اسم المقرر: التفاضل والتكامل 2	بسم الله الرحمن الرحيم	اسم الطالب: ....
رقم المقرر: 5261	جامعة القدس المفتوحة	رقم الطالب: ....
مدة الامتحان: ساعتان	**إجابة الامتحان النهائي**	تاريخ الامتحان: ..../......../.........
عدد الاسئلة: 7	**للفصل الثاني "1132"**	
	2014/2013	**-- نظري --**

جدول رقم (1)

اجابة السؤال رقم (1) من نوع (أجب بنعم أو لا) او (√ او×) (30 علامة)(2 علامات لكل فرع)

الفرع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الصحيحه	نعم	لا	لا	نعم	لا	لا	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم	لا	لا	نعم	لا					

جدول رقم (2)

اجابة السؤال رقم ( ) من نوع (اختيار من متعدد) (علامة)(علامات لكل فرع)

الفرع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الصحيحه																				

جدول رقم (3)

اجابة السؤال رقم ( ) من نوع (وفق بين عمودين) (علامة)(علامات لكل فرع)

الفرع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
الصحيحه																				

السؤال الثاني: **(14 علامة)**

اوجد ناتج التكاملات التالية

أ. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$ **(7 علامة)**

الحل:

باستخدام الكسور الجزيئية

$$\frac{1}{4x^2-9}=\frac{1}{(2x+3)(2x-3)}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{2x-3}=\frac{A(2x-3)+B(2x+3)}{(2x+3)(2x-3)}$$ **2 علامة**

$$1=A(2x-3)+B(2x+3)$$

بوضع x=3/2 ينتج $1=A\left(2\frac{3}{2}-3\right)+B\left(2\frac{3}{2}+3\right)\Rightarrow B=\frac{1}{6}$ **1 علامة**

$$let\ x=\frac{-3}{2}\Rightarrow 1=A\left(2\frac{-3}{2}-3\right)+B\left(2\frac{-3}{2}+3\right)\Rightarrow A=\frac{-1}{6}$$ **1 علامة**

$$\int\frac{dx}{4x^2-9}=-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{2x+3}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{2x-3}=\frac{-1}{12}\ln(2x+3)+\frac{1}{12}\ln(2x-3)+c=\frac{1}{12}\ln\frac{2x-3}{2x+3}+c$$ **3 علامة**

ب. $\int_0^{\infty}\frac{e^x}{1+e^x}dx$ **(7علامة)**

الحل: التكامل المطلوب معتل بحده الاعلى اللانهائي **1 علامة**

$$let\ u=1+e^{x},\therefore du=e^{x}dx\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{u1}^{b}\frac{du}{u}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln u\Big|_{u1}^{b}=\lim_{b\to\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)\Big|_0^{b}=\lim_{b\to\infty}\left[\left(1+e^{b}\right)-\left(1+e^{1}\right)\right]=\lim_{b\to\infty}\left(e^{b}-e\right)=\infty$$

تكامل معتل تباعدي 6 علامة

السؤال الثالث: (14 علامة)

أ. اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n}}$ (ص 112) (7 علامة)

الحل: باستخدام اختبار النسبة باعتبار ان حدود المتسلسلة موجبة 1 علامة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^{n}}{n!(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(n+1)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}<1$$ 5 علامة

اذا المتسلسلة متقاربة 1 علامة

ب. اثبت ان المتسلسلة التالية متقاربة تقاربا مشروطا $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ (ص120) (7 علامة)

الحل: اولا نثبت ان $\sum_{n=3}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}\right|$ متباعدة 1 علامة

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}\right|=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}\Rightarrow\because\int_3^{\infty}\frac{\ln n}{n}dn=(\ln n)^{2}\Big|_3^{\infty}=\infty$$ 2 علامة

اذا المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ ليست متقاربة تقاربا مطلقا

ثانيا نثبت تقارب المتسلسلة حسب نظرية ليبنتز

- لاثبات التناقص $f'(x)=\frac{1-\ln n}{n^{2}}<0$ لان $\ln n>1,\forall n\geq 3$ 1 علامة

