

Destrucción del Hábitat por dos poblaciones en competencia

Jose Miguel Gil Valencia
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia

Hamilton smith Gómez Osorio
Universidad EAFIT
Medellín, Colombia

16 de Noviembre, 2020

1. Introducción

Los sistemas dinámicos hacen referencia a un conjunto de elementos unidos que se encuentran en interacción y presentan un comportamiento que evoluciona en el tiempo. Estos han sido ampliamente estudiados, integrando diversas áreas del conocimiento y buscando así, comprender y estructurar todo tipo de organizaciones complejas y diversas.

Por su gran alcance, este tipo de estudios han sido aplicados en el análisis de diversas especies, en particular aquellas que se encuentran en competencia por un mismo recurso, sistemas en donde múltiples competidores, con diferentes características de comportamiento, interactúan en un ambiente buscando tener un beneficio mayor. Así, este trabajo está enfocado en la simulación y análisis de dos competidores con una fracción de zonas habitables en disputa, donde se busca conocer la influencia de los diferentes parámetros que integran el modelo, el comportamiento del sistema frente a factores externos y la representación de modelos no lineales por medio de métodos numéricos y lineales.

El presente informe cuenta con siete secciones, en la primera de estas se presenta una introducción, posteriormente se realiza una descripción del modelo a utilizar, luego se cuenta con un plan de solución, una cuarta sección para la presentación de resultados obtenidos, seguido de un análisis detallado de los principales hallazgos, un apartado dedicado a las conclusiones y, por último, las referencias que apoyaron la realización de este trabajo.

2. Descripción del modelo matemático

El modelo de destrucción del hábitat, propuesto por [3], está basado en la coexistencia competitiva entre dos especies por determinados territorios. Este modelo tiene en cuenta un **competidor superior**, A , y un **competidor inferior**, B , donde A podrá invadir las zonas que actualmente ocupa B , extinguiendo esta población de ese territorio, pero B no podrá hacer lo mismo. A continuación se presentan

los elementos que componen al modelo, tales como sus variables, parámetros, ecuaciones e información relevante acerca de estos.

2.1. Variables

Como variables de estado se tendrá la **fracción de zonas habitadas por A**, p_a , la **fracción de zonas ocupadas por B**, p_b , y una **fracción de zonas vacías**, v . Adicionalmente, se tendrá una fracción de zonas habitables, h , donde $h = p_a + p_b + v$. Esta representa el total de las zonas en disputa del sistema. En el cuadro 1 se presentan las unidades de las variables consideradas.

Variable	Unidades
p_a	frac*
p_b	frac
v	frac
h	frac

Cuadro 1: Unidades de las variables

*frac = fracción de territorio.

2.2. Parámetros

Este modelo cuenta con cuatro parámetros, siendo estos la tasa de colonización de un terreno que posee el competidor A, c_a , la tasa de colonización de terrenos del competido B, c_b , y la tasa de extinción del competidor A y B de una zona, e_a y e_b , respectivamente. En el cuadro 2 se presentan las unidades de los parámetros considerados.

Parámetros	Unidades
c_a	$1/(\text{frac} \cdot \text{mes})$
c_b	$1/(\text{frac} \cdot \text{mes})$
e_a	1/mes
e_b	1/mes

Cuadro 2: Unidades de los parámetros

2.3. Ecuaciones

El modelo no lineal en ecuaciones diferenciales es el siguiente:

$$\frac{dp_a}{dt} = c_a p_a v - e_a p_a + c_a p_a p_b \quad (1)$$

$$\frac{dp_b}{dt} = c_b p_b v - e_b p_b - c_a p_a p_b \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -c_a p_a v + e_a p_a - c_b p_b v + e_b p_b \quad (3)$$

Este modelo representa la dinámica de las zonas ocupadas tanto por el competidor A, como el del competidor B y a su vez, la proporción de zonas vacías. La ecuación (1) representa el cambio de las zonas habitadas por A en el tiempo; el aumento de estas dependerá tanto de la proporción de zonas vacías v que el competidor A logra colonizar, como de las zonas que le invade al competidor B. Además, estas zonas disminuyen respecto a la tasa de extinción que posee el competidor. Por otro lado, la ecuación (2) representa la razón de cambio de las zonas habitadas por B en el tiempo. Dado que B no puede invadir, el aumento de las zonas habitadas de este depende únicamente de aquellas zonas vacías que logra colonizar, mientras que estas podrían disminuir tanto por la extinción del competidor en la zona como por aquellas que el competidor A le invade. Finalmente, la ecuación (3) nos muestra la variación de las zonas vacías en el tiempo, donde estas aumentarán cuando algún competidor deje una zona sin habitar, es decir, que este se extinga, y disminuirán cuando alguno de los competidores logre colonizar parte del terreno sin habitar.

3. Plan de solución

3.1. Implementación y Validación

En la implementación utilizaremos la extensión Simulink que tiene MATLAB para simular sistemas dinámicos. En este representaremos las ecuaciones del modelo por medio de un diagrama de bloques y aplicaremos máscaras para una visualización más ágil y organizada. Con este modelo planteado, la fase de validación está planeada para realizarse de dos maneras, según sea el caso.

Primera opción: se realizará una búsqueda bibliográfica por medio de la plataforma Google Académico para así comparar los comportamientos del modelo con lo reportado por diferentes autores en sus trabajos previos. Para esto, se adecuarán los valores a los parámetros que se utilizan en los diferentes modelos y se verificará que lo visto en la simulación sea acorde con lo reportado en la literatura.

Segunda opción: Dado el caso, si la búsqueda en las diferentes bases de datos no dan fruto, se recurrirá a realizar el análisis por medio de las siguientes condiciones reportadas por [1] y [3]:

- **Persistencia del competidor inferior**

Para esto, la relación $\frac{c_b}{e_b} > \frac{c_a}{e_a}$ al ser satisfecha permite que el competidor inferior permanezca en

el tiempo. Dicha condición puede ser satisfecha al contar con ciertos parámetros donde $c_b > c_a$ y/o $e_b < e_a$.

- **Extinción de los competidores**

Para valores críticos de la fracción de zonas habitadas, h , los anteriores trabajos plantean que:

Si se presenta que $h < \frac{e_a}{c_a}$, el competidor superior se extinguirá. Además, si $h < \frac{e_b}{c_b}$, el competidor B también se extinguirá.

- **Validación de comportamiento gráfico**

En [1] se analizan diferentes modelos de competencia de dos individuos por un mismo recurso. Particularmente, en la figura 2.4 de este trabajo, se expone un gráfico de dos poblaciones, mostrando la interacción en el tiempo de un competidor superior y uno inferior. Lo que se busca es replicar en cierta medida este comportamiento, mostrando así la correcta modelación de lo planteado.

3.2. Simulación de entradas

En la simulación de entradas se busca analizar el comportamiento del sistema al tener una entrada que altera en el tiempo la proporción de zonas en las que se extingue el competidor A. Es decir, realizar cambios la influencia del parámetro e_a . El modelo al agregar dicha entrada está dado por:

$$\frac{dp_a}{dt} = c_a p_a v - (e_a + U)p_a + c_a p_a p_b \quad (4)$$

$$\frac{dp_b}{dt} = c_b p_b v - e_b p_b - c_a p_a p_b \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dt} = -c_a p_a v + (e_a + U)p_a - c_b p_b v + e_b p_b \quad (6)$$

Para este análisis se implementarán entradas con señales tipo impulso, seno, escalón y constante, buscando así diversidad en los resultados.

