

Electromagnetism Notes

by Ham Kittichet

February 15, 2025

► Table of Contents

บทที่ 1 ไฟฟ้าสถิต	1
► 1.1 สนามไฟฟ้า	1
► 1.2 Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต	2
► 1.3 ศักย์ไฟฟ้า	3
► 1.4 งานและพลังงาน	5
► 1.5 ตัวนำและความจุไฟฟ้า	8
บทที่ 2 ศักย์ไฟฟ้า	12
► 2.1 สมการ Laplace	12
► 2.2 การจำลองภาพ	14
► 2.3 การแยกตัวแปร	15
► 2.4 การกระจาย Multipole	19
บทที่ 3 สนามไฟฟ้าในสสาร	23
► 3.1 โพลาริเซชัน	23
► 3.2 สนามไฟฟ้าของวัตถุที่ถูกโพลาริซ์	25
► 3.3 การกระจัดไฟฟ้า	26
► 3.4 ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น	27
บทที่ 4 แม่เหล็กสถิต	32
► 4.1 กฎแรง Lorentz	32
► 4.2 กฎของ Biot-Savart	34
► 4.3 Divergence และ Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต	35
► 4.4 เวกเตอร์ศักย์แม่เหล็ก	37
บทที่ 5 สนามแม่เหล็กในสสาร (TO-DO)	43

▶ 5.1	แมกเนไทเซชัน (TO-DO)	43
บทที่ 6	พลศาสตร์ไฟฟ้า	44
▶ 6.1	แรงเคลื่อนไฟฟ้า	44

บทที่ 1 | ไฟฟ้าสถิต

► 1.1. สนามไฟฟ้า

► แรง Coulomb

กฎของ Coulomb. สำหรับจุดประจุที่อยู่หนึ่ง q_1 และ q_2 จะได้ว่าแรงที่กระทำต่อประจุ q_1 คือ

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.1)$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{r}}$ คือเวกเตอร์จาก q_1 ไป q_2

โดย ϵ_0 เป็นค่าคงที่ที่เรียกว่าสภาพยอมในสุญญากาศ (permittivity of free space) เราจะเรียกแรงนี้ว่าแรง Coulomb

► สนามไฟฟ้า

สังเกตว่าถ้ามีประจุวางไว้อยู่แล้ว เราสามารถนิยามสนามไฟฟ้าได้ดังนี้:

นิยามสนามไฟฟ้า.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \quad (1.2)$$

และโดยกฎของ Coulomb (1.1) จะได้ว่า

สนามไฟฟ้าของจุดประจุ.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\mathbf{r}_k \neq \mathbf{r}} q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k^2} \hat{\mathbf{r}}_k \quad (1.3)$$

โดยถ้าประจุไม่ติดสกริตแต่กระจายตัวอย่างต่อเนื่องด้วยความหนาแน่นประจุ $\rho(\mathbf{r})$ จะได้ว่า

สนามไฟฟ้าของประจุต่อเนื่อง.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau' \quad (1.4)$$

เมื่อ $d\tau' = d^3r'$ และในทำนองเดียวกันกับความหนาแน่นเชิงเส้น λ และความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ

► 1.2. Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต

► ฟลักซ์ไฟฟ้าและกฎของ Gauss

นิยามฟลักซ์ไฟฟ้า. ฟลักซ์ของ \mathbf{E} ที่ผ่านผิว S คือ

$$\Phi_E \equiv \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.5)$$

พิจารณาพื้นผิวปิด S ที่มีจุดประจุ q อยู่ภายในและพื้นที่เล็ก ๆ $d\tau$ บน S โดยมี $\hat{\mathbf{r}}$ เป็นเวกเตอร์จาก q มายัง $d\mathbf{a}$ และ $d\mathbf{a}'$ เป็นภาพฉายของ $d\mathbf{a}$ มาตั้งฉากกับ $\hat{\mathbf{r}}$ จะได้

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\mathbf{a} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\mathbf{a}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

เมื่อ $d\Omega$ คือมุมสเตอเรเดียนเทียบกับตำแหน่งของประจุ q ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าจาก q ที่ผ่านพื้นผิว S เท่ากับ

$$\Phi_E^{(q \text{ in})} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

โดยทำในทำนองเดียวกันจะเห็นว่าถ้า q อยู่นอก S แล้ว $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = (\text{const.}) d\Omega$ const จะมีคู่ของม้านที่เครื่องหมายตรงข้ามในอีกฝั่งของ S จึงทำให้ตัดกันหมด ดังนั้นในกรณีจุดประจุ q อยู่นอก S จะได้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้า:

$$\Phi_E^{(q \text{ out})} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1.7)$$

ดังนั้นจึงได้

กฎของ Gauss (Integral form). สำหรับทุกพื้นผิวปิดจะได้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวนั้นเท่ากับ

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

► Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต

พิจารณาใช้ divergence theorem ($\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau$) บนกฎของ Gauss (1.8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau &= \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \\ \int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากเป็นจริงทุกปริมาตร V ดังนั้น

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

ก็จะได้

กฎของ Gauss (Differential form).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

และเนื่องจาก curl ของจุดประจุเท่ากับ $\mathbf{0}$ ดังนั้นจึงได้ว่า curl ของสนาม \mathbf{E} สถิตใด ๆ จึงเท่ากับ $\mathbf{0}$ ด้วย

กฎของ Faraday สำหรับสนามไฟฟ้าสถิต.

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

► 1.3. ศักย์ไฟฟ้า

► นิยามศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจาก $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ โดย Stokes' theorem จะได้ว่า $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ไม่ขึ้นอยู่กับการเดินทาง เราจึงสามารถนิยามฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้า ณ ตำแหน่งใด ๆ ได้:

นิยามศักย์ไฟฟ้า. ให้ O เป็นจุดอ้างอิง เราสามารถนิยามศักย์ไฟฟ้า $V(\mathbf{r})$ ที่จุด \mathbf{r} คือ

$$V(\mathbf{r}) \equiv - \int_O^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.11)$$

ซึ่งโดยปกติแล้วเราจะนิยามศักย์ไฟฟ้าให้ $V|_{r \rightarrow \infty} = 0$

โดยจะได้ความต่างศักย์ระหว่าง \mathbf{a} และ \mathbf{b} คือ

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.12)$$

และจาก

$$\int_a^b (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

จะได้ว่า

ศักย์ไฟฟ้าในรูป Gradient.

