数学物理方法　期末考试

周子正　学号：1810334

2020 年 6 月

1　第一题

数学物理方法课程分成两个部分，一是复变函数论，二是数学物理方程。

第一部分首先从复数的引入开始，拓展到复函数。与实分析类似，讨论复变函数的导数和积分，并针对复函数的性质引入柯西积分公式。在复变函数领域，我们可以通过洛朗展开将泰勒展开进行推广，通过洛朗展开，我们不仅能奇点进行更好的分类，还可以更方便的计算包围奇点区域上的积分，即留数定理，这在某种意义上也是柯西公式的推广。我们利用留数定理不仅能解决复积分，也对实变的积分起了很大帮助。接下来我们将实变函的傅立叶级数推广到到复变函数领域，并从离散的求和变成了连续的积分，得到了傅立叶变换。为了解决奇点上积分无穷大问题和 $\exp(ikx)$ 的变换，引入了广义函数——δ 函数，为了解决一部分函数不能变换的问题，我们引入拉普拉斯变换，并分别研究了它们的性质和应用，许多问题因此而变得简单。

第二部分从介绍一些物理情形引入偏微分方程开始，并引入了初始条件和边界条件给出了定解条件，介绍了分类，并针对简单的 (半) 无界可分离算子情况给出了达朗贝尔公式。此后的讨论主要建立在分离变量的基础上，研究了许多不同方程分离变量的结果。介绍的解 PDE 一般步骤为利用分离变量法，将偏微分方程转化为带有未定常数和约束条件的常微分方程，即本征值问题，由于讨论到的本征值问题都是施图姆刘维尔型，解具有正交完备性，可以做广义复立叶展开适配边界条件和初始条件，得到解的一般形式。

基于在第一部分讨论的级数和奇点知识，利用常点邻域上的级数解法和正则奇点邻域上的级数解法，求出了勒让德函数和贝塞尔函数，在求解分离变量后得到的本征值方程中有重要应用。

接下来与特殊函数课类似详细研究了勒让德函数和贝塞尔函数 (球柱函数) 的性质: 表示，模长，渐进行为，正交性，广义傅里叶展开 (其实是 S-L 问题的性质)，对于贝塞尔函数还有其零点，以及二者一些变形表示。

求解一个问题的步骤可以简单总结为根据问题列 PDE 与定解条件 +

分离变量 + 本征值方程 + 正交完备特殊函数 + 广义傅里叶展开适配定解条件。

2 第二题

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1 - i\tan x}{1 + i\tan x} = \frac{\cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x} = \frac{-i\left[\cos\left(\pi/2 - x\right) + i\sin\left(\pi/2 - x\right)\right]}{\exp\left(ix\right)} \\
&= \exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-2ix\right) = \exp\left(-2ix\right) \\
&= \cos 2x - i\sin 2x
\end{aligned}
$$

3 第三题

$$
1 + i = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)
$$

$$
1 - i = \sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)
$$

$$
\left(1+i\right)^{1000} + \left(1-i\right)^{1000} = 2^{500}\left[\exp\left(250\pi i\right) + \exp\left(-250\pi i\right)\right] = 2^{501}
$$

4 第四题

$$
\because |\sqrt{3} + i| = |\sqrt{3} - i|
$$

$$
\therefore |\sqrt{3} + i|^n = |\sqrt{3} - i|^n
$$

二者模长必然相同，若要求二者相等，只需要辐角满足

$$
\arg\left(\sqrt{3} + i\right)^n = 2k\pi + \arg\left(\sqrt{3} - i\right)^n, \quad k \in \mathbb{Z}
$$

$$
\therefore n\frac{\pi}{6} = -n\frac{\pi}{6} + 2k\pi
$$

$$
\therefore n = 6k, \quad k \in \mathbb{Z}
$$

所以只需要 n 是整数且能被 6 整除即可。

5 第五题

平面上圆的一般方程可以写成

$$
\alpha_1\left(x^2 + y^2\right) + 2\alpha_2 x + 2\alpha_3 y + \alpha_4 = 0
$$

其中 $\alpha_{1,2,3,4} \in \mathbb{R}$, 若 $\alpha_1 = 0$, 其退化为直线

若代入

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

设 $\beta=\alpha_2+i\alpha_3$ 有复数表示

$$\alpha_1 z\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+\alpha_4=0$$

对于此题，

$$w=\frac{z-i}{z+i}\Rightarrow z=-\frac{(w+1)\,i}{w-1},\bar{z}=\frac{(\bar{w}+1)\,i}{\bar{w}-1}$$

