اسم المادة : نظرية الأعداد

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

acadeclub.com

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفيروتجميع كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط هنا

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء ♡

قوانين مادة النهائي

أم المحن

* قوانين الوحدة الرابعة

* نص نظرية فيرما (الصغرى) ⟵ اذا كان P عدداً أولياً وكان a أولياً للأعداد $2, \dots, P-1$ فإن ⟵
$a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$ مثال $a^{5-1} \equiv 1 \pmod 5$

* يكون النظام كاملاً للبواقي مقياس (m) اذا كانت البواقي على شكل
$\{0, 1, \dots, m-1\}$ أو $\{1, 2, \dots, m\}$

* اذا كانت صيغة السؤال أوجد نظاماً كاملاً للبواقي مقياس n وكانت $(m, n) = 1$ وكان w عدد
$w, m+w, 2m+w, 3m+w, 4m+w, \dots, (n-1)m+w$ نعوض قيم w, m, n وتكون الأعداد نظام كامل للبواقي مقياس n

* نظرية فيرما ⟵ اذا كانت P أولياً وكانت $(a, P) = 1$ فإن ⟵
$a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$

نتيجة ⟵ $a^P \equiv a \pmod P$

* $P-1 \equiv -1 \pmod P$

* عكس نظرية فيرما صحيحة، وتستخدم لاختبار أولية العدد

* يكون العدد أولي عندما يحقق التطابق $2^n \equiv 2 \pmod n$
للأعداد حيث $340 \geq n$ لكن 341 هو شبه أولي

* يكون العدد شبه أولي اذا كان غير أولي لكن يحقق التطابق
$2^n \equiv 2 \pmod n$

2019/11/8 23:47

* نظرية أويلر ⇐ اذا كان m عدداً غير أولياً لكن يمكن كتابته كحاصل ضرب عددين أوليين $m = p \times q$ فإنه يحقق التطابق
$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{pq}$$

* $U(m)$ ⇐ مجموعة العناصر التي أقل من m والقاسم المشترك بينها واحد

* $\boxed{\phi(m)}$ ⇐ عدد العناصر الموجودة في المجموعة $U(m)$

* عندما p عدداً أولي ⇐ $\phi(p) = p-1$
مثال $\phi(5) = 5-1 = 4$

* قانون نظرية أويلر ⇐
$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

* لايجاد $\phi(p)$ اذا كان p عدداً أولي و $n \geq 2$ ⇐
نكتب العدد على صورة (p^n) ثم على القاعدة ⇐ $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$

* اذا كان $(m,n) = 1$ فإن ⇐ $\phi(mn) = \phi(m) * \phi(n)$

* اذا كان d القواسم الموجبة للعدد n فإنه ⇐
العدد n = مجموع ϕ القواسم الموجبة ⇐ $n = \sum \phi(d)$

* نحلل العدد n ⇐ الى عوامله الأولية الموجبة ونأخذ ϕ لكل عامل ثم المجموع يكون مساوي لـ n

* لايجاد القواسم الموجبة للعدد n اذا كان كبيراً ⇐
نحلل العدد إلى عوامله الأولية على صيغة p^e
نحول الأسس إلى رموز ى n