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (1.13)$$

อีกสมการหนึ่งที่สำคัญที่ได้จากศักย์ไฟฟ้าโดยนำสมการ (1.13) ไปแทนใน (1.9) จะได้

สมการ Poisson. สำหรับสนามศักย์ไฟฟ้า V :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.14)$$

โดยถ้า $\rho = 0$ จะได้สมการ Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.15)$$

โดยสามารถหา V ของจุดประจุ q ได้จากกฎของ Coulomb (1.1):

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2} dr'$$

ก็จะได้ว่า

ศักย์ไฟฟ้าของจุดประจุ.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (1.16)$$

ในทำนองเดียวกันกับสนามไฟฟ้า เราสามารถหาศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง \mathbf{r} ที่เกิดจากประจุที่กระจายแบบต่อเนื่องด้วยความหนาแน่น ρ ได้ดังนี้:

ศักย์ไฟฟ้าของประจุต่อเนื่อง.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \quad (1.17)$$

► สภาวะขอบเขต

ต่อมาจะมาดูสมบัติของ \mathbf{E} และ V ในบริเวณแผ่นประจุบาง ๆ ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ σ

1. พิจารณาผิว Gaussian ทรงกระบอกบางที่บางมากจนฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านบริเวณผิวข้างเท่ากับ 0 ที่คลุมบริเวณเล็ก ๆ ของแผ่นประจุ จะได้ว่า

$$E_{\text{above}}^{\perp} - E_{\text{below}}^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

จะเห็นว่าส่วนของ \mathbf{E} ที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุจะเกิดความไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดด้วยผลต่าง $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

2. พิจารณาอินทิกรัลเส้นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุ จาก (1.10) และ Stokes' theorem จะได้ว่า $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ดังนั้น

$$E_{\text{above}}^{\parallel} - E_{\text{below}}^{\parallel} = 0$$

จะเห็นว่าส่วนของ \mathbf{E} ที่ขนานกับแผ่นประจุจะยังต่อเนื่องเมื่อผ่านแผ่นประจุ

3. พิจารณาจุด \mathbf{a} และ \mathbf{b} ที่อยู่ใกล้กันมาก ๆ แต่ \mathbf{b} อยู่ด้านบนแผ่นส่วน \mathbf{a} อยู่ด้านล่างแผ่น จะได้ว่า

$$V_{\text{above}} - V_{\text{below}} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

ดังนั้น V ต่อเนื่องเมื่อผ่านแผ่นประจุ

จึงสรุปได้ดังนี้:

สถานะขอบเขตของ \mathbf{E} และ V เมื่อผ่านแผ่นประจุบาง. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ จะได้ว่า

$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}} \quad (1.18)$$

และ

$$\mathbf{E}_{\text{above}} - \mathbf{E}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (1.19)$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน หรือเขียนอีกอย่างหนึ่งได้ว่า

$$\frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.20)$$

► 1.4. งานและพลังงาน

► พลังงานศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจาก $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times q\mathbf{E} = 0$ ดังนั้นแรง Coulomb จึงเป็นแรงอนุรักษ์ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับแรงโน้มถ่วงด้วย จึงหาพลังงานศักย์ของจุดประจุ 2 ตัวได้คล้ายกัน

พลังงานศักย์ไฟฟ้าสำหรับจุดประจุ.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (1.21)$$

และจาก (1.13) ยังได้อีกว่า

ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์.

$$V = \frac{U}{q} \quad (1.22)$$

ต่อมาจะหาหาพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบประจุที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามภายนอก \mathbf{E}_{ext} โดยพิจารณาการหาผลต่างของพลังงานศักย์ในการนำจุดประจุจาก ∞ มาวางที่ละตัว จะได้ผลต่างพลังงานศักย์ของประจุที่ k เป็นดังนี้:

$$\Delta U_k = q_k V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_k)$$

เนื่องจากนิยามให้ $U|_{r \rightarrow \infty} = qV|_{r \rightarrow \infty} = 0$ ก็จะได้

$$U_{\text{ext}} = \sum_k \Delta U_k = \sum_k q_k V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_k) \quad (1.23)$$

หรือขยายมาในกรณีต่อเนื่องก็คือ

พลังงานศักย์ไฟฟ้าจากสนามภายนอก.

$$U_{\text{ext}} = \int \rho V_{\text{ext}} d\tau \quad (1.24)$$

ส่วนพลังงานศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากระบบเองหาได้โดยการพิจารณาเอาจุดประจุจาก ∞ มาวางเช่นเดียวกัน จะได้ประจุตัวที่ k มีพลังงานศักย์

$$U_k = \sum_{k' < k} q_k V_{k'}(\mathbf{r}_k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k' < k} \frac{q_k q_{k'}}{r_{kk'}}$$

ดังนั้นโดยใช้ความสมมาตร

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \sum_{k' < k} \frac{q_k q_{k'}}{r_{kk'}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k \neq k'} \frac{q_k q_{k'}}{r_{kk'}} \quad (1.25)$$

แต่ในกรณีต่อเนื่องเราไม่จำเป็นต้องสนใจเงื่อนไข $k \neq k'$ เพราะอินทิกรัลลู่อเข้าและส่วนที่มาจาก $k = k'$ สามารถมองเป็นส่วนพลังงานที่มาจากประจุที่ใกล้กันมาก ๆ ได้ จึงได้ว่า

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau' d\tau$$

เนื่องจาก $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r} = V(\mathbf{r})$ ดังนั้น

พลังงานศักย์ไฟฟ้าจากสนามภายใน.

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau \quad (1.26)$$

▶ พลังงานจากสนามไฟฟ้า

ต่อมาพิจารณาพลังงานศักย์ภายในของระบบอีกแบบโดยแทนสมการ Poisson (1.14) เข้าไปใน (1.26) โดยอินทิเกรตบนปริมาตร V ที่ใหญ่มาก ๆ จน \mathbf{E} ที่ผิวของ V เข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla^2 V \, d\tau = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot (\nabla V) \, d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau$$

โดย Chain Rule: $\nabla \cdot (V\mathbf{E}) = \nabla V \cdot \mathbf{E} + V(\nabla \cdot \mathbf{E})$ นำไปแทนต่อ จากนั้นใช้ divergence theorem จะได้ว่า

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_V \nabla \cdot (V\mathbf{E}) \, d\tau - \int_V (\nabla V) \cdot (\mathbf{E}) \, d\tau \right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\oint_{\partial V} V\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \int_V E^2 \, d\tau \right) \end{aligned}$$

แต่จาก \mathbf{E} ที่ขอบเป็น 0 พจน์แรกจึงหายไป ดังนั้น

พลังงานจากสนามไฟฟ้า.

$$U = \int u(\mathbf{r}) \, d\tau \quad \text{เมื่อ} \quad u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

โดยเราจะเรียก u ว่าความหนาแน่นพลังงานสนามไฟฟ้า (energy density of the electric field)

แต่คำถามคือ: ทำไมสมการ (1.25) ทำให้พลังงานศักย์เป็นลบได้แต่ (1.27) จึงเป็นบวกเสมอ? เหตุผลก็คือ (1.25) ยังไม่ได้รวมพลังงานในการสร้างจุดประจุตั้งแต่แรก (ถ้ารวมด้วยจะทำให้เป็น ∞) ดังนั้นถ้าจะหาพลังงานของระบบที่เป็นจุดประจุ ถ้าใช้ (1.25) จะสมเหตุสมผลกว่า

ต่อมาเรามาดูพลังงานศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากอิทธิพลของทั้งสนามภายนอกและภายใน:

$$U = U_{\text{int}} + U_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \int \rho V_{\text{int}} \, d\tau + \int \rho V_{\text{ext}} \, d\tau$$

หาพจน์ฝั่งขวาโดยทำคล้าย ๆ (1.27):

$$\begin{aligned} \int_V \rho V_{\text{ext}} \, d\tau &= -\epsilon_0 \int_V V_{\text{ext}} (\nabla \cdot (\nabla V_{\text{int}})) \, d\tau \\ &= -\epsilon_0 \left(\oint_{\partial V} V_{\text{ext}} \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{a} - \int_V \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}_{\text{int}} \, d\tau \right) \\ &= \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}_{\text{int}} \, d\tau \end{aligned}$$

นำไปแทนในสมการ U และใช้ร่วมกับ (1.27) จะได้

$$U = \int u(\mathbf{r}) \, d\tau \quad \text{เมื่อ} \quad u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} (E_{\text{int}}^2(\mathbf{r}) + 2\mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})) \quad (1.28)$$

ซึ่งจริง ๆ แล้วเหมือนกับ (1.27) เลย โดยบวกเข้าลบออกด้วย $E_{\text{ext}}^2(\mathbf{r})$ ใน $u(\mathbf{r})$ และให้ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{int}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}$ จะได้

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2(\mathbf{r}) d\tau - \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \int E_{\text{ext}}^2(\mathbf{r}) d\tau}_{\text{const.}}$$

เนื่องจากพจน์ด้านหลังเป็นค่าคงที่ เราจึงสามารถให้พจน์นั้นเป็นค่าอ้างอิงได้ จึงได้ว่าเราสามารถใช้ (1.27) ได้ในทุกกรณี เพียงแค่ต้องรวม \mathbf{E}_{ext} ไปด้วย:

$$U' = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2(\mathbf{r}) d\tau \quad (1.29)$$

สุดท้ายจะเป็นพิสูจน์ทฤษฎีบท:

Green's Reciprocity Theorem.

$$\int \rho_1 V_2 d\tau = \int \rho_2 V_1 d\tau \quad (1.30)$$

ทฤษฎีบทนี้หมายความว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าในระบบ 1 ที่เกิดจากระบบ 2 มีค่าเท่ากับพลังงานศักย์ไฟฟ้าในระบบ 2 ที่เกิดจากระบบ 1 ซึ่งก็ไม่แปลกเพราะแรง Coulomb เป็นแรงที่เป็นไปตามกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน แต่จะมาพิสูจน์กันดังนี้:

พิสูจน์. พิจารณาปริมาตร V ที่ใหญ่มาก ๆ

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau &= - \int_V \nabla V_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau \\ &= - \left(\int_V \nabla \cdot (V_1 \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{a} - \int_V V_1 \nabla \cdot \mathbf{E}_2 d\tau \right) \\ &= - \left(\oint_{\partial V} V_1 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_V V_1 \rho_2 d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V V_1 \rho_2 d\tau \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน:

$$\int_V \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V V_2 \rho_1 d\tau$$

ดังนั้น $\int \rho_1 V_2 d\tau = \int \rho_2 V_1 d\tau$ ตามต้องการ □

► 1.5. ตัวนำและความจุไฟฟ้า

► ตัวนำไฟฟ้า

ในวัตถุที่เป็นฉนวนไฟฟ้า (หรือไดอิเล็กทริก) อิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ภายในบริเวณอะตอมของมัน แต่ในตัวนำไฟฟ้า จะมีอิเล็กตรอนจำนวนหนึ่งเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในเนื้อตัวนำ ในตัวนำที่เป็นของเหลวเช่นน้ำเกลือจะเป็นไอออนอย่าง Na^+

และ Cl^- ที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระแทน) โดยตัวนำอุดมคติหมายถึงตัวนำที่มีประจุอิสระไม่จำกัด ซึ่งโลหะจะเป็นตัวนำที่ใกล้เคียงกับตัวนำอิสระพอที่จะใช้การประมาณดังต่อไปนี้ได้:

สมบัติของตัวนำไฟฟ้าอุดมคติ. ตัวนำไฟฟ้าในสภาวะสมดุลจะต้องไม่มีประจุเคลื่อนที่ในเนื้อตัวนำ จึงสามารถตั้งข้อสมมติเกี่ยวกับสนามไฟฟ้าภายในเนื้อตัวนำได้ว่า

$$\mathbf{E} = 0 \quad (1.31)$$

ซึ่งจะเรียกว่า *electric field screening effect* สังเกตว่าจากกฎของ Gauss จะแปลว่าไม่มีประจุอยู่ภายในเนื้อตัวนำ ประจุทั้งหมดจะรวมกันที่ผิวเท่านั้น

โดย (1.31) สามารถเขียนได้ในอีกรูปคือ

$$V = \text{const.} \quad (1.32)$$

อีกสมบัตินึงคือจาก (1.18) ถึง (1.20) และ (1.31) จะได้ว่าสนามไฟฟ้าที่ผิวตัวนำจะตั้งฉากกับผิวเสมอและมีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นประจุดังนี้

$$\sigma = \epsilon_0 E_{\text{out}} = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \quad (1.33)$$

สถานการณ์หนึ่งที่น่าสนใจคือเมื่อมี “โพรง” อยู่ในเนื้อตัวนำ โพรงนี้จะเปรียบเสมือนว่าไม่โดนผลกระทบจากสนามไฟฟ้าด้านนอกตัวนำเลย ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบท uniqueness ในบทถัดไป โดยจะเรียกตัวนำที่กั้นสนามภายนอกนี้ว่า *Faraday's cage* (ในทางกลับกัน สนามด้านนอกตัวนำจะไม่โดนผลกระทบจากประจุด้านในโพรง) โดยถ้าในโพรงไม่มีประจุ จะได้ว่าสนามไฟฟ้าในโพรงเป็น 0 (พิสูจน์กรณีนี้ไม่ยาก ได้จากการสังเกตว่าถ้ามีสนามไฟฟ้าจะต้องมีเส้นแรงไฟฟ้าที่ลากจากผิวไปผิวบนโพรง ถ้าสร้างเส้นทางปิดในการอินทิเกรตบนเส้นแรงนั้นจะได้ผลลัพธ์ไม่เป็น 0 ซึ่งจาก (1.10) เกิดข้อขัดแย้ง) แต่ถ้ามีประจุ Q ไว้ในโพรง โดยกฎของ Gauss จะได้ว่าประจุที่อยู่บนผิวของโพรงจะต้องรวมได้ $-Q$

