



# اسم المادة : جبر خطي

تجمع طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية - جامعة القدس المفتوحة

[acadeclub.com](http://acadeclub.com)

وُجد هذا الموقع لتسهيل تعلمنا نحن طلبة كلية التكنولوجيا والعلوم التطبيقية وغيرها من خلال توفير وتجميع **كتب وملخصات وأسئلة سنوات سابقة** للمواد الخاصة بالكلية, بالإضافة لمجموعات خاصة بتواصل الطلاب لكافة المواد:

للوصول للموقع مباشرة اضغط **هنا**

وفقكم الله في دراستكم وأعانكم عليها ولا تنسوا فلسطين من الدعاء

### الوحدة الثالثة:

\* العمليات المسموح لها في توليد متجه ما  $(v)$  من المتجهات المعطية هي عمليات الجمع والضرب بعدد

\* التركيبة الخطية  $\leftarrow$  كتابة المتجهات  $v_1, v_2, \dots, v_n$  على الشكل

$$\sum c_i v_i = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \Rightarrow L(v_1, \dots, v_n)$$

\* إذا كانت  $S$  مجموعة جبرية من فضاء خطي  $V$  فإن  $L(S)$  أصغر فضاء يحتوي على  $S$

\* إذا كانت  $S, T$  مجموعتين جبريتين من فضاء خطي  $V$  فإن وكانت  $S \subseteq T$  فإن  $L(S) \subseteq L(T)$

\* كتابة المتجه  $v$  على شكل تركيبة خطية بالمتجهات  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$

$$v = x u_1 + y u_2 + z u_3 + \dots$$

1. نكتب المعادلة العامة للتركيبة

2. نحوض قيم المتجهات ونساوي بين الطرفين لتكوين معادلات

3. نكتب مصفوفة من المعادلات (ممتدة) ونجري عمليات الصف البسيط

4. إذا نتجت مصفوفة الوحدة  $\leftarrow$  يمكن كتابة  $v$  على شكل تركيبة خطية

\* لكي نوهن أن  $S$  مجموعة مولدة للفضاء  $R^n$

1. نكتب مصفوفة مكونة من صفوف عبارة عن المتجهات المعطاة للمجموعة

2. نجري عمليات الصف البسيط

3. إذا نتجت مصفوفة الوحدة  $\leftarrow$   $S$  مجموعة مولدة للفضاء  $R^n$

4. قاعدة الفضاء  $\leftarrow$  مجموعة المتجهات المكونة من الصفوف الناتجة عن عمليات الصف البسيط

\* إذا كانت  $S$  مجموعة جبرية في فضاء خطي  $V$  إذا أمكن كتابة أحد عناصر  $V$  الموجودة

$$L(S) = L(S - \{v\}) \text{ فيكون } v \text{ عنصرا من } (S)$$

\* كل متتالية متفرقة ذات هي تركيبة خطية من عناصر  $S$

\* إذا كانت  $S$  مجموعة جبرية من الفضاء الخطي  $V$  فإن  $L(S)$  هي تقاطع كل الفضاءات الجبرية في  $V$  التي يحتوي الواحد منها على  $S$



## الوحدة الأولى

## جبر خطي < نصفي

حجم المصفوفة = عدد الصفوف  $\times$  عدد الأعمدة

المصفوفة المثلثية العلوية: هي مصفوفة مربعة التي جميع عناصرها تحت القطر الرئيسي أصفاراً.

المصفوفة المثلثية السفلية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي أصفاراً.

المصفوفة القطرية: هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي.

مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة عناصر قطرها الرئيسي تساوي واحد.

$$A - B = A + (-B) \quad * \text{ حامل طرح مصفوفتين}$$

$$A^t \quad * \text{ منقول المصفوفة } A$$

$$(A^t)^t = A \quad * \text{ منقول منقول المصفوفة } A = \text{المصفوفة } A$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad *$$

$$(KA)^t = KA^t \quad *$$

$$AB = BA = I \quad * \text{ حيث } I \text{ مصفوفة الوحدة} \quad * \text{ مصفوفة قابلة للانعكاس له نظير ضربي.}$$

$$* \text{ معكوس المصفوفة } A \text{ إن وجد يكون وحيداً.}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad *$$

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} \quad *$$



## الوحدة الثانية

لتكن  $A$  مصفوفة مربعة يرمز لمحدد المصفوفة  $|A|$

[1] إذا كانت  $A = [a]$  فإن  $|A| = a$

[2] إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  فإن  $|A| = ad - bc$

المحدد القسم للعنصر  $a_{ij}$  هو محدد المصفوفة الجزئية المتبقية من المصفوفة  $A$  بعد حذف الصف  $i$  والعمود  $j$  ويرمز له بالرمز  $M_{ij}$

متعامل العنصر  $a_{ij}$  هو  $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

محددة حاصل ضرب المصفوفتين تساوي حاصل ضرب محددتي المصفوفتين

\* نظرية خواص المصفوفات المحددة إذا كانت كل من  $A, B$  مصفوفة من الحجم  $n \times n$  فإن:

$$|AB| = |A||B| \quad [3] \quad |A^T| = |A| \quad [4]$$

[5] إذا احتوت المصفوفة على صف أو عمود صفري فإن محددها يساوي صفر.

[6] إذا كانت المصفوفة مثلثية أو قطرية فإن محددها = حاصل ضرب العناصر الواقعة على قطرها الرئيسي.

[7] إذا كانت  $A$  قابلة للعكاس فإن  $|A| \neq 0$  وكذلك  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

[8] المصفوفة  $A$  قابلة للعكاس  $\iff |A| \neq 0$  (هذا فقط إذا)

\* نظرية تأثير عمليات الصف البسيط على المحدد

[9] إذا كانت  $A_1$  هي المصفوفة الناتجة من ضرب صف من  $A$  بعدد ثابت  $k$  فإن

$$|A_1| = k|A|$$

[10] إذا كانت  $A_2$  هي المصفوفة الناتجة من إبدال صفين من مصفوفة  $A$  فإن

$$|A_2| = -|A|$$

[11] إذا كانت  $A_3$  هي المصفوفة الناتجة من ضرب صف من  $A$  بعدد ثابت وإضافة الناتج إلى صف آخر من  $A$

$$|A_3| = |A|$$



- \* ضرب المصفوفة A بالمصفوفة الأولية  $E(i)$  يكافئ تبديل الصفين  $i$  و  $i$
- \* ضرب المصفوفة A بالمصفوفة الأولية  $E(ci)$  يكافئ ضرب الصف  $i$  بالعدد  $c$
- \* ضرب المصفوفة A بالمصفوفة الأولية  $E(i+j)$  يكافئ ضرب الصف رقم  $i$  بالعدد  $j$  وجمع الناتج إلى الصف رقم  $j$ .

$$(E(k \cdot i))^{-1} = E\left(\frac{1}{k} \cdot i\right)$$

$$(E(i+j))^{-1} = E(i-j)$$

$$(E(k \cdot i + j))^{-1} = E(-k \cdot i + j)$$

### خوارزمية لإيجاد المعكوس العكسي للمصفوفة

- 1 نضع المصفوفة  $I$  إلى اليمين المصفوفة  $A$  لتشكل المصفوفة  $[A: I]$
- 2 نقوم بإجراء عمليات الصف البسيط على المصفوفة  $[A: I]$  لتصل إلى الشكل الصفحي المعين للمصفوفة  $A$  فتصبح على الصورة  $[E_1 E_2 \dots E_n A: E_1 E_2 \dots E_n]$
- 3 إذا كان  $E_1 E_2 \dots E_n A = I$  فإن  $A$  تكون قابلة للعكس ويكون  $E_1 E_2 \dots E_n = A^{-1}$

