اسم المادة : مبادئ التحليل العددي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط هنا

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

بسم الله الرحمن الرحيم

أم المجد

* الوحدة الأولى ← مفهوم في مبادئ التحليل العددي

* النظام العشري ← 0 ← 9 أساسه $\boxed{10}$
* النظام الثنائي 0، 1
* النظام الرباعي 0، 1، 2، 3
(دائماً أقل بواحد) للنظام

* كتابة العدد بالصورة المطولة للعدد العشري (نبدأ من اليمين)

$236534 \Rightarrow 4 \times 10^0 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^3 + 3 \times 10^4 + 2 \times 10^5$

* كتابة الكسر العشري (نبدأ من يمين الفاصلة)

$0.30126 \Rightarrow 3 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2}$

* النظام الثنائي $\{0, 1\}$
منازله ← 2^{-2} 2^{-1} 2^{0} 2^{1} 2^{2} 2^{3} ...
أساسه $\boxed{2}$

* لتحويل النظام من عشري لأي نظام آخر فمثلاً ثنائي نقسم على 2
إذا تحويله لرباعي نقسم على 4 ونقسم ثم نكتب الباقي

كتابة الباقي
من أعلى للأسفل
من اليمين لليسار

$4 \div 2 = 2$ الباقي 0
$2 \div 2 = 1$ الباقي 0
$1 \div 2 = 0$ الباقي 1

$100 \leftarrow$

$(4)_{10} = (100)_2$

2019/9/14 18:20

* تحويل من ثنائي الى عشري

نضرب 2

$(100)_2 \longrightarrow (\quad)_{10}$

$0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 = 0 + 0 + 4 = (4)_{10}$

* حول من عشري إلى نظام الى سؤال

$(58)_{10} \Rightarrow (\quad)_2$

$(37)_{10} \Rightarrow (\quad)_2$

$(.125)_{10} \Rightarrow (\quad)_2$

$(37)_{10} \Rightarrow (\quad)_{16}$

* النظام السادس عشري

يبدأ من 0 الى 9 ثم يأتي بدل 10 ← A..B الى ونكمل

F	E	D	C	B	A
15	14	13	12	11	10

* تحويله لعشري

$(F1A)_{16} = A \times 16^0 + 1 \times 16^1 + F \times 16^2$

$10 \times 1 + 1 \times 16 + 15 \times 16^2 =$

$(3866)_{10}$

نعوض قيم A..F

ام الحجي

3

* $(58)_{10} \Rightarrow (\quad)_2$

$58 \div 2 = 29 \rightarrow$ الباقي 0

$29 \div 2 = 14 \rightarrow$ 1

$14 \div 2 = 7 \rightarrow$ 0

$7 \div 2 = 3 \rightarrow$ 1

$3 \div 2 = 1 \rightarrow$ 1

$1 \div 2 = 0 \rightarrow$ 1

$\boxed{(111010)_2}$

* $(37)_{10} \Rightarrow (\quad)_2$

$37 \div 2 = 18 \rightarrow$ 1

$18 \div 2 = 9 \rightarrow$ 0

$9 \div 2 = 4 \rightarrow$ 1

$4 \div 2 = 2 \rightarrow$ 0

$2 \div 2 = 1 \rightarrow$ 0

$1 \div 2 = 0 \rightarrow$ 0

$\boxed{(000101)_2}$

* $(.125) \Rightarrow (\quad)_2$

$.125 * 2 = 0.25$

$.25 * 2 = 0.5$

$.5 * 2 = 1.0 \rightarrow \boxed{(.001)_2}$

* $(37)_{10} \rightarrow (\quad)_{16}$

$3 * 16^0 + 7 * 16^1$

$3 + 7 * 16 = \boxed{(115)_{16}}$

ام المجد

2019/9/14 18:20

* لتحويل كسر عشري لثنائي نضرب الكسر بـ 2 وإذا نتج عدد صحيح وكسر عشري مثل 1.34 نهمل وجود 1 ونكمل عملية الضرب (نضرب الكسر الناتج بعد إهمال 1 بـ 2)

نتوقف إذا نتج الصفر أو نتج تكرار

$(0.6)_{10} \Rightarrow (\quad\quad)_2$

$0.6 * 2 = 1.2$

$.2 * 2 = 0.4$

$.4 * 2 = 0.8$

$.8 * 2 = 1.6$

$.6$

ام المصطفى

نتوقف لأنها تكررت العملية

الجواب يكون الأعداد الصحيحة الناتجة من الضرب مع وضع الفاصلة

$(.1001)_2$

* نظام الفاصلة المتحركة

* تحريك الفاصلة العشرية إلى أقصى يسار العدد ولا يوجد قبلها أرقام من اليسار وعلى يمينها يوجد رقم غير الصفر ونضربه برقم النظام مرفوعاً لرقم مساوي لعدد الحركات

- تحريك من اليمين لليسار الأس يكون موجب
- = اليسار لليمين = = سالب

مثال

$0.0037 \Rightarrow 0.37 \times 10^{-2} \Rightarrow .37E{-2}$

$E \Rightarrow 10$

$1787 = 0.1787E4$

$(101011.)_2 = .101011 \times 2^6$

* نظام الفاصلة المتحركة بالحاسوب

صيغته العامة

$F(b, P, m_1, m_2)$

$b \Rightarrow$ قاعدة النظام (ثنائي، ثلاثي...)

$P \Rightarrow$ (عدد المنازل العشرية للعدد الفاصلة) طول الكلمة (الجزء الباقي)

$m_1 \Rightarrow$ أصغر قوة (أس) يقبلها الحاسوب

$m_2 \Rightarrow$ أكبر قوة يقبلها الحاسوب

* عدد أعداد النظام الحاسوبي

حفظ القاعدة ⇐ $1 + 2(b-1) * b^{P-1} * (m_2 - m_1 + 1)$

مثال 5 اكتب جميع الأعداد التي يتضمنها النظام

$F(2, 3, -1, +1)$
$\quad b, P, m_1, m_2$

نعوض بقاعدة عدد أعداد النظام

$1 + 2(2-1)\, 2^{3-1} * (1 - (-1) + 1)$

$1 + 2(1)\, 2^2 * 3 = 1 + 24 = \underline{25}$

الجواب 25 يعني 12 أعداد موجبة
12 " سالبة
والصفر

بقية الحل

ام المجد

عدد المنازل حسب P

$\mu = -1$	$.100 \times 2^{-1}$	$.101 \times 2^{-1}$	$.110 \times 2^{-1}$	$.111 \times 2^{-1}$
$\mu = 0$	$.100 \times 2^{0}$	$.101 \times 2^{0}$	$.110 \times 2^{0}$	$.111 \times 2^{0}$ ← ثابت لا يتغير
$\mu = 1$	$.100 \times 2^{1}$	$.101 \times 2^{1}$	$.110 \times 2^{1}$	$.111 \times 2^{1}$

* أساس إيجاد الأعداد عندما $\mu = 0$

① نكتب الأعداد الأساسية ← $.111 \mid .110 \mid .101 \mid .100$

② ثم نجرب تحريك الفاصلة حسب العدد m مثلاً إذا كانت $m = 1$
نحرك الفاصلة منزلة لليمين، فتصبح $1.11 \mid 1.10 \mid 1.01 \mid 1.00$

③ لكن في حالة السالب ← $m = -1$
نحرك الفاصلة لليسار، فتصبح $.0111 \mid .0110 \mid .0101 \mid .0100$

* تحليل الأخطاء

* الخطأ = القيمة الحقيقية - القيمة التقديرية

X_A ← قيمة تقديرية

X_E ← قيمة حقيقية

* أم الحجر

* الخطأ المطلق ← نأخذ القيمة المطلقة للجواب (دائماً موجب)

* الخطأ النسبي ← الخطأ تقسيم القيمة الحقيقية

2019/9/14 18:21

البتر ← هو خطأ ناتج من اسقاط عدد محدود من الحدود كما في حالة المتسلسلات اللانهائية.

