

Trabajo Práctico Optimización II

*Optimización estocástica

1st Hamilton Smith Gómez Osorio

Universidad EAFIT
Ingeniería Matemática
Medellín, Colombia
hsgomezo@eafit.edu.co

2nd Jose Miguel Gil Valencia

Universidad EAFIT
Ingeniería Matemática
Medellín, Colombia
jmgilv@eafit.edu.co

Abstract—En este documento se hace el estudio de la resolución de un problema de optimización estocástica para una refinería en la ciudad de Cartagena, Colombia, el cual será tratado como un problema basado en escenarios, utilizando el método de monte Carlo, haciendo un análisis de resultados para diferentes métodos de generación de valores aleatorios.

Index Terms—Optimización, Optimización estocástica, Optimización basada en escenarios, Monte Carlo.

I. INTRODUCCIÓN

El método numéricos de Monte Carlo es un proceso estadístico muy utilizado en la literatura por su nivel de simplicidad y su amplia variedad de aplicaciones en la resolución de problemas en los cuales muchas veces es imposible obtener una solución exacta. Este método consiste en la generación de valores aleatorios, dadas ciertas especificaciones y condiciones a cumplir, en donde se busca que a medida que el número de pruebas que se realicen sea mayor, mejor será la aproximación que se tendrá del valor real. Para este caso se estará trabajando en base a un problema de optimización estocástica presentado en una refinería de la ciudad de Cartagena, Colombia, la cual busca cumplir una demanda, que presenta un error estocástico desconocido, a su vez que mantiene el costo de producción lo más bajo posible, y para el cual se estará utilizando la formulación en base a escenarios como método de solución.

En la sección II se realiza la formulación del problema a solucionar, en donde se entrará más en detalle del mismo. En la sección III se hace una generalización del problema y se plantea cómo es su desarrollo desde el punto teórico. En la parte IV se hace un planteamiento del método de Monte Carlo utilizado para la resolución del problema y la aplicación del mismo. En la parte V se realizan las soluciones para el problema usando el método numérico planteado, y por último en la parte VI se plantearán algunas conclusiones del trabajo y los resultados obtenidos.

II. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Una refinería en la ciudad de Cartagena tiene dos productos, benceno y combustible, y estos productos se obtienen de dos

tipos de crudos, O_1 y O_2 .

La productividad de estos productos y su rendimiento están ilustrados en la tabla I.

Se tiene que las variables η_1, η_2, ζ_1 y ζ_2 son estocásticas,

	O_1	O_2	Demanda
Benceno	$2 + \eta_1$	6	$180 + \zeta_1$
Combustible	3	$3.4 - \eta_2$	$162 + \zeta_2$
Costos	2	2	

TABLE I
PRODUCTIVIDAD Y DEMANDA

es decir, que tienen o dependen de un valor aleatorio. En este caso, estas variables son aleatorias y sus comportamientos son los siguientes:

$$\eta_1 \in [-0.8, 0.8]$$

$$\eta_2 \in [0, 1.8]$$

$$\zeta_1 \in [-30.91, 30.91]$$

$$\zeta_2 \in [-23.18, 23.18]$$

Estos intervalos tienen una confianza de .99, es decir, una excelente precisión el que los valores de las diferentes variables van a estar en los intervalos dados. Esta confianza es un factor positivo a la hora de trabajar en este tipo de problemas, ya que posteriormente, al simular las variables, se van a podría esperar un buen comportamiento de las mismas.

Lo que se busca en este planteamiento es poder analizar el comportamiento de las diferentes componentes del problema, simularlas y plantear un modelo de optimización adecuado que represente de manera ajustada el problema real, eliminando así los valores estocásticos.

Al optimizar este problema dado, lo que se busca es minimizar los costos de producción de los productos y a su vez cumplir con la demanda de estos.

Al tener unos valores aleatorios y desconocer la distribución de probabilidad de estos, se habla de un problema que no tiene una solución exacta de manera teórica, razón por la cual se realizan métodos planteados en III

III. PARTE TEÓRICA

En esta sección se describirá de manera teórica el problema planteado en II y se generaliza el mismo, ya que al momento de optimizar, se resuelve un modelo aproximado de la realidad, mas no se puede asegurar que este explique completamente el problema real, y posteriormete Se pasará de un problema específico a un planteamiento general de este tipo de problemas.

