wedge Q(2)) \wedge (p(3) \wedge Q(3)) \wedge \ldots$

$(p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge \ldots) \wedge (Q(1) \wedge Q(2) \wedge Q(3) \ldots)$ وهذه تكافئ

$(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$

6

ب) لتكن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة

$P(x)$: x عدد صحيح زوجي

$Q(x)$: x عدد صحيح فردي

لاحظ أن الجملة $\exists (p(x) \cap Q(x))$ خاطئة

لأنه لا يمكن أن يكون العدد فرديا وزوجيا في آن واحد

بينما الجملة $(\exists x\, p(x)) \cap (\exists x\, Q(x))$ جملة صحيحة

لأن $\exists x\, Q(x)$ صحيحة

$\exists x\, p(x)$ صحيحة

ومنه الجملة $\exists x (p(x) \cap Q(x))$ لا تكافئ الجملة $(\exists x\, p(x)) \cap (\exists x\, Q(x))$

قاعدة (4)

3) مقياس الوجود $\exists$ يتوزع على عملية الفصل المنطقية $\vee$

أي أن $\exists x (p(x) \vee Q(x))$ تكافئ $(\exists x\, p(x)) \cup \exists x\, Q(x)$

ب) لكن المقياس الكلي $\forall$ لا يتوزع على عملية الفصل $\vee$

أي أن $\forall x (p(x) \vee Q(x))$ لا تكافئ $(\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$

برهان قاعدة (4)

2) لاحظ أن $\sim(\exists x\, p(x) \vee Q(x))$

$\forall x (\sim p(x) \cap \sim Q(x))$

$(\forall x (\sim p(x))) \cap (\forall x (\sim Q(x)))$

$[\sim(\exists x\, p(x)) \cap (\sim \exists x\, Q(x))]$

$\sim[[\exists x\, p(x)] \vee [\exists x\, Q(x)]]$

ما تكافئ $\sim[\exists x (p(x) \cup Q(x))]$

ما تكافئ

$\exists x\, p(x) \cup Q(x)$ تكافئ $\exists x\, p(x) \vee Q(x)$

① 5. الاستنتاج المنطقي

النظرية : هي جملة رياضية

البرهان : هو أسلوب إثبات النظرية وهو استنتاج منطقي للمطلوب من المفروض

قاعدة التعويض :

تعويض المتساويات (المتكافئات) مكان مكافئتها أثناء البرهان .

مثلاً : إذا كانت P تكافئ Q يمكن وضع إحداهما مكان الأخرى .

قاعدة تحصيل حاصل

أي أن أي عبارة في البرهان يجب أن تعتمد على تحصيل حاصل (أي على جملة صحيحة دوماً)

أمثلة شائعة تستعمل في البرهان

① قاعدة الإضافة

$P \Rightarrow P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$	$P \Rightarrow P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

قاعدة التبسيط

$P \cap Q \Rightarrow P$

P	Q	$P \cap Q$	$P \cap Q \Rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

② قاعدة الاستنتاج المباشر

$(P \cap (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \cap (P \Rightarrow Q)$	$P \cap (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

④ قاعدة التعدي في القياس المنطقي

$(P \Rightarrow Q) \cap (Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \Rightarrow R$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \cap (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$\Rightarrow$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

⑥

$\sim Q \cap [P \Rightarrow Q] \Rightarrow \sim P$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$\sim Q \cap [P \Rightarrow Q]$	$\sim Q \cap [P \Rightarrow Q] \Rightarrow \sim P$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

③ التعبير بطريقة الاستنتاج المنطقي

مثال (١٦): ـ

عبر عن تحصيل الحاصل بأسلوب الاستنتاج المنطقي

$[(P \Rightarrow Q)] \cap (Q \Rightarrow R] \Rightarrow P \Rightarrow R$

الفرض $Q \Rightarrow R, P \Rightarrow Q$

الاستنتاج $P \Rightarrow R$

الصيغة الرمزية

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ \hline \therefore P \Rightarrow R \end{array}$$

← عبر عن $[\sim Q \cap (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow \sim P$

$$\begin{array}{l} \sim Q \\ P \Rightarrow Q \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$$

قاعدة التخصيص

① التخصيص من المقياس الكلي: إذا كانت $\forall x\, p(x)$ فإن

$$\begin{array}{l} P(c) \\ \forall x\, p(x) \\ \hline \therefore P(c) \end{array}$$

صحيحة حيث c عنصر معين من مجموعة التعريف.

② التخصيص من المقياس الوجودي: إذا كانت $\exists x\, p(x)$ فإن

$$\begin{array}{l} P(c) \\ \exists x\, p(x) \\ \hline \therefore P(c) \end{array}$$

لبعض c المناسبة من مجموعة التعريف.