القطع ← يقبل من المنازل الهامة من أي عدد ما هو مسموح به

التقريب ← اضافة عدداً واضافته لآخر منزلة مسموح بها في حالة التقريب للمنزلة الهامة المطلوبة

① ننظر للمنزلة التي قبلها اذا كان الرقم أكبر من 5 نضيف 1 للمنزلة الهامة

② اذا كان أقل من 5 لا نضيف ويبقى كما هو

③ اذا كان الرقم يساوي 5 نعود لرقم المنزلة الهامة اذا كان

* فردي نضيف واحد مثل .475 فردي ← نضيف 1

* زوجي لا نضيف واحد .465 زوجي ← لا نضيف

مثال 8 قرب إلى أربع منازل هامة

.356721 ← x2 نعطي لأنها أقل من 5 يصبح الرقم ← .3567

.356783 ← 8 نعطي ويصبح ← .3568

.356750 ← 7 فردي يعطي ← .3568

.356650 ← 6 زوجي لا يعطي ← .3566

ام احمد

2019/9/14 18:22

* كيفية حساب الأخطاء (أكبر خطأ)

① اذا كان عدد صحيح يكون الخطأ دائماً .05

مثل 72 ⇐ .05

② اذا كان العدد صحيح وأعشار نكتب بدل الأعداد أصفار ثم نضيف 5 مثل 7.4 → 0.05

مثل 8.4013 → 0.00005

③ اذا كانت المسألة نجد أخطاء الحدود (سواء جمع أو طرح ⇐ نعمل جمع)

مثال احسب الخطأ ⇐

$12.95 + 3.2145 - 3.1$

$00.005 \boxed{+} 0.00005 \boxed{+} 0.05$

$= 0.05505$

* لكن في حالة الضرب ⇐

الأول * خطأ الثاني + الثاني * خطأ الأول

مثال

$\underbrace{12}_{\text{الأول}} \underbrace{(15.25 - 12.25)}_{\text{الثاني}}$

مقدار الثاني = 3

خطأ الأول ⇒ .05

خطأ الثاني ⇒ 00.005 + 00.005 = 0.01

خطأ المقدار ⇐ خطأ ① * الثاني + خطأ ② * الأول

$12 * .01 + 3 * .5$

$= 1.62$

ام المجد

2019/9/14 18:22

* في حالة القسمة

$$\frac{15.36 + 27.1 - 1.672}{2.36 * 1.043}$$

القاعدة ⟵

القيمة الحقيقية * $\left(\frac{\text{خطأ البسط}}{\text{البسط}} + \frac{\text{خطأ المقام}}{\text{المقام}} \right)$

خطأ البسط ⟵ $00.005 + 00.05 + 0.0005$

$\boxed{= .0555}$

خطأ المقام ⟵ خطأ (1) * الثاني + خطأ (2) * الأول

$2.36 * 0.0005 + 1.043 * 0.005$

$\boxed{= 0.0064}$

القيمة الحقيقية ⟵ $\frac{40.788}{2.46148} = 16.57$

نعوض بالقاعدة ⟵

$$\frac{40.788}{2.46148} \left[\frac{.0555}{40.788} + \frac{0.0064}{2.46148} \right]$$

* صيغة هورنر ⟵ لتخفيف وتقليل الأخطاء

$P(x) = [(\dots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots +$

اكتب الحدودية بصيغة هورنر a_0

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_0 \\ P(x) = -2x^4 & + 4x^3 & + 3x^2 & + 2 \end{array}$$

نعوض بالصيغة

$P(x) = ((-2x + 4)x + 3)x + 0)x + 2$

2019/9/14 18:22

* طريقة التقدير

القاعدة ← $f'(x) = \frac{f(x_ع) - f(x_ه)}{x_ع - x_ه}$

① نشتق الاقتران
② نعوض القيمة بالمشتقة
③ " " بالاقتران الاصلي
④ " بالقاعدة

* القسمة التركيبية

اوجدنا باقي قسمة اقتران $f(x) = x^3 - 3x + 4$

على $(x-1)$

نجد $f(1)$ لايجاد الباقي $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4$

الباقي هو $= 2$

اذا طلب نقسم على $(x+1)$ نجد $f(-1)$

* لعمل القسمة التركيبية

نضع معاملات الاقتران والتي غير موجودة نضع بدالها صفر

	x^3	x^2	x	المعاملات ← الثابت
	1	0	-3	4
دائماً موجود 1	صفر	1	1	-2
	1	1	-2	2 الباقي

انتهت الوحدة الاولى

أم المجد

2019/9/14 18:22

الوحدة الثانية ← طرق حل المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

* كل الحدوديات من الدرجة الثانية هي معادلات غير خطية

صيغتها ← $ax^2 + bx + c = 0$

قاعدة حساب الجذور ← $x = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

* لا توجد قاعدة عامة لحدوديات من الدرجة الخامسة فما فوق

* المعادلات التي تحوي حدوداً تختلف عن الصيغة x^n وعن الصيغة الجبرية تسمى معادلات تصاعدية ← مثل $e^x - \cos x + x^2 = 0$

* المعادلات الجبرية ← $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ أم المجد

* المعادلات التصاعدية تحتوي على ← e^x ، $\ln$ ، $\sin$ ، $\cos$

* أنواع جذور حل المعادلة
1. جذور بسيطة لا تتكرر
2. جذور مضاعفة تتكرر وعدد مرات تكرارها يسمى مضاعفة

في حالة الجذور البسيطة نجد المشتقة الأولى اذا كانت لا تساوي صفر تكون بسيطة $f'(x) \neq 0$

لكن اذا كانت $f'(x) = 0$ ← جذور مضاعفة من الرتبة 2

$f''(x) = 0$ 〃 〃 〃 3

كل مرة نضيف واحد

2019/10/2 01:11

مثال $f(x) = x^2 - 4x + 4$

طريقة التحليل ⇐ $(x-2)(x-2)$

جذور مضاعفة ⇐ مكرر مرتين $x = 2, 2$

طريقة المشتقة ⇐ $f'(x) = 2x - 4$

نعوضها $x = 2$ $f'(x) = 2(2) - 4$

جذور مضاعفة $4 - 4 = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

من الرتبة 2

* مبرهنة (1) مبرهنة القيمة الوسطية (حفظ)

اذا كان f متصل على $[a,b]$ فإنه $f(a) \cdot f(b) < 0$

احدهما موجب والآخر سالب .. يحقق القيمة الوسطية

* عيوب التمثيل البياني (حفظ) ص 62

تعريف (1)

القسمة التركيبية بدلاً من القسمة الطويلة لحدودية من الدرجة $n \geq 1$

على العامل $x - a$ نستخدم معاملات الحدودية بالترتيب التنازلي

مثال أوجد باقي القسمة $x^5 - 2x^4 + 4x^2 + x - 7$

على $x - 3$

3	معامل x^5	معامل x^4	معامل x^3	معامل x^2	معامل x	الثابت
3	1	-2	0	4	1	-7
		3	3	9	39	120
	1	1	3	13	40	113

