数学物理方法　期末考试

周子正　学号：1810334

2020 年 6 月

1　第一题

2　第二题

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1-i\tan x}{1+i\tan x} = \frac{\cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x} = \frac{-i\left[\cos\left(\pi/2-x\right)+i\sin\left(\pi/2-x\right)\right]}{\exp\left(ix\right)} \\
&= \exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-2ix\right) = \exp\left(-2ix\right) \\
&= \cos 2x - i\sin 2x
\end{aligned}
$$

3　第三题

$$
1+i = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)
$$

$$
1-i = \sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)
$$

$$
(1+i)^{1000} + (1-i)^{1000} = 2^{500}\left[\exp\left(250\pi i\right)+\exp\left(-250\pi i\right)\right] = 2^{501}
$$

4　第四题

$$
\because |\sqrt{3}+i| = |\sqrt{3}-i|
$$

$$
\therefore |\sqrt{3}+i|^n = |\sqrt{3}-i|^n
$$

二者模长必然相同，若要求二者相等，只需要辐角满足

$$
\arg\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2k\pi + \arg\left(\sqrt{3}-i\right)^n, \quad k\in\mathbb{Z}
$$

$$
\therefore n\frac{\pi}{6} = -n\frac{\pi}{6} + 2k\pi
$$

$$
\therefore n = 6k, \quad k\in\mathbb{Z}
$$

所以只需要 n 是整数且能被 6 整除即可。

5 第五题

将 $z = x + yi$ 代入 ω 展开有：

$$\omega = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} - \frac{2x}{x^2 + (y+1)^2} i$$

6 第六题

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos nz}{n!}$$

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin nz}{n!}$$

考虑做一对替换有：

$$c_+ \equiv a + bi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos nz + i \sin nz}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(inz)}{n!} = \exp(\exp(iz))$$

$$c_- \equiv a - bi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos nz - i \sin nz}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(-inz)}{n!} = \exp(\exp(-iz))$$

其中

$$\exp(\exp(iz)) = \exp(\cos z + i \sin z) = e^{\cos z} (\cos \sin z + \sin \sin z)$$

$$\exp(\exp(-iz)) = \exp(\cos z - i \sin z) = e^{\cos z} (\cos \sin z - \sin \sin z)$$

于是由替换的关系可以得到：

$$a = \frac{c_+ + c_-}{2} = e^{\cos z} \cos \sin z$$

$$b = \frac{c_+ - c_-}{2i} = -ie^{\cos z} \sin \sin z$$

7 第七题

求

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

在 $z = 0$ 的洛朗级数，很明显此处不解析，考察 $n \in N^*$ 时，

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^n}{e^z - 1} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

因此这是一阶极点，考虑求解析函数 $a(z)=zf(z)$ 在 $z=0$ 的泰勒展开，设其为

$$a\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$$

这不容易计算，考虑其倒数 $b(z)=1/a$，可以展开为

$$b\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

又因为恒等关系 $a(z)b(z)=1$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\right)=1$$

比较 z 的各阶系数可以得到 $a_0=1, a_1=-\frac{1}{2}...$

在 $n\geq 1$ 时，其满足线性齐次方程组方程为：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(n-k+1)!}=0$$

理论上可以解出任意的 a_n

我试图找到通项公式但是失败了，查阅资料发现这个数列与伯努利数相关，关系为 $a_n=B_n/n!$ 其被定义为

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}$$

递推关系为

$$B_m=[m=0]-\sum_{k=0}^{m-1}\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}\frac{B_k}{m-k+1}$$

$B_0=1$, 其中 $[m=0]$ 表示当 $m=0$ 时，取 1，其余取 0。

综上可得，

$$f\left(z\right)=\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}B_{n+1}$$

8 第八题

由于所有极点都在围道内部，直接考察无穷远的留数，根据引理有：

$$\int_{|z|=200}f\left(z\right)dz=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z\to\infty}f\left(z\right)=2\pi i\operatorname*{Res}_{t\to 0}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right]$$

其中

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t^2}\prod_{k=1}^{100}\frac{1}{1-kt}$$

$$\because \lim_{t\to 0} t^2 \frac{1}{t^2} \prod_{k=1}^{100} \frac{1}{1-kt} = 1$$
$$\therefore \text{二阶极点}$$

所以可以计算出留数的值

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{t\to 0}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right] &= \lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\prod_{k=1}^{100}\frac{1}{1-kt} \\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{n=1}^{100}\prod_{n=1\wedge k\neq n}^{100}\frac{n}{1-kt} \\
&= \sum_{n=1}^{100} n = 5050
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{|z|=200} f(z)\, dz = 10100\pi i$$