3.3. Variación de parámetros

Para la variación de parámetros se seleccionaron dos parámetros de los modelos, estos serán la tasa de colonización de A, c_a y la tasa de colonización de B, c_b . Se analizarán 5 valores aledaños a los originalmente planteados y para estos, se evaluarán los valores máximos y mínimos hasta el mes 100 de cada respuesta temporal y los puntos de equilibrio planteados por las ecuaciones (7) tomadas de [1]. Estos resultados serán presentados para cada variable de estado y permiten ver qué tan sensible es el modelo respecto a los cambios. Se plantea tabular los resultados previamente mencionados para así facilitar el procesamiento y comparación entre los datos.

$$\begin{aligned} p_a^* &= h - \frac{e_a}{c_a} \\ p_b^* &= \frac{e_a(c_a + c_b)}{c_a c_b} - \frac{e_b}{c_b} - \frac{h c_a}{c_b} \\ v^* &= \frac{1}{c_b}(h c_a - e_a + e_b) \end{aligned} \quad (7)$$

3.4. Solución numérica

En la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales se plantea usar el Método de Euler, una aproximación iterativa de la solución temporal del modelo. La representación iterativa, tomada de [2] y adaptada a nuestro problema, se presenta a continuación.

$$\begin{cases} p_a(n) = p_a(n-1) + h \cdot f_1(p_a(n-1), v(n-1), p_b(n-1)) \\ p_b(n) = p_b(n-1) + h \cdot f_2(p_a(n-1), v(n-1), p_b(n-1)) \\ v(n) = v(n-1) + h \cdot f_3(p_a(n-1), v(n-1), p_b(n-1)) \\ p_a(0) = 3 \\ p_b(0) = 3 \\ v(0) = 4 \end{cases} \quad (8)$$

Las funciones $f_1(p_a, v, p_b)$, $f_2(p_a, v, p_b)$, y $f_3(p_a, v, p_b)$ son las ecuaciones (1), (2) y (3) del modelo original, respectivamente. Estas ecuaciones están discretizadas en n intervalos, donde $h = \frac{t_{max} - t_{min}}{n}$ representa la longitud de cada intervalo de tiempo analizado.

Esta solución será implementada en MATLAB y posteriormente graficada junto a la respuesta temporal de la simulación entregada por Simulink.

3.5. Linealización del modelo

Para linealizar el modelo se recurre a lo siguientes elementos

Curva de linealidad:

Se realizar la curva de linealidad (ver alinealidad del modelo), esta curva se obtiene con los puntos de equilibrio a múltiples entradas U , y por medio de la simulación del sistema no lineal, donde se obtiene una gráfica por cada variable respecto a las diferentes entradas (U) en un mismo punto inicial y con mismos parámetros.

Punto de operación:

Con estas gráficas se determina el punto de operación x_0 (dónde se tenga un comportamiento "lineal" de las variables), también es posible obtener este punto de operación por medio de los puntos de equilibrio del sistema.

Linealizar analíticamente:

Para realizar este proceso se debe tener presente que la linealización del modelo no lineal tiene la siguiente forma:

$$\Delta \frac{\partial x}{\partial t} = A \Delta x + B \Delta U \quad (9)$$

Dónde:

- $\Delta U = U - U_0$
- $\Delta x = x - x_0$
- $\Delta \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x_0}{\partial t}$
- A y B son Jacobianos evaluados en el punto de operación (x_0)

Esta expresión se obtiene por medio de series de Taylor de la función $\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, U)$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_a} & \frac{\partial f_1}{\partial p_b} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_a} & \frac{\partial f_2}{\partial p_b} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial p_a} & \frac{\partial f_3}{\partial p_b} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}_0 \quad (10)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U} \\ \frac{\partial f_3}{\partial U} \end{bmatrix}_0 \quad (11)$$

Linealizar con MATLAB:

Obtener la linealización por medio de **MATLAB** con la función `linmod()` en el punto de operación seleccionado y con una entrada específica.

Comparar modelos:

Para comparar resultados con múltiples entradas de U . Comparación de los modelos para obtener un rango de linealidad experimentalmente simulando con varios valores de U .

Rango de linealidad:

Por ultimo, se realizan simulaciones para determinar un rango de linealidad, aquel intervalo de valores donde el modelo lineal tenga un comportamiento similar al sistema no lineal.

4. Resultados

4.1. Implementación y Validación

Implementación

La implementación del modelo matemático se realizó en Simulink, a continuación se presenta el diagrama de bloques y la aplicación de máscaras.

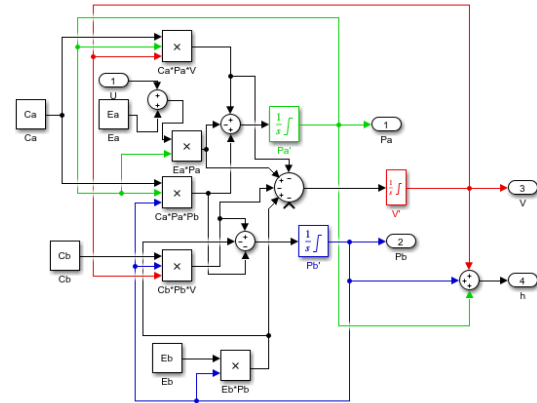


Figura 1: Diagrama de bloques del modelo

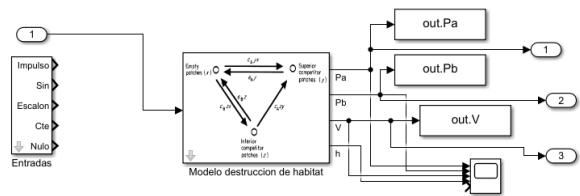


Figura 2: Diagrama del modelo aplicando máscara

Validación

Luego de realizar una búsqueda por medio de la herramienta mencionada en el plan de solución, los hallazgos obtenidos en materia de trabajos prácticos previos no tuvo buenos resultados, pues lo encontrado se enfocaba más en la parte teórica de los comportamiento.

Por esta razón, la validación se presenta por medio de la segunda opción.

Persistencia del competidor inferior: para verificar las condiciones reportadas por los trabajos anteriormente mencionados se han seleccionado los siguientes parámetros.

$$c_a = 0,3, \quad c_b = 0,2, \quad e_a = 0,08, \quad e_b = 0,08$$

$$P_{a(0)} = 3, \quad P_{b(0)} = 3, \quad v_{(0)} = 4$$

Estos arrojaron la respuesta temporal reportada en la figura 3.

