



## اسم المادة : رياضيات منفصلة

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

[acadecub.com](http://acadecub.com)

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفير وتجميع **كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة** للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط **هنا**

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء 

# أسئلة متنوعة و ملاحظات

الوحدتين الرابعة والخامسة

العلاقات الثنائية & الإفرانات

رياضيات منفصلة

جامعة القدس المفتوحة

# العلاقات

إذا كانت  $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 12\}$

وكانت  $R$  علاقة معرفة على  $A$  حسب القاعدة  $aRb$

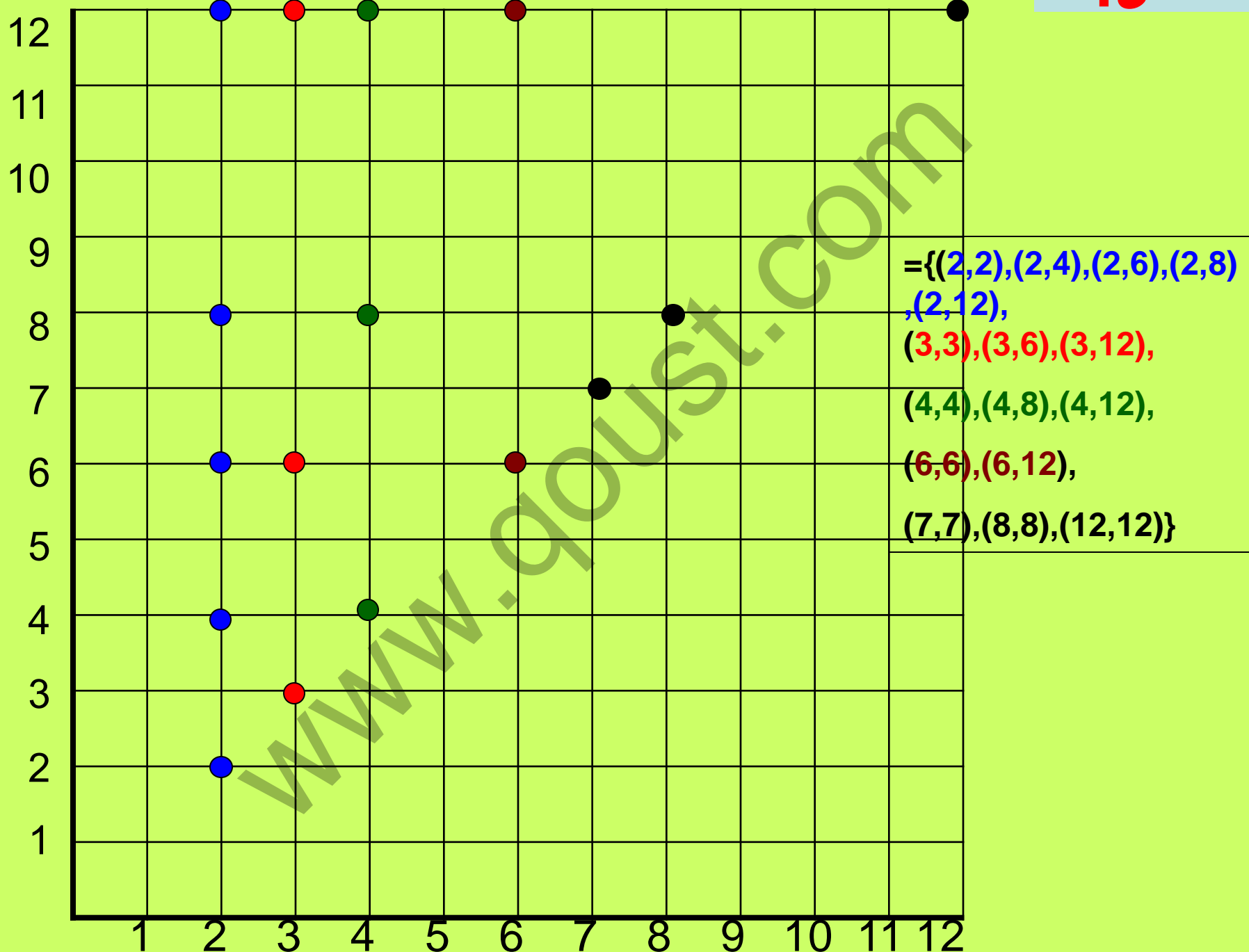
إذا كانت  $a$  تقسم العنصر  $b$   $(a|b)$

**أولاً: عبر عن  $R$  كمجموعة أزواج مرتبة؟**

**الحل:**  $R$  على شكل أزواج مرتبة تكون على الشكل التالي:

$$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), \\ (3,3), (3,6), (3,12), (4,4), (4,8), (4,12), (6,6), (6,12), \\ (7,7), (8,8), (12,12)\}$$