代入化简有

$$\gamma_1 w\bar{w}+\bar{\beta}_2 w+\beta_2\bar{w}+\gamma_4=0$$

其中

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1-2\alpha_3+\alpha_4\\\alpha_1-\alpha_4\\-2\alpha_2\\\alpha_1+2\alpha_3+\alpha_4\end{pmatrix}\qquad \beta_2=\gamma_2+i\gamma_3$$

因此广义上（直线是特殊的圆）看，w 将圆变成圆，对此题是将 $x=a,y=b$ 变成圆。特别的，代入此题的系数有：

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 0 & -a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & a & -1 & -a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2 & -b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-b & b & 0 & 1-b\end{pmatrix}$$

显然当且仅当 $-a=0$,$-1-b=0$ 即 $a=0$,$b=-1$ 时，$w\bar{w}$ 前系数为 0，退化为直线。

6 第六题

$$a=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos nz}{n!}$$

$$b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin nz}{n!}$$

考虑做一对替换有：

$$c_+\equiv a+bi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos nz+i\sin nz}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp(inz)}{n!}=\exp(\exp(iz))$$

$$c_-\equiv a-bi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos nz-i\sin nz}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp(-inz)}{n!}=\exp(\exp(-iz))$$

其中

$$\exp\left(\exp\left(iz\right)\right)=\exp\left(\cos z+i\sin z\right)=e^{\cos z}\left(\cos\sin z+i\sin\sin z\right)$$

$$\exp\left(\exp\left(-iz\right)\right)=\exp\left(\cos z-i\sin z\right)=e^{\cos z}\left(\cos\sin z-i\sin\sin z\right)$$

于是由替换的关系可以得到：

$$a=\frac{c_{+}+c_{-}}{2}=e^{\cos z}\cos\sin z$$

$$b=\frac{c_{+}-c_{-}}{2i}=e^{\cos z}\sin\sin z$$

7 第七题

求

$$f\left(z\right)=\frac{1}{e^{z}-1}$$

在 $z=0$ 的洛朗级数，很明显此处不解析，考察 $n\in N^{*}$ 时，

$$\lim_{z\to0}\frac{z^{n}}{e^{z}-1}=\begin{cases}1 & n=1\\0 & n>1\end{cases}$$

因此这是一阶极点，考虑求解析函数 $a(z)=zf(z)$ 在 $z=0$ 的泰勒展开，设其为

$$a\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n}z^{n}$$

这不容易计算，考虑其倒数 $b(z)=1/a$，可以展开为

$$b\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n}}{(n+1)!}$$

又因为恒等关系 $a(z)b(z)=1$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n}z^{n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n}}{(n+1)!}\right)=1$$

比较 z 的各阶系数可以得到 $a_{0}=1,a_{1}=-\frac{1}{2}...$
在 $n\geq1$ 时，其满足线性齐次方程组方程为：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{k}}{(n-k+1)!}=0$$

理论上可以解出任意的 a_{n}

我试图找到通项公式但是失败了，查阅资料发现这个数列与伯努利数相关，关系为 $a_n = B_n/n!$ 其被定义为

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}$$

递推关系为

$$B_m=[m=0]-\sum_{k=0}^{m-1}\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right)\frac{B_k}{m-k+1}$$

$B_0=1$, 其中 $[m=0]$ 表示当 $m=0$ 时，取 1，其余取 0。
综上可得，

$$f(z)=\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}B_{n+1}$$

其前几项为

$$\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{12}-\frac{z^3}{720}+\cdots$$

8 第八题

由于所有极点都在围道内部，直接考察无穷远的留数，根据引理有：

$$\int_{|z|=200}f(z)\,dz=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z\to\infty}f(z)=2\pi i\operatorname*{Res}_{t\to 0}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right]$$