และยิ่งไปกว่านั้น ถ้าโพรงดังกล่าวอยู่ในตัวนำทรงกลมที่ไม่มีประจุ (ประจุรวมเป็น 0) สนามไฟฟ้าด้านนอกทรงกลมนั้นจะเปรียบเสมือนสนามไฟฟ้าของตัวนำทรงกลมประจุ Q ทั้งนี้เป็นเพราะมัน “เป็นไปได้” ที่ประจุด้านในจะเรียงตัวให้ประจุที่ผิวของโพรงกับประจุ Q ในโพรงหักล้างกันหมดด้านนอกโพรง และเมื่อมีวิธีการเรียงตัวหนึ่งที่เป็นไปได้ที่ทำให้สนามในเนื้อตัวนำเป็น 0 ปรากฏว่า (ซึ่งจะพิสูจน์ในบทถัดไป) วิธีการจัดเรียงประจุนั้นจะเป็นวิธีเดียวเท่านั้น

► แรงบนตัวนำไฟฟ้า

ต่อมาพิจารณาแรงที่กระทำต่อผิวตัวนำ da ก้อนเล็ก ๆ จะได้ว่าสนามไฟฟ้าในบริเวณนั้นมาจากสองส่วนคือ $\mathbf{E}_{\text{other}}$ มาจากประจุอื่น ๆ นอกบริเวณ da และ \mathbf{E}_{self} มาจาก da เอง โดยสนามด้านบนและด้านล่างของ \mathbf{E}_{self} คือ $\sigma/2\epsilon_0$ และ $-\sigma/2\epsilon_0$ ตามลำดับ (เพราะสนามนี้ดูในบริเวณที่ใกล้ da มาก ๆ จนเปรียบเสมือน da เป็นผิวราบอนันต์) ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{E}_{\text{above}} = \mathbf{E}_{\text{other}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{E}_{\text{below}} = \mathbf{E}_{\text{other}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{E}_{\text{other}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}})$$

ก็จะได้แรงที่กระทำต่อ da คือ

$$d\mathbf{F} = \sigma da \cdot \mathbf{E}_{\text{other}}$$

ดังนั้นแรงต่อหน่วยพื้นที่ $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/da$ คือ

แรงต่อพื้นที่บนแผ่นประจุ.

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{average}} = \frac{1}{2} \sigma (\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}}) \quad (1.34)$$

ซึ่งจริง ๆ แล้วใช้ได้กับแผ่นประจุทุกกรณี แต่ในกรณีตัวนำ:

แรงต่อพื้นที่บนผิวตัวนำ.

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (1.35)$$

จะได้ว่าเมื่อคำนวณออกตัวนำมีสนาม \mathbf{E} แล้วความดันไฟฟ้าสถิต (electrostatic pressure: P) เป็นดังนี้

ความดันไฟฟ้าสถิตบนผิวตัวนำ.

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (1.36)$$

► ความจุไฟฟ้า

เมื่อมีตัวนำสองตัวโดยตัวหนึ่งมีประจุ $+Q$ และอีกตัว $-Q$ เนื่องจากเมื่อ Q เพิ่มขึ้นจำนวน k เท่า จะได้ว่าทำให้ σ บนทั้งสองประจุเพิ่มขึ้นเป็น k เท่าเช่นกัน (เพราะมีการจัดเรียงแบบเดียวกันที่นั่นที่ทำให้เนื้อตัวนำมี $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ซึ่งจะพิสูจน์ในบทถัดไป) ส่งผลให้ \mathbf{E} เพิ่มขึ้นเป็น k เท่า จึงทำให้ความต่างศักย์ $V = V_+ - V_-$ ก็เพิ่มขึ้นเป็น k เท่าด้วย จึงสรุปได้ว่า $Q \propto V$ ดังนั้นเราสามารถนิยามค่าคงที่การแปรผันนี้ว่าความจุไฟฟ้า (capacitance: C) ดังนี้

นิยามความจุไฟฟ้า.

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (1.37)$$

ส่วนความจุไฟฟ้าของตัวนำตัวเดียว (self-capacitance) คือให้จินตนาการว่ามีตัวนำเปลือกทรงกลมที่มีรัศมีใหญ่มาก ๆ หรือก็คือให้ใช้ V เป็น V ของตัวนำโดยมีจุดอ้างอิงเป็น ∞

สุดท้าย งานในการชาร์จตัวเก็บประจุหาได้โดยรวมงานในการย้ายประจุ dq จากฝั่งลบมาฝั่งบวก:

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq$$

ดังนั้นงานในการชาร์จประจุจาก 0 มาเป็น Q (หรือก็คือพลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ) เท่ากับ

พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ.

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 \quad (1.38)$$

► การต่อตัวเก็บประจุ

พิจารณาการต่อตัวเก็บประจุ C_1 และ C_2 แบบอนุกรม จะได้ว่า Q บนตัวเก็บประจุ C_1 จะเท่ากับ Q บนตัวเก็บประจุ C_2 ดังนั้น

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

จึงได้ความจุไฟฟ้ารวมเท่ากับ

$$\frac{1}{C_{\text{total}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

โดยเราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวเก็บประจุกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวเก็บประจุแบบอนุกรม.

$$\frac{1}{C_{\text{total}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (1.39)$$

และพิจารณาการต่อตัวเก็บประจุ C_1 และ C_2 แบบขนาน จะได้ว่าความต่างศักย์ของตัวเก็บประจุทั้งสองจะต้องเท่ากับ (เพราะเป็นเนื้อตัวนำเดียวกัน) ดังนั้น

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 = C_1V + C_2V$$

จึงได้ความจุไฟฟ้ารวมเท่ากับ

$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2$$

โดยเช่นเดียวกับการต่อแบบอนุกรม เราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวเก็บประจุกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวเก็บประจุแบบขนาน.

$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \quad (1.40)$$

บทที่ 2 | ศักย์ไฟฟ้า

► 2.1. สมการ Laplace

► สมการ Laplace ในสามมิติ

ในการแก้หาสนามไฟฟ้า ถ้าไม่มีความสมมาตรพอที่จะใช้กฎของ Gauss (1.8) อาจจะง่ายกว่าที่จะหาศักย์ไฟฟ้าก่อน โดยเรามักสนใจศักย์ไฟฟ้าในบริเวณที่ไม่ได้อยู่ในเนื้อประจุ ดังนั้นสมการ Laplace (1.15) จึงเป็นสมการที่สำคัญ โดยมีสมบัติของผลเฉลยของมัน (ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันฮาร์มอนิก) ที่ควรรู้คือ

สมบัติของผลเฉลยของสมการ Laplace ในสามมิติ. ถ้า V เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace ($\nabla^2 V = 0$) แล้ว

1. V มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ V รอบ ๆ หรือก็คือ สำหรับทุก \mathbf{r} และพื้นผิวทรงกลม S รัศมี R ที่มีจุดศูนย์กลางที่ \mathbf{r} จะได้ว่า

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S V da \quad (2.1)$$

2. V ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ นั่นคือค่าสุดขีดทั้งหมดของ V ในปริมาตร V จะอยู่บน ∂V เท่านั้น

หมายเหตุ: ทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับสมการ Laplace มักจะใช้ได้เมื่อปริมาตร V ที่สนใจนั้นมี $\rho = 0$ เท่านั้น ดังนั้นต้องเลือกปริมาตรดี ๆ