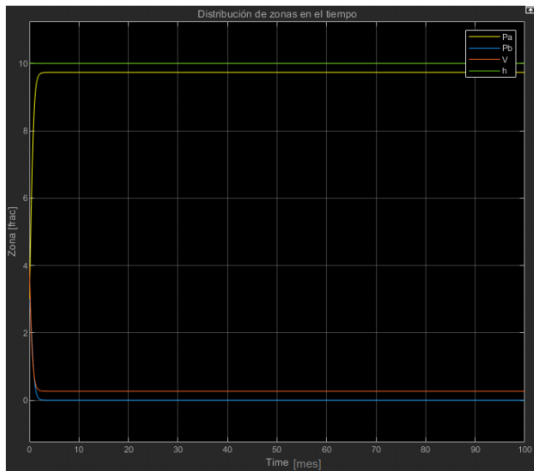


Figura 3: Competidor inferior con baja colonización

En esta gráfica, como en las posteriores, se presentan las diferentes señales de la simulación. La curva amarilla representa las zonas habitadas por el competidor A, p_a , la curva azul corresponde a las zonas habitadas por el competidor B, p_b , la curva anaranjada es para las zonas vacías, v , mientras que la curva verde representa las zonas habitables, h . Para esta, se utiliza en el eje horizontal el tiempo de simulación, con unidad mes, y en el eje vertical se presentan las zonas de cada variable, con unidades frac.

Extinción de los competidores: a su vez, buscando validar el comportamiento de casos extremos para las zonas habitables, h , se seleccionaron estos parámetros.

$$c_a = 0,02, \quad c_b = 0,2, \quad e_a = 0,06, \quad e_b = 0,02$$

$$p_{b(0)} = 0,05, \quad p_{b(0)} = 0,05, \quad v_{(0)} = 0,2$$

Al graficar el comportamiento en el tiempo, se obtuvo la respuesta presentada en la figura 4.

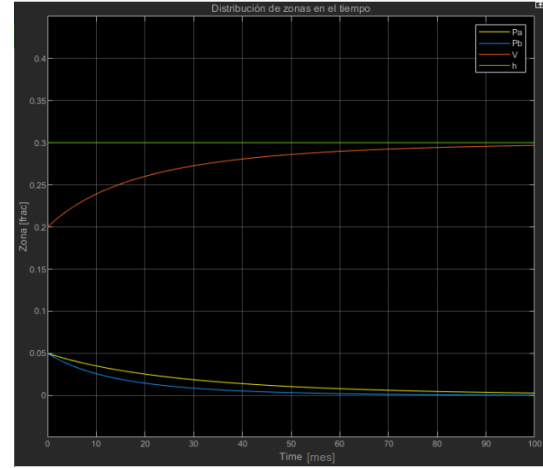


Figura 4: Competidores con limitación de espacio

Validación de comportamiento gráfico: buscando una similitud en el comportamiento que presenta la figura 2.4 en [1], se buscaron los valores en los parámetros que mejor se adecuaron a dicho comportamiento, dando como resultados los observados a continuación.

$$c_a = 0,02, \quad c_b = 0,1, \quad e_a = 0,08, \quad e_b = 0,045$$

$$P_{a(0)} = 1, \quad P_{b(0)} = 1, \quad v_{(0)} = 8$$

Así, se obtuvo la gráfica que se muestra en la figura 5.

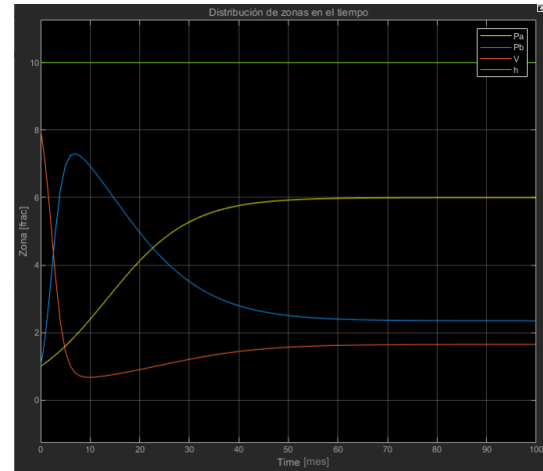


Figura 5: comparación comportamiento simulado y teórico

4.2. Simulación de entradas

Para realizar diferentes experimentos con el modelo estudiado, el resultado inicial está reportado con los siguientes parámetros y valores iniciales.

$$c_a = 0,02, \quad c_b = 0,2, \quad e_a = 0,06, \quad e_b = 0,02$$

$$p_{b(0)} = 3, \quad p_{b(0)} = 3, \quad v_{(0)} = 4$$

La respuesta temporal del modelo sin entradas se presenta a continuación.

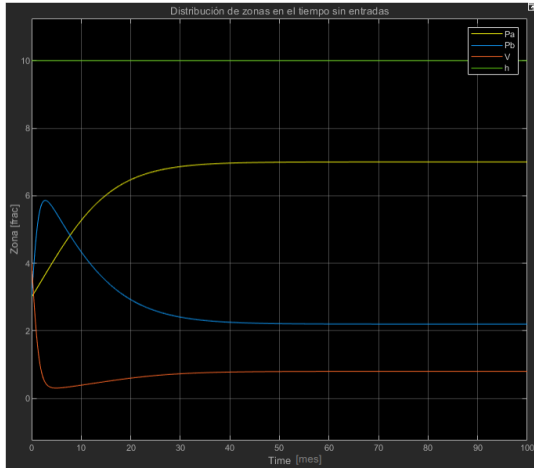


Figura 6: Simulación modelo sin entradas

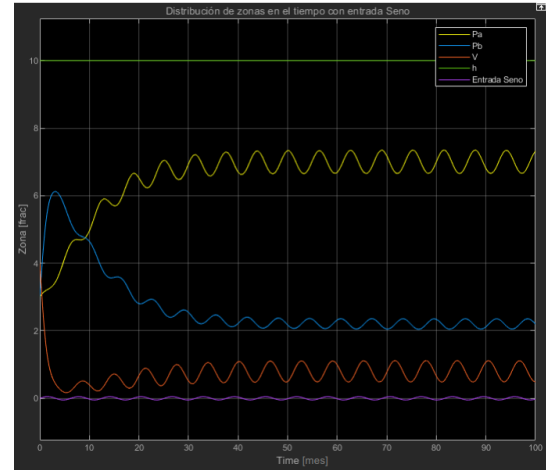


Figura 8: Comportamiento entrada sinusoidal

Entrada impulso: Se aplicó un impulso de amplitud 0.03 con un período de 12 meses en todo el intervalo de tiempo considerado. La respuesta temporal se muestra en la figura 7.

Entrada Escalón: para esta entrada se aplicó un incremento de 0.02 en el mes 50 de la simulación. La respuesta temporal puede encontrarse en la figura 9.