2019/11/8 23:47

3

* نظرية ويلسون ⇐ اذا كان P عدداً أولياً فإنه ⇐

$(p-1)! = -1 \pmod p$

1 نكتب R ⇐ $R=\{1,2,3,\dots,(p-1)\}$

2 نكتب T ⇐ $T = R-\{1,(p-1)\} = \{2,3,\dots,(p-2)\}$

3 يوجد نظير ضربي لكل عنصر في R ونعمل تجزئة T الى أزواج تحتوي العدد ونظيره

4 حاصل ضرب عناصر T (العدد ونظيره) = 1

$T = \{a,a'\} \cup \{c,c'\} \cup \{\dots\}$

$(1)(1)\dots(1) = [(a\times a')(c\times c')\dots]$

$(1)\dots(1)(1) = 1 \mod p$

5 نضرب الطرفين بـ (p-1) ⇐ $(p-1)! = -1 \mod p$

* لمعرفة نظير العدد بمقياس معين ⇐

مثلاً ما هو نظير العدد (2) بالمقياس 29

نبحث عن رقم بحيث يكون حاصل ضربه مع 2 ومقسوم على 29 والباقي دائماً واحد ⇐

$\frac{2(\_\_)}{29}$ = الباقي 1

نجرب الأعداد حتى نصل للحلول ويكون ⇐

$\frac{2*15}{29} = \frac{30}{29}$ = الباقي 1

للأعداد الأولية ⇐

$(p-1)! = -1 \mod p$

$(p-2)! = -2 \mod p$

$(p-3)! = -3 \mod p$

$(p-5)! = -5 \mod p$

$\vdots$

ام المجتبى

عكس نظرية ويلسون صحيح اذا تحقق التطابق $(p-1)! = -1 \mod p$ فإنه P عدد أولي

2019/11/8 23:47

الأعداد الأولية كلها فردية ما عدا 2
عند قسمتها على 4 فإنها تنقسم إلى مجموعتين

[1] عند قسمتها على 4 تترك الباقي 1 $S:\{p : p = 1 \mod 4\}$
وهي قابلة للحل ويكون حلها = $\left(\frac{p-1}{2}\right)! \mp$

[2] عند قسمتها على 4 تترك الباقي 3 $T:\{p : p = 3 \mod 4\}$
وهي غير قابلة للحل

* ويكون شكل التطابق عند قسمتها على 4 ←
معامل x^2 واحد $x^2 = -1 \mod p$

صيغة التطابق التربيعي ← $x^2 = a \mod p$

* اذا كان $(n,m)=1$ وكان $f(nm) = f(n) * f(m)$
يكون اقترانه ضربي $\phi(nm) = \phi(n) * \phi(m)$

* حاصل ضرب اقترانين ضربيين هو اقتران ضربي $f*g = h$
* ليس بالضرورة أن يكون حاصل جمع اقترانين ضربيين هو اقتران ضربي
* 〃 〃 〃 اقترانين مركبين 〃 〃 〃 〃

عدد القواسم الموجبة للعدد ← $\boxed{d(n)}$

* أسهل طريقة لمعرفة عدد القواسم الموجبة $d(n)$ نكتبه على شكل حاصل ضرب عوامله الأولية مرفوعة لقوة ثم نجد d لكل عامل وتكون (1 + القوة)

$d(45) = 3^2 * 5$
$= d(3^2) * d(5^1)$
$= \underbrace{(2+1)}_{\text{القوة}} * \underbrace{(1+1)}_{\text{القوة}} = 3 * 2 = \boxed{6}$

مجموع القواسم الموجبة للعدد ← $\boxed{\sigma(n)}$
اذا كان p أولي ← $\sigma(p) = p + 1$

2019/11/8 23:47

* طريقة أخرى لايجاد $\sigma(p)$ ⇐ $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}$

* القواسم الفعلية للعدد هي قواسمه بدون نفسه

* مجموع القواسم الفعلية للعدد n ⇐ $\theta(n)$

* الأعداد الكاملة هي الأعداد التي تحقق ⇐ $\sigma(n) = 2n$

* الأعداد الكاملة الأقل من عشرة آلاف هي 8128 ، 496 ، 28 ، 6 فقط
وقاعدتها ⇐ $2^{p-1}(2^p-1)$

* نظرية اقليدس (للأعداد الكاملة) ⇐ يكون العدد كاملاً اذا وفقط اذا
حقق ⇐ $n = 2^{k-1}(2^k-1)$
اذا كان (2^k-1) عدداً أولياً و k أولي

* نظرية اقليدس/اويلر ⇐ الأعداد الزوجية الكاملة هي التي تكتب
على صورة $K_p = 2^{p-1}(2^p-1)$
حيث (2^p-1) و p عدد أولي.