พิสูจน์. ให้จุดประจุ q อยู่ที่ $(0, 0, z)$ พิจารณาค่าเฉลี่ยของ V บนทรงกลมที่อยู่จุดกำเนิดที่มีรัศมี R (ให้ θ เป็นมุมที่ \mathbf{r} ทำกับแกน $+z$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S V da &= \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} da \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}} R^2 \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}} R^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta} \Big|_0^\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{zR} ((z+R) - (z-R)) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} \\
&= V(\mathbf{0})
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นไปตามต้องการสำหรับจุดประจุ ดังนั้นจึงเป็นจริงสำหรับสนามใด ๆ ก็ตาม

ส่วนข้อ 2. ได้มาจากข้อ 1. โดยตรง เพราะถ้าค่าใด ๆ ของ V เกิดจากค่าเฉลี่ยของจุดรอบ ๆ ค่า V ค่านั้นไม่มีทางเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ □

► Uniqueness ของผลเฉลยของสมการ Laplace

ทฤษฎีบท Uniqueness ที่หนึ่ง. สมการ Laplace จะมีผลเฉลยเดียวบนปริมาตร \mathcal{V} ถ้ารู้ค่า V ทั้งหมดบน $\partial\mathcal{V}$

พิสูจน์. ให้ V_1 และ V_2 เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace บนปริมาตร \mathcal{V} ที่มีค่าตรงกันบน $\partial\mathcal{V}$ ดังนั้น

$$V_3 \equiv V_1 - V_2$$

เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace ที่มีค่าที่ $\partial\mathcal{V}$ เท่ากับ 0

แต่เนื่องจากค่าสุดขีดของสมการ Laplace จะต้องอยู่บน $\partial\mathcal{V}$ ดังนั้น $V_3 = 0$ ทุกที่ในปริมาตร หรือก็คือ

$$V_1 = V_2$$

ตามต้องการ □

และไม่ยากที่จะขยายทฤษฎีบทนี้กับสมการ Poisson โดยใช้วิธีพิสูจน์คล้าย ๆ กันด้านบนจะได้ว่า:

บทตั้ง. บนปริมาตร \mathcal{V} ถ้ารู้ ρ ภายในปริมาตรและรู้ค่า V ทั้งหมดบน $\partial\mathcal{V}$ แล้วจะได้ว่ามีสนาม V ในปริมาตรนั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเพียงสนามเดียว

ทฤษฎีบท Uniqueness ที่สอง. บนปริมาตร \mathcal{V} ที่มีขอบเขตอยู่บนผิวของตัวนำ (อาจมีขอบเขตหนึ่งเป็นตัวนำที่ ∞ ได้) ถ้ารู้ค่า ρ ภายในปริมาตรและรู้ค่า Q ของตัวนำทั้งหมดแล้วจะได้ว่ามีสนาม \mathbf{E} ในปริมาตรนั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดเพียงสนามเดียว

พิสูจน์. ให้ \mathbf{E}_1 และ \mathbf{E}_2 เป็นสนามใน \mathcal{V} ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข และให้ $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ จาก (1.9) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_3 = 0 \tag{*1}$$

และจาก (1.8) จะได้ว่า

$$\oint \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{*2}$$

สำหรับทุก “ผิวย่อย” ของ ∂V ต่อมาพิจารณา

$$\nabla \cdot (V_3 \mathbf{E}_3) = \nabla V_3 \cdot \mathbf{E}_3 + V_3 (\nabla \cdot \mathbf{E}_3) = -E_3^2$$

และโดย divergence theorem จะได้ว่า

$$\oint_{\partial V} V_3 \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot (V_3 \mathbf{E}_3) d\tau = - \int_V E_3^2 d\tau \quad (*)3$$

แต่เนื่องจากทุกผิวย่อยของ ∂V บนแต่ละตัวนำมี V_3 คงที่จึงได้ว่า

$$\oint_{\partial V} V_3 \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a} = \sum_S V_S \oint_S \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a} \stackrel{(*)2}{=} 0$$

นำไปใส่กลับใน (*)3) จะได้ว่า $\int_V E_3^2 d\tau = 0$ ดังนั้น $\mathbf{E}_3 = \mathbf{0}$ หรือก็คือ

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$$

ตามต้องการ □

► 2.2. การจำลองภาพ

► การสร้างระบบใหม่เพื่อแก้หาสนาม

ในบางครั้งการหาค่าศักย์ไฟฟ้าตรง ๆ อาจจะยาก แต่ถ้าหากระบบใหม่ที่มีค่า V ที่บริเวณขอบเขตและ ρ ตรงกับค่าบนระบบที่เราสนใจ จากทฤษฎีบท uniqueness ที่หนึ่ง จะได้ว่าศักย์ไฟฟ้าในบริเวณที่สนใจของทั้งสองระบบจะเท่ากันพอดี ยกตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง. ในระบบพิกัดฉากสามมิติ มีแผ่นตัวนำที่ต่อสายดินวางอยู่ทั่วทั้งระนาบ xy และมีจุดประจุ q วางอยู่ ณ จุด $(0, 0, d)$ จงหาค่าศักย์ไฟฟ้าในบริเวณด้านบนแผ่นตัวนำ

วิธีทำ. พิจารณาอีกระบบที่มีจุดประจุ q ที่ $(0, 0, d)$ และ $-q$ ที่ $(0, 0, -d)$ สังเกตว่าระบบนี้มีสถานะขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าในปริมาตรเหนือระนาบ xy ตรงกันกับระบบในโจทย์เลย ($V = 0$ บนระนาบ xy , $V = 0$ ที่บริเวณไกลมาก ๆ) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท uniqueness ที่หนึ่ง ทั้งสองระบบนี้จะต้องมีสนามศักย์ไฟฟ้าตรงกันบนปริมาตรเหนือระนาบ xy ดังนั้นจึงได้ว่า

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left((x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{-1/2} - (x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{-1/2} \right) & \text{เมื่อ } z \geq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } z < 0 \end{cases}$$

($V(x, y, z) = 0$ เมื่อ $z < 0$ เพราะด้านล่างเหมือนกับระบบที่ไม่มีประจุที่ใดเลย) □

หมายเหตุ: ควรระวังว่าระบบที่สร้างขึ้นมาเปรียบเทียบกับนี้จะต้องมีการกระจายตัวของประจุในบริเวณที่สนใจเหมือนกับระบบตั้งต้นเท่านั้นจึงจะใช้ได้ และไม่ได้แปลว่าทุกอย่างของทั้งสองระบบจะเหมือนกัน เช่น ถ้าลองคำนวณดูแล้วพลังงานของระบบโจทย์จะเป็นครึ่งหนึ่งของระบบที่สร้างขึ้นใหม่ (มาจากสนามอีกครั้งที่หายไป)