مثال: المقياس $\forall x\, p(x)$ حيث $P(x)$: x أكبر من أو يساوي ١٠ مقياس خاطئ.

إذا أخذنا $c=5$ فإن $P(c)$ تعني أن 5 أكبر من أو يساوي ١٠ خاطئة.

← المقياس $\exists x\, p(x)$ حيث $p(x)$: x عدد فردي مقياس صائب.

نختار c تشكل صائب ومناسب بحيث تكون $P(c)$ صائبة.

مثلاً $c=5$ أو $c=7$

③ التعبير بطريقة الاستنتاج المنطقي

مثال (١٦):

عبر عن تحصيل الحاصل بأسلوب الاستنتاج المنطقي

$[(P \Rightarrow Q)] \cap (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow P \Rightarrow R$

الفرض: $Q \Rightarrow R,\ P \Rightarrow Q$

الاستنتاج: $P \Rightarrow R$

الصيغة الرياضية

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ \hline \therefore P \Rightarrow R \end{array}$$

← عبر عن $[\sim Q \cap (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow \sim P$

$$\begin{array}{l} \sim Q \\ P \Rightarrow Q \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$$

قاعدة التخصيص

① التخصيص من المقياس الكلي: إذا كانت $\forall x\, p(x)$ فإن

$$\begin{array}{c} p(c) \\ \forall x\, p(x) \\ \hline \therefore p(c) \end{array}$$

صحيحة حيث c عنصر معين من مجموعة التعريف.

② التخصيص من المقياس الوجودي: إذا كانت $\exists x\, p(x)$ فإن

$$\begin{array}{c} p(c) \\ \exists x\, p(x) \\ \hline \therefore p(c) \end{array}$$

لبعض c المناسبة من مجموعة التعريف.

مثال: المقياس $\forall x\, p(x)$ حيث $p(x)$: x أكبر من أو يساوي 1 مقياس صادق.

إذا أخذنا $\underline{c=5}$ فإن $p(c)$ تعني أن 5 أكبر من أو يساوي 1 صادقة.

⇐ المقياس $\exists x\, p(x)$ حيث $p(x)$ x عدد أولي مقياس صادق.

نختار c بشكل صادق ومناسب بحيث تكون $p(c)$ صادقة.

مثلاً $c=5$ أو $c=7$

عدة التعميم :
التعميم الى الخاص الكلي

إذا كانت $p(x)$ صحيحة لجميع قيم x المحتملة فإن $\forall x\, p(x)$ صحيحة أي

$$\frac{p(x)}{\therefore \forall x\, p(x)}$$

ب) التعميم ذي العكس الجزئي

إذا كانت $p(c)$ صحيحة لعنصر معين c فإن $\exists x\, p(x)$ صحيحة أي

$$\frac{p(c)}{\therefore \exists x\, p(x)}$$

حتى يكون الاستنتاج منطقي يجب أن تكون قيم الصواب صادقة كلها

مثال على استنتاج منطقي

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \sim R \Rightarrow \sim Q \\ \hline \therefore \sim R \Rightarrow \sim P \end{array}$$

P	Q	R	P⇒Q	~R	~Q	~R⇒~Q	(P⇒Q)∧(~R⇒~Q)	~P
T	T	T	T	F	F	T	T	F
T	T	F	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

~R⇒~P	(P⇒Q∧~R⇒~Q)⇒~R⇒~P
T	T
F	T
T	T
F	T
T	T
T	T
T	T
T	T

ناتج
النتيجة تحمل كل قيم الصواب T

مثال على استنتاج غير منطقي

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \\ \hline \therefore P \end{array}$$

$[(P \Rightarrow Q) \wedge Q] \rightarrow P$

P	Q	P⇒Q	(P⇒Q)∧Q	((P⇒Q)∧Q)⇒P
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

النتيجة ليست تحمل صواب كل
∴ الاستنتاج المعطى غير منطقي

6. طرق البرهنة

١) برهان خطأ قضية
بإعطاء مثال مضاد ولكن برهان صحة قضية
لا يتم بإعطاء الملايين من الأمثلة

٢) برهان الوجود

٣) برهان الحالات المنتهية يتحقق بإثبات صحة جميع الحالات

٤) برهان مباشر الاشتقاق من المفروض إلى المطلوب بأسلوب منطقي سليم.

٥) برهان غير مباشر
أما بالعكس النقيض أو بأسلوب التناقض.