其中

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t^2}\prod_{k=1}^{100}\frac{1}{1-kt}$$

$$\because \lim_{t\to 0}t^2\frac{1}{t^2}\prod_{k=1}^{100}\frac{1}{1-kt}=1$$

$$\therefore \text{二阶极点}$$

所以可以计算出留数的值

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{t\to 0}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right]&=\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\prod_{k=1}^{100}\frac{1}{1-kt}\\&=\lim_{t\to 0}\sum_{n=1}^{100}\prod_{n=1\wedge k\neq n}^{100}\frac{n}{1-kt}\\&=\sum_{n=1}^{100}n=5050\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{|z|=200}f(z)\,dz=10100\pi i$$

9 第九题

考虑配对，设

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos\left(n\theta - \sin\theta\right) d\theta \\
I_2 &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin\left(n\theta - \sin\theta\right) d\theta \\
I_1 + iI_2 &= \int_0^{2\pi} \exp\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) \exp\left(in\theta\right) d\theta \\
I_1 - iI_2 &= \int_0^{2\pi} \exp\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \exp\left(-in\theta\right) d\theta
\end{aligned}
$$

对于 $I_1 + iI_2$ 设 $z = e^{i\theta}$, 有

$$
I_1 + iI_2 = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} z^n \frac{dz}{zi} = 2\pi \operatorname*{Res}_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} z^{n-1}
$$

包裹的奇点只在 $z = 0$，我们计算其在 $z = 0$ 洛朗展开为

$$
e^{\frac{1}{z}} z^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{e^{n+k-1}}{(-k)!}
$$

为求其留数，取 z^{-1} 项要求 $k = -n$ 所以有

$$
\operatorname*{Res}_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} z^{n-1} = \frac{1}{n!}
$$

对于 $I_1 - iI_2$ 设 $z = e^{-i\theta}$, 注意积分方向相反需要取出一个负号，化简有

$$
I_1 - iI_2 = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} z^n \frac{dz}{zi} = I_1 + iI_2 = \frac{2\pi}{n!}
$$

于是要求的量即为

$$
I_1 = \frac{2\pi}{n!}
$$

10 第十题

直接考察积分，试图利用柯西公式

$$
\begin{aligned}
D_F\left(x-y\right) &= \int_{C_F} \frac{d^4p}{\left(2\pi\right)^4} \frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2} \\
&= \int_{C_F} \frac{d^3\vec{p}\,dp_0}{\left(2\pi\right)^4} \frac{ie^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0^2 - (\vec{p}^2 + m^2)} \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}\left[e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right]}{\left(2\pi\right)^4} \int_{C_F} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}dp_0}{p_0^2 - E_{\vec{p}}^2}
\end{aligned}
$$

考察其中的

$$\int_{C_F} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}dp_0}{p_0^2-E_{\vec{p}}^2} = \int_{C_F} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}dp_0}{(p_0-E_{\vec{p}})(p_0+E_{\vec{p}})}$$

注意到在 C_F 的围道内只有一个一阶极点为

$$\operatorname*{Res}_{p_0\to E_{\vec{p}}} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0-E_{\vec{p}})(p_0+E_{\vec{p}})} = \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}}{2E_{\vec{p}}}$$

考察其在无穷远的性质有

$$\lim_{|p_0|\to\infty} \left|\frac{ip_0 e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0^2-E_{\vec{p}}^2}\right| = 0$$

实际上是一致收敛的

注意到 C_F 的围道方向为顺时针，因此有

$$\int_{C_F} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}dp_0}{p_0^2-E_{\vec{p}}^2} = 2\pi\frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{2E_{\vec{p}}}$$

代入 Feynman 传播子表示可得到：

$$D_F(x-y) = \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3\,2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}\bigg|_{p_0=E_{\vec{p}}}$$

11 第十一题

以下都建立在 $D=2$ 上

引理 11.1. 导数定理

$$f(x) = \mathcal{F}(g(k)) \Rightarrow \partial_\mu f(x) = \mathcal{F}(-ik_\mu g(k))$$

证明.

