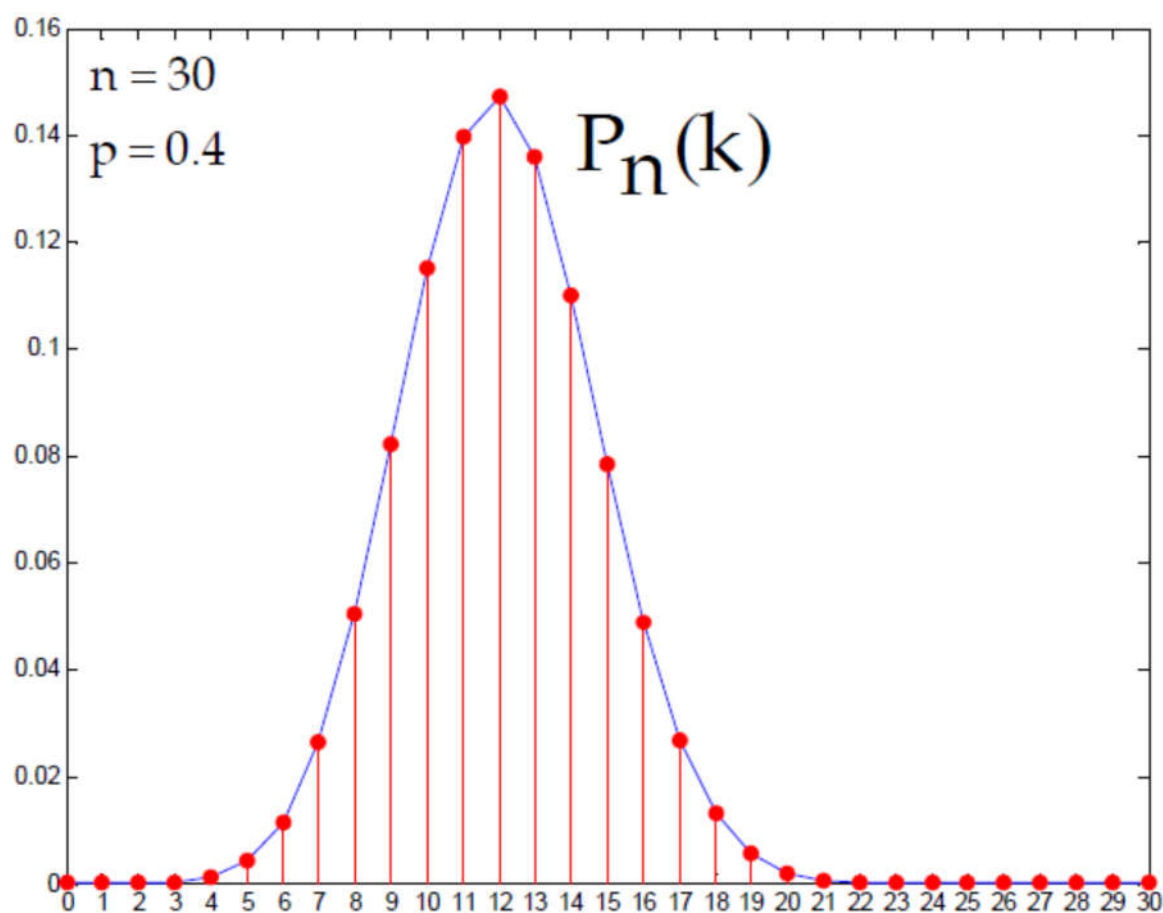
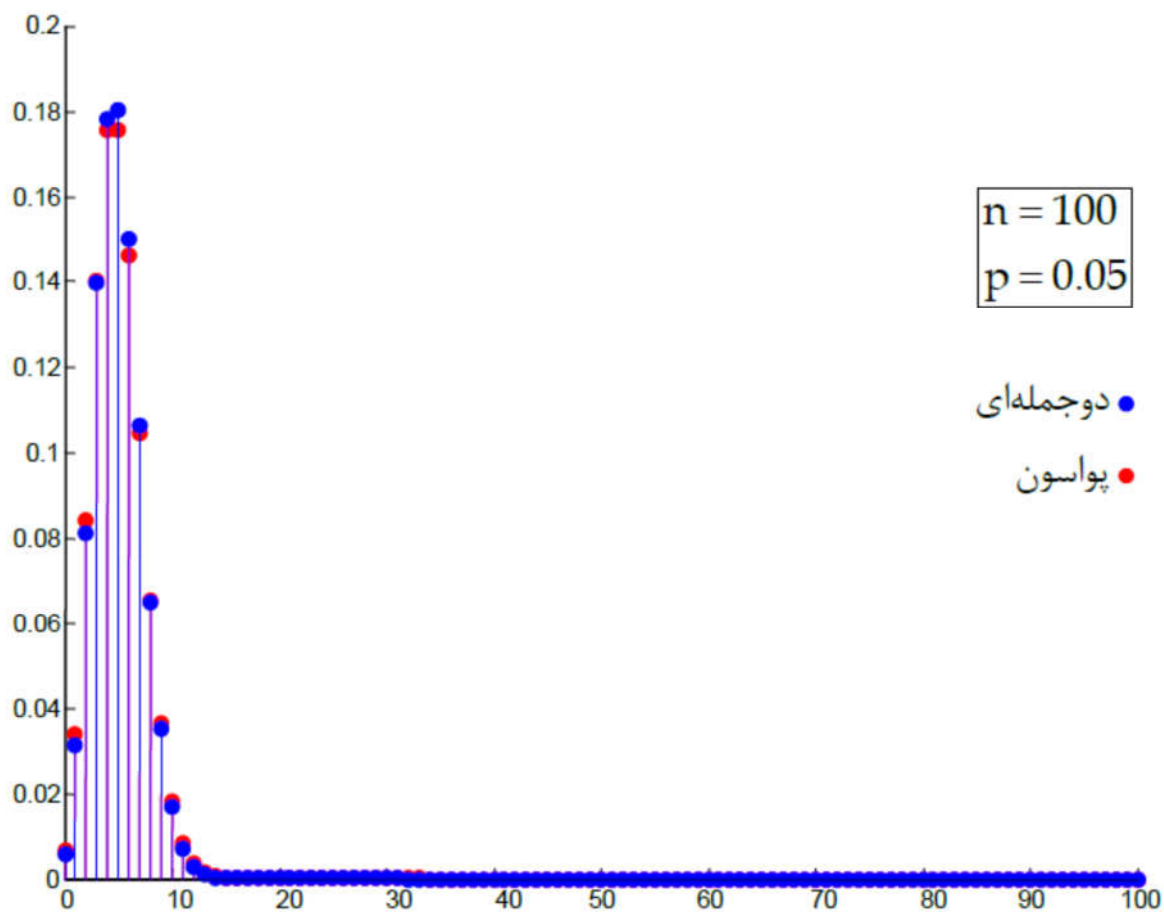


