ملخص تفاضل وتكامل ١

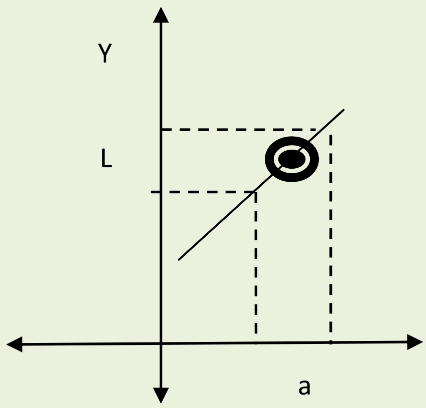
ملخص للمادة النصفية والنهائية بالاضافة لبعض الاسئلة المكررة واجابة اسئلة التقويم الذاتي

B1
[اختر التاريخ]

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال

قبل ان نبدا بتعريف النهاية لنتمعن الرسم البياني التالي ......

Lim f(x) =L



مفهوم النهاية (Lim) : تعني انه كلما كانت x قريبة جدا من a فان

F(x) قريبة جدا من L

**** طرق ايجاد النهايات :**

- **يتم اولا ايجاد النهاية بالتعويض المباشر وهناك احتمالات وهي:**

١-ان يكون الاقتران كثير حدود وبالتالي يكون الناتج عدد ثابت او صفر وبالتالي تكون الناهية موجودة وهي الرقم الناتج.

٢- ان يكون الاقتران نسبي (عدد كسري) وبالتالي هناك احتمالات للناتج وهي :

- ✓ ان يكون الناتج = $\frac{0}{0}$ وتسمى هذه الحاله ((حالة غير معينه)) ،، ويتم ايجاد النهاية عن طريق تفكيك كثيرات الحدود في الاقتران النسبي وايجاد الحدود المتشابهه واختصارها . ***** سيتم شرح طرق تفكيك كثيرات الحدود بعد قليل .**
- ✓ ان يكون الناتج = $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ وتكون النهاية موجودة وقيمتها الناتج المسجل .
- ✓ ان يكون الناتج =$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ وتكون النهاية غير معرفة او غير موجودة كعدد حقيقي.
- ✓ ان يكون الناتج = $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ ويكون الناتج مقبول وتكون النهاية هي الجواب نفسه مكتوب بابسط صورة .

- **اذا كان الاقتران نسبي وكان الناتج حالة غير معينة يتم تحليل البسط والمقام واختصار الحدود المتشابهه :**

مراجعه بسيطة لطرق تحليل كثيرات الحدود :

- الفرق بين مربعين $x^2 - y^2 = ((x-y)(x+y))$
- الفرق بين مكعبين $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$
- مجموع مكعبين $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$
- فك التربيع $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ //// $(x-y)^2 = x^2-2xy+y$^2

اذا تعريف النهاية :اذا كان $f(x)$ معرفا على جوار ناقصص للعدد **a** وكان **L** عددا حقيقيا موجودا فان $\underset{x \leftrightarrow a}{Lim}\, f(x) = L$ تعني انه ينبغي ان يقابل $\in > \mathbf{0}$ دائما وجود $\partial > \mathbf{0}$ بحيث اذا كان $0 < |x-a| < \partial$

فان $|f(x) - L| < \in$

** اسئلة التقويم الذاتي سنتساعد في حل النقطة الاولى ومن ثم نعتمد على نفسنا في حل النقاط الباقية ")

- **استخدم تعريف النهاية لاثبات ان :** $\underset{x \leftrightarrow 3}{Lim}\,(3x+1) = 10$

اولا : فلنفرض ان a=3 ,, L=10 , f(x) = 3x+1

$$0 < |x-3| < \partial \leftrightarrow |3x+1-10| < \in$$

$$|3x-9| < \in$$

$$3|x-3| < \in$$

$$|x-3| < \frac{\in}{3} \quad \rightarrow \quad \partial = \frac{\in}{3}$$

اذا $Lim\,(3x+1) = 10$

****تكون النهاية موجودة اذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .**

/ نظريات النهايات :

- نهاية الثابت تساوي الثابت نفسه : $\backslash Lim\ c = c$

  x---a

- $Lim\ (cx+b) = ca+b$ حيث c عدد ثابت .

  X-----a

- $Lim\ \big(f(x) \pm g(x)\big) = Lim\ f(x) \pm Lim\ g\ (x)$

  x-----a x---- a x-------a

- $Lim\ \big(f(x) * g(x)\big) = Lim f(x) * Lim\ g(x)$

  x------a x-----a x-------a

- $\dfrac{\underset{x---a}{Lim\ f(x)}}{\underset{x---a}{Lim\ g(x)}} = Lim\ \dfrac{f(x)}{g\ (x)}$ /// حيث g(x) ≠0/

- $Lim\ x^n = a^n$ نهاية x عندما تكون مرفوعه لاي اس تساوي حاصل نهاية x

  x---a

لوحدها مرفوعه لذلك الاس

- $Lim\ [f(x)]^n = [Lim\ f(x)]^n$

  X------a x--------a

- $Lim\ cf(x) = cLim\ f(x)$ نهاية حاصل ضرب ثابت في اقتران تساوي الثابت نفسه في نهاية الاقتران

سنتساعد في حل بعض من اسئلة التقويم الذاتي صفحة 23 من المقرر والاسئلة الباقية سنعتمد على انفسنا في حلها :

السؤال فرع (ج) : جد النهايات التالية في حال وجودها :

A. Lim 0 =؟؟

x-------7

مطلوب ايجاد نهاية الصفر عند 7 والصفر هو عدد ثابت ونهايته تساوي صفر **

اذا Lim 0=0

x------7

B. $Lim\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)=?$

x----1

* الحل $Lim\ \frac{x^2-1}{x-1}=Lim\frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}}=2$

x---1　　x--1

C. $\lim\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6=?$

x----1

$$\left(\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^6=2^6=64$$

الان فلنعتمد على انفسنا في حل الاسئلة المتبقية **)

الاقتران المتصل

يكون الاقتران f(x) متصل عند النقطة c اذا توفرت فيه هذه الشروط:

a. ان يكون f(x) معرفا على فترة مفتوحة تحتوي على c .

b. ان تكون نهاية f(x) (lim f(x)) موجودة .

x----c

c. ان تكون قيمة الاقتران تساوي النهاية .

نظريات في الاتصال:

اذا كان الاقترانان f(x) , g(x) متصلين عند النقطة "a"فان :

- =g(x)+f(x) اقتران متصل عند "a"
- =g(x)- f(x) اقتران متصل عند "a"
- =g(x) *f(x) اقتران متصل عند "a"
- $\frac{f(x)}{g(x)}$=اقتران متصل عند "a" بشرط g(x)≠0

اذا يمكننا القول : ان حاصل جمع اقترانين متصلين او طرحهما او ضربهما او قسمتهما يساوي اقترانا متصلا اذا كانت قيمة الاقتران المقسوم عليه لا تساوي صفرا ..

**** هيا اذهب الى الكتاب المقرر وقم بحل جميع الامثلة واسئلى التقويم الذاتي ،، هذا الدرس بسيط**

نظرية القيمة الوسطية ونظرية بلزانو

نظرية بلزانو :

الشروط:

- **ان يكون الاقتران f(x) متصلا على [a,b]**
- **ان يكون f(a)*f(b) <0**

اي ان f(a),f(b) مختلفان في الاشارة

نتيجة النظرية:

يوجد عدد واحد على الاقل مثل $c \in]a,b[$ بحيث f(c)=0

اي يوجد عدد واحد على الاقل مثل c ينتمي للفترة المفتوحه]a,b[بحيث f(c)=0

نظرية القيمة الوسطية تعميم لنظرية بلزانو

الشرووط:

- **ان يكون $f(x)$ متصلا على [a,b]**
- **$F(a) \neq F(b)$**

نتيجة النظرية:

لاي عدد مثل L يقع بين $f(a), f(b)$ ،،، يوجد عدد واحد على الاقل مثل $c \in]a,b[$ بحيث $f(c) = L$

**** اقتران اكبر عدد صحيح**

يكون الاقتران متصل الا عند اطراف الفترات.