$$\mathcal{F}^{-1}(\partial_\mu f(x)) = \frac{1}{2\pi}\int d^2x \exp(ik\cdot x)\partial_\mu f(x)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int d^2x\,(ik_\mu)\exp(ik\cdot x) f(x) = -ik_\mu g(k)$$

$$\therefore \partial_\mu f(x) = \mathcal{F}(-ik_\mu g(k))$$

同理，

$$\partial^\mu f(x) = \mathcal{F}(-ik^\mu g(k))$$

□

引理 11.2. 卷积定理

如果定义

$$f*g\left(x\right)\equiv\int d^2\xi f\left(\xi\right)g\left(x-\xi\right)$$

则有

$$\mathcal{F}\left(f*g\left(x\right)\right)=2\pi\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\mathcal{F}\left(g\left(x\right)\right)$$

证明.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f*g\left(x\right)\right)&=\frac{1}{2\pi}\int d^2xe^{-ik\cdot x}\int d^2\xi f\left(\xi\right)g\left(x-\xi\right)\\&=\int d^2\xi f\left(\xi\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int d^2xe^{-ik\cdot x}g\left(x-\xi\right)\right]\\&=\mathcal{F}\left(g\left(x\right)\right)\int d^2\xi f\left(\xi\right)e^{-ik\cdot\xi}\\&=2\pi\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\mathcal{F}\left(g\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

推论：对于三个函数的情形，只需要依次计算，即为

$$\mathcal{F}\left(f*g*h\left(x\right)\right)=4\pi^2\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\mathcal{F}\left(g\left(x\right)\right)\mathcal{F}\left(h\left(x\right)\right)$$

□

引理 11.3. 设对于 $f(x)$ 有 $f(x)=\mathcal{F}(g(k))$ 则，

$$\int d^2x\mathcal{F}\left(g\left(k\right)\right)=2\pi g\left(0\right)$$

证明.

$$\begin{aligned}\int d^2x\mathcal{F}\left(g\left(k\right)\right)&=\frac{1}{2\pi}\int d^2x\int d^2k\exp\left(-ik\cdot x\right)g\left(k\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int d^2kg\left(k\right)\int d^2x\exp\left(-ik\cdot x\right)\\&=2\pi\int d^2kg\left(k\right)\delta\left(-k\right)=2\pi g\left(0\right)\end{aligned}$$

□

我们考虑原始表达式

$$S=\int d^2x\left\{-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\left(x\right)\partial^\mu\phi\left(x\right)+\frac{1}{2}\lambda_{\mu v}\left(x\right)\left[\partial^\mu\phi\left(x\right)-\epsilon^{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi\left(x\right)\right]\left[\partial^v\phi\left(x\right)-\epsilon^{v\rho}\partial_\rho\phi\left(x\right)\right]\right\}$$

先分别计算其中的积分

$$S_1=\int d^2x\left[\partial_\mu\phi\left(x\right)\partial^\mu\phi\left(x\right)\right]$$

$$S_2=\int d^2x\left\{\lambda_{\mu v}\left(x\right)\left[\partial^\mu\phi\left(x\right)-\epsilon^{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi\left(x\right)\right]\left[\partial^v\phi\left(x\right)-\epsilon^{v\rho}\partial_\rho\phi\left(x\right)\right]\right\}$$

$$\because \phi\left(x\right) = \mathcal{F}\left(\phi\left(k\right)\right), \lambda_{\mu v}\left(x\right) = \mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right)\right)$$

换元，令

$$g_{\mu} = -ik_{\mu}\phi\left(k\right), g^{\mu} = -ik^{\mu}\phi\left(k\right)$$

利用导数定理 11.1

$$\because \mathcal{F}\left(-ik_{\mu}\phi\left(k\right)\right) = \partial_{\mu}\phi\left(x\right), \mathcal{F}\left(-ik^{\mu}\phi\left(k\right)\right) = \partial^{\mu}\phi\left(x\right)$$

利用卷积定理 11.2

$$S_1 = \int d^2x\mathcal{F}\left(g_{\mu}\right)\mathcal{F}\left(g^{\mu}\right) = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\mathcal{F}\left(g_{\mu} * g^{\mu}\right)$$