القضايا التي نهتم بها في الرياضيات تظهر غالبا على شكل قضايا مشروطة من النوع $P \Rightarrow Q$

رقم الحالة	$P \Rightarrow Q$	Q	P
١	T	T	T
٢	F	F	T
٣	T	T	F
٤	T	F	F

١) الحالة الأولى: هي مبدأ البرهان المباشر
حيث يكون المفروض صحيح والمطلوب إثبات صحة Q

٢) الحالة الثالثة والرابعة: المفروض P خاطئا
تسمى الحالة بحالة البرهان الفارغ بسبب فراغ مجموعة الحالات
التي يكون فيها P صحيحة

٣) الحالة الثانية البرهان التافه لأنه لا يحتاج إلى التأكد
من أن P خاطئة.

المثال المضاد (المعاكس) لإثبات خطأ جملة معطاة

مثال

هل العدد n^2+n+41 عدداً أولي لكل عدد صحيح n؟

عند $n=40$

$$n^2+n+41 = 40\times40+40+41$$
$$= 40\times40+40+40+1$$
$$= 40(40+1)+41$$
$$= 41\times41$$

وهو عدد غير أولي.

هناك العديد من الأرقام إذا تم تعويضها يكون العدد الناتج أولي.

عند $n = 7 \leftarrow 97$

$n = 6 \leftarrow 83$

$n = 3 \leftarrow 53$

وهذا لا يعني صحة العبارة

برهن عدم صحة العبارة

$\forall n \in N, \frac{1}{n} < 0.01$

عند $n=2$

$\frac{1}{2} = 0.5 > 0.01$

برهن عدم صحة القضية

كل عدد أولي فردي

العدد 2 عدد أولي وزوجي

إذن القضية خاطئة

البرهان المباشر

مثال: لتكن n عدداً فردياً و m عدداً زوجياً

هل $n+m$ عدد فردي أم زوجي

العدد الفردي على صيغة $n=2k_1+1$

حيث k_1 عدد صحيح.

العدد الزوجي على صيغة $m=2k_2$

حيث k_2 عدد صحيح

$$n+m = 2k_1+1+2k_2$$
$$= 2(k_1+k_2)+1$$
$$= 2k+1$$

هو عدد فردي

المثال المضاد (العكسي) لإثبات خطأ جملة معطاة.

مثال

هل العدد n^2+n+41 عدد أولي لكل عدد صحيح n

عند $n=40$

$$n^2+n+41 = 40\times 40+40+41$$
$$= 40\times 40+40+40+1$$
$$= 40(40+1)+41$$
$$= 41\times 41$$

هو عدد غير أولي.

هناك العديد من الأرقام لو تم تعويضها يكون العدد الناتج أولي.

عند $n=7 \leftarrow 97$

$n=6 \leftarrow 83$

$n=3 \leftarrow 53$

وهذا لا يتعلق بصحة العبارة

برهن عدم صحة العبارة p

$\forall n\in N,\ \frac{1}{n} < 0.01$

عند $n=2$

$$\frac{1}{2} = 0.5 > 0.01$$

برهن عدم صحة القضية

كل عدد أولي فردي

العدد 2 عدد أولي زوجي

إذن القضية خاطئة

البرهان المباشر

مثال: لتكن n عدداً فردياً و m عدداً زوجياً

هل $n+m$ عدد فردي أم زوجي

العدد الفردي على صيغة $n=2k_1+1$

حيث k_1 عدد صحيح.

العدد الزوجي على صيغة $m=2k_2$

حيث k_2 عدد صحيح

$$n+m = 2k_1+1+2k_2$$
$$= 2(k_1+k_2)+1$$
$$= 2k+1$$

هو عدد فردي

تابع البرهان المباشر:

مثال (23)

برهن أنه إذا كان n عدد أولي فإن $n+7$ عدد غير أولي

المفروض: n عدد أولي

المطلوب: $n+7$ عدد غير أولي

البرهان:

ملاحظات: العدد الأولي هو العدد الذي يقبل القسمة على نفسه والواحد فقط

لإثبات أن $n+7$ عدد غير أولي يجب أن نجد قاسم غير 1 له

جميع الأعداد الأولية فردية ماعدا ٢.

عندما n أولياً وزوجياً

فإن $n=2$

ومنه $n+7 = 2+7 = 9$ وهو عدد غير أولي

عندما n أولياً فردياً

n أولي فردي و 7 عدد أولي فردي

مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي

ومنه $n+7$ هو عدد زوجي أي ليس أوليا

تدريب 17

برهن أنه لكل عدد صحيح n يكون $n(n+1)$ قابلا للقسمة على 2

إذا كان العدد n زوجي أي على صيغة $2k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

فإن $2k(2k+1)$ يقبل القسمة على 2

إذا كان العدد n فردي أي على صيغة $2k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه $(2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)(2k+2)$

$= \underline{2}(k+1)(2k+1)$

يقبل القسمة على 2 .