### بعد إجراء عمليات الصف البسيط

- 1 إذا أمكن إيجاد مصفوفة الوحدة  $I$  يوجد حل للنظام
- 2 إذا كان الصف الأخير أصفار ما عدا الطرف الأيمن للصف الأخير  $\Rightarrow$  لا يوجد حل
- 3 إذا كان الصف الأخير أصفار وكذلك الطرف الأيمن للصف الأخير  $\Rightarrow$  عدد لا نهائي من الحلول



## عمليات الصف البسيط :

- \* تبديل صفين ورمز لها بالرمز  $R_i \leftrightarrow R_j$
- \* ضرب صف بعدد حقيقي غير الصف  $(KR_i)$
- \* ضرب صف بعدد حقيقي وإضافة الناتج إلى صف آخر مع إعادة الصف الذي ضرب إلى ما كان عليه  $KR_i + R_j$

**تكافؤ المصفوفات :** المصفوفة D تكافئ المصفوفة A إذا حصلنا على D من A باستخدام سلسلة من عمليات الصف البسيط

**الشكل الصفحي المميز :** يقال أن المصفوفة A على الشكل الصفحي المميز إذا حققت الشروط التالية :

\* إذا لم يكن الصف مكوناً بكامله من أصفار فيكون 1 هو العنصر الأول غير الصفري في هذا الصف ويسمى العنصر المتقدم أو الواحد المتقدم .

\* كل الصفوف الحرة بكاملها من أصفار تتواجد في أسفل المصفوفة .

\* في أي صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من أصفار يكون الواحد المتقدم في الصف الأول على يسار الواحد المتقدم في الصف الثاني .

\* تكون جميع عناصر العمود المحتوي على الواحد المتقدم أصفاراً في كل مكان عدا هذا العنصر .

**الرتبة :** عند تحويل المصفوفة إلى الشكل الصفحي المميز فإن عدد الصفوف غير الصفيرية تسمى رتبة المصفوفة Rank

**المصفوفة الأولية :** هي المصفوفة التي يمكن الحصول عليها من مصفوفة الوحدة بعد إجراء عملية واحدة فقط من عمليات الصف البسيط على مصفوفة الوحدة .

- \* تسمى عناصر  $\mathbb{A}^n$  فضاء خطي  $\hookrightarrow$  متجهات
- \* لا يمكن أن يحتوي على متجهين صفريين مختلفين
- \* المتجه الصفري في  $\mathbb{A}^n$  فضاء خطي وحيد
- \* النظر الجمعي لأي متجه مامو إلا « (-) » وهو وحيد
- \* إذا كان  $\lambda$  فضاء خطياً فإن  $\lambda$  فضاء جزئي من نفسه
- \* الفضاء الخطي الصفري  $\{0\}$  المكون من المتجه الصفري فضاء جزئي من  $\lambda$
- \* المجموعات الجزئية للـ  $\mathbb{A}^n$  الفضاء الخطي  $\lambda$  تشكل فضاء جزئياً إذا تحققت البديهية
- \* الأقتران الصفري اقتران متصل
- \* تقاطع أي عدد من الفضاءات الجزئية (من الفضاء الخطي  $\lambda$ ) يشكل فضاء جزئياً
- \* في النظام الخطي المتجانس  $\hookrightarrow$  عدد المعادلات (الفعلي) لا يمكن أن يزيد عن عدد المجاهيل
- \* حامل ضرب المصفوفات لا يحقق الخاصية التبيلية
- \* يمكن أن يكون حامل ضرب مصفوفتين غير صفريتين مصفوفة صفرية

$$|A+B| \neq |A| + |B|$$

$$|KA| = K^n |A| \text{ حيث } A \text{ مصفوفة حجمها } n \times n$$

$$AX=0 \text{ حلاً غير تافه إذا وفقط إذا كان } |A|=0$$

$$A \cdot \text{adj}(A) = |A| I \quad \leftarrow A \text{ مصفوفة حجمها } n \times n$$

$$|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$



### الوحدة الثالثة:

\* العمليات المسموح لها في توليد متجه ما  $(v)$  من المتجهات المعطاة هي عمليات الجمع والضرب بعدد

