حمید لطف یعقوبی عراقی
98109786

سوال یک:

آ) $(x-y)^T(x-y) \stackrel{?}{=} 2(1-x^Ty)$

$$(x-y)^T(x-y)=(x^T-y^T)(x-y)=x^Tx-x^Ty-y^Tx+y^Ty$$
$$x^Ty=y^Tx=x\cdot y$$
$$\|x\|=x^Tx=1$$
$$\|y\|=y^Ty=1$$
$$(x-y)^T(x-y)=1-x^Ty-x^Ty+1=2(1-x^Ty)$$
$$\Rightarrow (x-y)^T(x-y)=2(1-x^Ty)$$

الزاماً درست

ب) $\|x-\frac{1}{2}y\|^2 \stackrel{?}{=} \frac{5}{4}-x^Ty$

$$\|x-\tfrac{1}{2}y\|^2=(x-\tfrac{1}{2}y)^T(x-\tfrac{1}{2}y)=(x^T-\tfrac{1}{2}y^T)(x-\tfrac{1}{2}y)=x^Tx-\tfrac{1}{2}x^Ty-\tfrac{1}{2}y^Tx+\tfrac{1}{4}y^Ty$$
$$x^Tx=y^Ty=1$$
$$x^Ty=y^Tx$$
$$1-x^Ty+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{4}+x^Ty$$

$$\Rightarrow \|x-\tfrac{1}{2}y\|^2=\tfrac{5}{4}-x^Ty$$

الزاماً درست

ج) $\dfrac{x^Ty}{x^Tx}-\dfrac{y^Ty}{x^Tyy^Tx} \stackrel{?}{=} 0$

$$\frac{x^Ty}{x^Tx}-\frac{y^Ty}{x^Ty\,y^Ty}=0$$
$$x^Tx=\|x\|^2=1$$
$$y^Ty=\|y\|^2=1$$
$$x^Ty=y^Tx$$
$$\frac{x^Ty}{1}-\frac{1}{x^Ty}=0 \Rightarrow (x^Ty)^2=1 \Rightarrow x^Ty=\pm 1 \Rightarrow \|x\|\cdot\|y\|\,\mathrm{Cos}\,\theta_{xy}=\pm 1$$
$$\Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta_{xy}=\pm 1 \Rightarrow \theta_{xy}=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$$
$\Rightarrow$ x و y یک راستا

به ازای این مقدار تساوی برقرار است.

د) $\|y+\frac{2}{3}x\|^2 \stackrel{?}{=} \frac{4}{9}(1+4x^Ty)$

$$\|y+\tfrac{2}{3}x\|^2=(y+\tfrac{2}{3}x)^T(y+\tfrac{2}{3}x)=(y^T+\tfrac{2}{3}x^T)(y+\tfrac{2}{3}x)=y^Ty+\tfrac{2}{3}y^Tx+\tfrac{2}{3}x^Ty+\tfrac{4}{9}x^Tx$$
$$y^Ty=1$$
$$x^Tx=1$$
$$x^Ty=y^Tx$$
$$\|y+\tfrac{2}{3}x\|^2=1+\tfrac{4}{3}x^Ty+\tfrac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \|y+\tfrac{2}{3}x\|^2=\tfrac{13}{9}+\tfrac{4}{3}x^Ty=\tfrac{4}{9}+\tfrac{16}{9}x^Ty$$
$$\Rightarrow 1=\tfrac{4}{9}x^Ty \Rightarrow x^Ty=\tfrac{9}{4}=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\mathrm{Cos}\,\theta_{xy}$$
$$\Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta_{xy}=\tfrac{9}{4} \Rightarrow \times$$

الزاماً غلط

حمید لطفیلوئی عراقی
98109786

ادامه‌ی سوال یک:

ه) $x^Tx + x^Tx - 2y^Ty \overset{?}{=} x^Ty$

$$x^Tx = \|x\|^2 = 1, \quad y^Ty = \|y\|^2 = 1 \Rightarrow x^Tx + x^Tx - 2y^Ty = 1+1-2 = x^Ty \Rightarrow x^Ty = 0 = \|x\|.\|y\| \cos\theta_{xy} = \cos\theta_{xy}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{xy} = 0 \Rightarrow \theta_{xy} = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases} \Rightarrow$$

x و y عمود بر هم

به ازای این مقدار تساوی برقرار است.

و) $$\frac{\frac{1}{2} * x^Tx * \frac{1}{2} y^Ty}{y^T(\frac{1}{4}y)} + \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2 \|y\|^3} - \frac{y^Ty\, y^Ty}{x^Tx} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x^Tx = \|x\|^2 = 1 \\ y^Ty = \|y\|^2 = 1 \\ \|x\| = 1 \\ \|y\| = 1 \end{array}\right\} \frac{\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{4} \times 1} + \frac{1^2}{1^2 \times 1^3} - \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + 1 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$$

الزاماً درست است.