الباقي هو ⇐ 113

ام المجد

* خطوات الحل
① نكتب معاملات الحدودية تنازلياً ونكتب ثابت المقسوم عليه $\boxed{3}$
② ننزل الحد الأول من اليسار وهو $\boxed{1}$ للأسفل
③ نضرب $\boxed{1}$ مع $\boxed{3}$ ونكتب الناتج $\boxed{3}$ تحت الخانة الثانية $\boxed{-2}$
④ نجمع $\boxed{-2}$ مع $\boxed{3}$ ونكتب الناتج $\boxed{1}$ تحت في الأسفل
⑤ نضرب $\boxed{1}$ مع $\boxed{3}$ ونكتب الناتج $\boxed{3}$ تحت $\boxed{0}$ في السطر الثاني
⑥ نجمع $\boxed{0}$ مع $\boxed{3}$ ونكتبه في السطر الثالث
⑦ نستمر بنفس الطريقة حتى النهاية
⑧ آخر رقم بالسطر الثالث عن اليمين هو الباقي $\boxed{113}$
⑨ خارج القسمة هو باستخدام 1/1/3/13/40 كمعاملات للحدودية الجديدة

خارج القسمة ⇐ $x^4 + x^3 + 3x^2 + 13x + 40$

* حساب الجذر بطريقة التنصيف
① نبدأ من الفترة $[a,b]$ بحيث تحصر بينها الجذر أي بحيث تحقق
$f(a) \cdot f(b) < 0$
② نجد منتصف الفترة ⇐ $c = \frac{a+b}{2}$
③ نجد $f(c)$ اذا كان $f(a) \cdot f(c) < 0$ نختار الفترة الأصغر $[a,c]$
واذا كان $f(b) \cdot f(c) < 0$ نختار $[c,b]$
④ ثم نجد منتصف الفترة الناتجة فمثلاً اذا كانت $[a,c]$
المنتصف يكون ⇐ $d = \frac{a+c}{2}$
⑤ نجد $f(d)$ ونكرر بقية الخطوات لتصغير الفترة ونصل لأقرب جذر مطلوب

* (المطلوب فقط ايجاد التقريب لخمس خطوات لهذه الطريقة)

2019/10/2 01:11

تعريف (2)

متتالية من القيم التتابعية $\{x_n \mid n \geq 0\}$ تتقارب α برتبة تقارب P

اذا كان $|\alpha - x_{n+1}| \leq c |\alpha - x_n|^P$ حيث $c > 0$, $n \geq 0$

يسمى c ثابت التقارب الخطي (معدل التقارب الخطي)

* طريقة التنصيف بطيئة جداً في تقاربها نحو الجذر مع أنها تضمن التقارب

* التقارب الخطي يكون ثابت التقارب له $= \frac{1}{2}$ لجميع المعادلات مهما كانت قيم α, P

* أي درس مكتوب عليه (*) اختياري فهو محذوف

* المفهوم النظري لأسلوب النقطة الثابتة

داخل هذه الطريقة تبدأ بقيمة واحدة فقط

أما طريقة التنصيف (الجذر المحصور) تبدأ بقيمتين

مثال 7 لايجاد الجذر التربيعي للعدد 5 (قيمة واحدة ← النقطة الثابتة)

نفرض $\Rightarrow x = \sqrt{5}$

تربيع الطرفين $\Rightarrow x^2 = 5$

$\Rightarrow x^2 - 5 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$f(x) = x^2 - 5 = 0$ نضيف x للطرفين

$\quad\quad +x \quad\quad +x$

$$\frac{x^2 - 5 + x}{x} = \frac{x}{x}$$ نقسم على x

ام المجد

$$x - \frac{5}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{x}}$$

2019/10/2 01:11

شروط الحصول لصيغ الوصفة النامية أن يكون x في طرف البقية في طرف اخر

المبرهنات وفط الخصوص

اذا كان $f(x)$ له مشتقة متصلة على فترة وكان $0 < K \leq f'(x)$
فإن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α يقع بين 0 و $\frac{-f(0)}{K}$

حل المعادلة $f(x) = 0 \Leftarrow \left[0, \frac{-f(0)}{K}\right]$

مثال 8

$$f(x) = x - e^{-x}$$
$$f'(x) = 1 - -e^{-x} = 1 + e^{-x}$$

$$f(0) = 0 - e^{-0} = -1 \qquad f(1) = 1 - 0 = 1$$

تحقق القيمة الوسطية $f(0) \cdot f(1) < 1$

∴ الفترة $[0, 1]$

الحل حسب المبرهنة (4)

$$f(x) = x - e^{-x}$$
$$f'(x) = 1 + e^{-x} \geq 1$$

فترة الحل $\left[0, \frac{-f(0)}{k}\right]$

نفرض قيمة $\boxed{-y} = f(0)$

$$f(0) = 0 - e^{-0}$$
$$= 0 - \frac{1}{e^{0}} = 0 - \frac{1}{\infty} = 0 - 1 = \boxed{-1}$$

∴ الفترة $[0, 1]$

2019/10/2 01:11

* المشتقة الأولى ⟸ $g'(x) = \frac{1}{1+\lambda}\left[\lambda + G'(x)\right]$

* نختار قيمة λ حتى تكون $|g'(x)| < 1$ والأفضل أن تكون عدداً صحيحاً
* نختار قيمة k بحيث يكون $k+1$ من مضاعفات العشرة أو الماية حسب السؤال

أوجد جذر الاقتران بطريقة النقطة الثابتة

$f(x) = x - e^{-x}$

① نجد قيمة $G(x)$ حسب القانون ⟸

$\boxed{G(x) = x + f(x)}$ *

$= x + x - e^{-x}$

$\boxed{G(x) = 2x - e^{-x}}$

② نجد المشتقة الأولى $G'(x)$

$G'(x) = 2 + e^{-x}$

* $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$ أقل من 1 دائماً

③ نجد قيمة λ بحيث $\boxed{-G'(x) = \lambda}$ *

$-G'(x) = -(2 + e^{-x}) = \lambda$

$-2 - e^{-x} = \lambda$

نعوض بدل $e^{-x} = 1$ ⟸

$-2 - 1 = \lambda = \boxed{-3}$

④ نعوض بالقانون

$g'(x) = \frac{1}{1+\lambda}\left[\lambda + G'(x)\right]$

$= \frac{1}{1-3}\left[-3 + 2 + e^{-x}\right]$

$= \frac{1}{-2}\left[-1 + e^{-x}\right]$ ⟸ الجواب النهائي $g'(x)$

يتبع ⟵

2019/10/2 01:11

⑤ بطريقة $g(x) \leftarrow$

$$g(x) = \int g'(x)\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{2}\left[-1 + e^{-x}\right] dx$$

$$= \frac{-1}{2}\left[-x - e^{-x}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\left[x + e^{-x}\right]$$

⑥ عندما $x_0 = 0 \Leftarrow$

$$X_{n+1} = g(X_n)$$

$$X_{0+1} = g(x_0)$$

$$X_1 = g(x_0) = g(0) = \frac{1}{2}\left[0 + e^{-x}\right] = \frac{1}{2}\left[0 + \frac{1}{e^{x}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \frac{1}{\infty}\right] = \frac{1}{2}(1) = \boxed{\frac{1}{2} = x_1}$$

