نظام الاعداد في الحاسوب

قاعدة: إذا كان نظام الحاسوب يتكون من عدد p من الخانات و نظام العد b و يأخذ أصغر أس M_1 وأكبر أس M_2 فإن هذا النظام يرمز له بالرمز $F(b,p,M_1,M_2)$ ويكون عدد الاعداد التي يتكون منها نظام الاعداد في الحاسوب هو

$$F(b,p,M_1,M_2)=1+2(b-1)(M_2-M_1+1)b^{p-1}$$

وتكون هذه الارقام على الشكل التالي

$$\pm 0.c_1\ c_2\ c_3..c_p\times b^m\begin{cases} m\in\{M_1,M_1+1,M_1+2...,M_2\}\\ c_1\in\{1,2,.....p\}\\ c_i\in\{0,1,2,.....p\}\ i\neq 1\end{cases}$$

مثال: أوجد عدد الارقام التي يتكون منها النظام $F(2,2,-1,1)$ومن ثم أوجد هذه الاعداد؟

$$F(b,p,M_1,M_2)=F(2,2,-1,1)=1+2(2-1)2^{2-1}(1--1+1)$$
$$=1+2^2(1+1+1)=1+12=13$$

m	0.10	0.11
-1	0.01	0.011
0	0.1	0.11
1	1	1.1

في الجدول أعلاه 6 رقم موجب و مثلهم سالب وإضافة الصفر يصبح عدد الارقام الكلي 13 رقم كما أعلى الجدول.

مثال: أوجد عدد الارقام التي يتكون منها النظام $F(2,3,-1,1)$ومن ثم أوجد هذه الاعداد؟

$$F(b,p,M_1,M_2)=F(2,3,-1,1)=1+2(2-1)2^{3-1}(1--1+1)$$
$$=1+2^3(1+1+1)=1+24=25$$

m	0.100	0.101	0.110	0.111
-1	0.01	0.0101	0.011	0.0111
0	0.1	0.101	0.11	0.111
1	1	1.01	1.1	1.11

في الجدول أعلاه 12 رقم موجب و مثلهم سالب وإضافة الصفر يصبح عدد الارقام الكلي 13 رقم كما أعلى الجدول.

الآن السؤال ما هي هذه الارقام في العد العشري العادي

الرقم	التحويل	العدد العشري
0.01	$=1\times2^{-2}+0\times2^{-1}$	0.25
0.0101	$=1\times2^{-4}+0\times2^{-3}+1\times2^{-2}+0\times2^{-1}=0.0625+0+0.25$	0.3125
0.011	$=1\times2^{-3}+1\times2^{-2}+0\times2^{-1}$	0.375
0.0111	$=1\times2^{-4}+1\times2^{-3}+1\times2^{-2}+0\times2^{-1}$	0.4375
0.1	$=1\times2^{-1}$	0.5
0.101	$=1\times2^{-3}+0\times2^{-2}+1\times2^{-1}$	0.625
0.11	$=1\times2^{-2}+1\times2^{-1}$	0.75
0.111	$=1\times2^{-3}+1\times2^{-2}+1\times2^{-1}$	0.875
1	$=1\times2^{0}$	1
1.01	$=1\times2^{0}+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}$	1.25
1.1	$=1\times2^{0}+1\times2^{-1}$	1.5
1.11	$=1\times2^{0}+1\times2^{-1}+1\times2^{-2}$	1.75

الآن السؤال لو أردنا حل المعادلة $x^2-1.69=0\Rightarrow x=\pm1.3$ كيف سيكتب الكمبيوتر الحل، بما ان نظام الاعداد في الحاسوب لا يتضمن العدد 1.3 فإنه إما سيكتب 0 أو مالانهاية أو 1.25 كأقرب عدد للرقم 1.3.

وبالتالي سيكون هناك خطأ في الجواب وعليه سنعتبر العدد I, 1.25 الجواب الذي قربه الحاسوب للحل وأما الحل الحقيقي للحل هو 1.3 وبالتالي الخطأ هو 0.05.

تحليل الأخطاء Error Analysis .