► 2.3. การแยกตัวแปร

► การแยกตัวแปรบนพิกัดคาร์ทีเซียน

เริ่มจากการ “เดา” ว่า

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

ดังนั้นจากสมการ Laplace จะได้ว่า

$$\begin{aligned} YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \\ \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากแต่ละพจน์เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวโดยต้องรวมกันเท่ากับ 0 ทุก (x, y, z) ในปริมาตรที่สนใจ ดังนั้น

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_x, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_y, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = C_z$$

จากนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตในโจทย์เพื่อดูว่า C ในแต่ละสมการควรเป็นค่าบวกหรือลบ และแก้สมการเชิงอนุพันธ์ออกมา โดยจะมีคำตอบดังนี้:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดคาร์ทีเซียน. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = CT \tag{2.2}$$

มีคำตอบคือ

$$\begin{cases} Ae^{kt} + Be^{-kt} & \text{ถ้า } C = k^2 > 0 \\ At + B & \text{ถ้า } C = 0 \\ A \sin kt + B \cos kt & \text{ถ้า } C = -k^2 < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่

จากนั้นแก้หาค่าคงที่ให้ได้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้จากเงื่อนไขขอบเขต จะได้เซตของผลเฉลยมาเซตหนึ่งที่อาจไม่มีผลเฉลยใดเลยสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของโจทย์ เนื่องจากสมการ Laplace เป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นเราอาจจะหาวิธีการนำผลเฉลยที่ได้จากการแยกตัวแปรนี้มาบวกกันให้ได้คำตอบที่ตรงกับค่าขอบเขตได้ ซึ่งผลเฉลยเหล่านี้ในกรณีนี้จะอยู่ในรูป \sin จึงสามารถใช้การวิเคราะห์ Fourier เพื่อนำผลเฉลยมาบวกกันให้ได้ค่าที่ตรงกับค่าขอบเขต โดยเราจะหาสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในอนุกรม Fourier ได้โดยใช้ทริคดังต่อไปนี้

อินทิกรัลสำคัญในการวิเคราะห์ Fourier.

$$\int_0^\pi \sin(nt) \sin(n't) dt = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n' \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{ถ้า } n' = n \end{cases} \quad (2.4)$$

หรือแทนตัวแปร $t \mapsto (\pi/a)t$ ได้เป็น

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi t}{a}\right) dt = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n' \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{ถ้า } n' = n \end{cases} \quad (2.5)$$

ดังนั้นถ้าต้องการหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ n ที่ทำให้อนุกรม Fourier เท่ากับฟังก์ชัน $V(x)$ ฝั่งซ้าย:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

สามารถคูณ $\sin(n\pi x/a)$ เข้าไปทั้งสองฝั่งแล้วอินทิเกรตโดยใช้ (2.5) จะได้

$$C_n = \int_0^a V(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (2.6)$$

เหตุผลที่เราสามารถทำแบบนี้กับเซตของฟังก์ชัน \sin เหล่านั้นได้เป็นเพราะ

1. เซตของฟังก์ชันนี้เป็นเซตที่สมบูรณ์ (complete) หมายความว่า ฟังก์ชันใด ๆ สามารถถูกเขียนได้ในรูปผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันในเซต
2. เซตของฟังก์ชันนี้ (ให้เป็น $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$) เป็นเซตที่ตั้งฉากกัน (orthogonal) หมายความว่า

$$\int f_n(t) f_{n'}(t) dt = 0$$

สำหรับทุก $n' \neq n$

► การแยกตัวแปรบนพิกัดทรงกลม

ในส่วนนี้จะพิจารณาแค่ระบบที่มีความสมมาตรแบบ azimuth (สมมาตรรอบแกน z) ดังนั้นให้

$$V(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta)$$

จากสมการ Laplace (ในระบบพิกัดทรงกลม) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Theta \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= 0 \end{aligned}$$

เช่นเดียวกับในพิกัดคาร์ทีเซียน แต่ละพจน์จะต้องเป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = C_r, \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = C_\theta$$

เมื่อให้ $C_r = l(l+1)$ และ $C_\theta = -l(l+1)$ จะแก้สมการได้คำตอบดังนี้:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดทรงกลม 1. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)R \quad (2.7)$$

มีคำตอบคือ

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (2.8)$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

แต่อีกสมการหนึ่งจะยากหน่อย:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดทรงกลม 2. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \Theta \quad (2.9)$$

มีคำตอบคือ

$$\Theta(\theta) = A \cdot P_l(\cos \theta) \quad (2.10)$$

เมื่อ P_l คือพหุนาม Legendre ดีกรี l และ A คือค่าคงที่

หมายเหตุ: คำตอบในด้านบนเป็นเพียงส่วนเดียวจากคำตอบทั้งหมดเท่านั้น แต่ที่ไม่พิจารณาส่วนของค่าคงที่อีกตัวเพราะส่วนนั้นจะล่ออกเสมอที่ค่า θ เท่ากับ 0 และ π (ในกรณีที่บนแกน z ไม่นำมาคิดอาจต้องพิจารณาคำตอบอื่นนี้)

โดยพหุนาม Legendre หาได้ดังสูตรต่อไปนี้

สูตร Rodrigues.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (2.11)$$

ดังนั้นในการใช้สูตรนี้จึงจะสมมติว่า l เป็นจำนวนเต็มไม่ลบและแต่ละพหุนามจะมีแค่พจน์กำลังคู่หรือคี่เท่านั้น โดยเมื่อแทนสูตร Rodrigues เข้าไปจะได้พหุนาม Legendre ที่มีดีกรีตั้งแต่ 0 ถึง 5 คือ:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

จากนั้นเมื่อแก้ค่าคงที่ออกมา มักจะเหลือเซตของผลเฉลยที่เป็นพหุนาม Legendre โดยเซตของพหุนาม Legendre นี้ เช่นเดียวกับ \sin เป็นเซตของฟังก์ชันที่สมมาตรและตั้งฉากกันบน $(-1, 1)$ โดย

สมบัติการตั้งฉากกันของพหุนาม Legendre.