最后利用 11.3

$$\therefore S_1 = \left(g_{\mu} * g^{\mu}\right)\big|_{k=0} = \int d^2\xi g_{\mu}\left(\xi\right)g^{\mu}\left(0-\xi\right) = \int d^2k\left(-ik_{\mu}\right)\phi\left(k\right)\left(-ik^{\mu}\right)\phi\left(-k\right)$$

同理我们设

$$\eta^{\mu} = ik^{\mu}\phi\left(k\right) - \epsilon^{\mu\sigma}ik_{\sigma}\phi\left(k\right), \eta^{\nu} = ik^{\nu}\phi\left(k\right) - \epsilon^{v\rho}ik_{\rho}\phi\left(k\right)$$

有

$$S_2 = \int d^2x\mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right)\right)\mathcal{F}\left(\eta^{\mu}\right)\mathcal{F}\left(\eta^{\nu}\right) = \frac{1}{4\pi^2}\int d^2x\mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right) * \eta^{\mu} * \eta^{\nu}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2\pi}\lambda_{\mu v}\left(k\right) * \eta^{\mu} * \eta^{\nu}\big|_{k=0} = \frac{1}{2\pi}\int d^2\xi\int d^2\zeta\lambda_{\mu v}\left(\zeta+\xi\right)\eta^{\mu}\left(0-\xi\right)\eta^{\nu}\left(0-\zeta\right)$$

即为

$$S_2 = \frac{1}{2\pi}\int d^2k\int d^2k'\lambda_{\mu v}\left(-k-k'\right)\left[ik^{\mu}\phi\left(k\right) - \epsilon^{\mu\sigma}ik_{\sigma}\phi\left(k\right)\right]\left[ik'^{\nu}\phi\left(k'\right) - \epsilon^{v\rho}ik'_{\rho}\phi\left(k'\right)\right]$$

现在我们终于可以代回到原表达式

$$\begin{aligned}S_m = &-\frac{1}{2}\int d^2k\left(-ik_{\mu}\right)\left(ik^{\mu}\right)\phi(k)\phi(-k)\\&+\frac{1}{4\pi}\int d^2kd^2k'\lambda_{\mu\nu}\left(-k-k'\right)\left(ik^{\mu} - \epsilon^{\mu\sigma}ik_{\sigma}\right)\left(ik'^{\nu} - \epsilon^{\nu\rho}ik'_{\rho}\right)\phi(k)\phi\left(k'\right)\end{aligned}$$

这就是结果

12 第十二题

12.1

$$g_1(t) = \begin{cases} 2t/T & 0 \le t < T/2 \\ 2(1-t/T) & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

根据周期函数

$$\mathcal{L}\left(g\left(t\right)\right) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}g(t)dt$$

计算得

$$\int_0^{T/2}\exp\left(-pt\right)\frac{2t}{T}dt = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{p^2} - e^{-Tp/2}\left(\frac{T}{2p}+\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$-\int_{T/2}^{T}\exp\left(-pt\right)\frac{2t}{T}dt = \frac{2}{T}e^{-Tp/2}\left[\left(1-e^{-Tp/2}\right)\left(\frac{T}{2p}+\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$\int_{T/2}^{T}2\exp\left(-pt\right)dt = \frac{2}{p}\left(e^{-Tp/2}-e^{-Tp}\right)$$

代入化简得

$$\mathcal{L}\left(g_1\left(t\right)\right) = \frac{2}{Tp^2}\tan\mathrm{h}\left(\frac{Tp}{4}\right)$$

12.2

$$g_2\left(t\right) = \frac{2}{T}\left[\mathrm{tH}\left(\mathrm{t}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT\right)H\left(t-\frac{1}{2}nT\right)\right]$$

$$\mathcal{L}\left(g_2\left(t\right)\right) = \frac{2}{Tp^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2}nT\right)\right]$$

如果 $g_1(t) = g_2(t)$，比照系数令 $x = Tp/4$ 换元有

$$\tanh x = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2nx}$$

这正是我们想证明的。因此只需证明 $g_1(t) = g_2(t)$.