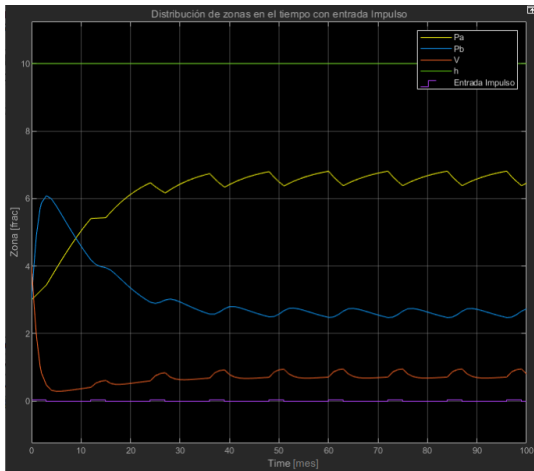


Figura 7: comportamiento entrada impulso

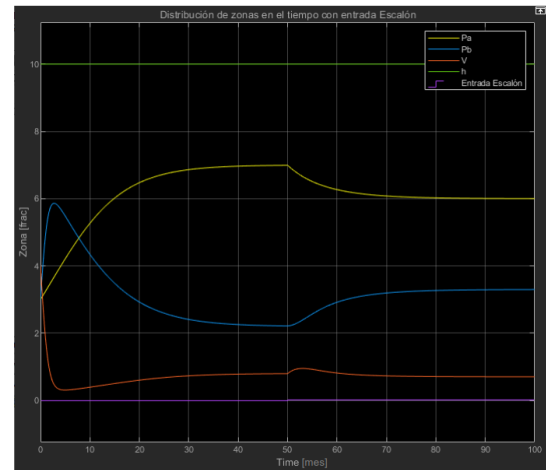


Figura 9: Comportamiento entrada Escalón

Para esta sección, en cada una de las gráficas se presenta en color púrpura la curva de la entrada aplicada, estando esta ubicada en la parte inferior de la figura.

Entrada Seno: Se aplicó una entrada de comportamiento sinusoidal de amplitud 0.05 y frecuencia 1 para los 100 meses de simulación. En la figura 8 se muestra la respuesta temporal.

Entrada Constante: fue aplicada una entrada constante de 0.03 al modelo en todo el tiempo de simulación. La respuesta temporal se encuentra reportada en la figura 10

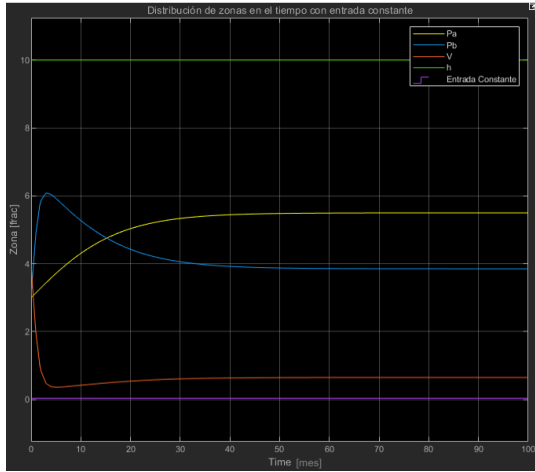


Figura 10: Comportamiento entrada Constante

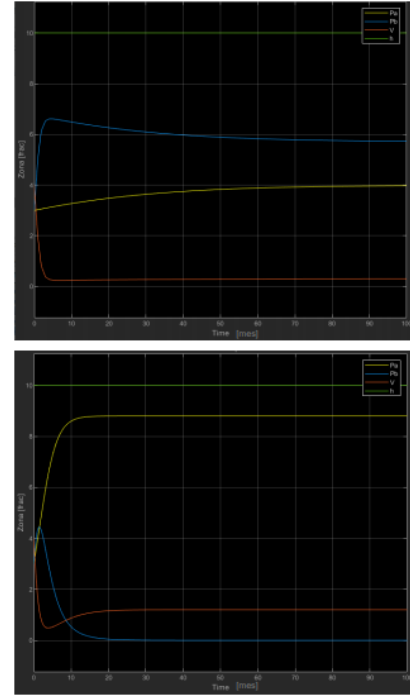


Figura 12: Comparación $c_a = 0,01$ (arriba) y $c_a = 0,05$ (abajo)

4.3. Variación de parámetros

Se realizó la variación de parámetros para las tasas de colonización presentes en el modelo, c_a y c_b , reportando en cada caso los valores máximos, mínimos y los puntos de estabilidad de cada variable de estado.

Parámetro c_a : este parámetro fue variado en el intervalo $[0,01; 0,05]$ con aumentos de 0.01 constantes. Los resultados se observan en la figura 11.

Variación del parámetro c_a						
Parámetro [1/frac*mes]	c_a	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
Máximo [frac]	p_a	3.9757	7	8	8.5	8.8
	p_b	6.6123	5.8605	5.2809	4.8148	4.4417
	v	4	4	4	4	4
Mínimo [frac]	p_a	3	3	3	3	3
	p_b	3	2.2	0.7	0.0012	1.52E-09
	v	0.2396	0.3059	0.3717	0.4346	0.4842
Punto estabilidad [frac]	p_a	4	7	8	8.5	8.8
	p_b	5.7	2.2	0.7	-0.3	-1.1
	v	0.3	0.8	1.3	1.8	2.3

Figura 11: Variación parámetro c_a

Parámetro c_b : este parámetro fue variado en el intervalo $[0,1; 0,3]$ con aumentos de 0.05 constantes. Los resultados se observan en la figura 13.

Variación del parámetro c_b						
Parámetro [1/frac*mes]	c_b	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
Máximo [frac]	p_a	7	7	7	7	7
	p_b	4.9908	5.537	5.8605	6.0588	6.198
	v	4	4	4	4	4
Mínimo [frac]	p_a	3	3	3	3	3
	p_b	1.4001	1.9334	2.2	2.36	2.47E+00
	v	0.6994	0.4312	0.3059	0.2352	0.1902
Punto estabilidad [frac]	p_a	7	7	7	7	7
	p_b	1.4	1.9333	2.2	2.36	2.46667
	v	1.6	1.0667	0.8	0.64	0.53333

Figura 13: Variación parámetro c_b

A continuación se presenta la gráfica de la respuesta temporal para los valores $c_a = 0,01$ y $c_a = 0,05$

A continuación se presenta la gráficas de la respuesta temporal para los valores $c_b = 0,1$ y $c_b = 0,3$

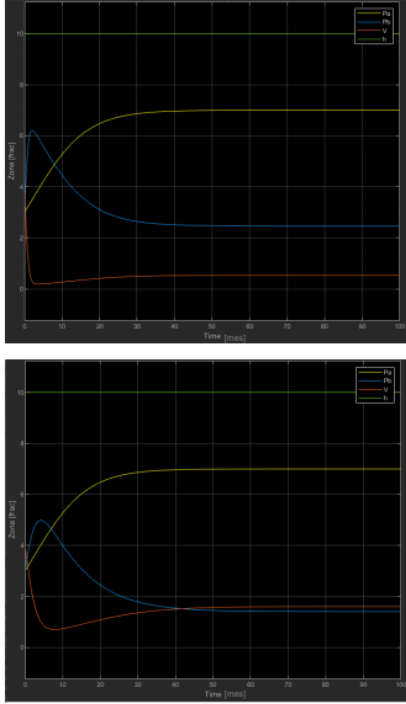


Figura 14: Comparación $c_b = 0,3$ (arriba) y $c_a = 0,1$ (abajo)

4.4. Solución numérica

Ecuaciones originales:

Solución numérica de las ecuaciones de estado originales utilizando el método de Euler.

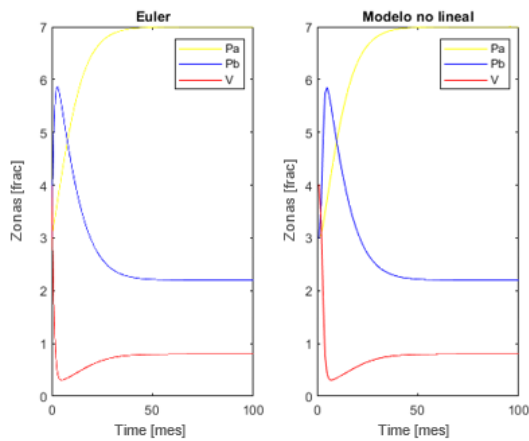


Figura 15: Euler ec. originales

Ecuaciones con entrada: Solución numérica de las ecuaciones de estado con entrada U como constante $c_a = 0,006$ utilizando el método de Euler.