⑦ عندما $x_n = 1$

$$X_{n+1} = g(X_n) \Rightarrow X_{1+1} = g(X_1)$$

$$X_2 = g(X_1)$$

$$= g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[x + e^{-x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right] \Rightarrow X_2 = .553265329$$

⑧ عندما $n = 2$

$$X_{2+1} = g(X_2)$$

$$X_3 = g(X_2) = g(.553265329)$$

$$= \frac{1}{2}\left[.553265329 + e^{-.553265329}\right] \Rightarrow \boxed{X_3 =}$$

$\boxed{\text{كمل } n = 4}$

ام الطحين

مثال ٤ أثبت أن الاقتران له نقطة وحيدة عند [$0, 2\pi$]

$g(x) = \pi + .5 \sin x$

$g'(x) = 0 + .5 \cos x = .5 \cos x$

$-1 < \cos x < 1$ ← دائماً صحيحة

$-.5 < .5 \cos x < .5$ نضرب المتباينة ب .5

$|.5 \cos x| < .5 < 1$

$|g'(x)| < \alpha$

∴ الحل الوحيد $\alpha = .5$

2019/10/2 01:12

محاضرة 3

* طريقة نيوتن - رافسون
هي احدى طرق النقطة الثابتة لكن تقاربها غير خطي
* الصيغة العامة لطريقة نيوتن - رافسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

+ كلما اخترنا قيمة أقرب لكون النتيجة أدق

$$x_0 \Rightarrow n=0 \Rightarrow x_{0+1} = x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$n=1 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$n=2 \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

أم المجد

مثال أوجد جذر الاقتران بطريقة نيوتن - رافسون

$f(x) = x^2 - 3$ $[1, 3]$ اذا كانت $x_0 = 1$

(1) نتأكد أنه $f(a) \cdot f(b) < 0$

$f'(x) = 2x$ ← المشتقة

$f(1) = 1 - 3 = -2$

$f(3) = 3^2 - 3 = 6$

$-2 \cdot 6 < 0$ ← تحقق القيمة الوسطية

نبدأ أول قيمة من $x_0 = 1$

$\boxed{x_0 = 1}$ القيمة الابتدائية

$$n=0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

$f(1) \longrightarrow$ نعوضها في الاقتران

$f'(1) \longrightarrow$ نعوضها في المشتقة

$$= 1 - \frac{(-2)}{2} = \boxed{2}$$

2019/10/2 01:12

$$n=1 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = \boxed{1.75}$$

$$n=2 \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$= 1.75 - \frac{f(1.75)}{f'(1.75)} = \boxed{}$$

$$n=3 \Rightarrow x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \Rightarrow$$

نحن فقط أول أربع خطوات (أربع قيم x_0, x_1, x_2, x_3)

* في حالة الجذور المضاعفة تؤدي طريقة نيوتن الى تقارب خطي ثابته $\frac{1}{2}$

* حسنات وسيئات طريقة نيوتن ص 92

$$(\text{البعد})\ M = \frac{\max|f''(x)|}{\min|f'(x)|}$$

ام الماجد

2019/10/2 01:12

* طريقة القاطع
* ليست من طرق النقطة الثابتة
* نبدأ بقيمتين تحصران صفراً ولكنها لا تشترط بقاء الجذر بالفترة نختار أصغر عددين يحققان $f(a) \cdot f(b) < 0$
* رتبة تقاربها $1.618 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ النسبة الذهبية
* لا تحتاج لحساب المشتقة

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

* يعطينا x_0, x_1 ← نبدأ الحل من $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5$

مثال
$f(x) = x^2 - 3 \qquad [1, 3]$

نتأكد من تحقق $[1, 3]$ للنظرية القيمة الوسطية $f(a) \cdot f(b) < 0$
يمكن أن نقلل الفترة لتصبح $[1, 2]$

$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2$
$f(x_0) = -2 \qquad f(x_1) = 1$

نبدأ من x_2

$\boxed{n=1}$
$$x_2 \Rightarrow x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$
$$= 2 - 1\left(\frac{2-1}{1-(-2)}\right) = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$\boxed{n=2}$ $x_3 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$ نحسب قيمة $f\left(\frac{5}{3}\right)$

$$= \frac{5}{3} - \underbrace{f\left(\frac{5}{3}\right)}_{\frac{-2}{9}} \frac{\frac{5}{3} - 2}{\left(\frac{-2}{9}\right) - 1} =$$

نكمل $n=3$
$n=4$

2019/10/2 01:12

أثر مضاعفة الجذور $\overset{102}{\text{P}}$ ص

* اذا كان α جذر مضاعف (المضاعفة P) للمعادلة $f(x)=0$
فإنه $f(x)=(x-\alpha)^P h(x)$
حيث $h(\alpha)\neq 0$

* ثابت التقارب ⇐ $g'(\alpha)=1-\frac{1}{P}$

$$=\frac{P-1}{P}$$

تقارب طريقة نيوتن خطي وثابته ⇑

* لتحويل طريقة نيوتن من خطي لرتبة ثانية

$$x_{n+1}=x_n-P\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

* وعندما لا نعرف مضاعفة الجذر P نستخدم القاعدة ⇐

$$K(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$K(x)=1-\frac{(x-\alpha)\,h(x)}{P\,h(x)+(x-\alpha)\,h'(x)}$$

ثم نعوضها لينتج $K'(\alpha)=\frac{1}{P}$

P تقع بين العددين ⇐ $\frac{1}{K'(a)}$, $\frac{1}{K'(b)}$

اختبارات التقارب منطقي (موضوعي) $\overset{107}{\text{up}}$

2019/10/2 01:13

* الوحدة الثالثة الطرق المباشرة لحل المعادلات الخطية
تعتمد على عمليات الصف البسيطة مادة الجبر الخطي

تحويل نظام معادلات لمصفوفة

$$2x_1 + 3x_2 = 7$$
$$-x_1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 = 0$$
$$x_3 - x_2 = 4$$

$$\underset{\text{المعاملات } A}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

* مصفوفة المنقول ← تحويل الصف ← للعمود رمزها A^T

* المصفوفة الممتدة ← مصفوفة المعاملات ومعها النواتج (المزيدة)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 7 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

1 المصفوفة O (الصفرية)
كل عناصرها أصفار

2 المصفوفة D (القطرية)
كل العناصر على القطر تكون أعداد والبقية أصفار

3 المصفوفة I (الوحدة) (المحايدة)
كل العناصر على القطر = 1 والبقية أصفار, هي قطرية

4 المصفوفة غير المفردة ← لها نظير ضربي [مربعة]

5 مصفوفة النظير ← A^{-1} بحيث أنه ← $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

6 المصفوفة U (المثلث العلوي)
كل عناصرها من القطر فأعلى أعداد وتحتها أصفار

7 المصفوفة L (المثلث السفلي)
كل عناصرها من القطر فأسفل أعداد وفوقها أصفار

ام المجد

~~* طريقة (جاوس) الاختزال والتعويض العكسي~~

* ايجاد نظير المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

① نجد المحددة $|A|$

$$|A| = 2 * 1 - (-1)(1) = \boxed{3}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

* طريقة أخرى لايجاد النظير.

