数学物理方法　期末考试

周子正　学号：1810334

2020 年 6 月

1　第一题

2　第二题

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{1-i\tan x}{1+i\tan x} = \frac{\cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x} = \frac{-i\left[\cos\left(\pi/2-x\right)+i\sin\left(\pi/2-x\right)\right]}{\exp\left(ix\right)} \\
&= \exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-2ix\right) = \exp\left(-2ix\right) \\
&= \cos 2x - i\sin 2x
\end{aligned}
$$

3　第三题

$$1+i=\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1-i=\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^{1000}+(1-i)^{1000}=2^{500}\left[\exp\left(250\pi i\right)+\exp\left(-250\pi i\right)\right]=2^{501}$$

4　第四题

$$\because |\sqrt{3}+i| = |\sqrt{3}-i|$$

$$\therefore |\sqrt{3}+i|^n = |\sqrt{3}-i|^n$$

二者模长必然相同，若要求二者相等，只需要辐角满足

$$\arg\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2k\pi + \arg\left(\sqrt{3}-i\right)^n, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore n\frac{\pi}{6} = -n\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$$\therefore n=6k, \quad k\in\mathbb{Z}$$

所以只需要 n 是整数且能被 6 整除即可。

5 第五题

将 $z=x+yi$ 代入 ω 展开有：

$$\omega=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}-\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}i$$

6 第六题

$$a=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos nz}{n!}$$

$$b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin nz}{n!}$$

考虑做一对替换有：

$$c_+\equiv a+bi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos nz+i\sin nz}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp\left(inz\right)}{n!}=\exp\left(\exp\left(iz\right)\right)$$

$$c_-\equiv a-bi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos nz-i\sin nz}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp\left(-inz\right)}{n!}=\exp\left(\exp\left(-iz\right)\right)$$

其中

$$\exp\left(\exp\left(iz\right)\right)=\exp\left(\cos z+i\sin z\right)=e^{\cos z}\left(\cos\sin z+\sin\sin z\right)$$

$$\exp\left(\exp\left(-iz\right)\right)=\exp\left(\cos z-i\sin z\right)=e^{\cos z}\left(\cos\sin z-\sin\sin z\right)$$

于是由替换的关系可以得到：

$$a=\frac{c_++c_-}{2}=e^{\cos z}\cos\sin z$$

$$b=\frac{c_+-c_-}{2i}=-ie^{\cos z}\sin\sin z$$

7 第七题

求

$$f\left(z\right)=\frac{1}{e^z-1}$$

在 $z=0$ 的洛朗级数，很明显此处不解析，考察 $n\in N^*$ 时，

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^n}{e^z-1}=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n>1\end{cases}$$

因此这是一阶极点，考虑求解析函数 $a(z)=zf(z)$ 在 $z=0$ 的泰勒展开，设其为

$$a\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$$

这不容易计算，考虑其倒数 $b(z)=1/a$，可以展开为

$$b\left(z\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

又因为恒等关系 $a(z)b(z)=1$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\right)=1$$

比较 z 的各阶系数可以得到 $a_0=1,a_1=-\frac{1}{2}...$
在 $n\geq 1$ 时，其满足线性齐次方程组方程为：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(n-k+1)!}=0$$

理论上可以解出任意的 a_n
我试图找到通项公式但是失败了，查阅资料发现这个数列与伯努利数相关，关系为 $a_n=B_n/n!$ 其被定义为

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}$$

递推关系为

$$B_m=[m=0]-\sum_{k=0}^{m-1}\left(\begin{array}{c}m\\k\end{array}\right)\frac{B_k}{m-k+1}$$

$B_0=1$, 其中 $[m=0]$ 表示当 $m=0$ 时，取 1，其余取 0。
综上可得，

$$f\left(z\right)=\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}B_{n+1}$$

8 第八题

由于所有极点都在围道内部，直接考察无穷远的留数，根据引理有：

$$\int_{|z|=200}f\left(z\right)dz=-2\pi i\operatorname*{Res}_{z\to\infty}f\left(z\right)=2\pi i\operatorname*{Res}_{t\to 0}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right]$$

其中

$$f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t^2}\prod_{k=1}^{100}\frac{1}{1-kt}$$

$$\because \lim_{t\to 0} t^2 \frac{1}{t^2} \prod_{k=1}^{100} \frac{1}{1-kt} = 1$$
$$\therefore \text{二阶极点}$$

