بسم الله الرحمن الرحيم

الصف الافتراضي الأول لمقرر

تفاضل وتكامل 2

المتواليات والمتسلسلات واختبارات التقارب و التباعد لها

الأثنين 21-6-2020

د. أحمد الكحلوت

نظرية (1) (قاعدة لوبيتال):

(أ) إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = \infty = \lim_{x \to a} g(x)$ ، وكان الاقترانيين f(x),g(x) قابليين للاشتقاق بحيث أن

$$\lim_{x \to a} \frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(ب) إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$ ، وكان الاقترانيين f(x),g(x) قابليين للاشتقاق بحيث أن

$$\lim_{x \to a} \frac{f^{\backslash}(x)}{g^{\backslash}(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

مثال : جد قيمة ما يلي :

(أ) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$$

الحل : $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

(ب) $$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

الحل :

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \cos \frac{1}{x} = 1$$

نظرية 2 :

إذا كان $\lim_{x \to \infty} f(x) = L, \lim_{x \to \infty} g(x) = M$

فإن :

(أ) $\lim_{x \to \infty} (af(x) + bg(x)) = aL + bM$ لجميع قيم a,b الحقيقية .

(ب) $\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = LM$

(ج) $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = L/M$ شريطة أن يكون M≠0,g(x)≠0 .

مثال :

أوجد قيمة النهاية :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x+5} \sin\frac{1}{x}$$

الحل :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x+5} \sin\frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x+5} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x+5} \lim_{x \to \infty} x \sin\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$$

نظرية 3 :

إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ، وكان h إقتراناً متصلاً عند النقطة x=L فإن

$$\lim_{x \to \infty} h(f(x)) = h\lim_{x \to \infty}(f(x)) = h(L)$$

مثال: أوجد قيمة النهاية $\lim_{x \to \infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3$

الحل : $\lim_{x \to \infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x \to \infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)^3 = 0$

المتواليات :

تعريف 1 :

المتوالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية {..,1,2,3}=N ، ومجاله المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية R .ويرمز لها بالرمز $\{a_n\}$ أو $\{f(n)\}$ حيث a_n أو $f(n)$ هو الحد العام للمتوالية و n عدد طبيعي .

أمثلة :

١- $$a_n = \frac{2n}{n+2}$$

٢- $a_n=(-1)^n$

٣- $a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{3}, a_1 = 1$

مثال :

أوجد الحد الخامس من المتوالية : $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} - a_n + 3}{2}, a_1 = 2, a_2 = 5$

الحل : $a_3 = \frac{5-2+3}{2} = 2, a_4 = \frac{2-5+3}{2} = 0, a_5 = \frac{0-2+3}{2} = \frac{1}{2}$

تعريف 2 :

المتوالية $\{a_n\}$ متوالية تقاربية إذا كانت $\lim_{n \to \infty} a_n$ موجودة. وتسمى المتوالية $\{a_n\}$ متوالية تباعدية إن لم تكن تقاربية .

نظرية 4 :

إذا كانت $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$، وكان الاقتران f معرفاً عند الأعداد الطبيعية فإن $\lim_{n \to \infty} f(n) = A$.

مثال :

بين فيما إذا كانت المتوالية التالية تقاربية أم تباعدية : $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$

الحل :

$$\because 0 \le \sin^2 n \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\sin^2 n}{n} \le \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} 0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$$

نظرية :

$$1-\quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\ln}{n} = 0$$

$$2-\quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$3-\quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$4-\quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n} = e^{t}$$

$$5-\quad \lim_{n\longrightarrow\infty} t^{n} = 0 \quad : |t| < 1$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t^{n} = \infty \quad : \quad t > 1 \quad or \quad t \leq -1$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t^{n} = 1 \quad : \quad t = 1$$

سؤال 1 :

بين فيما إذا كانت المتتاليات تقاربية أم تباعدية :

أ-

$$a_n = \left(5+\frac{2}{n}\right)^n$$

$solution:$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(5+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}5^n\left(1+\frac{2}{5n}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}5^n * \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{2}{5n}\right)^n = \infty * e^{2/5} = \infty$$

ب-

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{5n}\right)^{10n}$$

الحل:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{5n}\right)^{10n} = \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{5n}\right)^{n} \right)^{10} = e^{\frac{-2}{5} * 10} = e^{-4}$$

$$\therefore a_n = \left(1 - \frac{2}{5n}\right)^{10n}$$ تقاربية

المتسلسلات :

إذا كانت a_n الحد العام في متوالية ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة لا نهائية (أو فقط متسلسلة).

نظرية :

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية فإن : $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

الصيغة المكافئة للنظرية السابقة :

إذا كانت $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تباعدية .