تمرین ۱: در آزمایش برنولی با  $n = 30$  و  $p = 0.4$ ،  $p_n(k)$  را برای مقادیر مختلف  $k$  محاسبه و رسم نمایید.



مشاهده می‌شود که مقدار حداکثر در  $np$  رخ می‌دهد.

تمرین ۲: در آزمایش برنولی با  $n = 100$  و  $p = 0.05$ ،  $p_n(k)$  و تقریب پواسن آن را محاسبه و رسم نمایید.



تمرین ۳- سکه‌ای ۱۰ مرتبه پرتاب می‌شود. احتمال آنکه در پرتاب هشتم، برای مرتبه دوم شیر بیاید، چقدر است؟

$$p = \underbrace{\left[ \binom{7}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right]}_{\text{در 7 مرتبه اول یک شیر}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{شیر در پرتاب هشتم}}$$

$$= \binom{7}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{256} = 0.0273$$

تمرین ۴- تعداد ۲۰ عدد لامپ به طور سری به یکدیگر وصل شده‌اند. احتمال سوخته بودن هر لامپ برابر ۰/۰۱ است.

(الف) احتمال اینکه رشته لامپ‌ها روشن شود، چقدر است؟

(ب) اگر رشته لامپ‌ها روشن نشود، از ابتدای رشته شروع به امتحان نمودن تک تک لامپ‌ها می‌نماییم و در صورت سوخته بودن لامپ، آن را با لامپ سالم جایگزین می‌کنیم. احتمال اینکه بعد از جایگزینی لامپ پنجم، رشته روشن شود، چقدر است؟

(ج) احتمال اینکه برای روشن شدن رشته لامپ‌ها حداکثر به ۲ تعویض نیاز داشته باشیم، چقدر است؟

$$p_1 = 0.99^{20} = 0.818 \quad \text{(الف)}$$

$$p_2 = 1^4 \times 0.01 \times 0.99^{15}$$

۴ لامپ اول (سوخته یا سالم)      لامپ پنجم سوخته      لامپ ششم به بعد سالم

(ج)

$$p_3 = 0.99^{20} + \binom{20}{1} (0.01)^1 (0.99)^{19} + \binom{20}{2} (0.01)^2 (0.99)^{18}$$