* نظرية مرسين بعد التصحيح ⇐ نحصل على أول 12 عدد مرسيني M_p
و زوجي كامل k_p بتعويض القيم
$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$
الأول، الثاني، الثالث، الرابع، الخامس، السادس، السابع، الثامن، التاسع، العاشر، الحادي عشر، الثاني عشر

* العبارتين للأعداد المرسينية ⇐ $M_p = 2^p - 1$
للأعداد الزوجية الكاملة ⇐ $K_p = 2^{p-1}(2^p-1)$

* مثال ⇐ أوجد العدد المرسيني السادس : نعوض في $p=17$ أي $M_{17} = 2^{17}-1$

* العدد المرسيني M_{32} يتكون من 227831 خانة عشرية ثم وجد أنه
خطأ لأنه يتكون من 227832 خانة

* العدد المرسيني M_p السابع والعشرين عندما $p=44497$
عدد خاناته ⇐ $p \times \log 2$ ونأخذ العدد صحيحاً

2019/11/8 23:48

* حالة الآحاد العدد المرسيني المعطى رقم P يكون مضمن أول عاملتيه من القسمة على 4 والباقي يكون رقم أول خانة الآحاد

* لمعرفة عدد الخانات العشرية للعدد المرسيني المعطى رقم P باستخدام هذا القانون ⇐ $P \times \log 2$
وأخذ الرقم بشكل صحيح وليس أرقام عشرية مثل $234.9 \leftarrow 235$ يكون الجواب

تصنيف الأعداد إلى ناقصة / زائدة / كاملة

1. اذا كان $\sigma(n) > 2n$ ⇐ زائداً
2. $\sigma(n) < 2n$ ⇐ ناقصاً
3. $\sigma(n) = 2n$ ⇐ كاملاً

* يكون العددان متحابان اذا كانا ⇐ $\sigma(n) = \sigma(m) = m + n$

* اذا كان عددان متحابان فإنه لا يمكن أن يكون أياً منهما أولياً

* نظرية ثابت بن قرة ⇐ اذا أمكن كتابة الاعداد الاولية r, q, p على الصورة

$$\begin{cases} p = 3(2^{n-1}) - 1 \\ q = 3(2^{n}) - 1 \\ r = 9(2^{2n-1}) - 1 \end{cases}$$

حيث $n > 1$
فإن العددين متحابين ⇐

$$x = 2^{n} \cdot p \cdot q$$
$$y = 2^{n} \cdot r$$

ام المجد

(تلخيص قوانين مادة النهائي)

*(الوحدة الخامسة)

أم المجد

* يكون (x, y, z) مثلثاً فيثاغورياً إذا حقق

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad x^n + y^n = z^n$$

* يكون أحد العددين x, y فردي والآخر زوجي

* يكون (x, y, z) ثلاثي بدائي إذا لم يكن بين الأعداد x, y, z أي قواسم مشتركة موجبة غير العدد واحد.

* إذا كانت (a, b, c) ثلاثي فيثاغوري فإنه يوجد ثلاثي بدائي (x, y, z) وعدد طبيعي d بحيث أنه $(a, b, c) = d(x, y, z)$

* نظريات القاسم المشترك

① $(a, b) = (a, b + ka) \quad \forall k$

② $(a^n, b^n) = (a, b)^n \quad \forall n > 0$

* لكي يكون (a, b, c) بدائي $\Leftarrow$ $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$ القاسم المشترك بين a, b, c يساوي واحد

* إذا كانت (x, y, z) ثلاثي بدائي فإنه x ← زوجي y, z ← فردي

* إذا كان $(a, b) = 1$ وكانت (ab) مربع كامل فإنه a, b مربع كامل

* إذا كان $(a, b) = 1$ $\Leftarrow$ $(a + b, a - b) = 1$ أو 2

* يكون الثلاثي فيثاغوري أولي على صيغة $\Leftarrow$

$$(x, y, z) = (2st, s^2 - t^2, s^2 + t^2)$$

بشرط أن تحقق s, t الشروط الثلاث معاً

① $(s, t) = 1$ ② $s > t > 0$ ③ أحدهما فردي والآخر زوجي

* إذا كان معلوماً x, y, z ونريد إيجاد s, t من خلال

$$z + y = 2s^2 \qquad z - y = 2t^2$$

مع تحقيق الشروط

* الأعداد التي تصلح أن تكون وتراً في مثلث فيثاغوري بدائي $\Leftarrow$ $n = s^2 + t^2$

مع تحقيق شروط s, t مجموع مربعين كاملين