الخطأ e: هو الفرق بين القيمة الحقيقية $(Exact)X_E$ والقيمة التقريبية $(Average)$ X_A وعليه يكون

$$e=X_E-X_A$$

الخطأ المطلق $|e|$ هو $|e|=|X_E-X_A|$

الخطأ النسبي $\operatorname{Re}l\left(X_A\right)=\dfrac{|X_E-X_A|}{|X_E|}$

مسلمة : إذا كان الرقم مكون من n من الخانات العشرية فإن أقصى خطأ ممكن في الرقم هو $5\times10^{-(n+1)}$

فمثلاً إذا كان $p\in\{1,2,3...,9\}$ فإن الخطأ في الرقم *0.P* هو 0.05 والرقم *0.0p* هو 0.005 وهكذا .

حساب الاخطاء في العمليات الحسابية

إذا كان هناك خطأ في حساب رقمين فإنه عند جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة هذين الرقمين ماذا **سيحث** في الاخطاء.

الأخطاء في عمليات الجمع والطرح

القاعدة: إذا كان الخطأ في الرقم X_E هو $\varepsilon = |X_E - X_A|$ و في الرقم Y_E هو $\eta = |Y_E - Y_A|$ فإن الخطأ الناتج عن الطرح أو الجمع هو $e \le \varepsilon + \eta$

مثال أوجد الخطأ الممكن للعملية الحسابية التالية

$$1.025 + 2.01$$

$$\in = 0.0005, \qquad \eta = 0.005 \Rightarrow e = 0.0005 + 0.005 = 0.0055$$

وبالتالي فإن القيمة الحقيقية للرقم هو 3.035 وبالتالي سيكون الخطأ في الرقم 3.035 هو 0.0055.

الأخطاء في عملية الضرب

إذا كان الخطأ في الرقم X_E هو $\varepsilon = |X_E - X_A|$ و في الرقم Y_E هو $\eta = |Y_E - Y_A|$ فإن الخطأ الناتج عن ضرب العددين $X_E Y_E$ هو $e_{X_E Y_E}$

$$e_{X_E Y_E} = \varepsilon |Y_E| + \eta |X_E|$$

مثال: أوجد الخطأ الناتج عن ضرب 1.025×1.03

$$\varepsilon = e_{1.025} = 0.0005 \qquad \eta = e_{1.03} = 0.005$$

$$e_{X_E Y_E} = \varepsilon |Y_E| + \eta |X_E| = (0.0005 \times 1.03) + (0.005 \times 1.025) = 0.00564$$

الأخطاء في عملية القسمة

إذا كان الخطأ في الرقم X_E هو $\varepsilon = |X_E - X_A|$ و في الرقم Y_E هو $\eta = |Y_E - Y_A|$ فإن الخطأ الناتج عن ضرب العددين $X_E Y_E$ هو $e_{\frac{X_E}{Y_E}}$

$$e_{\frac{X_E}{Y_E}} = \left(\frac{\varepsilon}{X_E} + \frac{\eta}{Y_E}\right)\frac{X_E}{Y_E}$$

مثال: أوجد الخطأ الناتج عن قسمة $1.025 \div 1.03$

$$\varepsilon = e_{1.025} = 0.0005 \qquad \eta = e_{1.03} = 0.005$$

$$e_{\frac{X_E}{Y_E}} = \left(\frac{\varepsilon}{X_E} + \frac{\eta}{Y_E}\right)\frac{X_E}{Y_E} = \left(\frac{0.0005}{1.025} + \frac{0.005}{1.03}\right)\frac{1.025}{1.03} = 0.0053162$$

مثال: أوجد الخطأ الناتج عن $\dfrac{1.362(7.54-13.2)}{47}$

$$e_{7.54}=0.005, e_{13.2}=0.05,\ e_{1.362}=0.0005,\ e_{47}=0.5$$
$$e_{(7.54-13.2)}=0.005+0.05=0.055$$
$$7.54-13.2=-5.66$$
$$e_{1.362(7.54-13.2)}=1.362\times e_{(7.54-13.2)}+5.66\times e_{1.362}=1.362\times 0.055+5.66\times 0.0005=0.07774\Rightarrow$$
$$e_{1.362(7.54-13.2)}=0.07774$$
$$e_{\frac{1.362(7.54-13.2)}{47}}=\left(\frac{\varepsilon}{X_E}+\frac{\eta}{Y_E}\right)\frac{X_E}{Y_E}=\left(\frac{e_{1.362(7.54-13.2)}}{7.70892}+\frac{e_{47}}{47}\right)\frac{7.70892}{47}\Rightarrow$$
$$e_{\frac{1.362(7.54-13.2)}{47}}=\left(\frac{0.07774}{7.70892}+\frac{0.5}{47}\right)\frac{7.70892}{47}=0.0033989$$