Primero se hace la generalización al problema 1, donde nuestra función objetivo es 2 con las restricciones 3, al tener este tipo de función y estas condiciones con variables aleatorias, se tiene que abordar de una manera especial explicada a continuación.

$$\text{minimize } J_E(x) \quad \text{s.t. } g_i(x) \leq 0 \quad (1)$$

$$J_E(x_1, x_2) = 2x_1[6 + (2 + \eta_1)] + 2x_2[3 + (3.4 + \eta_2)] \quad (2)$$

$$x_1 \geq 180 + \zeta_1 \quad x_2 \geq 162 + \zeta_2 \quad (3)$$

Donde x son los valores que pueden tomar las variables, con la función objetivo $J_E := E[J^*(x, w)]$ y las restricciones $g_i(x) := E[g_i^*(x, w)]$. w es tomado como el conjunto de los diferentes valores aleatorios usados (η_1, η_2, ζ_1 y ζ_2)

Ahora se tiene un problema con una función objetivo y restricciones de carácter estocástico; y este tipo de problemas se pueden tratar de diferentes maneras. Para este caso, nos enfocamos en una solución basada en escenarios, lo cual nos permite reescribir el problema 1 en el siguiente problema con la función objetivo 4 y las restricciones 5.

$$\text{minimize } J(x) := \sum_{j=1}^n p_j J^*(x, w_j) \quad (4)$$

$$\text{s.t. } g_i(x) := \sum_{j=1}^n p_j g_i^*(x, w_j) \leq 0 \quad (5)$$

Donde los índices i corresponden al numero de restricciones del problema y $n \in \mathbb{N}$ es un numero natural grande.

Para la optimización basada en escenarios se realizan algunos supuestos:

- Se tiene un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
- $w \in \Omega$.
- $w \in \{w_1, \dots, w_n\}$, los cuales son unos eventos finitos o los escenarios.
- Las probabilidades son dadas por $p_j := P(w = w_j)$.
- Se asocian las probabilidades con los eventos, $\{p_1, \dots, p_n\}$ con $\{w_1, \dots, w_n\}$.

Ya con esto planteado, se puede abordar de una manera numérica el problema 4 con las restricciones 5. Ahora nuestro problema teórico quedaría planteado de la siguiente manera 6, 7 y 8:

$$\min J(x_1, x_2) := \sum_{j=1}^n p_j \{2x_1[6 + (2 + \eta_1)] + 2x_2[3 + (3.4 + \eta_2)]\} \quad (6)$$

$$\text{s.t. } g_1(x_1) := \sum_{j=1}^n p_j (-x_1 + 180 + \zeta_1) \leq 0 \quad (7)$$

$$g_2(x_2) := \sum_{j=1}^n p_j (-x_2 + 162 + \zeta_2) \leq 0 \quad (8)$$

Los p_j son dados dependiendo de la distribución empleada

IV. PARTE NUMÉRICA

Para la solución numérica del problema se usa el modelo de Monte Carlo (MC) con diferentes distribuciones de probabilidad.

El método de Monte Carlo (4)(5) consiste en realizar múltiples muestras, a cada muestra se le asigna un peso p_j por el cual es multiplicado el valor de la función objetivo 2, y para realizar los respectivos cálculos de la función objetivo 2 se hacen con los escenarios w_j , obteniendo como resultado 6.

Así realizando el calculo de la función para distintos valores y poder abarcar los escenarios posibles a medida que sea mayor el numero de muestras realizadas, un n muy grande.

El modelo de MC soluciona el problema de optimización planteado 6 y no el problema estocástico 1, debido a que al usar múltiples muestras con múltiples valores de las variables aleatorias, no es necesario disponer de valores aleatorios dentro del problema.

Generalización de MC(9) [1]:

$$E[Q(x, \zeta)] := \sum_{k=1}^K p_k Q(x, \zeta_k) \quad (9)$$

Después de realizar el respectivo modelo y calcular la solución, se procede a la validación.

Para la validación tenemos que:

$$E[J^*(x_{MC}^{opt}, w)] \leq E[J^*(x^{opt}, w)]$$

donde x_{MC}^{opt} son nuestros valores óptimos para el problema dados por el algoritmo de MC, $x = \{x_1, x_2\}$.

Para obtener esto es necesario un valor de n muy grande.

Ahora teniendo n , creamos m mucho más grande, el cual $m \gg n$. Ahora con estos valores se crean los escenarios o eventos con sus respectivos pesos.

$(\{w_1, \dots, w_n\}, \{p_1, \dots, p_n\})$ y $(\{w_1^v, \dots, w_m^v\}, \{p_1, \dots, p_m\})$

Los cuales son: el conjunto para la solución y el conjunto de validación, respectivamente.