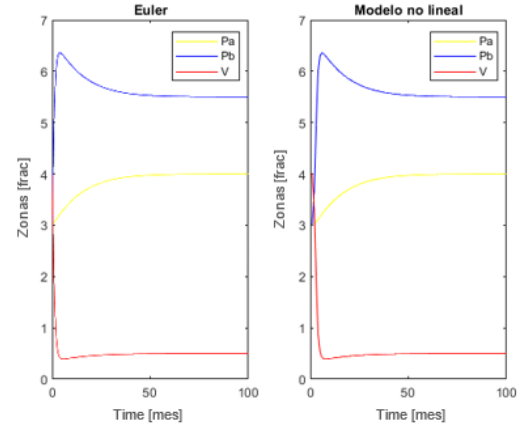


Figura 16: Euler (ec. con entradas) vs Simulink

4.5. Linealización del modelo

Curvas de linealidad:

Puntos de estabilidad a diferentes valores en la entrada.

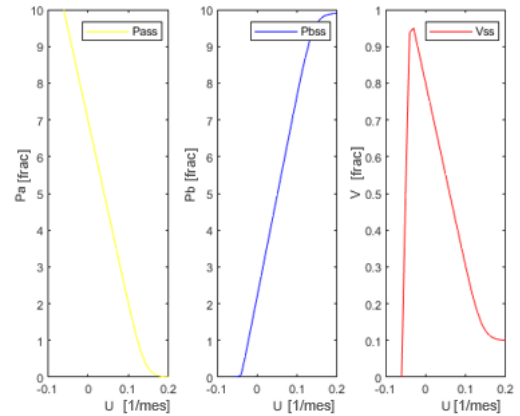


Figura 17: Curvas de linealidad para cada variable

Puntos de operación:

Selección de un punto de operación donde el comportamiento de las variables sea lineal.

Punto de operación:

- $p_a = 3.499$
- $p_b = 6.051$
- $v = 0.4499$
- $U = 0.07$

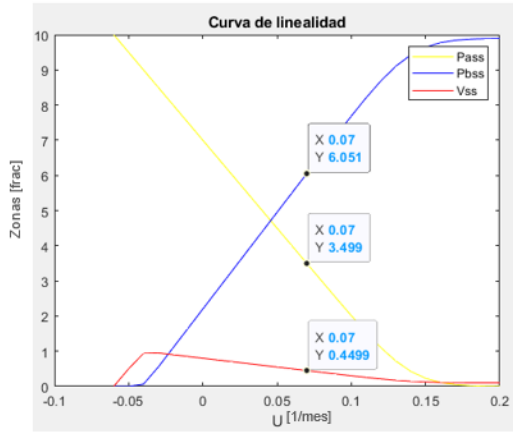


Figura 18: selección punto de operación

Linealización analítica:

Teniendo en cuenta los siguientes valores para realizar los cálculos:

- $p_{a0} = 3,4499$
- $p_{b0} = 6,051$
- $v_0 = 0,4499$
- $c_a = 0,02$
- $c_b = 0,2$
- $e_a = 0,06$
- $e_b = 0,02$
- $U = 0,07$ constante

$$A = \begin{bmatrix} c_a v - e_a - u + c_a p_b & c_a p_a & c_a p_a \\ -c_a p_b & c_b v - e_b - c_a p_a & c_b p_b \\ -c_a v + e_a + u & -c_b v + e_b & -c_a p_a - c_b p_b \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$B = \begin{bmatrix} -p_a \\ 0 \\ p_a \end{bmatrix}_0 \quad (13)$$

Evaluando con los datos anteriores:

$$A = \begin{bmatrix} 0,000018 & 0,068998 & 0,68998 \\ -0,12102 & 0,000982 & 1,2102 \\ 0,121 & -0,06998 & -1,279198 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} -3,4499 \\ 0 \\ 3,4499 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Linealización con MATLAB

Teniendo el modelo en Simulink, se usa la función `linmod()` con el modelo de Simulink, el punto de operación y el valor de la entrada; Obteniendo:

```
A =
0.0000180000000000    0.0689980000000000    0.6899800000000000
-0.1210200000000000    0.0009820000000000    1.2102000000000000
0.1210020000000000   -0.0699800000000000   -1.2791980000000000
```

Figura 19: Matriz A modelo lineal

```
B =
-3.4499000000000000
0
3.4499000000000000
```

Figura 20: Matriz B modelo lineal

Comparar modelos:

Teniendo en cuenta lo visto en clase:

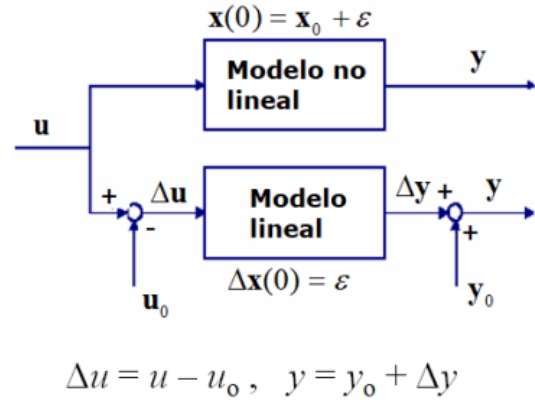


Figura 21: Comparar modelos

para las siguientes gráficas se tienen las salidas del modelo no lineal como: p_a, p_b y v ; y para el modelo no lineal se tienen las salidas de: $Sum1 : 1, Sum1 : 2$ y $Sum1 : 3$ que corresponden a los parámetros p_a, p_b y v respectivamente

Primera comparación con entrada de $U = 0,07$:

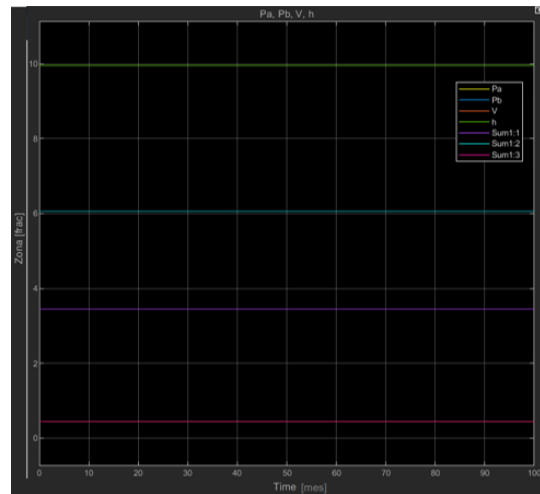


Figura 22: Primera comparación

Segunda comparación con entrada de $U = 0,05$:

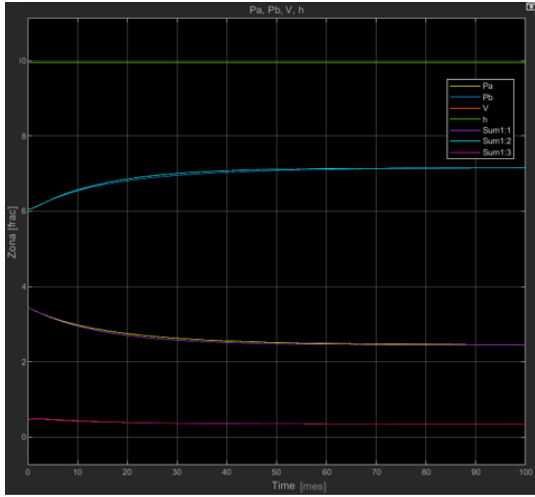


Figura 23: Cuarta comparación

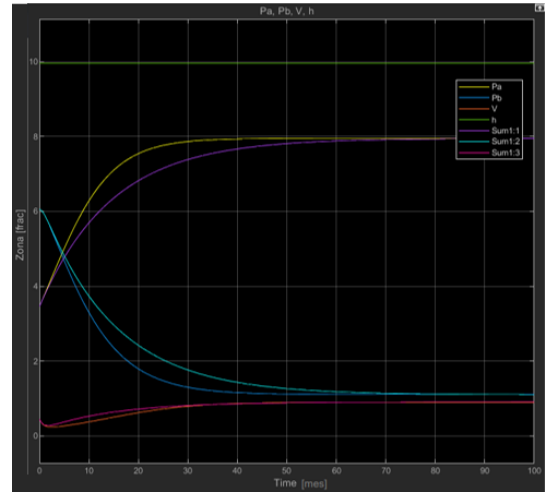


Figura 25: Cuarta comparación

Tercera comparación con entrada de $U = 0,09$:

Quinta comparación con entrada de $U = 0,11$:

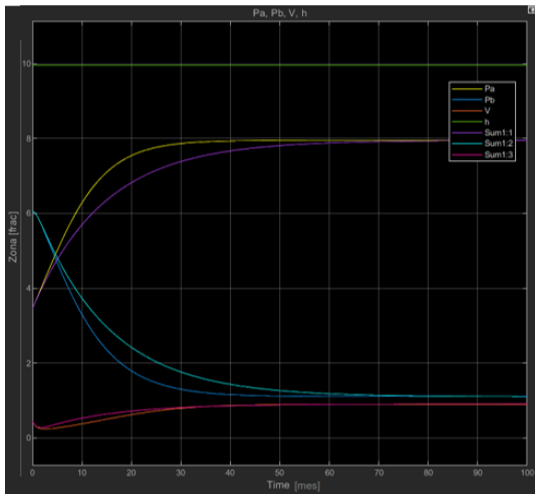


Figura 24: Cuarta comparación

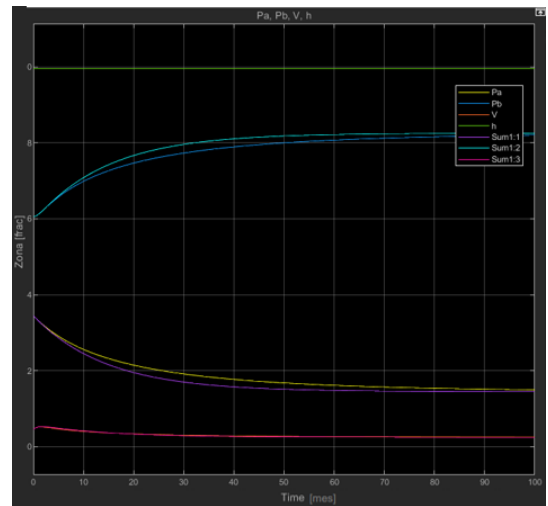


Figura 26: Quinta comparación

Cuarta comparación con entrada de $U = -0,02$:

Sexta comparación con entrada de $U = 0,2$:

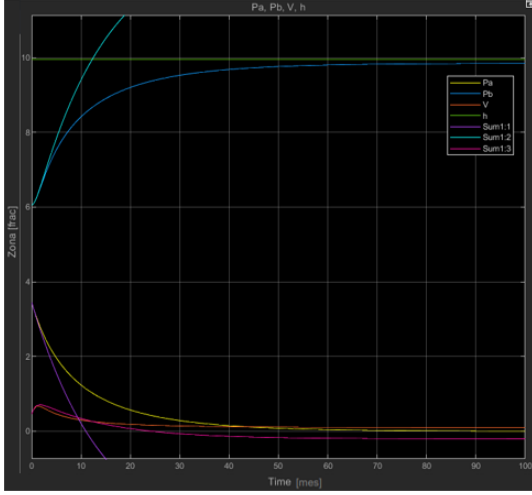


Figura 27: Sexta comparación

5. Análisis

5.1. Implementación y Validación

Persistencia del competidor inferior: se puede ver que con los parámetros considerados en el apartado de resultados, la figura 3 muestra que el competidor inferior no sobrevive en el tiempo. Este comportamiento se presenta dado que la relación $\frac{c_b}{e_b} > \frac{c_a}{e_a}$ no se satisface. Esto prueba que los comportamientos simulados, para dicha condición de persistencia del competidor inferior, son acordes con los reportados en el modelo teórico.

Extinción de los competidores: La figura 4 muestra el resultado de la simulación realizada para un valor de $h = 0,3$. Podemos ver que los parámetros de colonización y extinción cumplen la desigualdad anteriormente mencionada. Sin embargo, $h < \frac{c_b}{c_p} < \frac{c_a}{c_a}$. Esto genera que tanto el competidor A como el competidor B se extingan en el tiempo. Dado que A es mejor colonizador que B, podemos ver que velocidad de descenso en las zonas habitadas por este primero es menor a la de B. Nuevamente, este resultado permite visualizar el apropiado comportamiento del modelo simulado en relación con lo reportado en la literatura para la extinción de los competidores.

Validación del comportamiento gráfico: Si analizamos la figura 5 con la figura 2.4 reportada en [1], se puede ver que existen ciertos comportamientos similares, con algunas diferencias evidentes. Para estas, dado los parámetros elegidos, el competidor B presenta un crecimiento en las zonas habitadas que superan las que posee A, este comportamiento es acorde al del resultado teórico esperado para el resultado considerado. A su vez, se puede ver que luego de cierto tiempo las zonas habitadas por A superan las de B; estas logran una estabilidad dado que A puede obtener terrenos tanto de A como de B.

Sin embargo, existen ciertos comportamientos para esta simulación que son un poco diferente a los reportados de manera teórica por el ejemplo de la figura 2.4 en [1]. Estos hacen referencia al comportamiento del crecimiento de A, dado que en el modelo original este tiene un crecimiento en s más notorio, como también el

comportamiento de las zonas habitadas por B cerca del óptimo global máximo, pues a nivel teórico se tiene un ascenso y descenso más uniforme y proporcional.

Finalmente, se puede observar en los tres experimentos anteriores que la fracción de zonas vacías son siempre diferentes de cero. Esto es de destacar dado que a nivel teórico [1] resalta que tanto A como B siempre dejarán espacios sin habitar, lo que indica que v siempre será mayor a cero.