~~* باستخدام جاوس~~ نضع مصفوفة مع مصفوفة الوحدة

استخدم عمليات الصف البسيط لتحويل A إلى I

$$\left[A \mid I \right] \xrightarrow[\text{صف بسيط}]{\text{عمليات}} \left[I \mid A^{-1} \right]$$

* عمليات الصف البسيط

① تبديل صف بآخر ⟸ $R_1 \longleftrightarrow R_2$

② ضرب صف بعدد حقيقي ⟸ KR_1

③ ضرب صف بعدد ثم اضافته لصف آخر ⟸ $KR_1 + R_2$

* يجب أن نستمر بعمليات الصف البسيط لنصل للشكل الصفي المميز وتصبح مصفوفة وحدة

2019/10/2 01:13

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{2}{3}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2+R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$I \qquad A^{-1}$

* طريقة جاوس الاختزال والتعويض العكسي

① نأخذ المصفوفة المزيدة

② نجري عمليات صف بسيط لتحويلها لمصفوفة U أو L

③ التعويض العكسي

الفكرة

تحويل المصفوفة المزيدة لمصفوفة U أو L

وعمل تعويض عكسي للقيم

مثال 4 [1] نكتب المصفوفة المزيدة ⇐

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

[2] نحول العناصر من أعلى أو أسفل لأصفار لتصبح مثلثية U أو L

العمليات التي نجريها ⇐

1. $-2R_1 + R_2$
2. $R_2 \longleftrightarrow R_3$
3. $-R_1 + R_2$
4. $-R_1 + R_4$
5. $2R_3 + R_4$

لينتج

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

مصفوفة مثلثية علوية U

[3]

$2x_4 = 4 \Rightarrow \boxed{x_4 = 2}$

$-x_3 - x_4 = -4 \Rightarrow -x_3 - 2 = -4 \Rightarrow -x_3 = -2 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$

$2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow 2x_2 - 2 + 2 = 6 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3}$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \Rightarrow x_1 - 3 + 2(2) - (2) = -8 \Rightarrow \boxed{x_1 = -7}$

* حل المعادلات الخطية باستخدام طريقة جاوس - جوردان

الفكرة ⇐

تحويل المصفوفة المزيدة لمصفوفة قطرية

نستغني عن التعويض العكسي، ويكون التعويض مباشرة

ام المجد

2019/10/2 01:13

حل المعادلات الخطية باستخدام طريقة النظير .

المصفوفة يمكن كتابتها على الصورة $A\ X = b$

معاملات   مجاهيل   ثوابت

لضرب الطرفين بـ A^{-1} وينتج $\Leftarrow$

$$X = A^{-1} b$$

خطوات الحل

① ايجاد النظير A^{-1}

② ايجاد حاصل الضرب $A^{-1} b$ لمعرفة X المجاهيل

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

① $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 - -1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1} b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

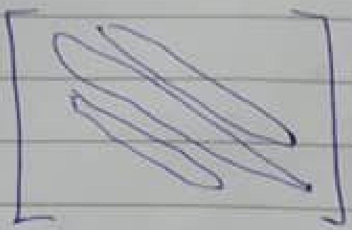
حاصل الضرب صف بعمود

ام المجتب

2019/10/9 00:41

* حل المعادلات الخطية باستخدام طريقة التحليل للمصفوفة LU

* مصفوفة قطرية مع اللي فوقه وتحته أرقام ← ثلاثية قطرية والباقي أصفار



* القطر الرئيسي $a_1 \ldots\ldots a_n$
* القطر العلوي $r_1, \ldots\ldots r_{n-1}$
* القطر السفلي $c_2, \ldots\ldots c_n$

* نقسم هذه المصفوفة إلى مصفوفتين إحداها مثلث علوي U والثانية مثلث سفلي L

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ e_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & e_n & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & & \\ & d_2 & u_2 & \\ & & \ddots & u_{n-1} \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

$$L U \vec{x} = \vec{b}$$

$$U \vec{x} = \vec{z} \quad , \quad L \vec{z} = \vec{b}$$

* لإيجاد عناصر L, U

① نضع $d_1 = a_1$

② نضع $u_i = r_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n-1$

③ $i = 2, 3, \ldots, n$ ← $e_i = \dfrac{c_i}{d_{i-1}}$ $\qquad d_i = a_i - u_{i-1} e_i$

أم المجد

مثال 8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$a_1, w_1, c_2, a_2, w_2, c_3, a_3$

خطوات الحل ⇐

1. $d_1 = a_1$
2. $u_i = w_i \quad i = 1, 2, \dots n$
3. $e_i = \dfrac{c_i}{d_{i-1}}$
4. $d_i = a_i - u_{i-1}\, e_i$

$d_1 = a_1 = \boxed{2}$

$u_1 = w_1 = \boxed{-1} \qquad u_2 = w_2 = \boxed{-1}$

$e_2 = \dfrac{c_2}{d_{1-1}} = \dfrac{c_2}{d_1} = \boxed{\dfrac{-1}{2}}$

$d_2 = a_2 - u_{2-1}\, e_2$

$2 - (-1)\left(\frac{-1}{2}\right) = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

$e_3 = \dfrac{c_3}{d_{3-1}} = \dfrac{c_3}{d_2} = \dfrac{-1}{\frac{3}{2}} = \boxed{\dfrac{-2}{3}}$

لحساب e_3 يلزمنا d_2 ⇑

دائماً بعد حساب e_2 ⇐ نحسب d_2

e_3 ⇐ نحسب d_3

$d_3 = a_3 - u_{3-1}\, e_3$

$= 2 - (-1)\left(\frac{-2}{3}\right) = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

القيم الناتجة نعوضها في المصفوفتان U, L

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 \\ 0 & e_3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

حسب صفحة 14
163
UP

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 \\ 0 & d_2 & u_2 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

$U\vec{x} = \vec{Z}$, $L\vec{Z} = \vec{b}$ تم حل المعادلات باستخدام LU حسب

$LZ = b$ ① حسب ⇐

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

من خلال عملية ضرب المصفوفات ⇐
نجد القيم المجهولة

$\boxed{Z_1 = 3}$

$-\frac{1}{2} Z_1 + Z_2 = -3$

$-\frac{1}{2}(3) + Z_2 = -3 \Rightarrow \boxed{Z_2 = \frac{-3}{2}}$

$-\frac{2}{3} Z_2 + Z_3 = 1$

$-\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{2}\right) + Z_3 = 1 \Rightarrow \boxed{Z_3 = 0}$

$$\begin{array}{c} Z \\ \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$UX = Z$ ② حسب ⇐

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

هنا عملية الضرب (العكسي) نجد القيم

$\frac{4}{3} X_3 = 0 \Rightarrow \boxed{X_3 = 0}$

$\frac{3}{2} X_2 - X_3 = \frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} X_2 = \frac{-3}{2} \Rightarrow \boxed{X_2 = -1}$

$2X_1 - X_2 = 3$

$2X_1 + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{X_1 = 1}$

$$\begin{array}{c} X \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

* الوحدة الرابعة
الطرق غير المباشرة لحل المعادلات الخطية
* مقياس المتجهات والمصفوفات
تعريف (1)
ليكن $\vec{X}$ متجه بعده n، فإن مقياس للمتجه X هو اقتران مجاله R^n ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة مع الصفر ⟸ $\|X\|$ ويحقق ما يلي ⟸
1- $\|X\| \geq 0$ لكل متجه X بعده n (المقياس دائماً موجب).
2- $\|X\| = 0$ إذا وفقط إذا كان $\vec{X} = 0$ (المتجه الصفري مقياسه صفر).
3- $\|\alpha \vec{X}\| = |\alpha| \, \|\vec{X}\|$ ⟸ نخرج القيمة المطلقة للعدد الحقيقي خارج المقياس.
4- $\|X + Y\| = \|X\| + \|Y\|$ (المتباينة المثلثية)
مقلوب المتجه (المنقول) $\vec{X} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \ldots]^T$
المقاييس ⟸
[1] المقياس L_1 (الأول) ⟸