مثال :

بين فيما إذا كانت المتسلسلة التالية تقاربية أم تباعدية : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+5}$

الحل:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{3n+5} = \frac{2}{3} \neq 0$$

إذا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+5}$ متسلسلة تباعدية .

المتسلسلة الهندسية :

تعريف : تعرف المتسلسلة الهندسية بأنها متسلسلة على الصيغة : $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

حيث r أساس المتسلسلة ، والعدد a الحد الأول فيها .

نظرية 7 :

تكون المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متسلسلة تقاربية وقيمتها a/(1-r) إذا كانت $|r| < 1$،
وتكون متسلسلة تباعدية إذا كانت $|r| \geq 1$ ، حيث a≠0 .

مثال :

بين فيما إذا كانت المتسلسلة التالية تقاربية أم تباعدية و أوجد قيمتها :

الحل : المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ لماذا ؟

$$|e^{-n}| = \left|\frac{1}{e^n}\right| = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$\because \left|\frac{1}{e}\right| < 1$$

إذا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ تقاربية وقيمتها $\dfrac{1/e}{1-1/e}=\dfrac{1}{e-1}$

تقارب المتسلسلات ذات الحدود الموجبة :

اختبار التكامل :

إذا كان $a_n \geq 0$ لجميع قيم n ، وكان $f(n)=a_n$ فإن :

(أ) $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ تقاربية إذا كان $\int_{n=k}^{\infty} f(x)dx < \infty$

ب- $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ تباعدية إذا كان $\int_{n=k}^{\infty} f(x)dx = \infty$

سؤال 1:

بين فيما إذا كانت المتسلسلة التالية تقاربية أم تباعدية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$solution:$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 \Big|_1^{\infty} = \infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$ تباعدية

سؤال 2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+2n+1}$$

solution:

$$\because n^2+2n+1 > n^2, \quad \forall n \in N$$

$$\frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\sin^2 n}{n^2+2n+1} \le \frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ تقاربية لأن $p = 2 > 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+2n+1}$ تقاربية

متسلسلة P :

إذا كانت المتسلسلة على الصورة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ p عدد حقيقي فإن المتسلسلة :

تقاربية إذا كانت p>1 وتباعدية إذا كانت p أقل أو تساوي 1 .

مثال : بين فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ تقاربية أم تباعدية .

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$$

$$p=1.5>1$$

إذا المتسلسلة تقاربية .

اختبار المقارنة:

اذا كان $a_n \geq 0$ فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون:

(أ) تقاربية اذا كان هناك متسلسلة تقاربية $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بحيث يكون $a_n \leq b_n$ لجميع قيم $n_0 < b_n$ حيث n_0 عدد صحيح.

(ب) تباعدية اذا كان هناك متسلسلة تباعدية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحيث يكون $a_n \geq c_n$ لجميع قيم $n_0 < n$ حيث n_0 عدد صحيح.

مثال : هل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+5}$ تقاربية أم تباعدية .

الحل :

$$n^2+2n+5>n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2+2n+5}<\frac{1}{n^2}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ تقاربي $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+5}$ تقاربي

اختبار مقارنة النهاية
سؤال 3 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\sqrt{n}+\sqrt{n}+2}{n^3+3n+4}$$

$solution:$

$$let \quad b_n = \frac{n\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$ تقاربية لأن $p = 3/2 > 1$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^3+n^2+2n\sqrt{n}}{n^3+3n+4} = 3 < \infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\sqrt{n}+\sqrt{n}+2}{n^3+3n+4} \cdot$$ تقاربية

اختبار النسبة واختبار الجذر النوني :

سؤال :

بين فيما إذا كانت المتسلسلة التالية تقاربية أم تباعدية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$solution:$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}}{n+1!} \times \frac{n!}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \quad .$$

تقاربية

سؤال 2: بين فيما إذا كانت المتسلسلة التالية تقاربية أم تباعدية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}$$

$$solution:$$

$$R=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n}{n^2}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{5}{\sqrt[n]{n^2}}=\frac{5}{\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{n^2}}=5>1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2} \quad .$$ تباعدية

التقارب المطلق والتقارب المشروط :

سؤال 1 :بين فيما إذا كانت المتسلسلة التالية تقاربية تقارباً مطلقاً أم لا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$$

solution :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n\pi}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ تقاربية لأن $p = 2 > 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$$ تقاربية تقارباً مطلقاً

سؤال 2 :

بين فيما اذا كانت المتسلسلة التالية تقاربية أم تباعدية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$solution:$

$$1-\ \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$2-\because n < n+1 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$ تناقصية

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ تقاربية تقاربا مشروطاً

تمت بحمد الله