**ثانياً: عبر عن  $R$  على المستوى الديكارتي؟**



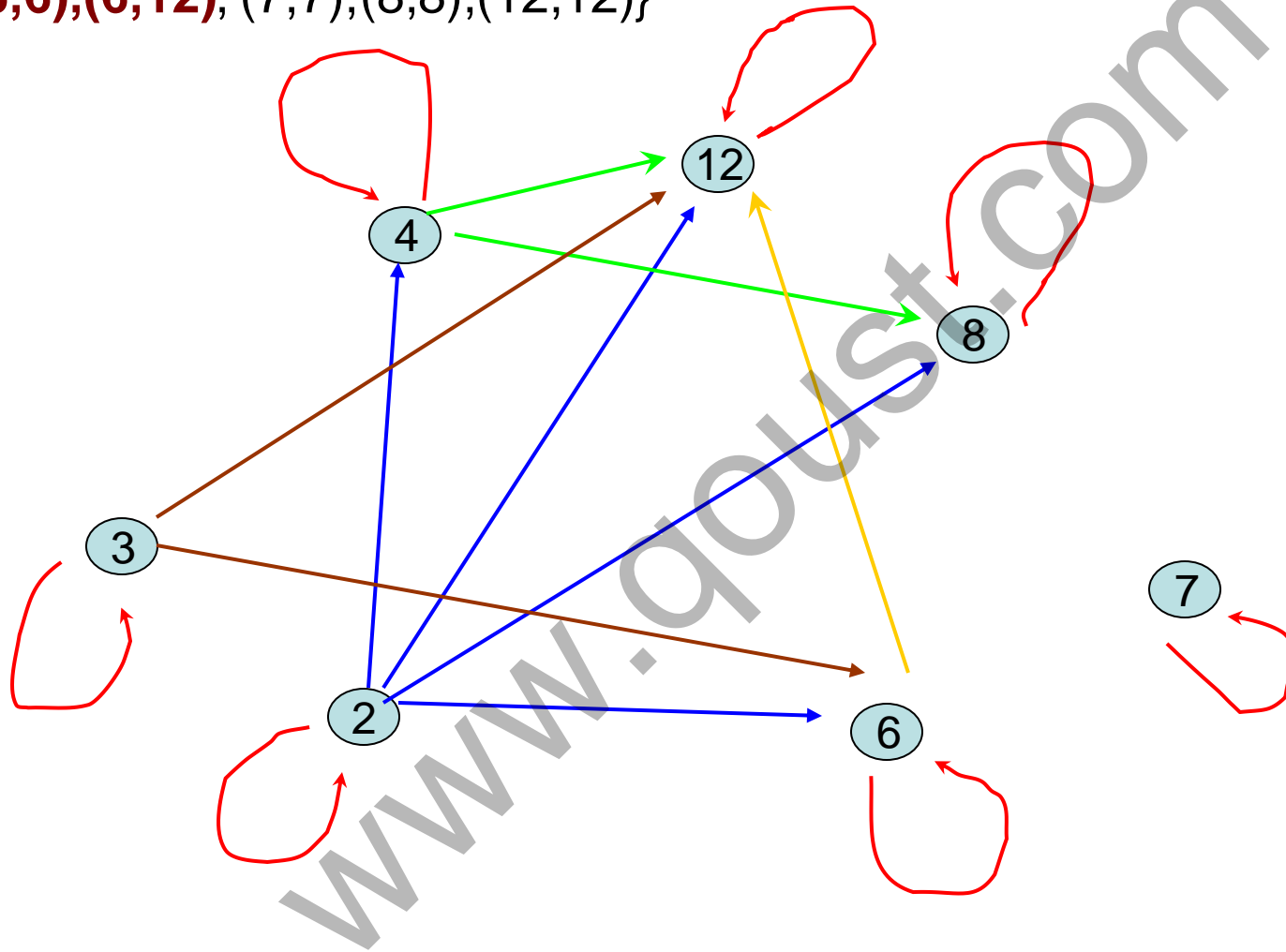
## ثالثاً: أكتب مصفوفة التجاور التي تمثل العلاقة ؟R Adjacency Matrix

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (3,3), (3,6), (3,12), (4,4), (4,8), (4,12), (6,6), (6,12), (7,7), (8,8), (12,12)\}$

A	2	3	4	6	7	8	12
2	1	0	1	1	0	1	1
3	0	1	0	1	0	0	1
4	0	0	1	0	0	1	1
6	0	0	0	1	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	1

## رابعاً: أكتب مخططاً سهمياً يمثل العلاقة R

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (3,3), (3,6), (3,12), (4,4), (4,8), (4,12), (6,6), (6,12), (7,7), (8,8), (12,12)\}$



## خامسا: تحقق من خاصية (الانعكاس، التماثل، التعدي، تضاد التماثل) للعلاقة R

$$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (3,3), (3,6), (3,12), (4,4), (4,8), (4,12), (6,6), (6,12), (7,7), (8,8), (12,12)\}$$

**الانعكاس:** يوجد  $(a,a)$  في العلاقة R لكل  $a \in A$

$$A = \{2,3,4,6,7,8,12\} \text{ حيث}$$

أي يوجد:  $(2,2)$   $(3,3)$   $(4,4)$   $(6,6)$   $(7,7)$ ,  $(8,8)$ ,  $(12,12)$

**التماثل:** يوجد  $(a,b)$  في العلاقة R بينما لا يوجد  $(b,a)$  إلا إذا كانت  $a=b$

مثال : يوجد  $(2,4)$  بينما لا يوجد  $(4,2)$  أي ان 2 تقسم 4 ..... وأن 4 لا تقسم 2