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

مجموع القيم المطلقة ~~لل~~ المتجه

[2] المقياس L_2 (الثاني) ⟸

$$\|X\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

1) تربيع كل قيمة من قيم المتجه
2) نجمع القيم بعد التربيع
3) نأخذ جذر الناتج

[3] المقياس L_∞ (اللانهائي) ⟸

$$\|X\|_\infty = \max |X_i|$$

اكبر قيمة للقيم المطلقة كلها

2019/10/9 00:41

مثال تمرين: افرض أن $X = [-1 \;\; 2 \;\; 1]^T$ أوجد $\|X\|_1$ $\|X\|_2$ $\|X\|_\infty$

1) $\|X\|_1 = \sum |x_i|$

$= |-1| + |2| + |1| = 1 + 2 + 1 = \boxed{4}$

2) $\|X\|_2 = \left\{ \sum x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \left\{ (-1)^2 + (2)^2 + (1)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + 4 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} = \{6\}^{\frac{1}{2}}$

$= \boxed{\sqrt{6}}$

3) $\|X\|_\infty = \max |x_i|$

$= |-1| \; , |2| \; , |1| = 1 \; , 2 \; , 1 = \boxed{2}$

ام المحتسب

تعريف (2)

المتتالية $\{X^k\}_{k=1}^{\infty}$ تؤول إلى المتجه X بالنسبة للمعيار $\|\ \|_v$ إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد صحيح $N(\epsilon)$ بحيث لكل $k > N(\epsilon)$ $\|X^k - X\| < \epsilon$

مثال 2 افرض أن X متجه $X^{(k)} = \left[2 , 3-\frac{1}{k} , \frac{3}{k^2}\right]$

أوجد $X^{(1)}$ نعوض بدل $k=1 \Leftarrow$

$$X^{(1)} = \left[2 , 3-\frac{1}{1} , \frac{3}{1^2}\right]$$

$$X^{(1)} = \left[2 , 2 , 3\right]$$

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = \left[2 , 3-\frac{1}{\infty} , \frac{3}{\infty}\right]$$

$$X = \left[2 , 3 , 0\right]^T$$

$$X^{(2)} = \left[2 , 3-\frac{1}{2} , \frac{3}{2^2}\right] = \left[2 , \frac{5}{2} , \frac{3}{4}\right]$$ نعوض $k=2 \Leftarrow$

$$X^{(3)} = \left[2 , 3-\frac{1}{3} , \frac{3}{3^2}\right] = \left[2 , \frac{8}{3} , \frac{1}{9}\right]$$ نعوض $k=3 \Leftarrow$

2019/10/9 00:41

تعريف (3)

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ ، ان كثيرة الحدود $P(\lambda)$ (المميزة) المحددة

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

* نحول المصفوفة A ← الى مصفوفة مميزة $A - \lambda I$

1. نطرح λ من كل عنصر من القطر ← العنصر $-\lambda$

2. نجد المحددة للمصفوفة الجديدة ← $|A - \lambda I|$

3. نجد قيم λ وهي القيم المميزة

تعريف (4)

اذا كانت P كثيرة حدود مميزة للمصفوفة A ، فان جذورها تسمى القيم المميزة

مثال 3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$

الجذور المميزة $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$

2019/10/9 00:41

تعريف (5) اكبر قيمة القيم المطلقة للقيم المميزة (للاعداد الحقيقية)
نصف القطر الطيفي $\rho(A) \neq r(A)$

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|$$

* في حالة الاعداد المركبة
نجد القيمة المطلقة للقيم المميزة باستخدام $|\lambda| = \sqrt{a^2+b^2}$

تعريف (6)
A مصفوفة $n \times n$ ، مقياس المصفوفة A هو اقتران دالة كافة المصفوفات المربعة $n \times n$ ، ومداه الاعداد الحقيقية غير السالبة
خواصها

1. $\|X\| \geq 0$ و $\|X\| = 0$ عندما A تساوي المصفوفة الصفرية
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$
3. $\|A+B\| = \|A\| + \|B\|$
4. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

* مقاييس ~~النواحي~~ المصفوفات

$\boxed{1}$ المقياس الأول $\|A\|$ $\qquad \|A\|_1 = \max \sum |a|$
مجاميع الأعمدة (القيمة المطلقة لقيم الأعمدة)
ثم نختار أكبر مجموع
نجمع عناصر كل عمود ثم نأخذ القيمة المطلقة له ، ونختار أكبر جواب من المجاميع

$\boxed{2}$ المقياس ~~الثاني~~ (مالانهاية) $\qquad \|A\|_\infty = \max \sum |a|$
مجاميع الصفوف

$\boxed{3}$ المقياس الثاني $\qquad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$
الجذر التربيعي لنصف القطر الطيفي (لمنقول المصفوفة × المصفوفة)

2019/10/9 00:42

نأخذ حاصل ضرب $A^T * A$

نجد $\rho(A^TA) \Leftarrow \det(A^TA - \lambda I)$

ثم نجد القيم المميزة λ ونأخذ أكبر قيمة للقيم المطلقة المميزة

ثم تكون

$\|A\|_2 = \sqrt{\text{الجواب}}$

$\boxed{3}$ مقياس اقليدس (فروبينيس)

$$\|A\|_F = \left\{\sum\sum|a|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

① نربع كل قيم المصفوفة
② نجمع الناتج
③ نأخذ الجذر التربيعي للناتج

* تقدير الأخطاء والتحسين والمتابع

* مقدار الخطأ $\Leftarrow$

$$\underset{\text{الخطأ}}{\vec{e}} = \underset{\text{القيمة الحقيقية}}{\vec{X}} - \underset{\text{القيمة التقريبية}}{\vec{X}^*}$$

* مقدار الفرق بين الحل ~~المحوسب~~ المحسوب والحل المحقق للمسألة

$$\vec{r} = \vec{b} - A\vec{X}^*$$

اذا كان $\|\vec{r}\|$ صغيراً فإن $\|\vec{e}\|$ صغيراً

العلاقة بين $\vec{e}$ و $\vec{r}$ عكسية $\qquad A\vec{e} = \vec{r}$

ام المجد

2019/10/9 00:42

تعريف (7) لتكن A مصفوفة مربعة غير مفردة (لها نظير).