تمرین ۵- محموله‌ای شامل ۱۰۰ قطعه است و احتمال خرابی هر قطعه، ۰/۲ است. ۱۲ قطعه به تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه ۳ قطعه از ۱۲ قطعه انتخابی خراب باشد، چقدر است؟

$$p = \binom{12}{3} (0.2)^3 (0.8)^9 = 0.2362$$

تمرین ۶- محموله‌ای شامل ۱۰۰ قطعه است که ۸۰ قطعه آن سالم و ۲۰ قطعه باقی‌مانده خراب است. ۱۲ قطعه به تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه ۳ قطعه از ۱۲ قطعه انتخابی خراب باشد، چقدر است؟

$$p = \frac{\binom{20}{3} \binom{80}{9}}{\binom{100}{12}} = 0.2523$$

تمرین ۷- هواپیمایی دارای ۱۸۹ مسافر است. هر مسافر به احتمال ۰/۳ دارای چمدانی در قسمت بار است. احتمال اینکه تعداد مسافرانی که دارای چمدان در قسمت بار باشند، بین ۴۵ تا ۶۷ باشد، چقدر است؟

$$p = \sum_{k=45}^{67} \binom{189}{k} (0.3)^k (0.7)^{189-k}$$

$$= G\left(\frac{67 - 56.7}{\sqrt{39.69}}\right) - G\left(\frac{45 - 56.7}{\sqrt{39.69}}\right)$$

$$np = 189 \times 0.3 = 56.7$$

$$npq = 189 \times 0.3 \times 0.7 = 39.69$$

تمرین ۸- دو تاس را مکرر پرتاب می‌نماییم و مجموع اعداد آنها را  $T$  در نظر می‌گیریم. احتمال اینکه  $T = 7$  قبل از  $T = 8$  مشاهده شود، چقدر است؟

$$T = 7 : \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$p(T = 7) = \frac{6}{36}$$

$$T = 8 : \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

$$p(T = 8) = \frac{5}{36}$$

$$p = p(\text{بار اول 7 و نه 8}) + p(\text{بار دوم 7 و بار اول نه 7 و نه 8}) + \dots$$

$$+ p(\text{بار سوم 7 و بار اول و دوم نه 7 و نه 8}) + \dots$$

$$= \left(\frac{6}{36}\right) + \left(\frac{25}{36} \times \frac{6}{36}\right) + \left(\frac{25}{36} \times \frac{25}{36} \times \frac{6}{36}\right) + \dots$$

$$= \frac{6}{36} \left[ 1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \dots \right] = \frac{6}{36} \left[ \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} \right] = \frac{6}{11}$$

تمرین ۹- محل حداکثر شدن  $p_n(k)$  را محاسبه نمایید.

(به ازای چه مقدار از  $k$ ،  $p_n(k)$  حداکثر می‌شود؟)

$$\frac{p_n(k-1)}{p_n(k)} = \frac{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q}{\frac{n!}{k!(n-k)!} p}$$

$$= \frac{kq}{(n-k+1)p}$$

$$\begin{cases} kq < (n-k+1)p : \text{تابع صعودی} \\ kq > (n-k+1)p : \text{تابع نزولی} \end{cases}$$

$$kq < (n-k+1)p \Rightarrow k(1-p) < (n-k+1)p \Rightarrow k < (n+1)p$$

در نتیجه تا  $k < (n+1)p$  تابع صعودی و برای  $k > (n+1)p$  تابع نزولی است.

$$n = 10, \quad p = 0.6 \quad \text{مثال عددی:}$$

$$(n+1)p = 11 \times 0.6 = 6.6$$

تا  $k = 6$  تابع صعودی و برای بعد از آن، تابع نزولی می‌شود:

$$p_{10}(0) = \binom{10}{0} 0.6^0 0.4^{10} = 0.00010$$

$$p_{10}(1) = \binom{10}{1} 0.6^1 0.4^9 = 0.00016$$

$$p_{10}(2) = \binom{10}{2} 0.6^2 0.4^8 = 0.01062$$

$$p_{10}(3) = \binom{10}{3} 0.6^3 0.4^7 = 0.04247$$

$$p_{10}(4) = \binom{10}{4} 0.6^4 0.4^6 = 0.11148$$

$$p_{10}(5) = \binom{10}{5} 0.6^5 0.4^5 = 0.20066$$

$$p_{10}(6) = \binom{10}{6} 0.6^6 0.4^4 = 0.32249$$

$$p_{10}(7) = \binom{10}{7} 0.6^7 0.4^3 = 0.21500$$

$$p_{10}(8) = \binom{10}{8} 0.6^8 0.4^2 = 0.12093$$

$$p_{10}(9) = \binom{10}{9} 0.6^9 0.4^1 = 0.04031$$

$$p_{10}(10) = 0.6^{10} = 0.00605$$