اذا كان معامل س موجب :

- **نجد طول الفترة $\frac{1}{\text{معامل س}}$.**
- **نجد صفر ما داخل اكبر عدد صحيح.**
- **نعيد التعريف بحيث يظهر اول سطر في اعادة التعريف الصفر كمدى والمجال الجذر ≤ س ≥الجذر + طول الفترة .**
- **كلما نزلنا للاسفل نضيف للمدى ١ ولاطراف المجال طول فترة التغيير .**
- **تظهر المساواة على يمين الاطراف.**

اما اذا كان معامل س سالب فنفس الخطوات ولكن اول سطر في اعادة التعريف صفر كمدى اما المجال (الجذر – طول الفترة > س ≥ الجذر)

وكلما نزلنا للاسفل نطرح من المدى ١ ونضيف لاطراف المجال طول فترة التغيير والمساواة تظهر على يسار الاطراف .

- ***مثال:***

اذا كان $f(x) = [\frac{1}{2}x]$

طول الفترة = $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$$\begin{Bmatrix} 0 & ,2 \le x < 4 \\ 1 & ,4 \le x < 6 \\ 2 & ,6 \le x < 7 \\ 3 & .. \\ & . \\ & . \end{Bmatrix}$$ الاقتران غير متصل عند x=6

//
//

كالعادة سنتساعد في حل بعض اسئلة التقويم الذاتي وسنعتمد على نفسنا في حل البقية **

اسئلة التقويم الذاتي ص 36

- اثبت ان هناك قيما ل f(x)=0 في الفترات المبينه بجانبها :

a. $f(x) = x^2 - 4$ في الفترة (0,3)

$$f(3) = 9 - 4 = 5$$
$$f(0) = 0 - 4 = -4$$

وبما ان f(0),f(3) <0 ∴ حسب بلزانو يوجد $x \in (0,3)$ بحيث f(x) =0

b. $f(x) = \frac{3x^2-1}{x+1}$ في الفترة (-2,2)

$$f(2) = \frac{3(2)^2 - 1}{2+1} = \frac{11}{3}$$
$$f(-2) = \frac{3(-2)^2 - 1}{-2+1} = -11$$

وحسب بلزانو يوجد x تنتمي (2,-2) بحيث f(x)=0

اسئلة سنوات سابقة على الوحدة الاولى**

- جد النهايات :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^3-8} = ?$$

الحل:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \to 3} 4 = ?$$

نهاية الثابت تساوي الثابت نفسه وبالتالي الجواب 4.

- استخدم تعريف النهاية لاثبات ان $\lim_{x \to 2} 3x + 2 = 8$

الحل: نفرض ان L=8,, a=2

f(x) = 3x+2

$$|x-2| < \partial \ *** \ |f(x) - L| < \partial$$

وبالتالي $|3x - 6| < \in \ *** \ |3x + 2 - 8| < \in$

اذا $|x - 2| < \frac{\in}{3} \ *** \ 3|x - 2| < \in$

$$\therefore \ \gamma = \frac{\epsilon}{8} \quad \lim_{x \to 2} 3x + 2 = 8$$

- جد قيمة (a) بحيث يكون الاقتران متصلا عند x=0

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(2x)}{3x} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$$

$$\lim \frac{tan(2x)}{3x} = a$$

$$\lim \frac{2\sec^2(2x)}{3} = a *** \ \frac{2}{3} = a$$

$a = \frac{2}{3}$ اذا

- **جد قيمة b التي تجعل الاقتران متصل.**

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{3x+5}\,, & \boldsymbol{x \geq 2} \\ \boldsymbol{bx-1}, & \boldsymbol{x} < 2 \end{cases}$$

الحل: $\boldsymbol{lim\ 3x+5 = lim\ bx-1}$

x-----2 + X---- 2-

**توضيح : -2 تعني ان x عن 2 من جهة اليسار ، و +2 تعني ان x من جهة اليمين .

3(2)+5 = b(2)-1

11= 2b-1

12 = 2b ** b=6**

***جد قيمة النهاية :**

$\boldsymbol{lim}\ \frac{\boldsymbol{\sqrt{x-6}-3}}{\boldsymbol{x-15}}$ x---15 *نضرب بالمرافق $\boldsymbol{lim}\ \frac{\boldsymbol{(\sqrt{x-6}-3\ )(\sqrt{x-6}+3)}}{\boldsymbol{(x-15)(\sqrt{x-6}+3)}}$ x----15

$$\lim_{x\to15} \frac{x-6-9}{(x-15)(\sqrt{x-6}+3)} = \lim_{x\to15} \frac{(x-15)}{(x-15)(\sqrt{x-6}+3)} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

الوحدة الثانية : الاشتقاق

متوسط التغير :يساوي متوسط التغير ،التغير في y مقسوما على التغير في x ويمكننا التعبير عن ذلك على الشكل الاتي

متوسط التغير= $\frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

وبما ان *y* تمثل هنا الاقتران في *x* اي: *y=f(x)*

** اذا كان لدينا فترة مغلقة $[x_1,x_2]$ فان متوسط التغير خلال هذه الفترة يساوي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{f(x2) = f(x1)}{x2 - x1}$$

المشتقة :

تعريف (١): اذا كان الاقتران *f(x)* معرفا على فترة مفتوحة ، وكانت النقطة "*a*" داخل هذه الفترة ، فاننا نعرف مشتقة الاقتران *f(x)* عند النقطة "*a*" والتي تكتب *f`(x)* كما يلي :

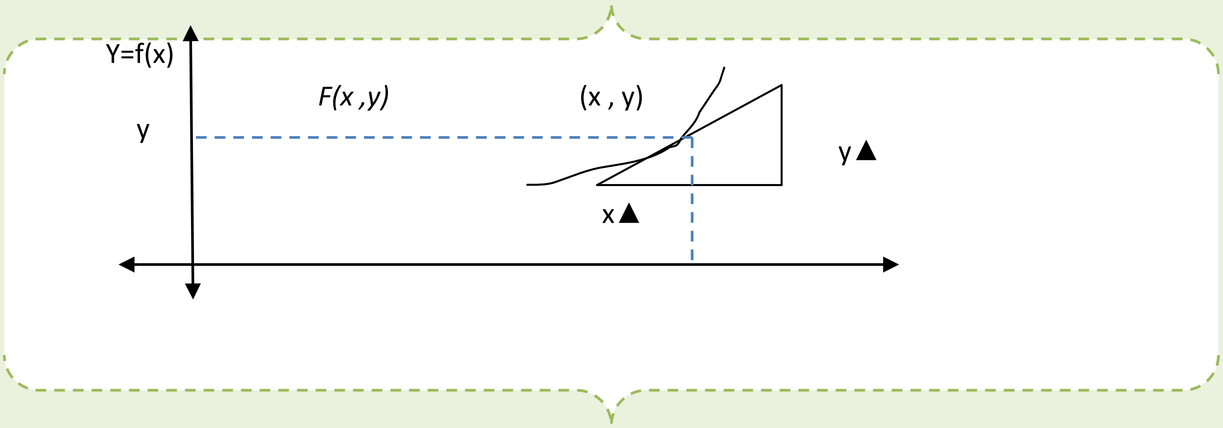
$$f`(a) = \lim_{h\text{-----}a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ **على فرض ان النهاية موجودة**