下面证明 $g_1(t) = g_2(t)$

我们首先考察区间 $[0, T/2)$, 对于 $t \in [0, T/2]$ 由于全部的 $H(t-1/2nT) = 0$ 因此二者显然相等。

然后考察区间 $[T/2, T)$, 对于 $t \in [0, T/2]$ 求和只保留到 $n = 1$，有

$$g_2 = \frac{2}{T}\left[t-2\left(t-\frac{1}{2}T\right)\right] = 2-\frac{2t}{T} = g_1$$

综上二者在 $t \in [0, T)$ 上相等。

一般地，对于 $n > 0$ 情形，仅当 $t \geq 1/2nT$ 时,$H(t-1/2nT) = 1$，其余情况为 0。如果我们只考察 t 非负半轴情况，求和可以写成：

$$g_2\left(t\right) = \frac{2}{T}\left[t+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT\right)\right]$$

其中 $\left[\frac{2t}{T}\right]$ 表示括号内值向下取整。

接下来证明 $g_2(t)$ 也以 T 为周期，即 $g_2(t) = g_2(t+T)$

$$
\begin{aligned}
g_2(t+T) &= \frac{2}{T}\left[\mathrm{t}+T+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}+2\right]}(-1)^n\left(t-\frac{1}{2}nT+T\right)\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[\mathrm{t}+T-(2t+T)+2t+2\sum_{n=3}^{\left[\frac{2t}{T}+2\right]}(-1)^n\left(t-\frac{1}{2}nT+T\right)\right] \\
&= \frac{2}{T}\left[t+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}\right]}(-1)^n\left(t-\frac{1}{2}nT\right)\right] \\
&= g_2(t)
\end{aligned}
$$

由于在 $[0,T)$ 区间相等并都具有以 T 为周期的周期性，因此 $g_1(t) = g_2(t)$，这正是我们需要的。于是

$$
\tanh x = 1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2nx}
$$

得证

13 第十三题

以下的拉普拉斯方程的表达式都基于

$$
\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\left(g^{\mu v}\sqrt{|g|}\partial_v\psi\right)=0
$$

在 3 维正交曲线坐标系下为

$$
\sum_{\mu=1}^{3}\frac{1}{|h_1h_2h_3|}\partial_\mu\left(\frac{1}{h_\mu}\sqrt{|h_1h_2h_3|}\partial_\mu\psi\right)=0
$$

13.1 球坐标

$$
h_r=1, h_\theta=r, h_\varphi=r\sin\theta
$$

拉普拉斯方程为:

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0
$$

首先，设

$$
u(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)
$$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\mathrm{Y}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\mathrm{Y}\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}=l(l+1)$$

分解为两个方程

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-l(l+1)R=0 \tag{13.1-I}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0$$

进一步设

$$\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\lambda$$

分解为两个常微分方程：

$$\Phi''+\lambda\Phi=0 \tag{13.1-II}$$

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)\sin^2\theta-\lambda\right]\theta=0 \tag{13.1-III}$$

13.2 柱坐标

$$h_\rho=1,h_\varphi=\rho,h_z=1$$

柱坐标的拉普拉斯方程表示为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

设

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

代入得到

$$\Phi''+\lambda\Phi=0 \tag{13.2-I}$$

以及

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=\lambda$$

分离有：

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{Z''}{Z}=-\mu$$

两个常微分方程，其中 $\lambda=m^2$

$$Z''-\mu Z=0 \tag{13.2-II}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{13.2-III}$$

13.3 椭圆柱坐标

标准表示为

$$x = a\xi\eta, \quad y = a\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = z$$

换元，设

$$\xi = \operatorname{ch} u, \quad \eta = \cos v$$

有

$$h_u^2 = h_v^2 = a^2 \left(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v \right), \quad h_z = 1$$

拉普拉斯方程表示为

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a^2 \left(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v \right)} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right\} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

设

$$\Phi(u, v, z) = U(u) V(v) Z(z)$$

代入有

$$\frac{1}{a^2 \left(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v \right)} \left\{ \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} + \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dv^2} \right\} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

分离出

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda Z = 0 \tag{13.3-I}$$

另有

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} + \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dv^2} - \lambda a^2 \left(\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v \right) = 0$$

分离出

$$\frac{d^2 U}{du^2} - \left(\lambda a^2 ch^2 u + \mu \right) U = 0 \tag{13.3-II}$$

$$\frac{d^2 V}{dv^2} + \left(\lambda a^2 \cos^2 v + \mu \right) V = 0 \tag{13.3-III}$$