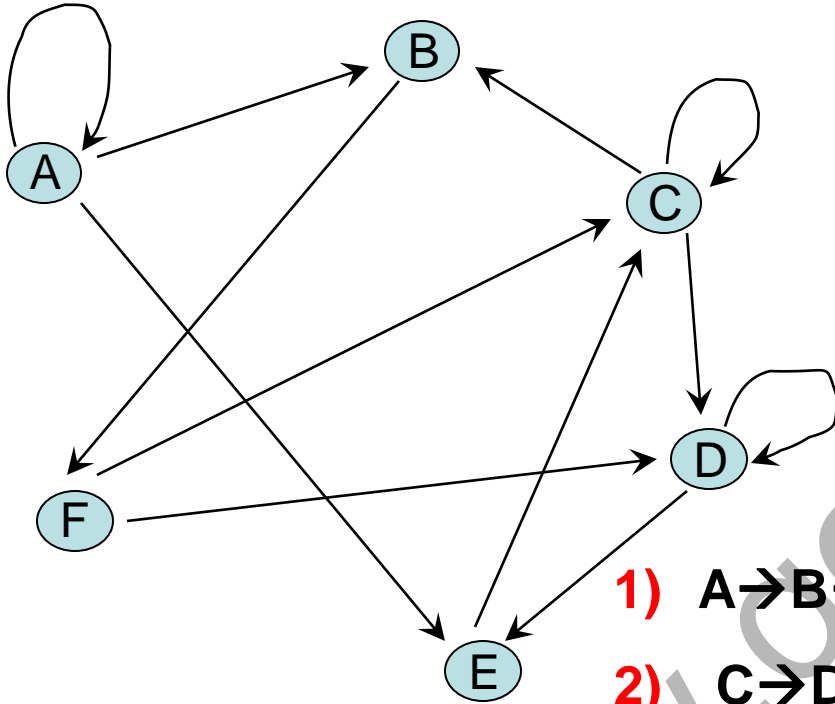
**التعدي:** لا يوجد ما ينفي شرط التعدي : انه إذا وجد  $\{(aRb) \text{ و } (bRc)\}$  فيجب ان

يوجد في العلاقة  $(aRc)$ : مثال: يوجد  $(2,3)$  و  $(3,6)$  فإنه يوجد فعلا  $(2,6)$

**تضاد التماثل:** إذا وجد  $(a,b)$  في العلاقة R ... فإنه لا يوجد  $(b,a)$  إلا إذا كانت

$b=a$  فقط ، وهذا يتحقق فعلا. وعليه تحقق خاصية تضاد التماثل.

## أدرس المخطط السهمي التالي ثم اجب عن الأسئلة التي تلي:-



1- أذكر مساراً بسيطاً؟

2- أذكر مسارين دائريين مختلفين؟

3- هل المخطط مترابط؟

4- هل المخطط السهمي تام؟

5- هل يحقق خاص الانعكاس؟ التماثل؟ التعدي؟

Reflexive; symmetry; Transitive

1)  $A \rightarrow B \rightarrow F ; D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow F$

2)  $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C ; C \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C$

3) نعم، حيث هناك مساراً بين أي رأسين فيه بغض النظر عن اتجاه الأضلاع

4) لا، لأنه لا يوجد اتصال مباشر بين النقطتين F, E أو A, F ...

5) (الانعكاس، لا) ، التماثل، لا) لماذا؟

التعدي: يوجد  $A \rightarrow B$  ويوجد  $B \rightarrow F$  ، لا يوجد  $A \rightarrow F$

إذا كانت الرؤوس التي يمر بها  
تختلف عن بعضها باستثناء  
نقطتي البداية والنهاية

إذا كان رأس البداية  
هو نفسه رأس  
النهاية



**سؤال: إذا كانت  $A=\{2,4,6,8,12,16\}$**

**وإذا كانت العلاقة  $R$  معرفة حسب القاعدة  $aRb$  بحيث:  $b > (a/2)$**   
**فهل تحقق العلاقة  $R$  خاصية (الانعكاس، التماثل، التعدي، تضاد التماثل)؟**

**نجد أولاً الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة  $R$  أعلاه بحيث  $b > (a/2)$**   
**لكل  $(a,b)$ . أي أن المسقط الثاني أكبر من نصف المسقط الأول:-**

$\{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,12), (2,16), (4,4), (4,6), (4,8), (4,12), (4,16),$   
 $(6,4), (6,6), (6,8), (6,12), (6,16), (8,6), (8,8), (8,12), (8,16),$   
 $(12,8), (12,12), (12,16), (16,12), (16,16)\}$

➤ **يحقق خاصية الانعكاس حيث ارتبط كل عنصر مع نفسه أي:  $(a,a) \in R$**

➤ **لا يحقق خاصية التماثل حيث يوجد  $(2,4)$  ولا يوجد  $(4,2)$  في العلاقة  $R$**

➤ **لا يوجد ما ينفي شرط التعدي وهو:  $(a,b) \text{ and } (b,c) \rightarrow (a,c)$**

➤ **خاصية تضاد التماثل: يوجد  $(8,6)$  و  $(6,8)$  وحيث أن  $8 \neq 6$**

**إذن لا تحقق خاصية تضاد التماثل.**

أذكر ترتيب معالجة البيانات في الشجرة الثنائية المقابلة لو تمت المعالجة بالطريقة

أ- القبلية    ب- الوسطية    ج- البعدية

أ- القبلية: (رأس، يسار، يمين)