**** اذا كانت المشتقة عبارة عن كثير حدود من الدرجة الاولى يكون المدى = مجموعة الاعداد الحقيقية**

**** انظر الى** ا لـمـفـا هيم ا لـمـهـمـه فـي ا لاشـتـقـا ق **صفحة *56* من الكتاب المقرر والتي عليك فهمها لتسهل عليك ايجاد المشتقات ****

**** المعنى الهندسي لمشتقة الاقتران *f(x)* عند النقطة *"c"* هو :**

ميل المماس لمنحنى الاقتران *f(x)* عند النقطة "*c*". وبشكل عام يمكننا رسم ميل المماس عند النقطة *(x,y)* كما في الشكل :



علينا ان

نعتمد على انفسنا في حل اسئلى التقويم الذاتي وان استوقفك سؤال عليك دراسة المادة مرة اخرى حتى اتقانها **

قواعد ايجاد المشتقات

- القاعدة الاولى :

اذا كان الاقتران *f(x)* يساوي عددا ثابتا فان مشتقته تساوي صفر..

- القاعدة 2:

اذا كان $f(x) = x^n$ حيث *n* عدد صحيح موجب فان :

$f`(x) = nx^{n-1}$ واذا كان *f(x)=x* فان *f`(x)=1*

- القاعدة 3:

اذا كان الاقتران f(x) قابلا للاشتقاق فان مشتقة :

Cf(x) =Cf`(x)

اي ان مشتقة حاصل ضرب اقتران في عددثابت تساوي حاصل ضرب مشتقة الاقتران في العدد الثابت نفسه ..

- القاعدة 4:

مشتقة مجموع او حاصل طرح اقترانين تساوي :

مجموع او حاصل طرح مشتقتيهما كل على حدى .

- القاعدة 5 :

مشتقة حاصل ضرب اقترانين تساوي :

الاقتران الاول x مشتقة الثاني + الاقتران الثاني x مشتقة الاول

ومثال ذلك: $k(x) = f(x).g(x)$

$$k`(x) = f(x).g`(x) + g(x).f`(x)$$

- القاعدة 6:

مشتقة حاصل قسمة اقترانين:

(المقام x مشتقة البسط – البسط x مشتقة المقام) ÷ المقام تربيع

مثل اذا كان $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث h(x)≠0 فان f`(x) تساوي

$$f`(x) = \frac{h(x).g`(x) - g(x).h`(x)}{[h(x)]^2}$$

- القاعدة 7 :
- قاعدة السلسلة : وتعني انه اذا كان لدينا الاقترانين الاتيين : y=f(x) ,, u=g(x)

;, وكانت المشتقتان $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}},,\frac{du}{\mathrm{dx}}$ موجودتين فان :

$$\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} = f`(x)g`(x)$$

اذا لايجاد قاعدة السلسلة نبدا باشتقاق "y" بالنسبة الى "u" ونضرب الناتج في مشتقة "u" بالنسبة الى "a"

** فائدة : اذا كان لدينا اقتران g(x) قابلا للاشتقاق ، مرفوعا للاس "n" فيمكن كتابة مشتقته كما يلي :

$$f(x) = [g(x)]^n$$
$$f`(x) = n[g(x)]^{n-1}g`(x)$$

- قاعدة 8 : اذا كان لدينا الاقتران : $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث m,n عددان صحيحان، فان :

$$f`(x) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

** ارجع الى الجدول صفحة 71 حيث يبين هذه القواعد بالترتيب وحاول حل اسئلة التقويم الذاتي فهي تطبيق مباشر للقواعد ...

الاشتقاق الضمني والمعادلات الوسيطية:

لنبدا بالاشتقاق الضمني ولنفهم اولا الفرق بين العلاقة الضمنية والعلاقة الصريحة

- $k = x^2 + 2x + 5$ هذه علاقة صريحة
- $kx + k^2 = x + k$ تسمى علاقة ضمنية

نعلم ان $\frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)^1 f`(x)$

لكن : k=f(x)

$$\frac{d}{dx}(k)^2 = 2(k)(k`)$$

جدول ليسهل عليك اشتقاق k:

المقدار $\frac{d}{\mathrm{dx}}$	المقدار
$\frac{dk}{\mathrm{dx}}$	K
$2k\frac{dk}{dx}$	k^2
$3k^2\frac{dk}{dx}$	k^3
$4k^3\frac{dk}{dx}$	k^4
2x	x^2

لايجاد المماس نشتق ضمنيا

مشتقة الاقترانات الوسيطية :

اذا كان لدينا المتغيران y,x والمعرفان بدلالة الوسيط n كما يلي :

Y=f(n) ,, x= g(n)

فان المشتقة `y تساوي :

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{dy}{\mathrm{dn}} * \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dx}} = \frac{dy}{dn} * \frac{1}{dx/dn}$$

$$\frac{dy/dn}{dx/dn} = \frac{DnY}{DnX} , \quad DnX \neq 0$$

اي ان المشتقة تساوي مشتقة البسط بالنسبة للوسيط مقسومه على مشتقة المقام بالنسبة للوسيط

المماسات والاعمدة

اذا كان $f(x) = x^2 + 3x$ جد معادلة العمودي على المماس عند x=1

f`(x)=2x+3

f`(x)=2+3=5 عند x=1 اذا ميل العمودي يساوي $\frac{1}{5}$

المعادلة $y-y_1= m(x-x_1)$

عند x=1 y=1+3=4

y-4= $-\frac{1}{2}(x-1)$

ملاحظة : عندما يطلب في السؤال جد المقطع الصادي نعوض x=0 وعندما يطلب ان نجد المقطع السيني نعوض y=0

سؤال: جد معادلى المماس عند (0,1) في الاقتران : $y = -\frac{1}{2}x + 3$

الحل:

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$f^{`}(x) = -\frac{1}{2} = m$$

y-1= -,5(x-0)* y-1 = -,5x**

y= -,5 x+1

اما معادلة العمودي ، الميل =2

Y-1=2x*y=2x+1**

المشتقات العليا

تعرف المشتقة الثانية للاقتران f(x) على انها :

مشتقة المشتقة الاولى f\`(x) " اي انه عندما يطلب بالسؤال ايجاد المشتقة الثانية للاقتران اولا نشتق الاقتران حسب القواعد التي تعلمناها سابقا ثم نتعامل مع الناتج على انه اقتران جديد ونشتقه من جديد حسب القاعدة المناسبة له"

$$y^{``} = \frac{d^2y}{dx^2} = f^{``}(x)$$

التفاضلات :

اذا كان الاقتران y=f(x) قابلا للاشتقاق ، وكان x▲ يرمز الى التغير في x فان :

- تفاضلة y والتي يرمز لها بالرمز dy تعطى بالعلاقة :

$$dy = f^{`}(x)\Delta x$$

- تفاضلة x والتي يرمز لها بالرمز dx تعطى بالعلاقة: $dx = \Delta x$

**ننوه مرة اخرى الى ضرورة حل امثلة الكتاب المقرر واسئلة التقويم الذاتي ..

مشتقة الاقترانات الدائرية (المثلثية)

قبل ان نبدا بذك مشتقات الاقترانات المثلثية لا بد من تذكر بعض المتطابقات المثلثية وهناك المزيد منها صفحة 93 عليك دراستها