٤ ~~[illegible]~~

مثال (24)

لتكن x, y عددين حقيقيين فإننا نقول ان $x<y$ إذا وجد عدد حقيقي موجب r بحيث ان $x+r=y$

البرهان: إذا كانت x, y, z أعداد حقيقية $x<y$ و $y<z$ فإن $x<z$

بتطبيق تعريف $>$ على كل منهم

$$x<y \Rightarrow \exists r_1>0 : x+r_1=y \quad (1)$$

$$y<z \Rightarrow \exists r_2>0 : y+r_2=z \quad (2)$$

بجمع طرفي المعادلة

$$\exists r_1>0, \exists r_2>0 : (x+r_1)+(y+r_2)=y+z$$

$$x+(r_1+r_2)=z$$

لهذا يوجد $r=r_1+r_2>0$ بحيث ان $x+r=z$

لهذا فإن $x<z$ وهو المطلوب.

البرهان غير المباشر

1 طريقة المعاكس الإيجابي

فإذا أثبتنا صحة $\sim Q \Rightarrow \sim P$ تكون العبارة $P \Rightarrow Q$ صحيحة

مثال :

برهن أنه إذا كان n^2 عدداً فردياً فإن n عدد فردي $n \in \mathbb{N}$

البرهان

المفروض : n^2 عدد فردي P

المطلوب : n عدد فردي Q

المطلوب على الصحة $P \Rightarrow Q$

باستخدام المعاكس الإيجابي

المفروض : n عدد زوجي $\sim Q$

$\sim P$: n^2 عدد زوجي

n عدد طبيعي زوجي

فإنه يوجد عدد طبيعي k بحيث $n = 2k$

$n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ وهو عدد زوجي

أثبتنا صحة العبارة $\sim Q \Rightarrow \sim P$ إذن العبارة $P \Rightarrow Q$ صحيحة.

2 طريقة البرهان بالتناقض.

1 $(P \wedge \sim Q) \Rightarrow \sim P$ وهذا يعني الاعتماد على المفروض P وعكس المطلوب $\sim Q$ لنتوصل إلى جملة تناقض المفروض P.

2 $(P \wedge \sim Q) \Rightarrow (R \wedge \sim R)$

أي الاعتماد على المفروض P وعكس المطلوب إلى جملة تناقض نفسها

مثال (26)

برهن صحة العبارة التالية حيث n أي عدد صحيح:
إذا لم يوجد عدد صحيح بين 0 و 1 فإنه لا يوجد عدد صحيح بين n و n+1 .

الحل:

المفروض: لا يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث $P: 0 < m < 1$

المطلوب: لا يوجد $r \in \mathbb{Z}$ بحيث $Q: n < r < n+1$

الجملة المطلوبة من نوع $P \Rightarrow Q$

لنحاول استخدام البرهان غير المباشر.
نفرض عكس المطلوب

نفرض $\sim Q$: يوجد عدد صحيح بحيث $n < r < n+1$

نطرح n من كافة الأطراف

$\exists r \in \mathbb{Z}: 0 < r - n < 1$

ولكن $m = r - n \in \mathbb{Z}$

إذن يوجد عدد صحيح m بين 0 ، 1 أي توصلنا إلى $\sim P$

مثال (27) برهن أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي.

الحل

المفروض: $\sqrt{2}$ عدد حقيقي P

المطلوب: $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي Q

نفرض أن $\sqrt{2}$ عدد نسبي

$\therefore \frac{m}{n} = \sqrt{2}$ حيث $m, n \in \mathbb{Z}$

نفرض القاسم المشترك بين m,n هو (1) وبتربيع الطرفين

$\frac{m^2}{n^2} = 2$

$m^2 = 2n^2$

أي أن العدد m^2 يقبل القسمة على 2 ومنه m عدد زوجي

إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $m=2k$

وهكذا $2n^2=m^2=4k^2$ ومنه $2n^2=4k^2 \Rightarrow \boxed{n^2=2k^2}$

أي أن n^2 عدد زوجي

وهذا تناقض مع زعمنا أن القاسم المشترك الأكبر لـ m و n = 1

فبالتالي n و m عددين زوجيين والقاسم المشترك ليس واحد

وهنا نحن توصلنا إلى $R \wedge \sim R$

حيث R هي العبارة m, n عددين القاسم المشترك الأكبر لهما 1.

برهن صحة أنه إذا كان x عدداً صحيحاً موجباً فإن

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$$

بالتناقض

$$\frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x+2}$$

x عدد موجب

$\therefore$ $x+1$ و $x+2$ عددين موجبين

$$x(x+2) \geq (x+1)(x+1)$$

$$x(x+2) \geq x^2+2x+1 = x(x+2)+1$$

$$0 \geq 1$$

وهذا تناقض.