5.2. Simulación de entradas

Entrada Impulso: este tipo de entrada fue implementada pensando en procesos en los cuales uno de los competidores presentara un factor externo que se presenta anualmente y afecta directamente la extinción de la especie en los territorios. Estos comportamientos podría presentarse en la competencia de dos especies de animales en donde la especie superior posee poca resistencia a climas extremos en el cambio de estaciones.

Se puede ver que la influencia de este parámetro en la extinción del competidor A en los territorios es bastante notoria. En el momento donde esta entrada incrementa, la proporción de las zonas habitadas por A disminuyen constantemente y estas no empiezan a incrementar hasta que el impulso vuelve a ser cero. Adicionalmente, vemos que la influencia de esta entrada se presente en las tres variables de estado, siendo p_a la más afectada, como es de esperarse; para las zonas de p_b , podemos ver que la entrada impulso genera un beneficio en las zonas habitadas por estas, dado que tiene mayor terreno para colonizar, mientras que las zonas vacías v también se ven en aumento.

Entrada Seno: para esta entrada se pensó simular un sistema en el que un competidor presenta aumentos y disminuciones en su extinción de manera periódica. Este tipo de entrada, a pesar de que agrega oscilaciones a la respuesta temporal, mantiene las proporciones entre las variables.

Es posible observar en la figura 8 que, a pesar de que la entrada aplicada presenta una amplitud pequeña, la influencia que esta presenta en el comportamiento de las zonas habitadas por A es considerablemente grande. A su vez, las zonas vacías también presenta un gran cambio dada la relación inversamente proporcional entre p_a y v , pues el terreno en el que A se extingue pasa a ser terreno sin habitar. A su vez, el competidor B también se ve beneficiado en los períodos en los que la extinción de A es mayor, pues esto le permite colonizar nuevos territorios, sin embargo, cuando A se recupera, es decir, cuando su tasa de extinción disminuye, nuevas zonas son colonizadas por A. Finalmente, este tipo de comportamiento en el que los terrenos pasan de un propietario a otro son los responsables de crear las oscilaciones que se ven a través de todo el horizonte de tiempo.

Entrada Escalón: esta entrada fue diseñada para una competencia de dos competidores en la que, luego de cierto tiempo, el competidor superior presenta un aumento en la tasa de extinción. Este tipo de comportamiento puede presentarse en sistemas en los cuales el competidor no puede mantener la dominancia sobre ciertas zonas, especialmente por recursos, por lo que empieza a perder zonas colonizadas.

Al aplicar esta entrada en el mes cincuenta, se observa que el curso del comportamiento de las zonas para cada estado cambian drásticamente. Las zonas habitadas por A empiezan a disminuir, dado que este se extingue a una tasa mayor en las zonas que habita y a su vez esto aumenta las zonas vacías. Por otro lado, dado que A no logra recuperarse de incremento en su extinción, el competidor B aprovecha para colonizar las zonas vacías y aumentar sus zonas habitadas. Finalmente, a pesar de su extinción, el competidor A logra mantenerse por encima del competidor B, gracias a la capacidad colonizadora que este último presenta.

Entrada Constante: Este tipo de entrada es la más simple de todas, esta se encarga de aumentar en todo el horizonte de tiempo la tasa de extinción de uno de los competidores, haciendo que este no alcance valores tan grandes de zonas habitadas en comparación al modelo original. En la figura 10 podemos ver que el crecimiento en las zonas habitadas por B al inicio de la simulación es mayor que en el comportamiento original, esto a causa de que el crecimiento de A se ve disminuido. Finalmente, a pesar de que el competidor superior logra imponerse por encima del inferior, la brecha de diferencia entre las zonas habitadas por cada uno disminuye. Por el lado de las zonas vacías, este presenta un comportamiento muy similar al inicial a causa de que la ocupación de las zonas sigue en disputa entre ambos competidores.

5.3. Variación de parámetros

Parámetro c_a : Se puede ver que la variación de este parámetro presenta cambios significativamente grandes en el intervalo que se está analizando, esto muestra que es un parámetro bastante sensible dado que con pequeñas variaciones se producen grandes cambios. En la figura 11 se observa que en cuanto menor sea el parámetro c_a menor será el valor máximo que este alcanza, esto se da ya que cuando el competidor A presenta una tasa de colonización muy baja, la fracción de zonas habitadas por este será menor en el tiempo. En el caso contrario, el valor máximo del competidos B y de las zonas vacías son mayores a medida que c_a es menor, puesto que son menos las zonas ocupadas por A en el tiempo.

Por otro lado, puede observarse que entre mayor sea el valor de c_a , en el intervalo analizado, el competidor A alcanza su punto de estabilidad más rápidamente, esto dado que coloniza más territorio en menos tiempo. También, un comportamiento muy importante de destacar es que para los tres primeros valores analizados, los comportamientos tienen sentido respecto a lo visto en las anteriores pruebas y en el conocimiento del tipo de sistema, sin embargo, los últimos dos parámetros presentan un punto de estabilidad negativo para la variable de estado p_b , situación que no tiene sentido dado que las fracciones de zonas habitadas por un competidos deben ser no negativas.

En la figura 12 se puede ver el comportamiento de la respuesta temporal con el mayor y menor valor simulado en la variación. Al comparar estos, es claro que el aumento de c_a beneficia en gran medida al competidor A en relación a las fracciones de zonas que habita, comportamiento que ya se describió anteriormente. A si mismo, las respuestas temporales para los demás pa-

rámetros intermedios considerados presentan el mismo tipo de comportamiento con el aumento de c_a .

Parámetro c_b : este parámetro, analizado entre los valores 0.1 y 0.3, con aumentos de 0.05, muestra que es menos sensible en este intervalo en comparación con el anteriormente analizado. Se puede ver que los valores máximo, mínimo y punto de estabilidad de p_a permanecen constantes a pesar de los cambios, mientras que p_b y v si presentan alteraciones.

Se puede observar en la figura 13 que aumentar el valor del parámetro c_b beneficia al competidor B, esto dado que al presentar una mejor colonización, mayor serán las zonas habitadas en el tiempo, mejorando así sus valores máximos y mínimos. Por el otro lado, dado que el aumento de c_b no representa ningún tipo de alteración para el competidor A en los criterios analizados, al aumentar el parámetro analizado son las zonas vacías v las que se ven perjudicadas. Al ser B mejor colonizador, este aprovechará las zonas no habitadas para tomarlas en posesión, disminuyendo la cantidad de estas. Es por esto que, entre mayor sea el parámetro c_b mayor será el punto de estabilidad que las zonas habitadas por B tendrá y menor el de las zonas vacías.

En la figura 14 se puede ver el comportamiento de la respuesta temporal con el mayor y menor valor simulado en la variación del parámetro c_b . Al comparar estos, es claro que el aumento de c_b beneficia en gran medida al competidor B en relación a las fracciones de zonas que habita, comportamiento que ya se describió anteriormente. A si mismo, las respuestas temporales para los demás parámetros intermedios considerados presentan el mismo tipo de comportamiento con el aumento de c_b .

5.4. Solución numérica

Ecuaciones originales:

Para esta primera parte, se realizan los cálculos con las ecuaciones originales, sin entradas en las variable. Se obtiene una buena aproximación entre modelos, la similitud entre el modelo planteado en Simulink y las ecuaciones solucionadas con el método de Euler son muy buenas, debido al los parámetros usados en la solución numérica, porque el tamaño de paso usado es muy pequeño y las iteraciones son suficientes, esto es esencial para buenos resultados, por lo cual se tiene en cuenta.