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

- $\cos(2x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ 1 - 2\sin^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{cases}$

- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$

- $1 + \cot^2(x) = cosec^2(x)$

وجب تذكيرك اسماء الدوال المثلثية بالعربية كي تسهل عليك الدراسه فيما بعد

جا س	Sin(x)
جتا س	Cos(x)
ظا س	Tan (x)
قا س	Sec(x)
قتا س	Cosec(x)
ظتا س	Cot(x)

مشتقات الاقترانات المثلثية :

مشتقة الاقتران	الاقتران
Cos(x)	Sin(x)
-sin(x)	Cos(x)
$\sec^2(x)$	Tan(x)
Tan (x) sec(x)	sec(x)
-cosec(x) cot(x)	Cosec(c)
$-cosec^2(x)$	Cot(x)

في حالة الاقترانات المركبة لا بد من تطبيق قاعدة السلسلة على الاقتران ، لذلك يوجد مشتقات للاقترانات المركبة :

y	Y`
Sin (u)	u` cos(u)
Cos(u)	-u` sin(u) u
Tan (u)	$u` \sec^2(u)$
Sec(u)	u` tan(u) sec(u)
Cosec(u)	-u` cot(u) cosec(u)
Cot(u)	$-u` cosec^2(u)$

****اسئلة سنوات سابقة للوحدة الثانية**

***جد معادلة المماس للمنحنى $x = ln\,(y^2 - 3)$ عند النقطة (0,2)**

الحل: بالاشتقاق الضمني

$$\mathbf{1} = \frac{2y}{y^2 - 3}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y^2 - 3}{2y}$$

عند (0,2) يكون :

الميل $= \frac{1}{4} = \frac{4-3}{2*2} = \frac{dy}{dx}$ معادلة المماس

$$y - 2 = \frac{1}{4}\,(x - 0)$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}x *** y = \frac{1}{4}x + 2$$

*جد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt{24,8}$ باستخدام التفاضلات .

الحل * نفرض $f(x) = \sqrt{3x}$ x₀=25 x=24,8

$$f(xo) = f(25) = \sqrt{25} = 5$$

▲x= dx=x-x_0= 24,8-25=-,2

$$f`(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} **** f`(x0) = f`(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$$

▲y=dy=f`(x)dx=(,1)(-,2)=-,02

القيمة التقريبية

F(x0)+▲y=5+(-,02)=4,98

****
****

*جد قيمة $\frac{dy}{d\sqrt{x}}$ اذا علمت ان $y = 2x^3 + 3x$

الحل: نفرض ان $z = \sqrt{x}$ $y = 2x^3 + 3x$

$$\frac{dy}{d\sqrt{x}} = \frac{dy}{dz} = \frac{dy/dx}{dz/dx}$$

$$\frac{6x^2 + 3}{,5\sqrt{x}} = (12x^2 + 6)\sqrt{x} = 12x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}$$

- ضع دائرة : اذا علمت ان $g(x) = \sin\frac{\pi}{3}$ فان $g^{-1}(x)$ تساوي

a) صفر

b) $\frac{\pi}{3}\ \cos(\frac{\pi}{3})$

c) $\frac{1}{3}\ \cos(\frac{\pi}{3})$

الاجابة فرع a

** جد معادلة الخط المستقيم الذي يتعامد مع المماس لمنحنى المعادالة

$y^2 - 3y + 2x^3 - 2 = 0$ عند النقطة (0,1) ..

الحل : نشتق ضمني $2yy` - 3y` + 6x^2$ ******** $y` = \frac{-6x^2}{2y-3}$

وعند (0,1) يكون $y` = \frac{-6}{-3} = 2$ ومنها يكون ميل العمودي على المماس 5,-

المعادلة (y-0)=-,5(x-1) ومنها y=1-x

الوحدة 3 :القيم القصوى العظمى والصغرى

من القيم القصوى نستطيع تحديد التزايد والتناقص والنقاط الحرجة وكل ذلك من المشتقة الاولى

مثال: جد النقاط الحرجة والقيم القصوى ومجالات التزايد والتناقص للاقتران

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 6$$

الحل:: نجد المشتقة الاولى

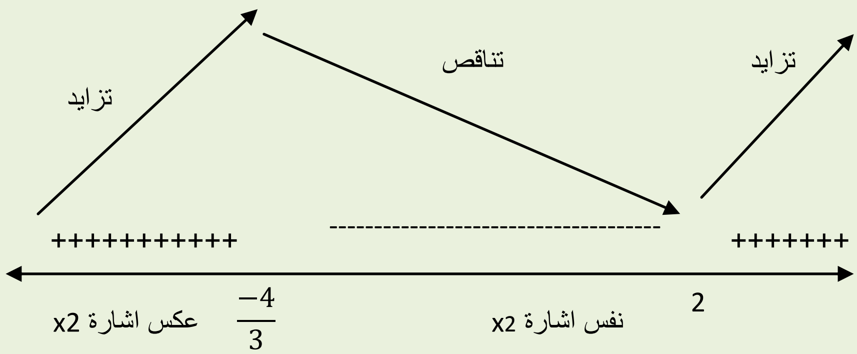
$$f`(x) = 3x^2 - 2x - 8$$

$$= (3x + 4)(x - 2)$$

نساوي المشتقة بالصفر:

3x+4=0 **x-2=0**

X=-4/3 **X=2**



النقاط الحرجة

$$f\left(\frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-4}{3}\right)^3 - \left(\frac{-4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{-4}{3}\right) + 6$$

$$=\frac{-64}{27}+\frac{16}{9}+\frac{32}{3}+6=[\frac{-4}{3}\quad ,f(\frac{-4}{3})$$

F(2)= 8 - 4 -16 + 6= -6 [2 , -6

مجالات التزايد : $(-2,\infty)$,, $(-\infty,\frac{-4}{3}[$

مجالات التناقص) $(2,\frac{-4}{3}$ ،،، يوجد قيمة عظمى عند $x=\frac{-4}{3}$ وقيمتها $f(\frac{-4}{3})$ ويوجد قيمة صغرى عند x=2 وقيمتها -6

طريقة سهله لايجاد القيم القصوى :

- اولا نجد المشتقة الاولى للاقتران .
- ثانيا نساوي المشتقة في الصفر .
- نضع اصفار المشتقة على خط الاعداد.
- نجد اشارة المشتقه.
- الاشارة الموجبة تدل على التزايد والسالبة تدل على التناقص.

** سؤال تقويم ذاتي صفحة 120 فرع 5 :

الاقتران $f(x)=\frac{1}{x-2}$ عين فترات التزايد والتناقص ...