所以可以计算出留数的值

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{t\to 0}\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right] &= \lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\prod_{k=1}^{100}\frac{1}{1-kt} \\ &= \lim_{t\to 0}\sum_{n=1}^{100}\prod_{n=1\wedge k\neq n}^{100}\frac{n}{1-kt} \\ &= \sum_{n=1}^{100} n = 5050\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{|z|=200} f\left(z\right) dz = 10100\pi i$$

9 第九题

考虑配对，设

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos\left(n\theta - \sin\theta\right) d\theta \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin\left(n\theta - \sin\theta\right) d\theta \\ I_1 + iI_2 &= \int_0^{2\pi} \exp\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)\exp\left(in\theta\right)d\theta \\ I_1 - iI_2 &= \int_0^{2\pi} \exp\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\exp\left(-in\theta\right)d\theta \end{aligned}$$

对于 $I_1 + iI_2$ 设 $z = e^{i\theta}$, 有

$$I_1 + iI_2 = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} z^n \frac{dz}{zi} = 2\pi \operatorname*{Res}_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} z^{n-1}$$

包裹的奇点只在 $z = 0$，我们计算其在 $z = 0$ 洛朗展开为

$$e^{\frac{1}{z}} z^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{e^{n+k-1}}{(-k)!}$$

为求其留数，取 z^{-1} 项要求 $k = -n$ 所以有

$$\operatorname*{Res}_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} z^{n-1} = \frac{1}{n!}$$

对于 $I_1 - iI_2$ 设 $z = e^{-i\theta}$, 注意积分方向相反需要取出一个负号，化简有

$$I_1 - iI_2 = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} z^n \frac{dz}{zi} = I_1 + iI_2 = \frac{2\pi}{n!}$$

于是要求的量即为

$$I_1 = \frac{2\pi}{n!}$$

10 第十题

直接考察积分，试图利用柯西公式

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2} \\ &= \int_{C_F} \frac{d^3\vec{p}dp_0}{(2\pi)^4} \frac{ie^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0^2 - (\vec{p}^2 + m^2)} \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}\left[e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right]}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}dp_0}{p_0^2 - E_{\vec{p}}^2} \end{aligned}$$

考察其中的

$$\int_{C_F} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}dp_0}{p_0^2 - E_{\vec{p}}^2} = \int_{C_F} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}dp_0}{(p_0 - E_{\vec{p}})(p_0 + E_{\vec{p}})}$$

注意到在 C_F 的围道内只有一个一阶极点为

$$\operatorname*{Res}_{p_0 \to E_{\vec{p}}} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}}{(p_0 - E_{\vec{p}})(p_0 + E_{\vec{p}})} = \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}}{2E_{\vec{p}}}$$

考察其在无穷远的性质有

$$\lim_{|p_0|\to\infty} \left| \frac{ip_0 e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{p_0^2 - E_{\vec{p}}^2} \right| = 0$$

实际上是一致收敛的

注意到 C_F 的围道方向为顺时针，因此有

$$\int_{C_F} \frac{ie^{-ip_0(x_0-y_0)}dp_0}{p_0^2 - E_{\vec{p}}^2} = 2\pi \frac{e^{-ip_0(x_0-y_0)}}{2E_{\vec{p}}}$$

代入 Feynman 传播子表示可得到：

$$D_F(x-y) = \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}\bigg|_{p_0 = E_{\vec{p}}}$$

11 第十一题

以下都建立在 $D=2$ 上

引理 11.1. 导数定理

$$f(x)=\mathcal{F}(g(k))\Rightarrow\partial_\mu f(x)=\mathcal{F}(-ik_\mu g(k))$$

证明.

$$\mathcal{F}^{-1}(\partial_\mu f(x))=\frac{1}{2\pi}\int d^2x\exp(ik\cdot x)\partial_\mu f(x)$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int d^2x(ik_\mu)\exp(ik\cdot x)f(x)=-ik_\mu g(k)$$

$$\therefore\partial_\mu f(x)=\mathcal{F}(-ik_\mu g(k))$$

同理，

$$\partial^\mu f(x)=\mathcal{F}(-ik^\mu g(k))$$

□

引理 11.2. 卷积定理

如果定义

$$f*g(x)\equiv\int d^2\xi f(\xi)g(x-\xi)$$

则有

$$\mathcal{F}(f*g(x))=2\pi\mathcal{F}(f(x))\mathcal{F}(g(x))$$

证明.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g(x))&=\frac{1}{2\pi}\int d^2xe^{-ik\cdot x}\int d^2\xi f(\xi)g(x-\xi)\\&=\int d^2\xi f(\xi)\left[\frac{1}{2\pi}\int d^2xe^{-ik\cdot x}g(x-\xi)\right]\\&=\mathcal{F}(g(x))\int d^2\xi f(\xi)e^{-ik\cdot\xi}\\&=2\pi\mathcal{F}(f(x))\mathcal{F}(g(x))\end{aligned}$$