9 第九题

10 第十题

直接考察积分，试图利用柯西公式

$$\begin{aligned}
D_F(x-y) &= \int_{C_F}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2} \\
&= \int_{C_F}\frac{d^3\vec{p}dp_0}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p_0^2-(\vec{p}^2+m^2)} \\
&= \int\frac{d^3\vec{p}\left[e^{-ip\cdot(x-y)}\right]}{(2\pi)^4}\int_{C_F}\frac{idp_0}{p_0^2-E_{\vec{p}}^2}
\end{aligned}$$

考察其中的

$$\int_{C_F}\frac{idp_0}{p_0^2-E_{\vec{p}}^2} = \int_{C_F}\frac{idp_0}{(p_0-E_{\vec{p}})(p_0+E_{\vec{p}})}$$

注意到在 C_F 的围道内只有一个一阶极点为

$$\operatorname*{Res}_{p_0\to E_{\vec{p}}}\frac{i}{(p_0-E_{\vec{p}})(p_0+E_{\vec{p}})} = \frac{i}{2E_{\vec{p}}}$$

注意到 C_F 的围道方向为顺时针，因此有

$$\int_{C_F}\frac{idp_0}{p_0^2-E_{\vec{p}}^2} = 2\pi\frac{1}{2E_{\vec{p}}}$$

代入 Feynman 传播子表示可得到：

$$D_F(x-y) = \int_{C_F}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2} = \int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}e^{-ip\cdot(x-y)}\bigg|_{p_0=E_{\vec{p}}}$$

11 第十一题

$$S=\int d^2x\left\{-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\left(x\right)\partial^\mu\phi\left(x\right)+\frac{1}{2}\lambda_{\mu v}\left(x\right)\left[\partial^\mu\phi\left(x\right)-\epsilon^{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi\left(x\right)\right]\left[\partial^v\phi\left(x\right)-\epsilon^{v\rho}\partial_\rho\phi\left(x\right)\right]\right\}$$

先分别计算其中的积分

$$S_1=\int d^2x\left[\partial_\mu\phi\left(x\right)\partial^\mu\phi\left(x\right)\right]$$

$$S_2=\int d^2x\left\{\lambda_{\mu v}\left(x\right)\left[\partial^\mu\phi\left(x\right)-\epsilon^{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi\left(x\right)\right]\left[\partial^v\phi\left(x\right)-\epsilon^{v\rho}\partial_\rho\phi\left(x\right)\right]\right\}$$

$$\because\phi\left(x\right)=\mathcal{F}\left(\phi\left(k\right)\right),\lambda_{\mu v}\left(x\right)=\mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right)\right)$$

换元，令

$$g_\mu=-ik_\mu\phi\left(k\right),g^\mu=-ik^\mu\phi\left(k\right)$$

导数定理

$$\because\mathcal{F}\left(-ik_\mu\phi\left(k\right)\right)=\partial_\mu\phi\left(x\right),\mathcal{F}\left(-ik^\mu\phi\left(k\right)\right)=\partial^\mu\phi\left(x\right)$$

卷积定理

$$S_1=\int d^2x\mathcal{F}\left(g_\mu\right)\mathcal{F}\left(g^\mu\right)=\frac{1}{2\pi}\int d^2x\mathcal{F}\left(g_\mu*g^\mu\right)$$

$$\therefore S_1=\left(g_\mu*g^\mu\right)\big|_{k=0}=\int d^2\xi g_\mu\left(\xi\right)g^\mu\left(0-\xi\right)=\int d^2k\left(-ik_\mu\right)\phi\left(k\right)\left(-ik^\mu\right)\phi\left(k\right)$$

同理我们设

$$\eta^\mu=ik^\mu\phi\left(k\right)-\epsilon^{\mu\sigma}ik_\sigma\phi\left(k\right),\eta^\nu=ik^\nu\phi\left(k\right)-\epsilon^{v\rho}ik_\rho\phi\left(k\right)$$

有

$$S_2=\int d^2x\mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right)\right)\mathcal{F}\left(\eta^\mu\right)\mathcal{F}\left(\eta^\nu\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int d^2x\mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right)*\eta^\mu*\eta^\nu\right)$$

$$S_2=\frac{1}{2\pi}\left.\lambda_{\mu v}\left(k\right)*\eta^\mu*\eta^\nu\right|_{k=0}=\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi\int d^2\zeta\lambda_{\mu v}\left(\zeta+\xi\right)\eta^\mu\left(0-\xi\right)\eta^\nu\left(0-\zeta\right)$$