الحل: $f`(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$ حيث $x-2\neq 0$ اذا $x=2$ نقطة حرجة

اشارة f`(x)

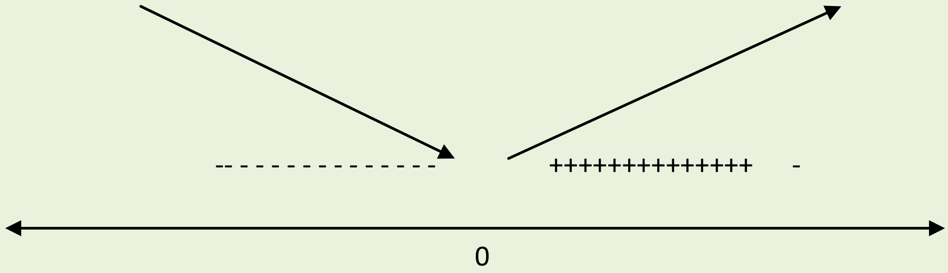
-- -- ------------------ 2 ------------- -

الاقتران متناقص على ح

$$f(x)=\begin{cases} x\ , & x\geq 0\\ -x\ , & x<0\end{cases}$$

$$f`(x)=\begin{cases} 1\ , & x\geq 0\\ -1\ , & x<0\\ \text{غير معرفة}, & x=0\end{cases}$$

اشارة f`(x)



النقطة الحرجة : (0,0) ،، فترات التزايد $(0,\infty)$ ،، فترات التناقص $(-\infty,0)$

يوجد للاقتران قيمة صغرى عند *x=0* وقيمتها *f(x) = 0*

والان كما تعودنا لنعتمد على انفسنا نقوم بحل الاسئلة المتبقية ☺

ايجاد القيم القصوى باستخدام المشتقة الاولى:

ليكن الاقتران f(x) معرفا على الفترة [a,b] وان للاقتران قيمة عظمى او صغرى محلية عند x=0 حيث $c\in]a,b[$ ، فاذا كانت المشتقة الاولى f`(x) موجودة عند x=c وتساوي قيمة محددة فان f`(c)=0.

تعريف: تسمى النقطة x في مجال الاقتران f(x) نقطة حرجة اذا كانت f`(x)=0 او اذا كانت f`(x) غير موجودة.

اما المشتقة الثانية فهي تحدد نقاط الانعطاف وتحدد مجالات التقعر للاعلى والاسفل

- التقعر : *انظر للشكل 13صفحة 131 وعد للتعريف التالي: يكون منحنى الاقتران f(x) مقعر للاعلى في فترة جزئية من مجاله مثل]a,b[اذا كان **المنحنى واقعا فوق جميع مماساته في هذه الفترة** ، كما يقالانه مقعر للاسفل في الفترة الجزئية المذكورة اذا كان **المنحنى واقعا تحت جميع مماساته...**

نظرية :

اذا كان الاقتران f(x) اقتران متصلا على الفترة [a,b] وكانت f`(x), f``(x) معرفتين على الفترة المفتوحه]a,b[فانه :

- اذا كانت f``(x) موجبة لجميع قيم$x\in]a,b[$ فان منحنى الاقتران f(x) يكون مقعرا للاعلى في الفترة [a,b]
- اذا كانت f``(x) سالبة لجميع قيم$x\in]a,b[$ فان منحنى الاقتران f(x) يكون مقعرا للاسفل في نفس الفترة.

	المشتقة الاولى f`(x)	المشتقة الثانية f``(x)
النقاط الحرجة	عندما تكون f`(x)=0 او غير موجودة	----------------------
التزايد والتناقص	حسب اشارة f`(x) على خط الاعداد	اذا تغيرت من صغرى الى عظمى تزايد واذا تغيرت من عظمى الى صغرى تناقص
القيم القصوى والانعطاف والتقعر	على خط الاعداد	صفر او غير معرفة على خط اشارة f``(x)

اختبار المشتقة الثانية:

ليكن f(x) قابلا للاشتقاق على فترة مفتوحة تحتوي x=c وليكن f`(c)=0

- اذا كان f``(c)<0 فان f(x)له قيمة عظمى محلية عند x=0 .
- اذاك كان f``(c)>0 فان f(x)له قيمة صغرى محلية عند x=0 .

سؤال تقويم ذاتي صفحة 139 من الكتاب المقرر فرع 3

$$f(x) = x(12-2x)^2$$

الحل: المطلوب استعمال المشتقة الثانية لايجاد القيم القصوى والتزايد والتناقص والانعطاف ،

$$f(x) = x(12-2x)^2$$

نحلل الفرق بين مربعين داخل القوس وندخل x قبل ايجاد المشتقة:

$$f(x) = x(144-48x+4x^2)$$

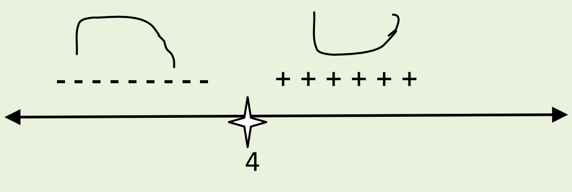
$$144x-48x^2+4x^3$$

$$f`(x) = 144-96x+12x^2 = 12-8x+x^2 = (x-6)(x-2)$$

X=2 , x=6 عند مساواة المعادلة بالصفر

F``(x)=-8+2x ** f``(2)=-8+(2)(2)=-4 ** f``(6)=-6+(2)(6) =6

قيمة عظمى =4 قيمة صغرى = 6



x=4 *** F``(x)=0 نقطة انعطاف عند x=4

تخطيط المنحنيات:

- تخطيط كثيرات الحدود : اهم الخطوات التي تتبع عند تخطيط منحنى مثل y=f(x)

a) نعين ان امكن نقطة تقاطع المنحنى مع المحورين بوضع x=0 مرة و y=0 مرة اخرى.
b) نحسب المشتقة الاولى f\`(x) و المشتقة الثانية f\`\`(x).
c) نعين القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية بالاستفادة من المشتقة الاولى والثانية ونعين نقاط الانعطاف ايضا .
d) نعين فترات التزايد والتناقص للاقتران باستخدام المشتقة الاولى.
e) نعين فترات التقعر للاعلى وللاسفل باستخدام المشتقة الثانية .
f) نعين نقاط اضافية(اذا لزم الامر) بوساطة التعويض في معادلة الاقتران ، وبخاصة النقاط التي تقع بين النقط الحرجة ونقط الانعطاف ، او النقط التي تقع على يمينها اويسارها . كما نحدد طبيعة المنحنى لقيم x المتطرفة.
g) نحدد الخطوط التقاربية للمنحنى ان وجدت.
h) نرسم منحنى يمر بالنقاط التي وجدناها ، ما لم يكن هناك نقط انفصال في المنحنى او في مماساته ، ونراعي في ذلك الصعود والهبوط في المنحنى اثناء مروره بالنقط وفقا لاشارة المشتقة الاولى كما نراعي التقعر للاعلى والاسفل وفقا لاشارة المشتقة الاولى .

انظر الى امثلة الكتاب المقررصفحة 140 وقم بحلها وحل اسئلة التقويم الذاتي متبعا الخطوات السابقه .

الخطوط التقاربية ورسم المنحنيات :

ان الخط التقاربي لا يظهر في القترانات كثيءرة الحدود بل يظهر في الاقترانات النسبية .

ولايجاد الخط التقاربي للاقتران النسبي مثل $y = \frac{x}{x+a}$ لرسم الاقتران

a) ناخذ قيما ل x ونعوضها في الاقتران لنجد قيم y التي تقابلها بحيث لا يكون المقام 0.
b) وبالتالي يمكننا ان نعوض القيم على المستوى الديكارتي ونجد رسمة الاقتران النسبي عليك حل امثلة الكتاب المقرر حتى تفهم الخطوط التقاربية جيدا

مسائل عملية على القيم القصوى :

لحل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية:

- نقرا المسالة بتمعن ونحدد المعطيات عليها والمطلوب فيها ، ونستعن بالاشكال المرفقه لاظهار المتغيرات في المسالة .
- نكتب كل العلاقات القائمة بين هذه المتغيرات في المسالة.
- نحدد المتغير الذي يراد ايجاد قيمته العظمى او الصغرى ونعبر عنه كاقتران بدلالة متغير واحد من المتغيرات الاخرى .

- نحدد مجال الاقتران ثم نجد القيم القصوى له ونختبر كلا منها لتحديد نوعها.