- $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1}=0$ 1 علامة

من اولا وثانيا تتقارب المتسلسلة تقاربا مشروطا 2 علامة

السؤال الرابع: (14 علامة)

أ. اوجد فترة التقارب لمتسلسلة القوة : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n}}{n^{2}}$ (ص 150)

الحل: باستخدام اختبار الجذر النوني $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-4)^{n}}{n^{2}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-4|}{\sqrt[n]{n^{2}}}=|x-4|<1$ 4 علامة

$$\Leftrightarrow -1<x-4<1\Leftrightarrow x\in(3,5)$$

عند x=5 تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ متقاربة (اختبار p) 1 علامة

عند x=3 تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}$ متقاربة (نظرية ليبنتز) 1 علامة

اذا فترة التقارب $[3,5]$. 1 علامة\ر

ب. اوجد مفكوك ماكلورين للاقتران $f(x)=(1+x)^{5}$ (7 علامة)

الحل: نوجد مفكوك ماكلورين للاقترانين $f(x)=(1+x)^{5}$ من خلال الصيغة العامة للمفكوك على الصورة التالية:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^{2}}{2!}f''(0)+\frac{x^{3}}{3!}f'''(0)+\dots$$

$$f(0)=(1+0)^5 \Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=5(1+x)^4 \Rightarrow f'(0)=5(1+0)^4=5$$
$$f''(x)=5.4(1+x)^3 \Rightarrow f''(0)=5.4(1+0)^3=5.4$$
الاقتران: $f'''(x)=5.4.3(1+x)^2 \Rightarrow f'''(0)=5.4.3(1+0)^2=5.4.3$ 5 علامة
$$f''''(x)=5.4.3.2(1+x)^1 \Rightarrow f''''(0)=5.4.3.2(1+0)^1=5.4.3.2$$
$$f^{(5)}(x)=5.4.3.2.1(1+x)^0 \Rightarrow f^{(5)}(0)=5.4.3.2.1$$

$f(x)=1+5.x+5.4.\frac{x^2}{2!}+5.4.3\frac{x^3}{3!}+5.4.3.2\frac{x^4}{4!}+5.4.3.2.1\frac{x^5}{5!}$ 2 علامة

السؤال الخامس: **(14 علامة)**

أ. اثبت ان الاقتران $f(x,y)=2x-x^2-y^2$ **يمتلك قيمة عظمى وحيدة في مجاله واوجدها. (7 علامة)**

الحل: $f_x=2-2x, f_y=-2y$ **1 علامة**

القيم الحرجة $f_x=f_y=0 \Rightarrow x=1, y=0$ **1 علامة**

$f_{xx}=-2, f_{yy}=-2, f_{xy}=0=f_{yx}$ **2 علامة**

$f_{xx}(1,0)=-2<0, D(1,0)=-2*-2-0=4>0$ **2 علامة**

للاقتران قيمة عظمى عند النقطة $(1,0)$ **1 علامة**

ب. اوجد المشتقة المتجهة للاقتران $f(x,y,z)=e^x\cos(yz)$ **عند النقطة** $(0,0,\pi)$ **وفي اتجاه** **(7 علامة)**
المتجه $u=2i-j+k$.

الحل: اولا نوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجه u: $u^*=\frac{2i-j+k}{\|u\|}=\frac{2i-j+k}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{2}{\sqrt6}i-\frac{1}{\sqrt6}j+\frac{1}{\sqrt6}k$

2 علامة

ثانيا: نوجد المشتقات الجزئية للاقتران عند النقطة المحددة **3 علامة**

$$f_x(x,y,z)_{(0,0,\pi)}=e^x\cos(yz)\Big|_{(0,0,\pi)}=1,$$
$$f_y(x,y,z)_{(0,0,\pi)}=-ze^x\sin(yz)\Big|_{(0,0,\pi)}=0$$
$$f_z(x,y,z)_{(0,0,\pi)}=-ye^x\sin(yz)\Big|_{(0,0,\pi)}=0$$

