بسم الله الرحمن الرحيم
الصف الافتراضي الأول لمقرر

تفاضل وتكامل 2
الأحد 2020-5-7
د. أحمد الكحلوت

المواضيع التي سنتناولها

*طرق التكامل :

١ـ التكامل بالتعويض المباشر .

٢ـ التكامل بالأجزاء

٣ـ التكامل بالكسور الجزئية

٤ـ التكامل بالتعويض المثلثي

* التكاملات المعتلة

أولاً : التكامل بالتعويض المباشر :

إذا كان التكامل على الصورة

$$\int_a^b f(g(x))g^\backslash(x)dx$$

$$Let\ u = g(x) \Rightarrow du = g^\backslash(x)dx$$

$$If\ \ x = a \Rightarrow u = g(a) \quad and\ if\ \ x = b \Rightarrow u = g(b)$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

سؤال 1:
أوجد قيمة التكامل التالي :

$$\int_1^2 (2x+1)\left(x^2+x-2\right)^3 dx$$

$$u=\left(x^2+x-2\right) \quad , u(1)=0 \ and \ u(2)=4$$

$$du=(2x+1)dx$$

$$\int_0^4 u^3 du = \frac{u^4}{4}\Bigg|_0^4 = \frac{256}{4} = 64$$

سؤال 2:
أوجد قيمة التكامل التالي :

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

The solution:

$$Let\ u = 1-x \Rightarrow x = 1-u \Rightarrow dx = -du$$

$$if\quad x = -1 \Rightarrow \quad u = 2$$

$$and\ if\ \ x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx = -\int_{2}^{1} \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,du = \int_{1}^{2} (1-u)u^{-1/2}du = \int_{1}^{2} \left(u^{-1/2} - u^{1/2}\right)du$$

$$= (2u^{1/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{1}^{2} = (2\sqrt{2} - \frac{2}{3}(2)^{3/2}) - (2 - 2/3) = 1.495 \approx 1.5$$

التكامل بالأجزاء:
إذا كان التكامل على الصورة :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$Let\ u = f(x), \quad dv = g(x)dx$$

$$\Rightarrow du = f^{\backslash}(x)dx, \quad v = G(x)$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)f^{\backslash}(x)dx$$

• سؤال1 :
أوجد قيمة التكامل التالي :

$$\int_{1}^{2} x \ln x dx$$

$The\ solution:$

$$u = \ln x \quad , \quad dv = xdx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad , \quad v = x^2 / 2$$

$$\int_{1}^{2} x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{1}^{2} - \int_{1}^{2} \frac{x}{2} dx = 2\ln 2 - (\frac{x^2}{4} \Big|_{1}^{2} = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

سؤال2:
أوجد//

$$\int x^2 e^x dx$$

The solution :

$$Let \quad u = x^2 \quad and \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2xdx \quad and \quad v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

$$let \quad I = \int 2xe^x dx$$

$$u` = 2x \quad and \quad dv` = e^x dx$$

$$du` = 2dx \quad and \quad v` = e^x$$

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x + c_1$$

$$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

التكامل بالكسور الجزئية :
أولاً : الحالة التي يحلل فيها المقام إلى عوامل خطية

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}dx$$

حيث f(x) كثير حدود درجته أقل من درجة المقام ، في هذه الحالة تكون :

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

سؤال 1 :
أوجد :

$$\int \frac{3}{(x-2)(x+1)}\,dx$$

The solution :

$$\frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\therefore 3 = A(x+1) + B(x-2)$$

$$let \quad x = 2 \Rightarrow 3 = 3A \Rightarrow A = 1$$

$$and \quad let \quad x = -1 \Rightarrow 3 = -3B \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{3}{(x-2)(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx = \ln|x-2| - \ln|x+1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + c$$

ثانياً : الحالة التي يحتوي فيها المقام قوى لعامل خطي :

أي يكون التكامل على الصورة :

$$\int \frac{f(x)}{(x-a)^n}\,dx : a \in R, n \in N$$

في هذه الحالة نكتب المقدار :

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

سؤال2 :
أوجد//

$$\int \frac{2x^2-3x+1}{(x-1)^3}dx$$

The solution :

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x-1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3}$$

$$\therefore 2x^2-3x+1 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1) + A_3$$

$$let \quad x=1 \Rightarrow A_3 = 0 \quad and \quad let \quad x=2 \Rightarrow$$

$$A_1 + A_2 = 3.....(1)$$

$$let \quad x=0 \Rightarrow$$

$$A_1 - A_2 = 1.....(2)$$

$$\therefore 2A_1 = 4 \Rightarrow A_1 = 2 \; and \quad A_2 = 1$$

$$\therefore \int \frac{2x^2-3x+1}{(x-1)^3}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

ثالثاً:حالة كون المقام يحتوي على عامل من الدرجة الثانية :

وهذا المقام يحتوي على عامل من الدرجة الثانية وهذا العامل لا يحلل إلى عوامل خطية مثل (x+a).

مثال :

$$\int \frac{2}{x\left(x^2+x+1\right)}dx$$

$sol.:$

$$\frac{2}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\Rightarrow\frac{2}{x\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A\left(x^2+x+1\right)+x(Bx+C)}{x\left(x^2+x+1\right)}$$

$$\therefore 2=A\left(x^2+x+1\right)+x(Bx+C)\Rightarrow 2=(A+B)x^2+(A+C)x+A$$

$$\therefore A=2, A+B=0\Rightarrow 2+B=0\Rightarrow B=-2, A+C=0\Rightarrow 2+C=0$$

$$\Rightarrow C=-2$$

$$\int \frac{2}{x\left(x^2+x+1\right)}dx=\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$=2\ln|x|-\ln\left|x^2+x+1\right|-\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\ln\frac{|x|^2}{\left|x^2+x+1\right|}-\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$Let\ u=x+\frac{1}{2}\Rightarrow du=dx$$

$$\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \frac{1}{\sqrt{3/4}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3/4}}+c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2u}{\sqrt{3}}+c = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+c$$

$$\therefore \int \frac{2}{x\left(x^2+x+1\right)}dx = \ln\frac{|x|^2}{\left|x^2+x+1\right|}-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+c$$

تمت بحمد الله.