** لنعد الى امثلة الكتاب ونعد حلها تطبيقا على الخطوات السابقه **

ستجد ان مفاهيم التشابه ونظرية فيثاغورس وقوانين الحجوم والمساحة للاجسام والاشكال المنتظمة من الادوات الهامة التي تساعدك على كتابة القوانين

المعدلات المرتبطة بالزمن :

خطوات حل المسالة:

a) نرسم الشكل ونضع عليه الرموز ونحدد الثوابت والمتغيرات .

b) نحدد المفروض والمطلوب بالرموز .

c) نحدد علاقة تربط بين المتغيرات ونحذف المتغير غير اللازم.

d) نشتق بالنسبة للزمن.

e) نعوض بالقيم المفروضه.

كالعادة لا غنى عن امثلة الكتاب المقرر واسئلة التقويم الذاتي

نظرية رول

شروط النظرية:

- ان يكون الاقترانة متصل على [a,b].
- ان يكون الاقتران قابل للاشتقاق على]a,b[حيث f(a)=f(b)

نتيجتها: يوجد $c \in (a,b)$ بحيث f`(c)=0 اي يوجد نقطة حرجة .

نظرية القيمة المتوسطة

ان يكون الاقتران f(x) متصل ومشتق على]a,b[

نتيجتها: يوجد $c \in (a,b)$ بحيث $f`(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**ملاحظة : نظرية رول حالة خاصة من نظرية القيم المتوسطة ، اذا ذكر بالسؤال ان المماس يوازي القاطع نستخدم القيمة المتوسطة بالحل

** صيغة القيمة المتوسطة ل كوشي :

اذا فرضنا ان الاقترانين f(x) , g(x) متصلان على الفترة [a,b] ، وقابلان للاشتقاق على الفترة]a,b[وان g`(x)≠0 لجميع قيم x في]a,b[فانه يوجد عدد مثل c في الفترة]a,b[بحيث ان:

$$\frac{f`(x)}{g`(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

قاعدة لوبيتال:

اذا كان التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ نشتق كل من البسط والمقام

$$lim_{x-0}\frac{\tan 2x}{3x}$$

بالتعويض المباشر : $\frac{0}{0}$ نشتق البسط لوحده والمقام لوحده : $\frac{2}{3} = \frac{2\sec^2 2x}{3}$ lim_{x-0}

اسئلة سنوات سابقه للوحدة 3

س-1 كرة مجوفة من حديد يتغير طولا نصفي قطريها الداخلي والخارجي بحيث يكون حجم الحديد ثابت اوجد معدل تغير طول نصف القطر الخارجي عند اللحظة التي يكون فيها نصف قطر الداخلي 5 سم والخارجي 7سم اذا كان معدل الزيادة في طول نصف القطر الداخلي $\frac{3}{2}$ سم/د

الحل: نفرض انه عند اللحظة t كان نصف القطر الداخلي y ونصف القطر الخارجي x

حجم الحديد = حجم الكرة الكبرى – حجم الكرة الصغرى

حجم الحديد = $\frac{3}{4}\pi x^3 - \frac{3}{4}\pi y^3$

نشتق المعادلة بالنسبة للزمن وبما ان حجم الحديد ثابت مشتقته = 0

$$0 = 4\pi x^2 \frac{dx}{dt} - 4\pi y^2 \frac{dy}{dt}$$

وعندما y=5 و x=7 فان $\frac{dy}{dt} = \frac{3}{5}$ نعوضها في المعادلة السابقة :

$$0 = 4\pi(7)^2 \frac{dx}{dt} - 4\pi 5^2 \frac{3}{5}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{15}{49}$$ سم/د

س -2 اذا كان $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ جد ما يلي:

الخطوط التقاربية ،، مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى

الحل: مقام الاقتران =$(x+1)^2$

المقام =0 عند x=-1 اي ان الاقتران غير معرف عند x=-1

$$\lim_{x-\infty-} \frac{x}{(x+2)^2}=0$$

$$\lim_{x-\infty+} \frac{x}{(x+2)^2}=0$$

$\lim_{x--1+} \frac{x}{(x+2)^2}=\infty$

و $\lim_{x—1+} \frac{x}{(x+2)^2}=\infty$ الخطوط التقاربية : y=0 خط تقاربي افقي ،، x=-1 خط تقاربي راسي

جد قيمة $lim_{x-0} \frac{e^{2x}-1}{4sin3x}$ ؟

الحل: التعويض المباشر يعطي $\frac{0}{0}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال :

$$lim_{x-0} \frac{e^{2x}-1}{4sin3x} = \frac{2e^{2x}}{12\cos 3x} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

الوحدة الرابعة

اصل المشتقة وايجاد المساحات :

يرمز للتكامل غير المحدود للاقتران f(x) ب $\int f(x)dx$ وللتكامل المحدود ب $\int_b^a f(x)dx$

التكامل هو الاقتران الاصلي قبل اجراء الاشتقاق.

الفرق بين التكامل المحدود والتكامل الغير محدود ان الاول ناتجه اقتران متغير اما الثاني ناتجه عدد ثابت

قواعد التكامل :

- $\int a\,dx = ax + c$
- $\int a\,x^n\,dx = \frac{a\,x^{n+1}}{n+1} + c$
- تكامل بعض الاقترانات :

$\int \sin x = -\cos x$ ... $\int secx \tan x = \sec x$ $\int cosec\,x \cot x = -cosec\,x$

$\int \cos x = \sin x$ $\int cosec^2 x = \cot^2 x$ $\int e^x = e^x$

$\int \frac{1}{x} = \ln(x)$ $\int a^x = \frac{a^x}{\ln a}$ $\int \text{Sec}^2 x = \tan x$

امثلة:

$$\int e^{2x}\,dx? \qquad = \frac{e^{2x}}{2} + c \quad -$$

ملاحظة : في التكامل غير المحدود نضع c+ ثابت .

$$\int \frac{1}{2x} =? \qquad = \frac{1}{2}\ln x + c$$

$$\int x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{x^2}\ dx\ ? \qquad \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\frac{x^4}{4} + x + c$$

المساحة = التكامل

$$\int_1^5 5\ \mathrm{dx} = 5\mathrm{x}]_1^5$$

$$\int_{\mathrm{b}}^{a} (\mathrm{a}-\mathrm{b})\mathrm{dx} = (\mathrm{a}-\mathrm{b})\mathrm{x}]_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}} = (\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{b}-\mathrm{a}) = 2\mathrm{ab} - \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$$

مجموع ريمان

تعريف: اذان كان f(x) اقتران معرف على الفترة [a,b] ولتكن σ_{n} تجزئة منتظمة للفترة نفسها فان مجموع ريمان =

$$\frac{b-a}{\mathrm{n}}\sum \mathrm{f}\,(\mathrm{xr}^*)$$

$$\sigma_{\mathrm{n}} = \mathrm{xr}^* = \mathrm{a} + \frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{\mathrm{n}}\ \mathrm{r}$$

مثال: f(x)=4x حيث $x \in [-1,2],\ \sigma_n = \{-1,0,1,2\}$ اوجد مجموع ريمان؟

$$xr^* = -1 + \frac{2 - -1}{\mathrm{n}}\ \mathrm{r}$$

مجموع ريمان =

$$\frac{b-a}{\mathrm{n}}\sum \mathrm{f}\,(\mathrm{xr}^*)$$

$$\frac{2+1}{n}\sum f\left(-1+\frac{3}{n}r\right)=\frac{3}{n}\sum 4\left(-1+\frac{3}{n}r\right)$$

$=\frac{3}{n}[\sum -4+\sum \frac{12}{n}r]$

$=-12+\frac{18(n+1)}{n}=-12+18+\frac{18}{n}=6+\frac{18}{n}$

$lim_{n-\infty}\left(6+\frac{18}{n}\right)=6+0=6$

مجموع ريمان =6= التكامل

لاثبات ذلك: $\int_{-1}^{2} 4x\,dx = \frac{4x^2}{2}=2x^2]_{-1}^{2}=2(4-1)=6$

** خصائص المجموع:

$$\sum a\,n=an\ \ ,,,\sum r=\frac{n(n-1)}{2}\ \ ,,,\sum r^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

يجب الا ننسى اهمية العودة لامثلة الكتاب المقرر واسئلة التقويم الذاتي ☺ ☺:

عند ايجاد المساحة يطلب احيانا المساحة بين منحنيين عند نقاط تقاطعهما ، لايجاد نقاط التقاطع لمنحنيين : f(x)=g(x) ونجد قيمة x ونستخدم التكامل المساحة $=\int g(x)-f(x)dx$.