\* التركيبة الخطية  $\leftarrow$  كتابة المتجهات  $v_1, v_2, \dots, v_n$  على الشكل

$$\sum c_i v_i = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \Rightarrow L(v_1, \dots, v_n)$$

\* إذا كانت  $S$  مجموعة جبرية من فضاء خطي  $V$  فإن  $L(S)$  أصغر فضاء يحتوي على  $S$

\* إذا كانت  $S, T$  مجموعتين جبريتين من فضاء خطي  $V$  فإن  $S \subseteq T$  وكانت  $L(S) \subseteq L(T)$  فإن

\* كتابة المتجه  $v$  على شكل تركيبة خطية بالمتجهات  $u_1, u_2, u_3$

$$v = x u_1 + y u_2 + z u_3$$

1. نكتب المعادلة العامة للتركيبة

2. نحوض قيم المتجهات ونساوي بين الطرفين لتكوين معادلات

3. نكتب مصفوفة من المعادلات (ممتدة) ونجري عمليات الصف البسيط

4. إذا نتجت مصفوفة الوحدة  $\leftarrow$  يمكن كتابة  $v$  على شكل تركيبة خطية

\* لكي نوهن أن  $S$  مجموعة مولدة للفضاء  $R^n$

1. نكتب مصفوفة مكونة من صفوف عبارة عن المتجهات المعطاة للمجموعة

2. نجرى عمليات الصف البسيط

3. إذا نتجت مصفوفة الوحدة  $\leftarrow$   $S$  مجموعة مولدة للفضاء  $R^n$

4.  $B$  قاعدة الفضاء  $\leftarrow$  مجموعة المتجهات المكونة من الصفوف الناتجة عن عمليات الصف البسيط

\* إذا كانت  $S$  مجموعة جبرية في فضاء خطي  $V$  إذا أمكن كتابة أحد عناصر  $V$  الموجودة

في  $S$  على شكل تركيبة خطية في العناصر  $(S - \{v\})$  فيكون  $L(S) = L(S - \{v\})$

\* كل متتالية منغرية الذائب هي تركيبة خطية من عناصر  $S$

\* إذا كانت  $S$  مجموعة جبرية من الفضاء الخطي  $V$  فإن  $L(S)$  هي تقاطع كل الفضاءات الجبرية في  $V$  التي يحتوي الواحد منها على  $S$



## الوحدة الأولى

## جبر خطي < نصفي

حجم المصفوفة = عدد الصفوف  $\times$  عدد الأعمدة

المصفوفة المثلثية العلوية: هي مصفوفة مربعة التي جميع عناصرها تحت القطر الرئيسي أصفاراً.

المصفوفة المثلثية السفلية: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي أصفاراً.

المصفوفة القطرية: هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي.

مصفوفة الوحدة: هي مصفوفة عناصر قطرها الرئيسي تساوي واحد.

$$A - B = A + (-B) \quad \leftarrow \text{حامل طرح مصفوفتين}$$

$$A^t \quad \leftarrow \text{منقول المصفوفة } A$$

$$(A^t)^t = A \quad \leftarrow \text{منقول منقول المصفوفة } A = \text{المصفوفة } A$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad *$$

$$(KA)^t = KA^t \quad *$$

$$AB = BA = I \quad \text{حيث } I \text{ مصفوفة الوحدة} \quad \leftarrow \text{مصفوفة قابلة للانعكاس له} \quad \text{تفسير ضمني}$$

$$* \text{ معكوس المصفوفة } A \text{ إن وجد يكون وحيداً.}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad *$$

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} \quad *$$