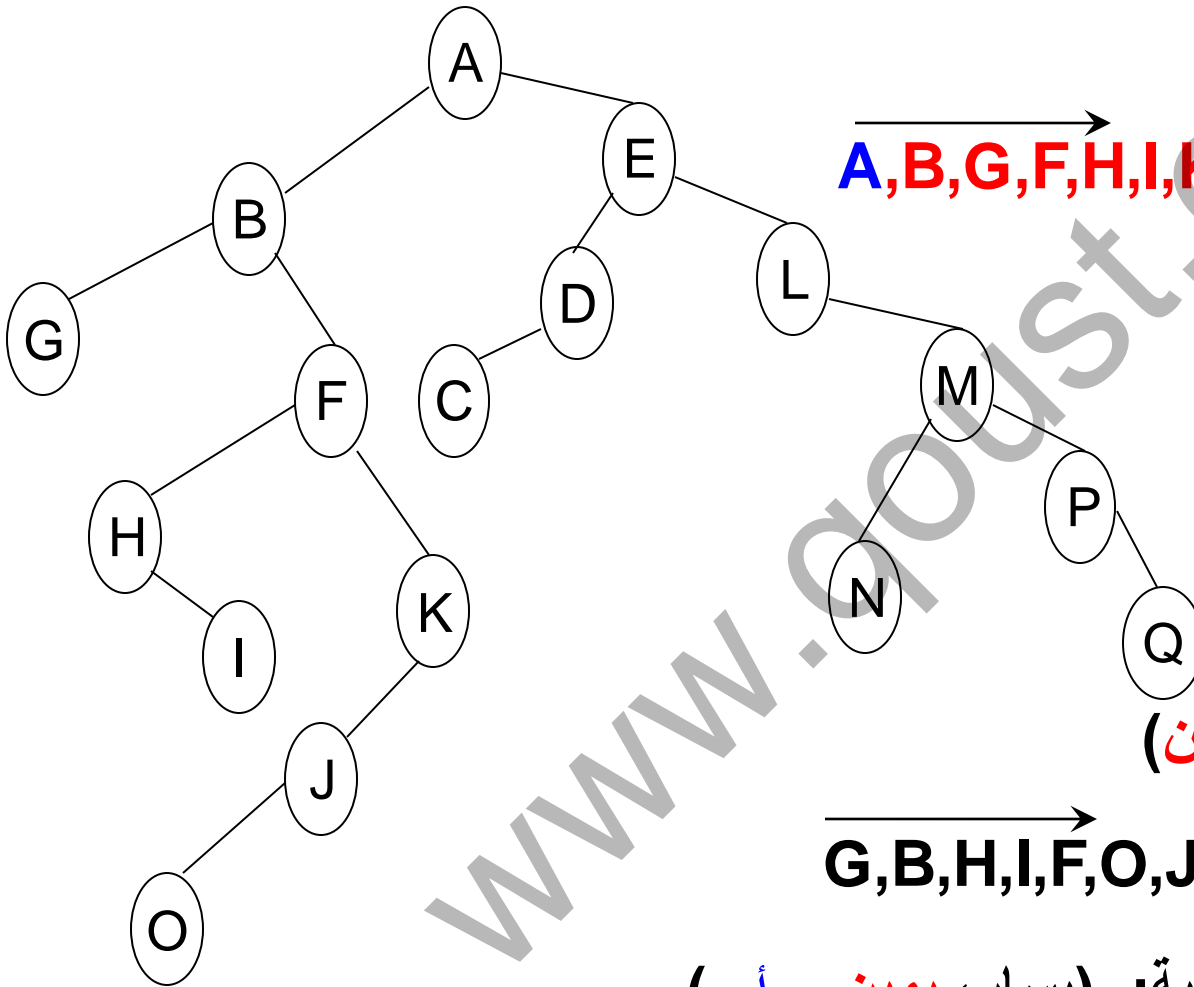
→ A, B, G, F, H, I, K, J, O, E, D, C, L, M, N, P, Q

ب- الوسطية: (يسار، رأس، يمين)