推论：对于三个函数的情形，只需要依次计算，即为

$$\mathcal{F}(f*g*h(x))=4\pi^2\mathcal{F}(f(x))\mathcal{F}(g(x))\mathcal{F}(h(x))$$

□

引理 11.3. 设对于 $f(x)$ 有 $f(x)=\mathcal{F}(g(k))$ 则，

$$\int d^2x\mathcal{F}(g(k))=(2\pi)^2g(0)$$

证明.

$$\begin{aligned}\int d^2x\mathcal{F}\left(g\left(k\right)\right)&=\int d^2x\int d^2k\exp\left(-ik\cdot x\right)g\left(k\right)\\&=\int d^2kg\left(k\right)\int d^2x\exp\left(-ik\cdot x\right)\\&=\left(2\pi\right)^2\int d^2kg\left(k\right)\delta\left(-k\right)=\left(2\pi\right)^2g\left(0\right)\end{aligned}$$

□

我们考虑原始表达式

$$S=\int d^2x\left\{-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\left(x\right)\partial^\mu\phi\left(x\right)+\frac{1}{2}\lambda_{\mu v}\left(x\right)\left[\partial^\mu\phi\left(x\right)-\epsilon^{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi\left(x\right)\right]\left[\partial^v\phi\left(x\right)-\epsilon^{v\rho}\partial_\rho\phi\left(x\right)\right]\right\}$$

先分别计算其中的积分

$$S_1=\int d^2x\left[\partial_\mu\phi\left(x\right)\partial^\mu\phi\left(x\right)\right]$$

$$S_2=\int d^2x\left\{\lambda_{\mu v}\left(x\right)\left[\partial^\mu\phi\left(x\right)-\epsilon^{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi\left(x\right)\right]\left[\partial^v\phi\left(x\right)-\epsilon^{v\rho}\partial_\rho\phi\left(x\right)\right]\right\}$$

$$\because\phi\left(x\right)=\mathcal{F}\left(\phi\left(k\right)\right),\lambda_{\mu v}\left(x\right)=\mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right)\right)$$

换元，令

$$g_\mu=-ik_\mu\phi\left(k\right),g^\mu=-ik^\mu\phi\left(k\right)$$

利用导数定理 11.1

$$\because\mathcal{F}\left(-ik_\mu\phi\left(k\right)\right)=\partial_\mu\phi\left(x\right),\mathcal{F}\left(-ik^\mu\phi\left(k\right)\right)=\partial^\mu\phi\left(x\right)$$

利用卷积定理 11.2

$$S_1=\int d^2x\mathcal{F}\left(g_\mu\right)\mathcal{F}\left(g^\mu\right)=\frac{1}{2\pi}\int d^2x\mathcal{F}\left(g_\mu*g^\mu\right)$$

最后利用 11.3

$$\therefore S_1=\left.\left(g_\mu*g^\mu\right)\right|_{k=0}=\int d^2\xi g_\mu\left(\xi\right)g^\mu\left(0-\xi\right)=\int d^2k\left(-ik_\mu\right)\phi\left(k\right)\left(-ik^\mu\right)\phi\left(k\right)$$

同理我们设

$$\eta^\mu=ik^\mu\phi\left(k\right)-\epsilon^{\mu\sigma}ik_\sigma\phi\left(k\right),\eta^\nu=ik^\nu\phi\left(k\right)-\epsilon^{v\rho}ik_\rho\phi\left(k\right)$$

有

$$S_2=\int d^2x\mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right)\right)\mathcal{F}\left(\eta^\mu\right)\mathcal{F}\left(\eta^\nu\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int d^2x\mathcal{F}\left(\lambda_{\mu v}\left(k\right)*\eta^\mu*\eta^\nu\right)$$

$$S_2=\frac{1}{2\pi}\lambda_{\mu v}(k)*\eta^{\mu}*\eta^{\nu}|_{k=0}=\frac{1}{2\pi}\int d^2\xi\int d^2\zeta\lambda_{\mu v}(\zeta+\xi)\,\eta^{\mu}(0-\xi)\,\eta^{\nu}(0-\zeta)$$