ثالثا نحدد قيمة المشتقة المتجهة عند النقطة من القانون **2 علامة**
$$f_{u^*}(0,0,\pi)=\nabla f\,.u^*$$
$$=1.\frac{2}{\sqrt6}-0.\frac{1}{\sqrt6}+0.\frac{1}{\sqrt6}=\frac{2}{\sqrt6}$$

اجب عن احد السؤالين التاليين

السؤال السادس: **(14 علامة)**

أ. احسب ناتج التكامل $\iint_R (3x+4y^2)dA$ **حيث R تقع في النصف العلوي للدائرتين** $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4.$ **(7ع)**

الحل: $R=\{(x,y)\,|\,y\ge 0,\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$ **1 علامة**

$=\{(r,\theta)\,|\,1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi\}$ **1 علامة**

$\iint_R(3x+4y^2)dA=\int_0^\pi\int_1^2(3r\cos\theta+4r^2\sin^2\theta)rdrd\theta$ **1 علامة**

$=\int_0^\pi\int_1^2(3r^2\cos\theta+4r^3\sin^2\theta)drd\theta$ **1 علامة**

$=\int_0^\pi\left[r^3\cos\theta+r^4\sin^2\theta\right]_{r=1}^{r=2}d\theta=\int_0^\pi\left[7\cos\theta+15\sin^2\theta\right]d\theta$ **1 علامة**

$$= \int_0^{\pi} \left[7\cos\theta + \frac{15}{2}(1-\cos 2\theta) \right] d\theta$$ **1 علامة**

$$= 7\sin\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\sin 2\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}$$ **1 علامة**

أ. احسب التكامل الثلاثي للاقتران $f(x,y,z) = xyz^2$ **في المنطقة المحددة بالمتغيرات التالية:** **(7 علامة)**
$D = \{0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$.

الحل: نقوم بكتابة التكامل على الصورة التالية: $\iiint_D xyz^2 dv$ **1 علامة**

$$\iiint_D xyz^2 dv = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\int_{0}^{1} xyz^2 dx dz dy = \int_{0}^{1}\int_{3x}^{3} \left[\frac{x^2yz^2}{2} \right]_0^1 dz dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3} yz^2 dz dy = \frac{1}{6}\int_{-1}^{2} \left[yz^3 \right]_0^3 dx$$ **6 علامة**

$$= \frac{9}{2}\int_{-1}^{2} y dy = \frac{9}{4} y^2 \Big|_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$$

السؤال السابع: **(14 علامة)**

أ. باستخدام الاحداثيات القطبية احسب ناتج التكامل $\iint_D (x+y) dA$ **حيث المنطقة**
$$D = \{(x,y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4; x \le 0\}$$

الحل :نحول التكامل الى الصيغة القطبية : $\iint_D (r\cos\theta + r\sin\theta) dA$ **حيث**
$$D = \{(r,\theta): 1 \le r \le 2; \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2\}$$ **2 علامة**

$$\iint_D (r\cos\theta + r\sin\theta) dA = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{1}^{2} (r\cos\theta + r\sin\theta) r dr d\theta$$

التكامل $$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos\theta + \sin\theta) \frac{r^3}{3}\Big|_1^2 d\theta = \frac{7}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi 2} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta$$ **5 علامة**

$$\frac{7}{3}(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -14/3$$
$=$

ب. اوجد الحجم المحصور بين السطحين $z = 0, z = x^2 + y^2$ **والمحدود بالمنحنيات** $x = 0, y = 0, x + y = 1$

الحل: بايجاد منطقة التكامل في المستوى XY $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$ **1 علامة**

ليصبح الحجم على الصورة : $v = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x^2+y^2} dv$ **2 علامة**

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x^2+y^2} dz dy dx = \int_0^1\int_0^{1-x} (x^2+y^2) dy dx = \int_0^1 (x^2y + y^3/3)\Big|_0^{1-x} dx$$ **2 علامة**

$$= \int_0^1 x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3 dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \right)\Big|_0^1 = 1/3 - 1/4 + 1/12 = 1/6$$ 2 علامة

انتهت الإجابة