→ G, B, H, I, F, O, J, K, A, C, D, E, L, N, M, P, Q

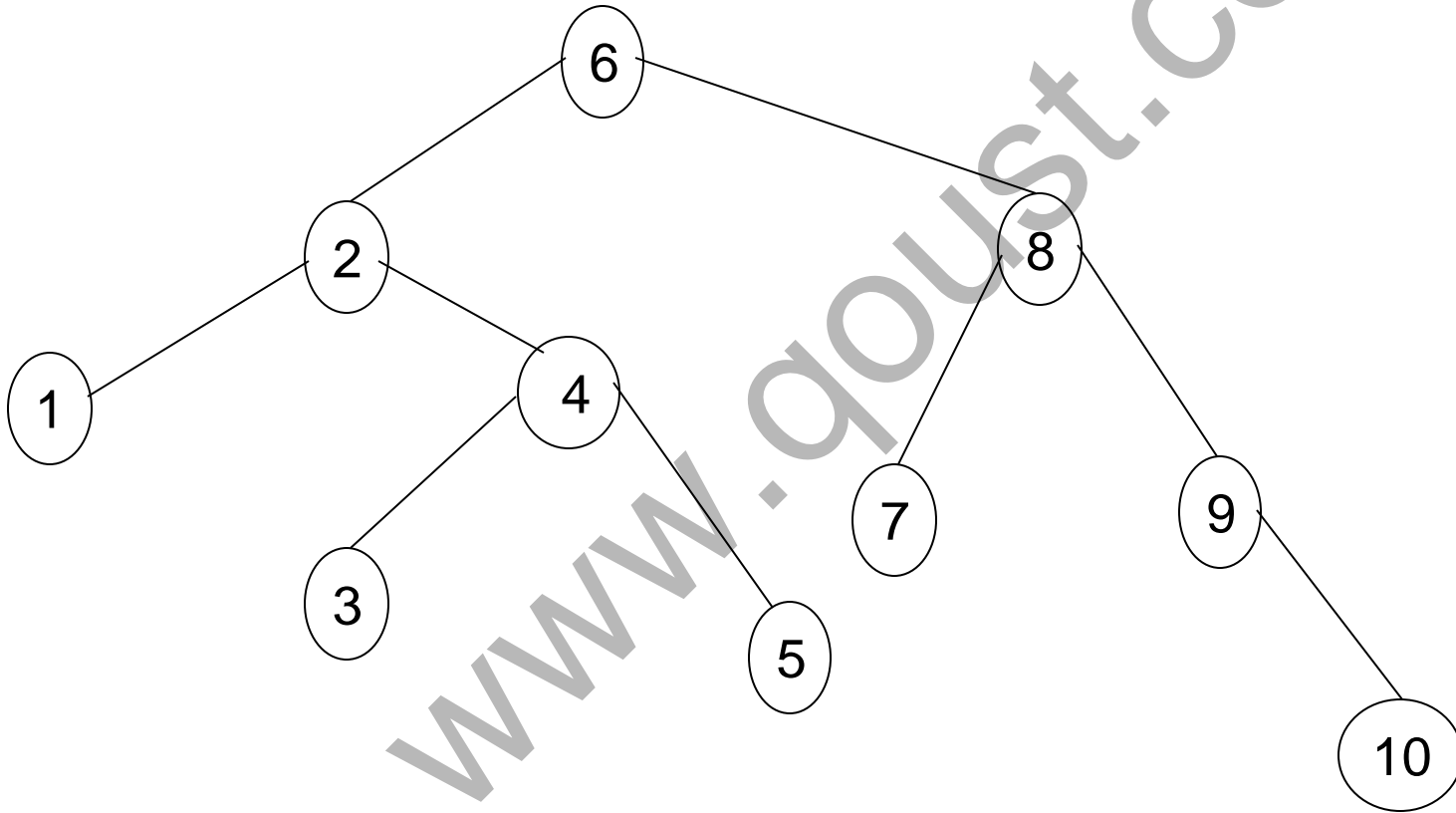
ج- البعدية: (يسار، يمين، رأس)

→ G, I, H, O, J, K, F, B, C, D, N, Q, P, M, L, E, A



# مستخدما شجرة البحث الثنائي Binary Search Tree أرسم ترتيبيا للأرقام من 1-10

الحل: نستخدم البحث الثنائي بواسطة الشجرة الثنائية بالطريقة  
الوسطية Inorder أي: (يسار، رأس، يمين)