مثال: جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $f(x)=2-x^2\ ,,,g(x)=-x$

اولا لايجاد قيمة x : f(x)=g(x)

$2-x^2\ =-x$

$x^2\ -x-2=0\,,,(x-2)(x+1)=0$

X=2 ,, x=-1

$$\int_{-1}^{2} x^2\ -x-2\ dx=2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\,]_{-1}^{2}$$

بالنعويض المباشر اولا نعوض قيمة a ثم قيمة b والناتج$\frac{27}{6}$

الاقتران المكامل:

قاعدتين از اكثر يطلب الاقتران المكامل f(x) تكامل كل قاعدة من العدد الى y بدلا من عدد الى عدد

لنعد لامثلة الكتاب المقرر ونعيد حلها☺

نظرية القيمة الوسطية :

اذا كان f(x) قابلا للتكامل على [a,b] وكان اقتران محدود ، فانه يوجد ثابت مثل "d" بحيث $\int_a^b f(x)dx = d(b-a)$ وكذلك $c_1 \le d \le c_2$

واذا كان f متصلا فانه يوجد x1 ضمن الفترة [a,b] بحيث ان f(x1)=d ويدعى العدد d معدل الاقتران f في الفترة [a,b] وبالتالي: $\int_a^b f(x)dx = f(x1)(b-a)$

النظريات الاساسية في التفاضل والتكامل :

- اذا كان الاقتران f متصلا على [a,b] وكان الاقتران المكامل يساوي $\int_a^x f(y)dy$ فان f`(x)=f(x) في الفترة المفتوحة]a,b[
- اذا كان الاقتران متصلا ، وكان الاقتران g قابلا للاشتقاق ، وكان $\int_a^{g(x)} f(y)dy$ فان f`(x)=f(g(x)).g`(x)

- اصل المشتقة(الاقتران البدائي) ،يمكننا صياغه القاعدة العامة لايجاد اصل المشتقة على النحو الاتي: $A(x) = A(a) + \int_a^x f(y)dy$ حيث f اقتران متصل على [a,b]

- اذا كان f متصلا على [a,b] وكان "A" اصل المشتقة فان : $\int_a^b f(x)dx = A(b) - A(a)$

التكامل غير المحدود وقواعده:

التكامل غير المحدود هو الاقتران البدائي الذي يحتوي على ثابت عشوائي

انظر للجدول صفحة ٢٢٨-٢٢٩ من الكتاب المقرر

$\int f(x)dx = A(x) + c$

المعادلات التفاضلية : هي معادلات تشتمل على مشتقات او تفاضلات

ويكون حلها من خلال ايجاد علاقة بيت المتغيرين بحيث لا تحتوي مشتقات ...

التكامل بالتعويض: يستخدم عندما يكون حاصل ضري اقترانين احدهما مشتقة الاخر او ناتج قسمة اقترانين احدهما مشتقة الاخر او جذر تربيعي او قوس مرفوع الى قوة

حيث نقوم بفرض ان احدهما =u ونشتق الطرفين du=(--)dx ثم نعوض قيمة dx من الاشتقاق في التكامل ونكامل بالنسبة الى u وبعدها نعيد قيمة u من الفرض

مثال: $\int_0^{\pi/2} 12 \cos 3x \sin x \, dx$

نفرض u=sin3x

du=3cos3xdx

$$\frac{du}{3\cos 3x} = dx$$

$$u = \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \text{ عند } x = \frac{\pi}{2}$$

$$u = \sin(0) = 0 \text{ عند } x = 0$$

$$\int_0^{-1} \frac{12\cos 3x\,(u)\,dx}{3\cos 3x} = \int_0^{-1} 4\,u\,dx = 2u^2]_0^{-1}$$

=2(1-0)=2

التكامل بالتعويض غير المباشر :

يستخدم في الحالات بسط عدد ومقام عدد+x^2 او بسط عددي ومقام عدد -x^2 سواء كان المقام بجذر او بدون جذر ، في حالة المقام +x^2 عدد نفرض x=tan u في حال المقام -x^2 عدد نفرض x=sin u حيث نقوم باستخدام المتطابقتان :

$$1 + \tan^2 u = \sec^2 u \;, 1 - \sec^2 u = \cos^2 u$$

هكذا نكون انهينا مادة الامتحان النصفي ، على ان لا ننسى اهمية امثلة الكتاب المقرر والتدريبات المذكورة فيه☺

الوحدة الخامسة

القوانن التي تحكم اقتران e^x , lnx

قوانين اقتران الاس الطبيعي e^x

- اذا كان ln y=x فان y= e^x
- $e^{\ln y} = y$
- Ln e=1

قوانين الاسس:

- ضرب الاسس = حمعها $x^4 * \mathrm{x}^5 = \mathrm{x}^9$
- قسمة الاسس= طرحها $\frac{x^5}{\mathrm{x}^4} = \mathrm{x}$
- رفع الاسس = ضربها$(x^5)^4 = \mathrm{x}^{20}$

قوانين اللوغاريتمات:

- Log xy=log x + log y
- Log x/y=log x- log y
- $\log x^y = y \log x$

العدد النيبيري e=2,7 اذا دخل على اللوغاريتم بصفة اساس يسمى لوغاريتم طبيعي رمزه

$$log_{\mathrm{e}}\mathrm{x} = \ln \mathrm{x}$$

اقتران اسي مطلوب اشتقاقه وتكامله

ارجع للصفحة 257من الكتاب المقرر وانظر رسمة الاقتران الاسي واللوغاريتمي

ملاحظات:

$$\mathbf{\ln 1 = 0 \ \ , \ln \mathit{e} = 1 \ \ , \mathit{a}^0 = 1 \ \ , \mathit{log_e e} = 1}$$

الاشتقاق اذا كان $y = a^{f(x)} - - - y` = a^{f(x)} f`(x) \ln a$

** جد `y اذا كان ? $y = 3^{x^2}$

$y` = 3^{x^2}(2x)ln3$

اذا كان $y = e^{x^2-2x+1}$ ؟ $y` = (2x-2)(e^{x^2-2x+1})$

اشتقاق الاقتراني اللوغاريتم الطبيعي والاس الطبيعي

- مشتقة الاقتران y=ln x تساوي $y` = \frac{1}{x}$
- اذا كانت u=g(x) وكانت $y = ln|u|$ فان :

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = u`\left[\frac{1}{u}\right] = \frac{u`}{u}$ ومكننا التعبيلا عما سبق ب مشتقة اللوغاريتم الطبيعي لاقتران ما تساوي (مشتقة الاقتران قسمة الاقتران نفسه)

الاشتقاق باستخدام اللوغاريتمات:

- نكتب المعادلة على صيغة *y=f(x)*
- ناخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين : *ln y= ln f(x)*
- نبسط المقدار ، ونجد المشتقة باستخدام الاشتقاق الضمني فينتج لدينا

$$\frac{1}{\mathrm{y}}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\ln \mathrm{f(x)}$$

- واخيرا نضرب الطرفين ب *y=f(x)* --- $\frac{dy}{\mathrm{dx}} = \mathrm{y}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\ln \mathrm{f(x)}]$

الاقترانات الاسية واللوغاريتمية العامة

يعرف الاقتران الاسي العام بانه عبارة عنثابت مرفوع الى اس متغير مثل: $f(x) = a^x$

حيث متغير و *a* عدد ثابت موجب وله صور عدة مثل :

$$a^{\mathrm{x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}\ln \mathrm{a}} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}\ln \mathrm{a}^{\mathrm{x}}}$$

$$\ln a^u = \ln e^{u \ln a} = u \ln a$$

وتنطبق قوانين الاسس على هذا الاقتران تماما .