رقم الحالة $C(A)$ $\quad p = 1, 2, \infty \quad$ $C(A) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_p$

① نحسب النظير

② مقياس مالانهاية للنظير

③ نضرب المقياس السابق بمقياس $\|A\|_\infty$

اذا كان رقم الحالة لا يبعد كثيراً عن الواحد فإن المصفوفة حالتها جيدة

لكن اذا كانت بعيدة عن الواحد فإن مصفوفة عليلة

مثال 6 أوجد رقم الحالة $C(A)_\infty$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001$$

المعاملات

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$

2 $\|A\|_\infty =$ اكبر عنصر في مجاميع الصفوف
$= 3.0001$

3 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1.0001 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{bmatrix}$

4 $\|A^{-1}\|_\infty = 20000$

5 $C(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty$

$$= 20000 * 3.0001 = \boxed{60002}$$

المصفوفة عليلة (بعيدة عن الواحد)

2019/10/9 00:42

* الطرق غير المباشرة (المتتابعة) لحل المعادلات الخطية

$\boxed{1}$ طريقة جاكوبي التتابعية

نبدأ للمعادلات ونكتب كل معادلة بدلالة متغير

المعادلة الأولى بدلالة x_1

" الثانية " x_2

" الثالثة " x_3

⋮

أم المحبس *

نستخدم الحل الابتدائي ونعوضه لإيجاد الحل الأول

نستخدم الحل الأول ونعوضه لإيجاد الحل الثاني

⋮

مثال خارجي الحل الابتدائي $x^{(0)} (0, 0, 0)^T$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - 4y + z = -2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

$x = \frac{7 - 2y}{5} \Rightarrow x^{(k+1)} = \frac{7 - 2y^{(k)}}{5}$ بدلالة x

$y = \frac{x + 2 + z}{4} \Rightarrow y^{(k+1)} = \frac{x^{(k)} + 2 + z^{(k)}}{4}$ بدلالة y

$z = \frac{3 - y}{2} \Rightarrow z^{(k+1)} = \frac{3 - y^{(k)}}{2}$ بدلالة z

$\boxed{k = 0}$

$$x^{(1)} = \frac{7 - 2y^{(0)}}{5} = \frac{7 - 2(0)}{5} = \frac{7}{5}$$

$$y^{(1)} = \frac{x^{(0)} + 2 + (z)^{0}}{4} = \frac{0 + 2 + 0}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z^{(1)} = \frac{3 - y^{(0)}}{2} = \frac{3 - 0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x^{(1)} \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

2019/10/9 00:42

فقط للحل على هذه الطريقة مطلوب $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ فقط للاستاذ (عامر عمي)

$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$ لايجاد $x^{(2)}$

$$x^{(2)} = x^{(k+1)} \quad \boxed{k=1} \Rightarrow x^{(2)} = \frac{7 - 2y^{(1)}}{5} = \frac{7 - 2(.5)}{5} = \boxed{1.2}$$

$$y^{(2)} = \frac{2 + x^{(1)} + z^{(1)}}{4} = \frac{2 + (1.4) + (1.5)}{4} = \boxed{1.225}$$

$$z^{(2)} = \frac{3 - y^{(1)}}{2} = \frac{3 - (1.5)}{2} = \boxed{1.25}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.225 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

* هذه الطريقة تتابعية كل خطوة تعتمد على السابقة لها

ام المجد

2019/10/9 00:42

محاضرة 5

2) طريقة جاوس سايدل التتابعية

فكرة الحل هو نستخدم أحدث قيمة للعنصر في التعويض
أول خطوة نستخدم فيها القيم الابتدائية فقط
(نفس فكرة جاكوبي في البداية)

مثال 8

$4x_1 + x_2 - 4x_3 = -5 \rightarrow$

$x_1 = \dfrac{4x_3 - x_2 - 5}{4}$

$x_2 = \dfrac{-x_3 - x_1 + 1}{2}$

$x_3 = \dfrac{x_2 + 9}{4}$

$x^{(0)} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$

$x_1^{(1)} = \dfrac{4x_3^{(0)} - x_2^{(0)} - 5}{4} = \dfrac{4(1) - (1) - 5}{4} = \dfrac{-2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$ $\boxed{-.5}$

الجديدة

$x_2^{(1)} = \dfrac{-x_3^{(0)} - x_1^{(1)} + 1}{2} = \dfrac{(-1) - (-\frac{1}{2}) + 1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{.25}$

الجديدة

$x_3^{(1)} = \dfrac{x_2^{(1)} + 9}{4} = \dfrac{\cancel{x_4} + 9}{4} = \cancel{\boxed{\frac{5}{2}}}$ $\cancel{\boxed{2.5}}$ $\dfrac{9.25}{4} = \boxed{2.3125}$

نكمل نفس الخطوات $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$

$x_1^{(2)} = 1$

$x_2^{(2)} = 1.0656$

$x_3^{(2)} = 5.0328$

2019/10/24 09:19

تدريب 4

$x^{(0)} = [0 \quad 0]^T$

$4x_1 - x_2 = 15 \Longrightarrow x_1^{(1)} = \frac{x_2^{(0)} + 15}{4}$

$x_1 + 5x_2 = 9 \Longrightarrow x_2^{(1)} = \frac{-x_1 + 9}{5}$

$x_1^{(1)} = \frac{x_2^{(0)} + 15}{4} = \frac{0 + 15}{4} = \frac{15}{4} = \boxed{3.75}$

جديدة

$x_2^{(1)} = \frac{-x_1^{(1)} + 9}{5} = \frac{-3.75 + 9}{5} = \boxed{1.05}$

$x_1^{(2)} = \frac{x_2^{(1)} + 15}{4} = \frac{1.05 + 15}{4} = \boxed{4.0125}$

$x_2^{(2)} = \frac{-x_1^{(2)} + 9}{5} = \frac{-4.0125 + 9}{5} = \boxed{.9975}$

كل مرة نستخدم الجواب في الخطوة السابقة

ام الماجد

2019/10/24 09:19

3 * طريقة (SOR)

طبعاً لازم نبدأ حل جاوس سايدل لنحل لطريقة SOR

القانون ⟸ $x^{(k+1)} = x^{(k)} - w\left(x^{(k)} - \tilde{x}^{(k+1)}\right)$

$w \Rightarrow$ ثابت التسارع

$\boxed{1}$ $x_1^{(1)} = \cancel{x^{(0)} - w\left(x^{(0)} - \tilde{x}^{(1)}\right)} \Rightarrow (1-w)\,x_1^{(0)} + w\,\tilde{x}_1^{(1)}$

$\boxed{2}$ $x_2^{(1)} = (1-w)\,x_2^{(0)} + w\,\tilde{x}_2^{(1)}$

$\boxed{3}$ $x_1^{(2)} = (1-w)\,x_1^{(1)} + w\,\tilde{x}_1^{(2)}$

$\boxed{4}$ $x_2^{(2)} = (1-w)\,x_2^{1} + w\,\tilde{x}_2^{(2)}$

أولاً نحل باستخدام جاوس - سايدل لاستخراج القيم

$\tilde{x}_1^{(1)}$ $\quad \tilde{x}_2^{(1)}$ $\quad \tilde{x}_1^{(2)}$ $\quad \tilde{x}_2^{(2)}$