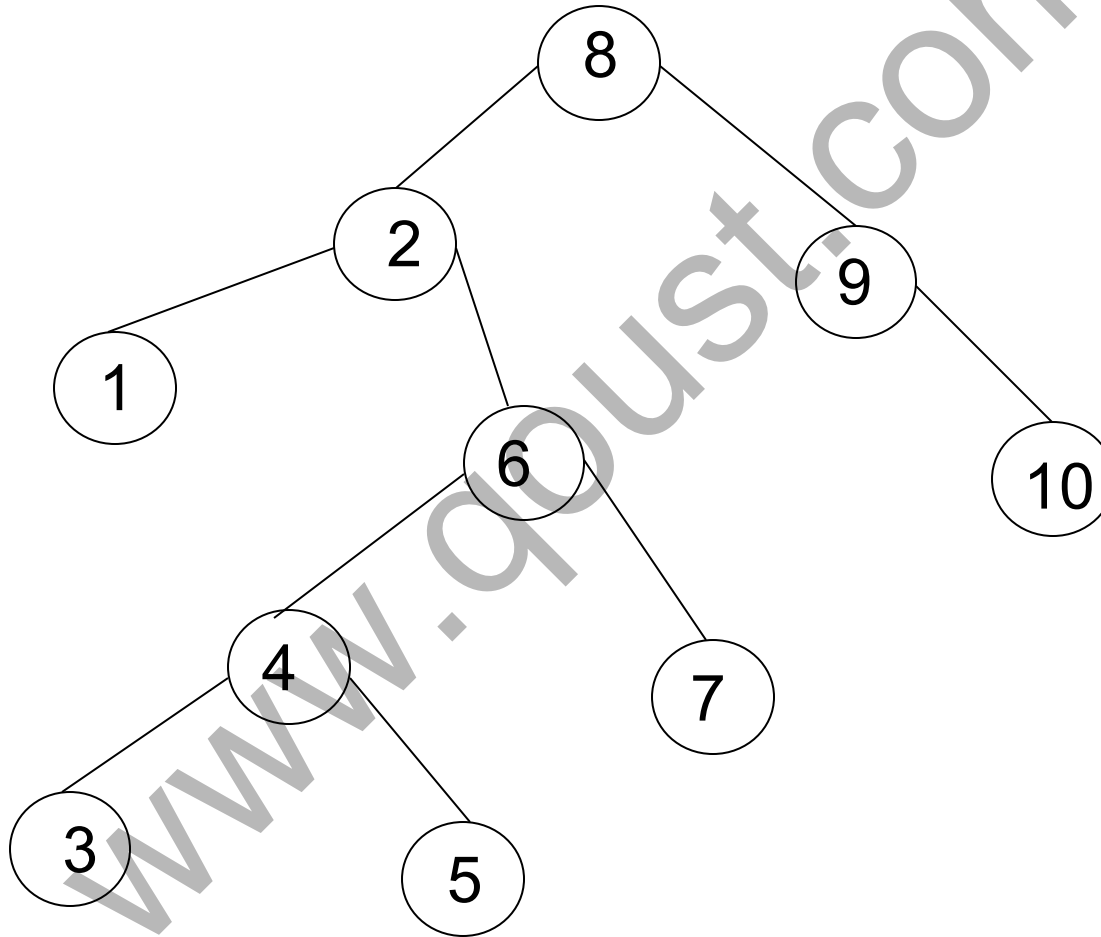


ويمكن الحل بطريقة أخرى

ويمكن عمل شجرة أخرى تؤدي نفس الغرض

الوسطية: Inorder (يسار، رأس، يمين)

نعمل شجرة ثنائية لعشرة نقاط



هل من طرق أخرى .... !؟

## أوجد أطول سلسلة وأطول تضاد سلسلي للمجموعات التالية:

أولاً:  $V = \{2, 3, 5, 7, 4, 10, 6\}$

السلسلة: هي مجموعة جزئية من مجموعة  
يكون فيها أي عنصرين قابلين للمقارنة

عدد عناصر المجموعة  $V$  يساوي 7

تحت العلاقة  $R$   
 $7 = 1 + 3 \times 2 \leftarrow$  إما أطول سلسلة  $(3 = 1 + 2)$  أو أطول تضاد سلسلي  $(4 = 1 + 3)$  أو العكس

$7 = 1 + 6 \times 1 \leftarrow$  إما أطول سلسلة  $(2 = 1 + 1)$  أو أطول تضاد سلسلي  $(7 = 1 + 6)$  أو العكس

وبناء عليه يوجد سلسلة طولها 2  $\{2, 4\}$  ،  $\{2, 6\}$  ...

ويوجد تضاد سلسلي طولها 4  $\{2, 3, 5, 7\} \leftarrow$

ثانياً:  $A = \{2, 6, 11, 20, 33\}$

عدد عناصر المجموعة  $A$  يساوي 5

$5 = 1 + 2 \times 2 \leftarrow$  إما أطول سلسلة  $(3 = 1 + 2)$  أو أطول تضاد سلسلي  $(3 = 1 + 2)$

$5 = 1 + 4 \times 1 \leftarrow$  إما أطول سلسلة  $(2 = 1 + 1)$  أو أطول تضاد سلسلي  $(5 = 1 + 4)$  أو العكس

وبناء عليه يوجد سلسلة طولها 2  $\{11, 33\}$  ،  $\{2, 20\}$  ...

ويوجد تضاد سلسلي طولها 3  $\{6, 11, 20\} \leftarrow$

ثالثا:  $B=\{2,6,12,20,33\}$

عدد عناصر المجموعة B يساوي 5

$5 = 1 + 2 \times 2 \leftarrow$  إما أطول سلسلة  $(3=1+2)$  أو أطول تضاد سلسلي  $(3=1+2)$

$5 = 1 + 4 \times 1 \leftarrow$  إما أطول سلسلة  $(2=1+1)$  أو أطول تضاد سلسلي  $(5=1+4)$  أو العكس

وبناء عليه يوجد سلسلة طولها 3  $\{2,6,12\}$

ويوجد تضاد سلسلي طولها 2  $\{2,33\} \leftarrow \dots$

رابعا:  $y=\{2,6,12,24,96\}$

عدد عناصر المجموعة y يساوي 5

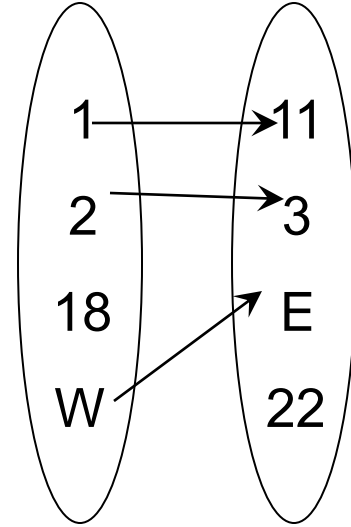
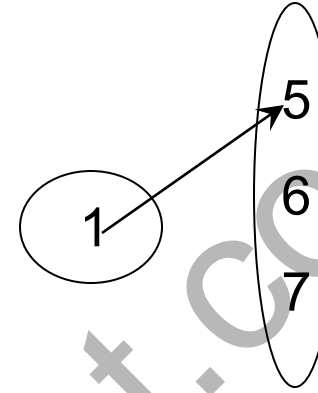
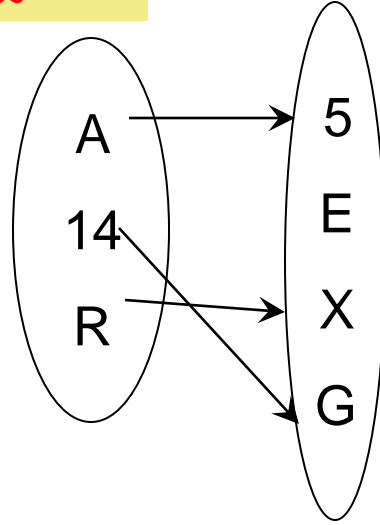
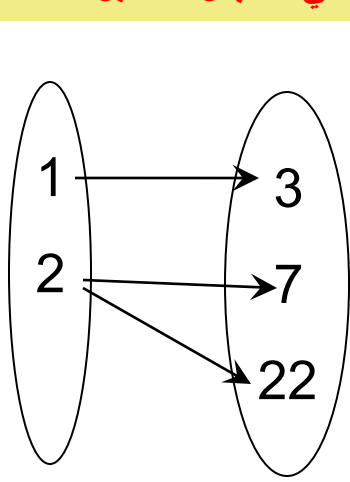
$5 = 1 + 2 \times 2 \leftarrow$  إما أطول سلسلة  $(3=1+2)$  أو أطول تضاد سلسلي  $(3=1+2)$