即为

$$S_2=\frac{1}{2\pi}\int d^2k\int d^2k'\lambda_{\mu v}\left(-k-k'\right)\left[ik^\mu\phi\left(k\right)-\epsilon^{\mu\sigma}ik_\sigma\phi\left(k\right)\right]\left[ik^\nu\phi\left(k'\right)-\epsilon^{v\rho}ik_\rho\phi\left(k'\right)\right]$$

现在我们终于可以代回到原表达式

$$\begin{aligned}S_m=&-\frac{1}{2}\int d^2k\left(-ik_\mu\right)\left(ik^\mu\right)\phi(k)\phi(-k)\\&+\frac{1}{4\pi}\int d^2kd^2k'\lambda_{\mu\nu}\left(-k-k'\right)\left(ik^\mu-\epsilon^{\mu\sigma}ik_\sigma\right)\left(ik'^\nu-\epsilon^{\nu\rho}ik'_\rho\right)\phi(k)\phi\left(k'\right)\end{aligned}$$

这就是结果

12 第十二题

12.1

$$g_1(t) = \begin{cases} 2t/T & 0 \le t < T/2 \\ 2(1-t/T) & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

根据周期函数

$$\mathcal{L}\left(g\left(t\right)\right) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} g(t) dt$$

计算得

$$\int_0^{T/2} \exp\left(-pt\right) \frac{2t}{T} dt = \frac{2}{T} \left[\frac{1}{p^2} - e^{-Tp/2} \left(\frac{T}{2p} + \frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$-\int_{T/2}^{T} \exp\left(-pt\right) \frac{2t}{T} dt = \frac{2}{T} e^{-Tp/2} \left[\left(1 - e^{-Tp/2}\right) \left(\frac{T}{2p} + \frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$\int_{T/2}^{T} 2 \exp\left(-pt\right) dt = \frac{2}{p} \left(e^{-Tp/2} - e^{-Tp}\right)$$

代入化简得

$$\mathcal{L}\left(g_1\left(t\right)\right) = \frac{2}{Tp^2} \tan\mathrm{h} \left(\frac{Tp}{4}\right)$$

12.2

$$g_2\left(t\right) = \frac{2}{T} \left[\mathrm{tH}\left(\mathrm{t}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(t - \frac{1}{2} nT\right) H\left(t - \frac{1}{2} nT\right)\right]$$

$$\mathcal{L}\left(g_2\left(t\right)\right) = \frac{2}{Tp^2} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{1}{2} nT\right)\right]$$

如果 $g_1(t) = g_2(t)$，比照系数令 $x = Tp/4$ 换元有

$$\tanh x = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nx}$$

这正是我们想证明的。因此只需证明 $g_1(t) = g_2(t)$.

下面证明 $g_1(t) = g_2(t)$

我们首先考察区间 $[0, T/2)$, 对于 $t \in [0, T/2]$ 由于全部的 $H(t - 1/2nT) = 0$ 因此二者显然相等。

然后考察区间 $[T/2, T)$, 对于 $t \in [0, T/2]$ 求和只保留到 $n = 1$，有

$$g_2 = \frac{2}{T} \left[t - 2\left(t - \frac{1}{2} T\right)\right] = 2 - \frac{2t}{T} = g_1$$

综上二者在 $t \in [0, T)$ 上相等。

一般地，对于 $n>0$ 情形，仅当 $t \geq 1/2nT$ 时,$H(t-1/2nT)=1$，其余情况为 0。如果我们只考察 t 非负半轴情况，求和可以写成：

$$g_2\left(t\right)=\frac{2}{T}\left[t+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT\right)\right]$$

其中 $\left[\frac{2t}{T}\right]$ 表示括号内值向下取整。
接下来证明 $g_2(t)$ 也以 T 为周期，既 $g_2(t)=g_2(t+T)$

$$\begin{aligned}
g_2\left(t+T\right)&=\frac{2}{T}\left[\mathrm{t}+T+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}+2\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT+T\right)\right]\\
&=\frac{2}{T}\left[\mathrm{t}+T-(2t+T)+2t+2\sum_{n=3}^{\left[\frac{2t}{T}+2\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT+T\right)\right]\\
&=\frac{2}{T}\left[t+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT\right)\right]\\
&=g_2\left(t\right)
\end{aligned}$$

由于在 $[0,T)$ 区间相等并都具有以 T 为周期的周期性，因此 $g_1(t)=g_2(t)$，这正是我们需要的。于是

$$\tanh x=1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2nx}$$

得证

13 第十三题

14 第十四题