13.4 椭球坐标

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

$$y^2 = \frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

λ, μ, ν 的变化范围为

$$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2$$

若设

$$\varphi(\theta) = \left(a^2 + \theta\right)\left(b^2 + \theta\right)\left(c^2 + \theta\right)$$

有

$$h_\lambda^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4\varphi(\lambda)}$$

$$h_\mu^2 = \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{4\varphi(\mu)}$$

$$h_\nu^2 = \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4\varphi(\nu)}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi = \frac{2}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)} & \left[(\mu-\nu)\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right)\right. \\ & + (\lambda-\nu)\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right) \\ & \left. + (\lambda-\mu)\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)\right] = 0\end{aligned}$$

设 $\Phi = \Lambda(\lambda)M(\mu)N(\nu)$ 代入有

$$\begin{aligned}&\frac{\mu-\nu}{\Lambda}\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right) + \frac{\lambda-\nu}{M}\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu}\right) \\ &\qquad + \frac{\lambda-\mu}{N}\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\nu}\right) = 0\end{aligned}$$

注意到有恒等式

$$(\mu-\nu)(K\lambda+C) + (\nu-\lambda)(K\mu+C) + (\lambda-\mu)(K\nu+C) \equiv 0$$

其中 K 和 C 为常数，比较系数得

$$4\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right) = (K\lambda + C)\Lambda$$

设 $K = n(n+1)$, 分离变量的三个方程为:

$$4\sqrt{\varphi\left(\lambda\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sqrt{\varphi\left(\lambda\right)}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \left[\left(n\left(n+1\right)\right)\lambda + C\right]\Lambda \tag{13.4-I}$$

$$4\sqrt{\varphi\left(\mu\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\sqrt{\varphi\left(\mu\right)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu}\right) = \left[\left(n\left(n+1\right)\right)\mu + C\right]M \tag{13.4-II}$$

$$4\sqrt{\varphi\left(\nu\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\sqrt{\varphi\left(\nu\right)}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\nu}\right) = \left[\left(n\left(n+1\right)\right)\nu + C\right]N \tag{13.4-III}$$

13.5 锥面坐标

$$x=\frac{r}{\alpha}\sqrt{\left(a^2-\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)}$$
$$y=\frac{r}{\beta}\sqrt{\left(\beta^2+\lambda\right)\left(\beta^2-\mu\right)}$$
$$z=\frac{r\sqrt{\lambda\mu}}{\alpha\beta},\quad a^2+\beta^2=1$$

λ 和 μ 的变化范围为 $0\leqslant\lambda\leqslant a^2, 0\leqslant\mu\leqslant\beta^2$ 设 $\lambda=\xi^2,\quad \mu=\eta^2,\quad \xi=\alpha\,\mathrm{cn}(u,\alpha),\quad \eta=\beta\,\mathrm{cn}(v,\beta)$ 其中 cn 是雅可比椭圆函数于是

$$x=r\mathrm{dn}(u,a)\,\mathrm{sn}(v,\beta), y=r\,\mathrm{sn}(u,\alpha)\mathrm{dn}(v,\beta),$$
$$z=r\,\mathrm{cn}(u,a)\,\mathrm{cn}(v,\beta)$$
$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\left(a^2\mathrm{cn}^2u+\beta^2\mathrm{cn}^2v\right)\left(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2\right)$$
$$h_r=1, h_w^2=h_v^2=r^2\left(\alpha^2\mathrm{cn}^2u+\beta^2\mathrm{cn}^2v\right)$$

拉普拉斯方程可以写成

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\left[a^2\mathrm{cn}^2(u,a)+\beta^2\mathrm{cn}^2(v,\beta)\right]}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)=0$$

设

$$\Phi\left(r,u,v\right)=R\left(r\right)U\left(u\right)V\left(v\right)$$

代入有：

$$\frac{1}{Rr^4}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d^2R}{dr^2}\right)+\frac{1}{\left[a^2\mathrm{cn}^2\left(u,a\right)+\beta^2\mathrm{cn}^2\left(v,\beta\right)\right]}\left(\frac{1}{U}\frac{d^2U}{du^2}+\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dv^2}\right)=0$$