$5 = 1 + 4 \times 1 \leftarrow$  إما أطول سلسلة  $(2=1+1)$  أو أطول تضاد سلسلي  $(5=1+4)$  أو **العكس**

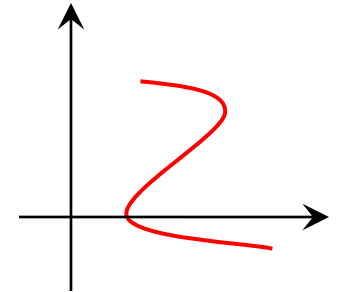
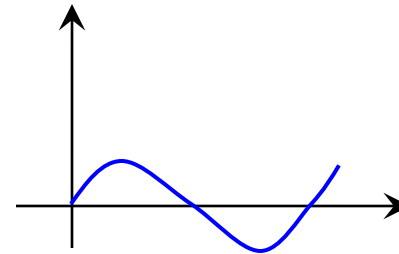
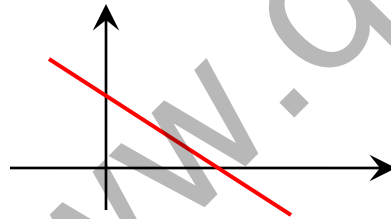
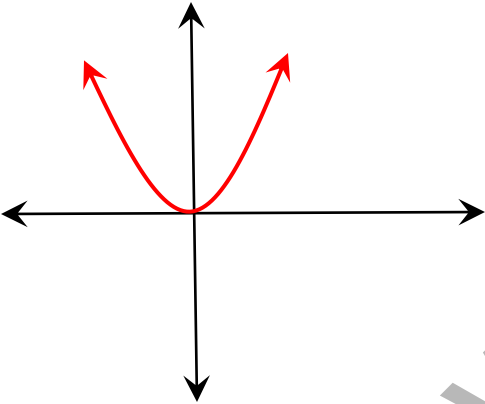
نلاحظ ان أطول سلسلة بطول 5 وهي y نفسها.  $\{2,6,12,24,96\}$

# أي المخططات السهمية التالية تمثل اقترانا؟

علاقة بحيث يكون لكل عنصر في المجال له صورة واحدة في المجال المقابل

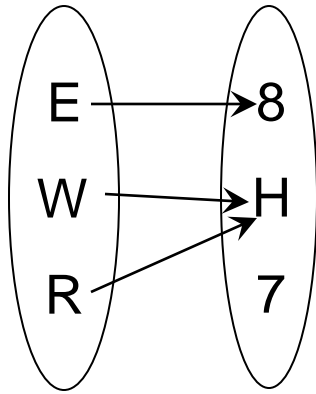


أي الأشكال التالية الممثلة لبعض الإقترانات في المستوى الديكارتي تمثل اقترانا؟

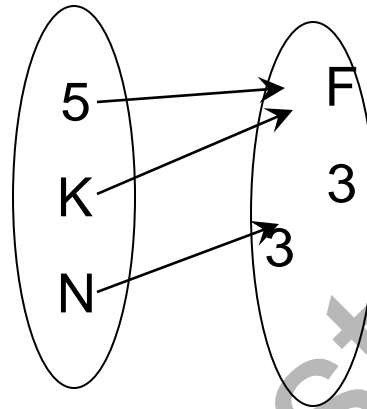


أي المخططات السهمية التالية تمثل إقتران تناظر؟

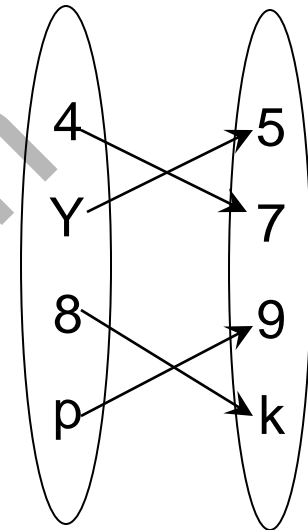
يكون الإقتران تناظر: إذا كان شاملا و (1-1)