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1} & \text{ถ้า } l' = l \end{cases} \quad (2.12)$$

หรือเมื่อแทนค่า $x = \cos \theta$ จะได้

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1} & \text{ถ้า } l' = l \end{cases} \quad (2.13)$$

ซึ่งสามารถใช้ในการแก้หาสัมประสิทธิ์ของคำตอบสุดท้ายที่เป็นการนำคำตอบแบบแยกตัวแปรมาบวกกันได้

► การแยกตัวแปรบนพิกัดทรงกระบอก

จะพิจารณาระบบที่สมมาตรแบบทรงกระบอก (สมมาตรในแนวแกน z) ดังนั้นให้

$$V(s, \phi, z) = S(s) \Phi(\phi)$$

จากสมการ Laplace (ในระบบพิกัดทรงกระบอก) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{s} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) + \frac{S}{s^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= 0 \\ \frac{s}{S} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\frac{s}{S} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) = C_s, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = C_\phi$$

โดยถ้าให้ $C_s = k^2 = -C_\phi$ (เพราะถ้า C_ϕ ไม่เป็นลบจะได้คำตอบในรูป exponential ทำให้ไม่เป็นฟังก์ชันคาบตามที่ต้องการ) จะได้คำตอบของ Φ เป็น $\Phi(\phi) = A \sin k\phi + B \cos k\phi$ เช่นเดียวกับในพิกัดคาร์ทีเซียน และ

สมการเชิงอนุพันธ์ในพิกัดทรงกระบอก. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) = \frac{k^2}{s} S \quad (2.14)$$

มีคำตอบคือ

$$S(s) = As^k + Bs^{-k} \quad (2.15)$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

แต่เมื่อ $k = 0$ จะได้คำตอบเดียวคือค่าคงที่ ซึ่งไม่ตรงกับอันดับของสมการ (เมื่อนำมารวมกันตอนสุดท้ายอาจทำให้ได้คำตอบไม่ครบได้ แต่กรณีของ Φ เหตุผลที่ไม่นำ $A\phi + B$ ที่เป็นผลเฉลยในกรณี $k = 0$ มาใช้เพราะว่าเห็นชัดว่า A ต้องเป็น 0 ซึ่งรวมอยู่ในกรณี $k = 0$ ของ $A \sin k\phi + B \cos k\phi$ อยู่แล้ว) จึงต้องคิดแยกกรณี:

กรณี $k = 0$. สมการ (2.14) ถ้า $k = 0$ จะได้คำตอบคือ

$$S(s) = A \log s + B \quad (2.16)$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

โดยในการหาสัมประสิทธิ์ของคำตอบต่อไปให้ใช้การวิเคราะห์ Fourier แบบเดียวกับพิกัดคาร์ทีเซียน

► 2.4. การกระจาย Multipole

► การประมาณศักย์ไฟฟ้าระยะไกล

พิจารณา *electric dipole* ที่ประกอบด้วยจุดประจุ $+q$ และ $-q$ ที่ห่างกัน d โดยสมมติให้ dipole นี้ตั้งในแกน z โดยมีประจุบวกอยู่ในทิศ $+z$ และจุดศูนย์กลางของ dipole อยู่ที่จุดกำเนิด และให้ \mathbf{r}_+ , \mathbf{r}_- เป็นเวกเตอร์จากขั้วบวกและลบมายัง \mathbf{r} ตามลำดับ จะได้ว่า

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

และจากกฎของ cos จะได้

$$r_{\pm}^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp rd \cos \theta = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)$$

ดังนั้นเมื่อ $r \gg d$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

ก็จะได้ว่าที่ระยะ r ไกล ๆ จาก dipole:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} \quad (2.17)$$

และเช่นเดียวกัน quadrupole, octopole, ... จะมีคําศัพท์ที่โตแบบ $1/r^3, 1/r^4, \dots$ ตามลำดับ ที่ระยะไกล ๆ

ดังนั้นเราจึงอาจหาวิธีเขียนคําศัพท์ของการกระจายตัวของประจุแบบใด ๆ ให้อยู่ในรูปอนุกรมของพจน์ multipole ($1/r, 1/r^2, 1/r^3, \dots$) เพื่อที่จะประมาณค่าคําศัพท์ไกล ๆ ด้วยพจน์ monopole และ dipole ได้:

พิจารณาการให้ \mathbf{r} และ α เป็นมุมและระยะระหว่าง \mathbf{r} และ \mathbf{r}' ตามลำดับ จะได้

$$r^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \alpha = r^2 \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \alpha \right)$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \alpha \right) \right)^{-1/2} \quad (2.18)$$

จากนั้นใช้ทฤษฎีบททวินามกับ (2.18) และ (2.11) จะพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha) \quad (2.19)$$

นำไปแทนใน (1.17) ก็จะได้ว่า

การกระจาย Multipole.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.20)$$

► พจน์ Monopole และ Dipole

สำหรับพจน์ monopole ($n = 0$) จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int P_0(\cos \alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

ดังนั้น

พจน์ Monopole.

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2.21)$$

ซึ่งก็ไม่น่าแปลกใจเพราะค่าศักย์ที่ระยะไกล ๆ ก็ควรจะโตคล้ายประจุรวม Q ในระบบ (เรียก Q นี้ว่า *monopole moment*) โดยพจน์ *monopole* นี้จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกำเนิด ต่างจากพจน์อื่น ๆ ที่ขึ้นกับตำแหน่งที่ใช้เป็นจุดกำเนิดในระบบ

ต่อมาพจน์ dipole ($n = 1$) จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' P_1(\cos \alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r \cos \alpha \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

แต่ว่า $r' \cos \alpha = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$ ดังนั้น

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

อินทิกรัลในด้านขวาไม่ขึ้นกับ \mathbf{r} ดังนั้นเราจะนิยาม *dipole moment* \mathbf{p} รอบจุด ๆ หนึ่งว่า:

นิยาม Electric Dipole Moment.

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.22)$$

ก็จะได้ว่าพจน์ dipole คือ:

พจน์ Dipole.

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (2.23)$$

โดยพจน์ dipole จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกำเนิดเมื่อประจุรวม $Q = 0$ (พิสูจน์จากการแทน $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$)

► Dipole บริสุทธิ์

จาก (2.17) จะได้ว่า dipole จะเหลือแค่พจน์ dipole ในการกระจาย multipole ถ้าระยะ \mathbf{r} ไกลมาก ๆ หรืออาจมองกลับกันว่าถ้าระยะ d น้อยมาก ๆ ก็จะเหลือแค่พจน์ dipole เช่นกัน ดังนั้นถ้าเรามองในลิมิต $q \rightarrow \infty$ และ $d \rightarrow 0$ โดยให้ $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ คงที่ตลอด จะได้จุด *dipole บริสุทธิ์* ที่จะมีสนามศักย์เป็นเพียง

$$V(\mathbf{r}) = V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \alpha}{r^2} \quad (2.24)$$

ถ้ากำหนดว่า \mathbf{p} ชี้ในทิศ $+z$ ก็จะได้

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

ดังนั้นเมื่อใช้ (1.13) จะได้สนามไฟฟ้า:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น

สนามไฟฟ้าของ Dipole บริสุทธิ์ในพิกัดทรงกลม.

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.25)$$

แสดงว่าสนามไฟฟ้าของ dipole โตแบบ $1/r^3$ (และเช่นเดียวกัน สนามไฟฟ้าของ quadrupole, octopole, ... ก็โตแบบ $1/r^4, 1/r^5, \dots$ เพราะในการใช้ gradient หาสนามไฟฟ้าจะเพิ่ม $1/r$ ขึ้นมาอีกหนึ่งตัว) แต่สูตรด้านบนยังเป็นสูตรที่ขึ้นกับระบบพิกัดทรงกลม เราสามารถหาสูตรที่ไม่ขึ้นกับระบบพิกัดได้ดังนี้:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{dip}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2p \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + p \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3p \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + p \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} - p \cos \theta \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}) \end{aligned}$$

สนามไฟฟ้าของ Dipole บริสุทธิ์.