Con un valor de x_{MC}^{opt} ya hallado anteriormente, tenemos el valor de $J(x_{MC}^{pt})$ y $g_i(x_{MC}^{pt})$, se realizan m repeticiones del algoritmo de MC (6)(7)(8).

El cual nos da como resultado un $J^v(x_{MC}^{pt})$ y $g_i^v(x_{MC}^{pt})$ que son resultados de validación.

Si se cumple (10) y (11) se puede concluir, de lo contrario aumentar los valores de n y m , y recalculer x_{MC}^{opt}

$$J(x_{MC}^{pt}) \cong J^v(x_{MC}^{pt}) \quad (10)$$

$$g_i(x_{MC}^{pt}) \cong g_i^v(x_{MC}^{pt}) \quad (11)$$

V. PARTE COMPUTACIONAL

Para realizar la solución del problema planteado, se ha utilizado el programa MATLAB en la programación del algoritmo de optimización estocástica. Este puede encontrarse en la sección de Códigos al final de documentos, junto con otro en el que se especifican ciertas modificaciones y experimentaciones que se realizaron en el proceso.

Para este primer algoritmos se han establecido inicialmente unos valores que determinan el tamaño de la muestra N_g a utilizar para entrenamiento, estos varían entre 10^1 y 10^4 y además, se estableció la muestra de validación con tamaño $M_g = 10^5$ procurando que $M_g \gg N_g$.

Este proceso se realizó para cada uno de los tamaños de muestra, como se puede ver en el primer ciclo del código, donde inicialmente se generaron la cantidad de valores estocásticos en los intervalos de $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ y posteriormente se calculó la sumatoria de estos valores por la probabilidad $\frac{1}{N}$ uniforme asociada.

Luego de tener los parámetros a utilizar para la definición del problema, se utilizó el Toolbox de optimización que presenta MATLAB y se definieron las variables a optimizar, función objetivo y restricciones con los comandos *optimvar(*)*, *optimproblem(*)*, *linprob.Constraints*, respectivamente, y donde finalmente se utilizaron los comandos *solve(*)* y *evaluate(*)* para solucionar el problema y evaluar los valores óptimos obtenidos en la función objetivo.

Este proceso, como se ha dicho anteriormente, fue realizado para cada uno de los tamaños de muestra, y al finalizar el proceso, se utilizó el algoritmo mencionado anteriormente, definido en una función adicional llamada *validacion(*)*, en donde realizamos este mismo procedimiento para el tamaño de muestra M_g y posteriormente se tabularon los resultados que se muestran a continuación

	$N = 10^1$	$N = 10^2$	$N = 10^3$	$N = 10^4$
Entrenamiento	5453.9	5242.6	5254	5249.7
Validación	5251.3	5449.8	5250.6	5253.8

TABLE II

II RESULTADOS OPTIMIZACIÓN CON ALEATORIOS UNIFORMES

Podemos ver en la tabla anterior, de manera experimental, que a medida que el tamaño de la muestra aumenta, este converge al valor presentado por en el proceso de validación. Proceso esperado en el cual podríamos asegurar, que para un tamaño de muestra 10^5 se obtiene una producción de benceno, x_1 de 179.9034 unidades y una producción de combustible, x_2 , de 161.9163 unidades de que el costo mínimo de producción de benceno y gasolina, para suplir la demanda, está en el intervalo $[5249.8, 5449.8]$ con una confianza 0.99.

Dado que el problema no posee especificaciones del tipo de distribución a utilizar en la generación de los valores aleatorios, se ha realizado una segunda prueba en la que dichos valores son generados a partir de una distribución normal, en los que se toma como media en valor central del intervalo y

su desviación estándar, dado que dichos intervalos tienen una confianza de 0.99, se ha tomado la desviación correspondiente al valor que asegura que el 99% de los datos se encuentran a menos de tres desviaciones estándar de la media. Esto fue, dividiendo los valores límites entre tres. A continuación se muestra la tabla de resultados aplicando esta modificación, donde los comandos utilizados se encuentran en la sección de códigos.

	$N = 10^1$	$N = 10^2$	$N = 10^3$	$N = 10^4$
Entrenamiento	5048.3	5230	5256.4	5254.5
Validación	5251.7	5250.1	5253.7	5252.5

TABLE III

III RESULTADOS OPTIMIZACIÓN CON ALEATORIOS NORMALES

Para este caso, se podría asegurar, que para un tamaño de muestra 10^5 , la cantidad a producir de benceno, x_1 , es de 179.9699 unidades y de combustible, x_2 , es de 162.0847 unidades, con un costo mínimo de producción de benceno y combustible, para suplir la demanda, está en el intervalo $[5250.1, 5253.7]$ con una confianza 0.99.