اشتقاق الاقتران الاسي العام:

- اذا كانت $y = a^x = \mathrm{e}^{\mathrm{x}\ln \mathrm{a}}$

  فان : $y` = a^x lna$
- بصورة عامة :اذا كانت *u=g(x)* ،، $y = a^u$ فان $y` = ua^u lna`$

الاقتران اللوغاريتمي العام:

يعرف بانه : $x = log_a y$ كما يمكن كتابته $y= a^x$

مشتقه الاقتران اللوغاريتمي العام:

$$y = log_a x \quad ,y` = \frac{1}{u \ln a}$$

$$y = log_a u \qquad U=g(x) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{u`}{u\ lna}$$

انظر للجدول 265 يوضح مشتقات الاقترانات الاسية واللوغاريتمية العامة

مشتقة الاقترانات المثلثية العكسة:

لنعد الى الرسومات الموجودة ف الكتاب المقرر ونكمل :

مشتقة الاقتران	الاقتران
$\frac{u`}{\sqrt{(1-u^2)}}$	$sin^{-1}u$
$\frac{-u`}{\sqrt{(1-u^2)}}$	$cos^{-1}u$
$\frac{u`}{1+u^2}$	$tan^{-1}u$
$\frac{u`}{u\sqrt{(u^2-1)}}$	$sec^{-1}u$

تكاملات الاس الطبيعي و اللوغاريتم الطبيعي:

- $\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$
- $\int \frac{1}{u \ln a} du = log_a u + c$
- $\int e^u\ du = e^u + c$
- $\int a^u \ln a\ du = a^u + c$

في الحالتين الاخيرتين يجب الانتباه الى الاسس المرفوعه لها القوى مثل : e^{x^2} حيث نجد مشتقاتها ونضربها في الاقتران وتخرج خارج التكامل .

ملاحظة: في الكحالة الاخيرة اذا لم يكن $a^u = \ln a$ نقسم ونضربها في *ln a* فيكون الجواب

$$\frac{a^u}{\ln a}$$

تكامل اقترانات نواتجها اقترانات مثلثية عكسية

يحل بطريقتين ، اما قانون ويطبق عليه او كما نحل التكامل الغير مباشر :

- $\int \frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)}} = -sin^{-1}u + c$ وهذا قانون للحفظ
- $\int \frac{1}{1+u^2} du = \tan^{-1}u + c$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{(u^2-1)}} = \sec^{-1}u + c$

الوحدة السادسة

الاقترانات الزائدية:

- $\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ تقرا سنش x
- $\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ كوش x
- Tanh x=$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ تانش x
- Coth x=$\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ كوتش x
- Sech x=$\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$ سيش x
- Coseh x=$\frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

ملاحظة: احفظ رسومات الزائدية او كون جدول بفرض نقاط العلاقة بين الاقترانات الزائدية (حفظ)

- $cos^2\mathrm{x}+\sin^2\mathrm{x}=1$ و $cosh^2\mathrm{x}-\sinh^2\mathrm{x}=1$
- $sec^2\mathrm{x}=1+\tan^2\mathrm{x}$ و $sech^2\mathrm{x}=1-\tanh^2\mathrm{x}$
- $cosec^2x=cot^2x+1$ و $cosech^2x=coth^2x-1$

الاقترانات الزائدية العكسية :

حفظ صيغ الاقترانات الزائدية العكسية اللوغاريتمية:

- $sinh^{-1}\mathrm{x}=\ln(x+\sqrt{(x^2+1)}$
- $cosh^{-1}\,\mathrm{x}=(x+\sqrt{(x^2-1)}$ حيث $|x|\geq 1$
- $tanh^{-1}\mathrm{x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}}$ $-1<x<1$
- $sech^{-1}\mathrm{x}=\ln\frac{1+\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}{\mathrm{x}}$ $0<x\leq 1$

تفاضل الاقترانات الزائدية :

الاقتران	مشتقتة الاقتران
Sinh(x)	Cosh(x)
Cosh(x)	-sinh(x)
Tanh(x)	$\sec^2 h(x)$
sech(x)	-Tanh (x) sech(x)
Cosec(c)	-cosech(x) coth(x)
Coth(x)	$-cosec^2h(x)$

تفاضل الاقترانات الزائدية العكسية:

مشتقة الاقتران	الاقتران
$\frac{u`}{\sqrt{(1-u^2)}}$	$sinh^{-1}u$
$\frac{-u`}{\sqrt{(1-u^2)}}$	$cosh^{-1}u$
$\frac{u`}{1+u^2}$	$tanh^{-1}u$
$\frac{u`}{u\sqrt{(u^2-1)}}$	$sech^{-1}u$

تفاضل الاقترانات الزائدية والعكسية

يمكن ايجاد مشتقة الاقترانات الزائدية والعكسية وذلك بالتعبير عن تلك الاقترانات باللوغاريتمات الطبيعية اولا ثم اجراء عملية الاشتقاق ثانيا

تكامل الاقترانات الزائدية

اجري تكامل لمشتقة كل اقتران عكسي تحصل على الاقتران الاولي

حل المعادلات التفاضلية :

$\frac{dy}{dx} = \frac{2+\sin x}{2y+\sin^2 y}$ الحل بالضرب التبادلي نحصل على $\frac{2y^2}{2} + \tan y = 2x - \cos x$

بتكامل الطرفين:

$$y^2 + tanx = 2x - cosx$$

الوحدة السابعه:

المساحة بين المنحنيات:

اذا طلب مساحة تحت منحنى f(x) من x=a الى x=b فهي": $\int_a^b f(x)dx$

واذا طلب مساحة بين f(x) , g(x) على الفترة [a,b] فهي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

اما اذا كان [a,b] غير معطاة في السؤال ، نساوي f(x)=g(x) لايجاد نقاط التقاطع

الحجوم الدورانية:

طريقه الاقراص: $v = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$

$$v = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx$$

طريقة القشرة:

$$v = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

المقاطع الموازية: $v = \int_a^b a(x)dx$

ملاحظة: اذا كانت مساحة المقطع ثابته وتساوي a كما في موازي المستطيلات فان حجم الجسم يساوي مساحة المقطع في متوازي المستطيلات v=A(b-a)

طول منحنى مستوى

طول القطعة المستقيمة = $l = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

طول المنحنى : $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

طول المنحنى المعطى بدلالة معادلتين وسيطيتين:

$$l = \int_{ta}^{tb} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

مساحة السطح الدوراني:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f`(x)\right)^2}\, dx$$ عادي

اما اذا كان وسيطيتان:

$$A = 2\pi \int_{ta}^{tb} x\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\, dt$$

****