Ecuaciones con entradas:

Estas ecuaciones tienen modificaciones, por lo cual también se le hace un estudio particular, con las modificaciones respectivas en Simulink y en el método numérico para las entradas en las ecuaciones de estado, se obtienen resultados buenos al igual que en el punto anterior. Los comportamientos simulados son acordes y se ajustan bien.

El código implementado funciona para múltiples valores de la entrada, por lo cual se puede experimentar con valores diferentes o comportamientos como el de una entrada tipo $Sin()$ o un pulso. se ajusta la entrada, se programa la deseada.

Para mayor precisión se podría tener un paso más pequeño y más iteraciones, pero el costo computacional

aumenta, por lo cual no es lo deseado, para evitar esto se puede recurrir a otros métodos numéricos mejores, como lo es el método de *Runge – Kutta* para solucionar ecuaciones diferenciales.

5.5. Linealización del modelo

Curvas de linealidad:

Con la simulación de varias entradas, entre los valores de $-0,06$ y $0,2$. Se obtienen las tres curvas de linealidad, una para cada variable.

Para cada variable:

- p_a : la primera gráfica muestra un comportamiento lineal en la mayoría del rango, sin embargo en los extremos se logran ver unas curvas, se ve la alinealidad en estos extremos.
- p_b : en la gráfica del medio se ve un comportamiento similar al anterior, donde en el centro se tiene un comportamiento lineal y en ambos extremos se tiene la alinealidad, en este caso en forma de "S".
- v : para la última gráfica se tiene la mayor alinealidad de las tres variables, donde se tiene en la mayor parte un comportamiento cuadrático con un punto de saturación al final.

Puntos de operación:

Se escoge un punto en el cual las tres variables tienen un comportamiento lineal (ver figura 18), por esto se selecciona:

- $p_a = 3.499$
- $p_b = 6.051$
- $v = 0.4499$

Estos puntos de estabilidad son los correspondientes a la entrada $U = 0,07$

Linealización analítica:

Para las matrices A y B se usan los jacobianos planteados anteriormente, evaluados en el punto de operación seleccionado con la respectiva entrada U . Se obtiene una matriz guía donde luego se reemplazan los valores específicos para el caso y desarrollar la indización.

Linealización analítica:

Tras usar los comandos de MATLAB y el punto de operación, se obtienen las matrices mostradas en las figuras 19 y 20.

Se puede observar que los valores de las matrices son los mismos a los valores de las matrices linealizadas analíticamente. Con estos resultados iguales tras realizar diferentes procesos, se procede con la comparación de modelos. Se puede verificar que se ha linealizado el mismo modelo.

Comparar modelos:

Para comparar estos dos modelos se tiene en cuenta el esquema presentado en la figura (21), esto es una condición para realizar la comparación, iniciar el modelo lineal en cero, mientras que el modelo no lineal se inicia en el punto de operación, al modelo no lineal la entrada es normal, pero para el modelo lineal se tiene ΔU y como salidas de este, se obtienen ΔP_a , ΔP_b y ΔV , por lo cual se le adiciona a la salida de las variables el punto de operación. Con los debidos ajustes en las entradas y las salidas se realizan las comparaciones de los modelos. Como primera gráfica, en la figura (22) se corre en el

punto de operación, como es de esperarse, porque la linealización se realiza en este punto, las gráficas coinciden exactas, por lo cual el comportamiento simulado por ambos modelos es el mismo.

En la figura (23) se tienen ambos modelos con una entrada menor, pero cercana a la inicial, por lo cual el modelo se ajusta muy bien, no se logra ver mucha diferencia en los comportamientos de las variables; esto pasa al igual que en la figura (24) donde se tiene un valor cercano al inicial, pero en este caso es mayor.

En las figuras (25) y (26) se realiza algo similar, se aumentan y disminuyen los valores respectivamente, y se logra ver que todavía el comportamiento es similar, pero ya no son tan exactas las gráficas, se logra ver el mismo comportamiento, pero en diferentes tiempos y también se estabilizan en los mismos puntos.

Para la figura (27) donde la entrada es un valor muy grande ya ni el comportamiento, ni las gráficas concuerdan, ya que se llega a un punto donde los modelos no son acordes, la alinealidad del modelo no permite un buen ajuste; se puede decir que ya se ha salido del rango de linealidad.

Rango de linealidad:

Se da donde ambos modelos presentan resultados acordes a los objetivos, dependiendo del objetivo de la modelación se establece este, debido a que en algunos casos puede que las gráficas no ajusten exactamente pero el comportamiento es acorde y es lo que se estudia, por lo cual el rango puede ser más grande, o donde se requiere exactitud este rango es pequeño.

En este caso se determina el rango de linealidad entre $[-0,02, 0,11]$, en este rango los comportamientos de los modelos son acordes y el ajuste de las gráficas es aceptable. Pero al alejar más estos límites del rango de linealidad, ya los modelos difieren en comportamiento y exactitud.

Se aclara que este rango no tiene que ser simétrico respecto al punto de operación.

6. Conclusiones

- En el estudio de un sistema dinámico es muy importante el proceso de verificación, no solo de los comportamientos de la simulación sino del sistema mismo. Pues en ciertas ocasiones, como en el caso de este proyecto, se puede tener como referencia un trabajo previo que no presenten los modelos de manera correcta, y a través del conocimiento del comportamiento real del sistema se pueden identificar estos errores.
- En la simulación de entradas, se debe priorizar el análisis del tipo de entradas a aplicar en relación con el significado que esta tiene en el sistema. Al estar analizando interacciones reales, es importante tener en mente los escenarios plausibles de las condiciones externas que afectan al sistema.
- Por medio de este trabajo es posible observar que no hay una sola manera de abordar los sistemas dinámicos y sus soluciones, pues se puede ver que por medio de soluciones numéricas se obtienen buenas aproximaciones del comportamiento real de los sistemas estudiados. Por esto, es importante delimitar

el objetivo del modelo y la exactitud necesaria para así definir los métodos de solución más acordes a las necesidades.

- Las herramientas de linealización son recursos bastante útiles que simplifican el análisis de los sistemas, dadas las propiedades que los sistemas lineales poseen. Por esto, en relación con el alcance buscado al realizar el estudio, los métodos de linealización deberían ser fundamentales en el análisis de sistemas dinámicos. Además, tener en cuenta el objetivo del estudio, debido a que este objetivo puede influir en el rango de linealidad que es donde los dos sistemas operan bien, ya que se puede enfocar en el comportamiento del sistema o en la exactitud de los resultados.

Referencias

- [1] Guillermo Abramson. La matemática de los sistemas biológicos. 2010.
- [2] JOSÉ ARRIETA ALGARRA, RAÚL FERREIRA DE PABLO, PARDO SAN GIL, ROSA MARIA, and ANIBAL RODRIGUEZ BERNAL. *Análisis numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ediciones Paraninfo, SA, 2020.
- [3] Sean Nee and Robert M May. Dynamics of metapopulations: habitat destruction and competitive coexistence. *Journal of Animal Ecology*, pages 37–40, 1992.