ليس تناظر لأنه  
ليس شاملا

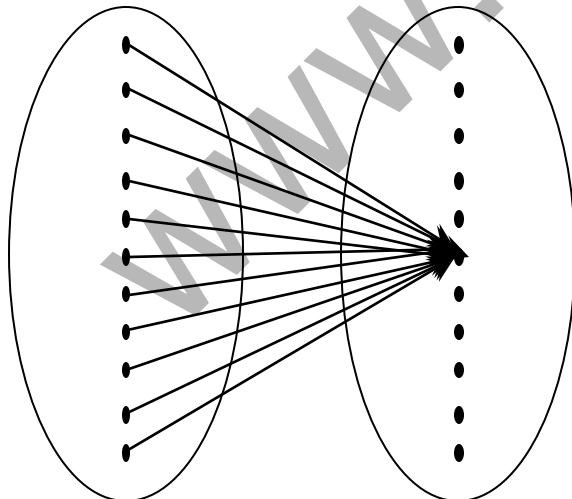


ليس تناظر لأنه  
ليس (1-1)



إقتران شامل + (1-1)  
فهو تناظر

هل الإقتران الثابت إقتران تناظر



نرسم الإقتران الثابت ونرى أنه ليس كل  
قيم المجال المقابل لها مصدر في  
المجال. وبالتالي هو ليس إقتران  
شامل وبالتالي هو ليس تناظر



ليكن  $f(x) = 3 - x/2$  أي :  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = 3 - \frac{x}{2}$

$$F(4) = 3 - (4/2) = 3 - 2 = 1 \rightarrow f(4) = 1$$

1- أوجد  $f(4)$

2- برهن ان  $f$

إقتران تناظر ؟

3- أوجد  $f^{-1}(x)$

4- أوجد  $f^{-1}(1)$

لبرهان ان  $f$  تناظر نثبت انه (1-1) و شامل

• ليكن  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  بحيث  $f(x_1) = f(x_2)$

وعليه:  $3 - (x_1/2) = 3 - (x_2/2) \leftarrow x_1 = x_2$

إذن الإقتران (1-1)

•  $y - 3 = -x/2 \leftarrow y = 3 - x/2$

$x = 2(3 - y) \leftarrow 3 - y = x/2$

أي أنه لكل  $y$  في المجال المقابل يوجد  $x$  في المجال ، إذن الإقتران شامل  
بالتالي يكون الإقتران تناظر.

$$f^{-1}(x) = 2(3 - x)$$

$$4 = 2 * 2 = 2(3 - 1) = f^{-1}(1)$$

ليكن:  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  ،  $g(x) = 2x + 1$  فأوجد كل مما يلي:-

$$f \circ f(x) \quad -4 \quad g \circ g(x) \quad -3 \quad g \circ f(x) \quad -2 \quad f \circ g(x) \quad -1$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 1 = 4x^2$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 3$$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = (x^2 - 2x + 1)^2 - 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = \dots\dots\dots$$

$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1 - 2) + 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 1) + 1$$

أكتب اقترانا بصيغة التكرار لحساب قيمة:

$$10+20+30+40+\dots+\dots+x$$

متتالية ح أساسها=10

$$f(x) = 10+20+30+40+\dots+(x-10) + x$$

$$f(x-10) = 10+20+30+40+\dots+(x-10)$$

----- بالطرح -----

$$f(x) - f(x-10) = x$$

$$f(x) = x + f(x-10)$$

$$f(x) \begin{cases} 10 & \text{if } x=10 \\ x + f(x-10) & \text{if } x>10 \end{cases}$$

أكتب اقترانا بصيغة التكرار لحساب قيمة:

$$(4)^3 + (5)^3 + (6)^3 + (7)^3 + \dots + x^3$$

$$f(x) = (4)^3 + (5)^3 + (6)^3 + (7)^3 + \dots + (x-1)^3 + x^3$$

$$f(x-1) = (4)^3 + (5)^3 + (6)^3 + (7)^3 + \dots + (x-1)^3$$

----- بالطرح -----

$$f(x) - f(x-1) = x^3$$

$$f(x) = x^3 + f(x-1)$$

$$f(x) \begin{cases} 4^3 & \text{if } x=4 \\ x^3 + f(x-1) & \text{if } x>4 \end{cases}$$

أكتب اقترانا بصيغة التكرار لحساب قيمة:

متتالية ح أساسها = -3

$$20+17+14+11+8+\dots+x$$

$$f(x) = 20+17+14+11+8+\dots+(x+6) + (x+3) + x$$

$$f(x+3) = 20+17+14+11+8+\dots+(x+6) + (x+3)$$

----- بالطرح -----

$$f(x) - f(x+3) = x$$

$$f(x) = x + f(x+3)$$

$$f(x) = \begin{cases} 20 & \text{if } x=20 \\ x + f(x+3) & \text{if } x < 20 \end{cases}$$

أكتب اقترانا بصيغة التكرار لحساب قيمة:

$$2+6+18+54+162+\dots+x$$

متتالية هـ أساسها 3=

$$f(x) = 2+6+18+54+162+\dots+(x/9) + (x/3) + x$$

$$f(x/3) = 2+6+18+54+162+\dots+(x/9) + (x/3)$$

----- بالطرح -----

$$f(x) - f(x/3) = x$$

$$f(x) = x + f(x/3)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x=2 \\ x + f\left(\frac{x}{3}\right) & \text{if } x>2 \end{cases}$$

# جامعة القدس المفتوحة

8 كانون أول 2015

**Good Luck**