Estos resultados nos indican que el método de Monte Carlo converge a una solución que se encuentra en el mismo intervalo tanto para valores de errores generados de manera aleatoria con una distribución uniforme como para una distribución normal. Sin embargo, podemos observar que el intervalo de confianza para la solución proveniente de datos generados normales es más pequeño que el resultante con la distribución uniforme. Resultado esperado dado las propiedades de dispersión de los datos de esta primera distribución, en donde se tiene mayor número de datos cerca del dato central medio.

VI. CONCLUSIONES

Se puede concluir, luego de analizar el comportamiento del método estudiado desde su definición teórica hasta su implementación, que este método es muy recomendado en la solución de problemas estocásticos donde se busca una mayor precisión en la solución final. Para esto es necesario que se tenga un tamaño de muestra lo bastante grande ya que la solución, a medida que este número aumenta, se espera que converja a la solución real y además, tener un intervalo de los valores estocásticos con una confianza alta ya que así se tendrá un intervalo de solución mucho más pequeño. También es posible ver que este método es muy útil en la resolución de este tipo de problemas en los que se desconoce la función de distribución teórica de las probabilidades de los valores estocásticos de demanda, ya que, como esta limitante hace imposible encontrar la solución exacta, por medio de Monte Carlo se puede encontrar una muy buena aproximación de la misma.

Por último, se puede ver que para este problema, el utilizar una distribución normal o una uniforme para la generación de los valores aleatorios no presentan una gran diferencia al momento de obtener resultados congruentes, por lo que se podría decir que para estos, Monte Carlo funciona de una manera estable. Sin embargo, es importante hacer un estudio

con los expertos, para definir cuál es la mejor distribución a implementar para encontrar la solución esperada.

CÓDIGOS

```

1% Algoritmo de optimizacion estocastica
2%
3% Muestras Entrenamiento
4N_g= [1e1 1e2 1e3 1e4];
5% Muestras validacion
6M_g= [1e5 1e5 1e5 1e5];
7for j=1:length(N_g)
8    N= N_g(j);
9    %Definir los valores aleatorios
10   for n=1:N
11       % Distribucion uniforme
12       n_1(n)= unifrnd(-0.8,0.8);
13       n_2(n)= unifrnd(0,1.84);
14       e_1(n)= unifrnd(-30.91,30.91);
15       e_2(n)= unifrnd(-23.18,23.18);
16   end
17   % Calculo parametro problema
18   n1= sum((1/N)*n_1);
19   n2= sum((1/N)*n_2);
20   e1= sum((1/N)*e_1);
21   e2= sum((1/N)*e_2);
22   % Variables a optimizar
23   x1= optimvar('x1');
24   x2= optimvar('x2');
25   % Funcion objetivo
26   linprob=optimproblem('Objective',...
27       x1*((2+n1)*2+12) +...
28       x2*(6 + (3.4+n2)*2));
29   % Restricciones
30   linprob.Constraints.cons1=x1>=180+e1;
31   linprob.Constraints.cons2=x2>=162+e2;
32   % solucion para cada escenario
33   linsol(j)= solve(linprob);
34   % Evaluacion costo minimo
35   opt(j)= evaluate(...
36       linprob.Objective , linsol(j));
37
38end
39% Validacion del modelo
40[ solVal , optVal]= validacion(M_g);
41% Reorganizacion de datos
42for i=1: length(optVal)
43    sol(:,i)=[ opt(i); optVal(i)];
44end
45% Tabulacion de resultados
46data= {'Training', 'Validation'};
47Solucion= table(sol(:,1), sol(:,2),...
48    sol(:,3), sol(:,4), 'RowNames', data)
49Solucion({'Training', 'Validation'},:);

```

1%Modificaciones

```

2%
3% Aleatorios con distribucion normal
4n_1(n)= normrnd(0,0.267);
5n_2(n)= normrnd(0.92,0.613);
6e_1(n)= normrnd(0,10.303);
7e_2(n)= normrnd(0,7.727);

```

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al profesor Vadim Azhmyakov, por guiarnos en el curso de optimización no lineal, estocástica y multiobjetivo a lo largo del último semestre y por apoyar todo el proceso de construcción del trabajo aquí presentado.

REFERENCES

- [1] D. P. K. Reuven Y. Rubinstein, *The Cross-Entropy Method*. Springer, 2004.