分离出

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\lambda r^2R=0 \tag{13.5-I}$$
$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{du^2}+\frac{1}{V}\frac{d^2V}{dv^2}-\lambda\left[a^2\mathrm{cn}^2\left(u,a\right)+\beta^2\mathrm{cn}^2\left(v,\beta\right)\right]=0$$

进一步有

$$\frac{d^2U}{du^2}-\lambda\left[a^2\mathrm{cn}^2\left(u,a\right)+\mu\right]U=0 \tag{13.5-II}$$
$$\frac{d^2V}{dv^2}-\lambda\left[\beta^2\mathrm{cn}^2\left(v,\beta\right)-\mu\right]V=0 \tag{13.5-III}$$

13.6 抛物线柱坐标

$$x=\frac{1}{2}(\lambda-\mu),\quad y=\sqrt{\lambda\mu},\quad z=z$$

令

$$\lambda=\xi^2,\quad \mu=\eta^2$$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\xi^2+\eta^2\right)\left(\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2\right)+\mathrm{d}z^2$$

$$h_t^2 = h_\eta^2 = \xi^2+\eta^2, \quad h_z = 1$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}\right\}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

设

$$\Phi\left(\xi,\eta,z\right)=\mathit{\Xi}\left(\xi\right)H\left(\eta\right)Z\left(z\right)$$

代入有

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left\{\frac{1}{\mathit{\Xi}}\frac{d^2\mathit{\Xi}}{d\xi^2}+\frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\eta^2}\right\}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

分离出

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\lambda Z=0 \tag{13.6-I}$$

$$\frac{1}{\mathit{\Xi}}\frac{d^2\mathit{\Xi}}{d\xi^2}+\frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\eta^2}-\lambda\left(\xi^2+\eta^2\right)=0$$

进一步有

$$\frac{d^2\mathit{\Xi}}{d\xi^2}-\left(\lambda\xi^2+\mu\right)\mathit{\Xi}=0 \tag{13.6-II}$$

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}-\left(\lambda\eta^2-\mu\right)H=0 \tag{13.6-III}$$

14 第十四题

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_v\psi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\psi\right)=0$$

注意到 $g^{\mu\nu}$ 的对角性，代入有：

$$\left[-\frac{1}{f}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(f\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{2f}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]+\left[\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

代入

$$\psi\left(t,r,\theta,\varphi\right)=e^{-i\omega t}Y\left(\theta,\varphi\right)\frac{\phi\left(r\right)}{r}$$

有

$$\frac{r^2}{\phi}\frac{d}{dr}\left(f\frac{d\phi}{dr}\right)-r\frac{df}{dr}+\frac{\omega^2r^2}{f}=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}=l\left(l+1\right)$$

角向方程即为球函数方程：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+l\left(l+1\right)Y=0$$

径向方程为：

$$f\frac{d}{dr}\left(f\frac{d}{dr}\phi\right)-\left[\frac{f}{r}\frac{df}{dr}+\frac{fl\left(l+1\right)}{r^2}\right]\phi=-\omega^2\phi$$

考虑定义

$$\frac{dr_*}{dr}=\frac{1}{f\left(r\right)}$$

代入有

$$f\frac{d}{dr}=\frac{d}{dr_*},f\left(r\right)\rightarrow F\left(r_*\right),\phi\left(r\right)\rightarrow\Psi\left(r_*\right),r=\int F\left(r_*\right)dr_*$$

与定态薛定谔方程

$$\hat{H}\Psi=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+U\right)\Psi=E\Psi$$

对比化简为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{{dr_*}^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{dF}{dr_*}+l\left(l+1\right)\frac{F}{r^2}\right]\Psi=\frac{\hbar^2\omega^2}{2m}\Psi$$

其中

$$V_*=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{dF}{dr_*}+l\left(l+1\right)\frac{F}{r^2}\right]$$

展开为

$$V_*\left(r_*\right)=\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{\int F\left(r_*\right)dr_*}\frac{dF\left(r_*\right)}{dr_*}+\frac{l\left(l+1\right)F\left(r_*\right)}{\left[\int F\left(r_*\right)dr_*\right]^2}\right\}$$