即为

$$S_2=\frac{1}{2\pi}\int d^2k\int d^2k'\lambda_{\mu v}(-k-k')\left[ik^{\mu}\phi(k)-\epsilon^{\mu\sigma}ik_{\sigma}\phi(k)\right]\left[ik^{\nu}\phi(k')-\epsilon^{v\rho}ik_{\rho}\phi(k')\right]$$

现在我们终于可以代回到原表达式

$$\begin{aligned}S_m=&-\frac{1}{2}\int d^2k\,(-ik_{\mu})\,(ik^{\mu})\,\phi(k)\phi(-k)\\&+\frac{1}{4\pi}\int d^2kd^2k'\lambda_{\mu\nu}(-k-k')\,(ik^{\mu}-\epsilon^{\mu\sigma}ik_{\sigma})\left(ik'^{\nu}-\epsilon^{\nu\rho}ik'_{\rho}\right)\phi(k)\phi(k')\end{aligned}$$

这就是结果

12 第十二题

12.1

$$g_1(t)=\begin{cases}2t/T & 0\le t<T/2\\ 2(1-t/T) & T/2\le t\le T\end{cases}$$

根据周期函数

$$\mathcal{L}(g(t))=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}g(t)dt$$

计算得

$$\int_0^{T/2}\exp(-pt)\,\frac{2t}{T}dt=\frac{2}{T}\left[\frac{1}{p^2}-e^{-Tp/2}\left(\frac{T}{2p}+\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$-\int_{T/2}^{T}\exp(-pt)\,\frac{2t}{T}dt=\frac{2}{T}e^{-Tp/2}\left[\left(1-e^{-Tp/2}\right)\left(\frac{T}{2p}+\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$\int_{T/2}^{T}2\exp(-pt)\,dt=\frac{2}{p}\left(e^{-Tp/2}-e^{-Tp}\right)$$

代入化简得

$$\mathcal{L}(g_1(t))=\frac{2}{Tp^2}\tan\mathrm{h}\left(\frac{Tp}{4}\right)$$

12.2

$$g_2(t)=\frac{2}{T}\left[\mathrm{tH}(\mathrm{t})+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(t-\frac{1}{2}nT\right)H\left(t-\frac{1}{2}nT\right)\right]$$

$$\mathcal{L}(g_2(t))=\frac{2}{Tp^2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{1}{2}nT\right)\right]$$

如果 $g_1(t)=g_2(t)$，比照系数令 $x=Tp/4$ 换元有

$$\tanh x=1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2nx}$$

这正是我们想证明的。因此只需证明 $g_1(t)=g_2(t)$.
下面证明 $g_1(t)=g_2(t)$
我们首先考察区间 $[0,T/2)$, 对于 $t\in[0,T/2]$ 由于全部的 $H(t-1/2nT)=0$ 因此二者显然相等。
然后考察区间 $[T/2,T)$, 对于 $t\in[0,T/2]$ 求和只保留到 $n=1$，有

$$g_2=\frac{2}{T}\left[t-2\left(t-\frac{1}{2}T\right)\right]=2-\frac{2t}{T}=g_1$$

综上二者在 $t\in[0,T)$ 上相等。
一般地，对于 $n>0$ 情形，仅当 $t\geq 1/2nT$ 时,$H(t-1/2nT)=1$，其余情况为 0。如果我们只考察 t 非负半轴情况，求和可以写成：

$$g_2\left(t\right)=\frac{2}{T}\left[t+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT\right)\right]$$

其中 $\left[\frac{2t}{T}\right]$ 表示括号内值向下取整。
接下来证明 $g_2(t)$ 也以 T 为周期，既 $g_2(t)=g_2(t+T)$

$$\begin{aligned}g_2\left(t+T\right)&=\frac{2}{T}\left[\mathrm{t}+T+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}+2\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT+T\right)\right]\\&=\frac{2}{T}\left[\mathrm{t}+T-(2t+T)+2t+2\sum_{n=3}^{\left[\frac{2t}{T}+2\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT+T\right)\right]\\&=\frac{2}{T}\left[t+2\sum_{n=1}^{\left[\frac{2t}{T}\right]}\left(-1\right)^n\left(t-\frac{1}{2}nT\right)\right]\\&=g_2\left(t\right)\end{aligned}$$

由于在 $[0,T)$ 区间相等并都具有以 T 为周期的周期性，因此 $g_1(t)=g_2(t)$，这正是我们需要的。于是

$$\tanh x=1+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-2nx}$$

得证

13 第十三题

14 第十四题