حمیدرضا یعقوبی عراقی
98109786

سوال دو:

$$c = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_k b_k$$

$$b_i = \beta_{i,1} a_1 + \beta_{i,2} a_2 + \cdots + \beta_{i,m} a_m$$

$\Rightarrow$ حال هر بردار b را جایگذاری می‌کنیم.

$$\Rightarrow c = \alpha_1(\beta_{1,1} a_1 + \beta_{1,2} a_2 + \cdots + \beta_{1,m} a_m) + \alpha_2(\beta_{2,1} a_1 + \beta_{2,2} a_2 + \cdots + \beta_{2,m} a_m) + \cdots + \alpha_k(\beta_{k,1} a_1 + \beta_{k,2} a_2 + \cdots \beta_{k,m} a_m)$$

$$\Rightarrow c = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{i,1} a_1 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{i,2} a_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{i,m} a_m = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{i,j} a_j$$

$$\Rightarrow c = a_1 \underbrace{(\alpha_1 \beta_{11} + \alpha_2 \beta_{21} + \cdots \alpha_k \beta_{k1})}_{x_1} + \cdots + a_m \underbrace{(\alpha_1 \beta_{1m} + \alpha_2 \beta_{2m} + \cdots + \alpha_k \beta_{km})}_{x_m} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m$$

$\Rightarrow$ پس c ترکیب خطی از $a_1, \dots, a_m$ می‌باشد.

سوال سه:

بخش اول $\Rightarrow$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \text{هزینه‌ها} \qquad P_k = \begin{bmatrix} P_{k,1} \\ P_{k,2} \\ \vdots \\ P_{k,n} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{هزینه‌ی کل} = P_k \cdot q$$

پس ما باید به ازای تمام K فروشنده هزینه‌ی کل یا همان ضرب داخلی $P_k \cdot q$ را حساب کنیم و $\min(P_k \cdot q)$ را انتخاب کنیم.

بخش دوم $\Rightarrow$

فرض کنیم در بهترین حالت قیمت تمام شده برابر x شود. یعنی به ازای تمام هزینه‌های تمام شده‌ی y داشته باشیم $x \leq y$. حال فرض کنیم به حرف مشاور را گوش داده باشیم $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} P_j \cdot q = x = \text{کمترین هزینه} \\ \forall i \in K, i \neq j \Rightarrow P_i \cdot q = y_i \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq y_i$$

$\Leftarrow$ y_i هزینه‌ی تمام شده‌ی فروشنده‌ی i است.
می‌دانیم که x از همه کوچک‌تر است.

حال $\Rightarrow$ اگر نصف نصف مشارکت کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \forall m,n \in K \quad w = \frac{1}{2} \overbrace{q \cdot P_m}^{y_m} + \frac{1}{2} \overbrace{q P_n}^{y_n} = \frac{1}{2} y_m + \frac{1}{2} y_n = \frac{1}{2}(y_m + y_n) \\ \left.\begin{array}{l} x \leq y_m \\ x \leq y_n \end{array}\right\} 2x \leq y_m + y_n \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}(y_m + y_n) \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq w$$

y_m هزینه‌ی تمام شده برای خرید از فروشنده m ام است.
y_n هزینه‌ی تمام شده برای خرید از فروشنده‌ی n ام است.

پس در هر صورت هزینه‌ی تمام شده بدون پیشنهادهای مشاور ، x و مشارکت به صرفه تر نیست.

حمیدرضا یعقوبی عراقی
98109786

سوال چهار:

آ) هر درایه‌ی وکتور از جنس float می‌باشد پس هشت بایت است. حال طول هر وکتور 4×10^6 است و 200 بردار داریم. پس:

بایت‌های مورد نیاز = $200 \times 4\times10^6 \times 8 = 6.4\times10^9$ بایت

ب) در واقع به ازای هر بردار 4×10^6 flops مورد نیاز است. <=

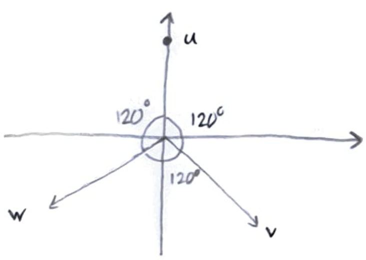
$$C = \underbrace{\alpha_1 a_1}_{4\times10^6 \, flops} + \alpha_2 a_2 + \dots + a_n \alpha_n$$

$$flops = 200\times4\times10^6 + \underbrace{199\times4\times10^6}_{\text{جمع وکتورها}} = 1.596\times10^9$$

ج) تقریباً بین یک الی دو ثانیه.

$$\frac{1.596\times10^9 \, flops}{10^9 \, \frac{flops}{s}} = t = 1.596\,s$$

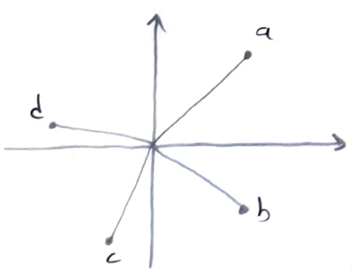
سوال پنج:



آ) بله وجود دارد. به عنوان مثال، سه بردار را در نظر بگیرید که زاویه‌ی بین آنها 120° باشد. <=

$$\left.\begin{array}{l} u\cdot v = \|u\|\,\|v\| \cos\theta_{uv} \\ u\cdot w = \|u\|\,\|w\| \cos\theta_{uw} \\ w\cdot v = \|w\|\,\|v\| \cos\theta_{wv} \\ \theta_{uv} = \theta_{uw} = \theta_{wv} \end{array}\right\} \xRightarrow{\cos 120^\circ < 0} \begin{array}{l} u\cdot v < 0 \\ u\cdot w < 0 \\ w\cdot v < 0 \end{array}$$

حال با توجه به این موضوع که اندازه بردارها مثبت است و هر سه زاویه برابر 120° است و $\cos 120^\circ < 0$ است پس حاصل ضرب داخلی دو به دوی این بردارها منفی است.



ب) حال برای 4 بردار را بررسی می‌کنیم. چهار بردار a, b, c, d را در نظر بگیرید. <=

$$\theta_{ab} + \theta_{bc} + \theta_{cd} + \theta_{ad} = 360^\circ$$

حال برای اینکه هر یک از جایگشت‌های حاصل ضرب این چهار بردار (به طور خاص $a\cdot b$, $b\cdot c$, $c\cdot d$, $a\cdot d$) منفی شود نیاز داریم تا هر یک از زوایای بین $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ باشد. با این حساب

$$\left.\begin{array}{l} \theta_{ab} + \theta_{bc} + \theta_{cd} + \theta_{ad} = 360^\circ \\ \left.\begin{array}{l} 90 < \theta_{ab} \leq 180^\circ \\ 90 < \theta_{bc} \leq 180^\circ \\ 90 < \theta_{cd} \leq 180^\circ \\ 90 < \theta_{ad} \leq 180^\circ \end{array}\right] 360^\circ < \theta_{ab} + \theta_{bc} + \theta_{cd} + \theta_{ad} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

پس برای چهار بردار دلخواه، تمامی جایگشت‌های ضرب داخلی دو به دوی بردارها، منفی نمی‌شود. پس حداکثر سه بردار می‌توان

حمید الله یعقوبی عراقی

98109786

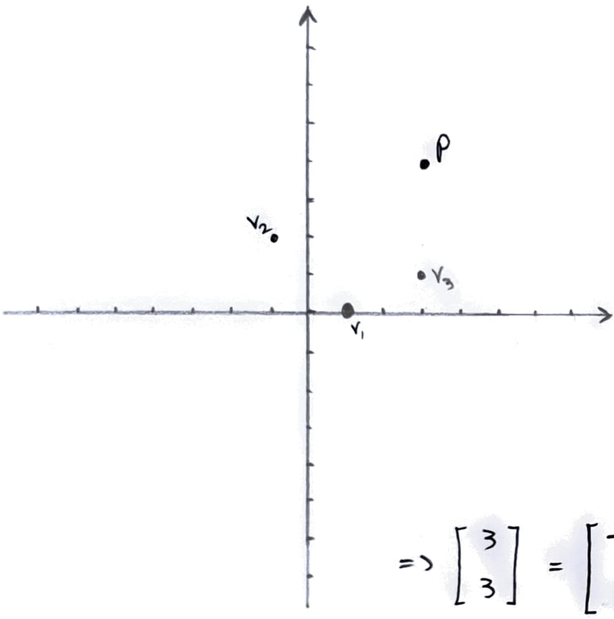
سوال شش:

طبق قضیه ی گفته شده در کلاس، نقطه ی y در R^n یک affine combination از بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ در R^n است اگر و تنها اگر $\Leftrightarrow$ $y - v_i$ یک ترکیب خطی از نقاط

$v_2 - v_i, \dots, v_p - v_i$

$1 \leq i < p$ and $i \neq p, 2$

حال از همین قضیه استفاده می کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} P - V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ V_2 - V_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ V_3 - V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} (P - V_1) = \alpha_1 (V_2 - V_1) + \alpha_2 (V_3 - V_1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 \\ 2\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = 2 \end{array} \Rightarrow$$

پس P یک offine Combination از V_1, V_2, V_3 است.

$$\Rightarrow P = \beta_1 V_1 + \beta_2 V_2 + \beta_3 V_3 \qquad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$$

از بخش قبل $\Rightarrow (P - V_1) = \alpha_1 (V_2 - V_1) + \alpha_2 (V_3 - V_1) \Rightarrow P = \underbrace{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}_{\beta_1} V_1 + \underbrace{\alpha_1}_{\beta_2} V_2 + \underbrace{\alpha_2}_{\beta_3} V_3$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta_1 = 1 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ \beta_2 = \frac{1}{2} \\ \beta_3 = 2 \end{array}\right\} \boxed{P = -\frac{3}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_2 + 2 V_3}$$