ثانياً نعوض القيم السابقة في الأربع قوانين السابقة

ام المجد

2019/10/24 09:19

مثال 9

$X^{(0)} = [0 \;\; 0]^T$

تم حسابها من طريقة جاوس سايدل

$\hat{X}_1^{(1)} = 3.75 \qquad \hat{X}_2^{(1)} = 1.05$

$\hat{X}_1^{(2)} = 4.0125 \qquad \hat{X}_2^{(2)} = .9975$

نعوض في الاربع قيم التالية

$$\boxed{X_1^{(1)} = (1-W)\, X_1^{(0)} + W\, \hat{X}_1^{(1)}}$$

$$= (1-1.2)(0) + (1.2)(3.75) = \boxed{4.5}$$

$$\boxed{X_2^{(1)} = (1-W)\, X_2^{(0)} + W\, \hat{X}_2^{(1)}}$$

$$= (1-1.2)(0) + (1.2)(1.05) = \boxed{1.260}$$

$$X_1^{(2)} = (1-W)\, X_1^{(1)} + W\, \hat{X}_1^{(2)}$$

$$= (1-1.2)(4.5) + (1.2)(4.0125) = \boxed{3.195}$$

$$X_2^{(2)} = (1-W)\, X_2^{(1)} + W\, \hat{X}_2^{(2)}$$

$$= (1-1.2)(1.260) + (1.2)(.9975) = \boxed{.945}$$

$$[3.915 \quad .945]^T = X^{(2)}$$

* تمثيل الطرق غير المباشرة على هيئة مصفوفات

الصيغة العامة لجاكوبي جاوس سايدل - SOR

$$X^{(k+1)} = T X^{(k)} + C$$

المصفوفة T ←

عناصر القطر الرئيسي أصفار

ثم الصف الأول نقسم كل عنصر على أول عنصر فيه

= = الثاني = = = = أول عنصر فيه

مصفوفة النواتج C ←

$$C = \left[\frac{b_1}{a_{11}} \quad \frac{b_2}{a_{22}} \quad \cdots \quad \frac{b_n}{a_{nn}} \right]$$

$\boxed{1}$ في حالة جاكوبي

* $D X^{(k+1)} = (L+U) X^{(k)} + b$

صيغة أخرى

* $X^{(k+1)} = D^{-1}(L+U) X^{(k)} + D^{-1} b$

$\boxed{2}$ في حالة جاوس سايدل

* $(D-L) X^{(k+1)} = U X^{(k)} + b$

* $X^{(k+1)} = (D-L)^{-1} U X^{(k)} + (D-L)^{-1} b$

$\boxed{3}$ في حالة خوارزمية SOR

* $(D-wL) X^{(k+1)} = \left((1-w) D + w U\right) X^{(k)} + w b$

* $X^{(k+1)} = (D-wL)^{-1} \{(1-w) D + w U\} X^{(k)} + w (D-wL)^{-1}$

$$T_s = (D-wL)^{-1} \{(1-w) D + w U\}$$

$$C_s = w (D-wL)^{-1} b$$

مبرهنة (١)

لكل متجه أولي مثل $\vec{X}^{(0)}$ المتتالية $\{X^k\}_{k=0}^{\infty}$ والمعرفة بالصورة المعروفة

$X^{(k+1)} = T X^{(k)} + C$ لكل $k \geq 0$, $C \neq 0$

تؤول إلى الحل الصحيح والوحيد لنظام المعادلات $X = TX + C$

إذا وفقط إذا كان $\rho(T) < 1$ [نصف القطر الطيفي للمصفوفة T]

تعريف (8)

مصفوفة سائدة قطرياً

إذا كان ⟸ $|a_{ii}| \geq \sum |a_{ij}|$

← نذهب إلى العنصر الأول بالقطر، هل يساوي القيمة المطلقة لمجاميع باقي العناصر أم لا يساوي ؟؟ لكل قيم القطر

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) $|3| \overset{?}{\geq} |-2| + |1|$ ✓
صحيحة $3 \geq 3$

(2) $|-3| \overset{?}{\geq} |1| + |2|$ ✓
صحيحة $3 \geq 3$

(3) $|4| \overset{?}{\geq} |-1| + |2|$ ✓
صحيحة $4 \geq 3$

∴ سائدة قطرياً

* مصفوفة سائدة قطرياً فعلاً $|a_{ii}| > \sum |a_{ij}|$

بدون إشارة يساوي

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$|-4| \overset{?}{>} |2| + |1|$ $4 > 3$ ✓

$|6| \overset{?}{>} |1| + |2|$ $6 > 3$ ✓

$|5| \overset{?}{>} |-2| + |1|$ $5 > 3$ ✓

[illegible] قطرياً فعلاً

مبرهنة (2)

اذا كانت المصفوفة A سائدة قطرياً فعلاً لكل اختيار أولي $X^{(0)}$ فان كلتا الطريقتين جاكوبي وجاوس سايدل تعطي متتالية من المتجهات $\{X^k\}_{k=1}^{\infty}$ تؤول الى $Ax = b$ [ترتيب القطرية بشكل سائدة قطرياً لضمان وجود الحل].

تعريف (9)

المصفوفة الموجبة والمتماثلة $A^T = A$ تسمى موجبة مؤكدة اذا كان $X^T A X > 0$ لكل متجه X بعده n

ام المجتبى

مبرهنة (3)

اذا كانت المصفوفة A موجبة مؤكدة و $0 < w < 2$ فان طريقة SOR تؤدي للحل المطلوب لكل اختيار أولي $X^{(0)}$

مبرهنة (4)

اذا كانت المصفوفة A موجبة مؤكدة وثلاثية قطرية فان $P(T_G) = P(T_J)^2 < 1$

وتكون القيمة المثلى للمتغير w في طريقة SOR

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - P(T_J)^2}}$$

حيث أن $T_J = D^{-1}B$ $\quad P(T_s) = w - 1$

2019/10/24 09:20

مثال ١٥

$$4x_1 + 3x_2 = 24$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30$$
$$-x_2 + 4x_3 = -24$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

① نكتب مصفوفة المعاملات A

① نأخذ عناصر القطر الرئيسي كما هي ونصفر الباقي لنحصل D

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

② نجد نظير $D \leftarrow D^{-1} = \frac{1}{\text{عناصر القطر الرئيسي}}$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

③ نذهب لمصفوفة A لنحولها لمصفوفة B

1. نضع عناصر القطر الرئيسي أصفاراً
2. نعكس اشارة جميع العناصر

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

④ نجد المصفوفة T_j

$$T_j = D^{-1}B \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -.75 & 0 \\ -.75 & 0 & .25 \\ 0 & .25 & 0 \end{bmatrix}$$

⑤ نحسب $\rho(T_j)$ نصف القطر الطيفي

$$\rho(T_j) = \begin{bmatrix} 0-\lambda & -.75 & 0 \\ -.75 & 0-\lambda & .25 \\ 0 & .25 & 0-\lambda \end{bmatrix}$$

نجد القيم المميزة λ

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \sqrt{.625} \quad \cancel{\lambda_3 = 0}$

$\lambda_2 = -\sqrt{0.625}$

2019/10/24 09:20

$\rho(T_j) = \max|\lambda| = |\sqrt{.625}| = \sqrt{.625}$

(4) نعوض $\rho(T_j)$ في القانون

$$W = \frac{2}{1+\sqrt{1+\rho(T_j)^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1+(\sqrt{.625})^2}} = \boxed{1.24}$$

ام المجد

* خطوات الحل

1. نكتب مصفوفة المعاملات من نظام المعادلات ← A
2. نحولها لمصفوفة قطرية (مع ابقاء أرقام القطر كما هي) ← D
3. نجد نظير المصفوفة D ← D^{-1} ← $\left[\frac{1}{\text{عناصر القطر الرئيسي}}\right]$
4. نحول المصفوفة A ← β بالخطوات التالية
   - نضع عناصر القطر الرئيسي أصفاراً
   - نعكس اشارة بقية العناصر
5. نجد المصفوفة (T_j) ← $(T_j) = D^{-1}\beta$
6. نحسب $\rho(T_j)$ نصف القطر الطيفي بالخطوات المعروفة سابقاً
7. نعوض قيمة $\rho(T_j)$ في القانون التالي لايجاد قيمة W

$$W = \frac{2}{1+\sqrt{1+\rho(T_j)^2}}$$

انتهت مادة العملي

ام المجد