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}) \quad (2.26)$$

บทที่ 3 | สนามไฟฟ้าในสสาร

▶ 3.1. โพลาริเซชัน

▶ การเหนี่ยวนำ Dipole

เมื่อนำอะตอมที่เป็นกลางไปไว้ในสนามไฟฟ้า \mathbf{E} จะทำให้นิวเคลียสเคลื่อนที่ไปในทิศของ \mathbf{E} และกลุ่มหมอกอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในทิศตรงข้าม ถ้า \mathbf{E} มีค่ามากพอจะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมทำให้อะตอมนั้นกลายเป็นไอออน แต่ถ้า \mathbf{E} มีค่าไม่มากนักจะทำให้กลุ่มหมอกอิเล็กตรอนและนิวเคลียสเลื่อนกันเล็กน้อยจึงเหนี่ยวนำให้เกิด dipole moment \mathbf{p} ขึ้น (จะเรียกว่าอะตอมนี้โดนโพลาไรซ์) โดยปกติเมื่อ \mathbf{E} เล็ก ๆ เราจะประมาณ dipole moment ที่เกิดขึ้นได้ว่าแปรผันตรงกับสนาม:

Dipole เหนี่ยวนำ.

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \quad (3.1)$$

จะเรียก α นี้ว่า *สภาพมีขั้วได้ของอะตอม* (atomic polarizability)

สำหรับการปล่อยสนาม \mathbf{E} นี้ไปบนโมเลกุล การเหนี่ยวนำ dipole จะต่างกันเล็กน้อย เพราะโมเลกุลนี้อาจจะถูกโพลาไรซ์ยากง่ายไม่เท่ากันในแกนที่ต่างกัน เช่นในตัวอย่างง่าย ๆ อย่าง CO_2 ที่โมเลกุลมีรูปร่างเป็นเส้นตรง เมื่อปล่อยสนามผ่านโมเลกุลในทิศเอียงจะต้องคิด dipole moment แยกเป็นสองพจน์:

$$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$$

แต่ถ้าเป็นโมเลกุลที่ซับซ้อนกว่านี้จะต้องใช้ *เทนเซอร์สภาพโพลาไรซ์ได้* (polarizability tensor) α_{ij} ซึ่งเป็นเทนเซอร์สามมิติที่มีแรงก์ 2 โดยมีความสัมพันธ์ระหว่าง \mathbf{E} , \mathbf{p} , และ α_{ij} ดังนี้:

Dipole เหนี่ยวนำในโมเลกุล.

$$p_i = \alpha_{ij} E_j \quad (3.2)$$

หรือก็คือ

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

(ถ้าเลือกแกนดี ๆ จะทำให้เหลือแค่พจน์ α_{xx} , α_{yy} , และ α_{zz} ได้)

► การหมุนของโมเลกุลมีขั้ว

พิจารณาโมเลกุลน้ำ (H_2O) รูปร่างของโมเลกุลนี้จะมีออกซิเจนอยู่ตรงกลางที่เชื่อมอยู่กับไฮโดรเจน 2 อะตอม โดยจะมีมุมบิดไป 105° การที่โมเลกุลน้ำมีลักษณะแบบนี้จะทำให้ฝั่งหนึ่งของโมเลกุลมีประจุบวกและอีกฝั่งหนึ่งมีประจุลบจึงทำให้โมเลกุลน้ำนี้เป็น dipole อยู่แล้ว (โดยจะเรียกโมเลกุลแบบนี้ว่ามีขั้ว) ถ้าโมเลกุลนี้อยู่ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ \mathbf{E} (หรือเปลี่ยนแปลงไม่มาก) แรงลัพธ์ของโมเลกุลจะเป็น $\mathbf{0}$ ก็จริง แต่ฝั่งบวกจะเกิดแรงกระทำในทิศเดียวกับ \mathbf{E} ส่วนฝั่งลบจะเกิดแรงในทิศตรงข้าม จึงทำให้เกิดทอร์กบนโมเลกุล ถ้ากำหนดให้ \mathbf{d} เป็นเวกเตอร์จากจุดศูนย์กลางของฝั่งลบไปยังฝั่งบวก จะหาทอร์กได้ดังนี้:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) \\ &= \left(\frac{\mathbf{d}}{2} \times (q\mathbf{E}) \right) + \left(\frac{-\mathbf{d}}{2} \times (-q\mathbf{E}) \right) \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

(ซึ่งในสนามไม่สม่ำเสมอก็ยังใช้ได้อยู่เพราะเนื่องจาก d เล็กมากจะได้ว่า $|\Delta\mathbf{E}| \ll E$ ดังนั้น $\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \approx 2\mathbf{E}$) ดังนั้นจะได้ว่า

ทอร์กของ Dipole ในสนามไฟฟ้า.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (3.4)$$

ก็คือเมื่อนำโมเลกุลมีขั้วนี้ไปไว้ในสนามไฟฟ้า โมเลกุลจะหมุนไปเรื่อย ๆ จนกว่า dipole moment จะมีทิศตรงกับสนาม แต่ถ้าสนามเปลี่ยนเยอะในช่วงเล็ก ๆ จะเกิดแรงลัพธ์ด้วยทำให้โมเลกุลเคลื่อนที่:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q \Delta\mathbf{E} \\ &\approx q(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E} \end{aligned}$$

เพราะระยะ d เล็กมาก ๆ ดังนั้น

แรงลัพธ์ของ Dipole ในสนามไฟฟ้า.

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (3.5)$$

► เวกเตอร์โพลาริเซชัน

สองหัวข้อด้านต้นเป็นตัวอย่างของการโพลาริเซชันไดอิเล็กทริก โดยทั้งสองกรณีมีสิ่งที่เหมือนกันก็คือ: ทำให้เกิด dipole เล็ก ๆ จำนวนมากขึ้นในทิศเดียวกับสนามไฟฟ้า ซึ่งเราจะนิยามโพลาริเซชัน \mathbf{P} คือ:

นิยามโพลาริเซชัน.

$$\mathbf{P} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \text{dipole moment ต่อหน่วยปริมาตร} \quad (3.6)$$

จริง ๆ แล้วโพลาริเซชันนี้ซับซ้อนกว่าสองกรณีที่กล่าวมาและวัตถุที่ถูกโพลาริเซชันสามารถทำให้คงสภาพโพลาริเซชันนี้ไว้ได้ด้วย เพราะฉะนั้นจากนี้เราจึงจะเลิกสนใจแหล่งกำเนิดของเวกเตอร์โพลาริเซชันและใช้ตามนิยามไปเลย

► 3.2. สนามไฟฟ้าของวัตถุที่ถูกโพลาริเซชัน

► Bound Charges

พิจารณาปริมาตร \mathcal{V} ที่ถูกโพลาริเซชันให้มีโพลาริเซชัน \mathbf{P} จาก (2.23) จะได้ว่าศักย์ที่ตำแหน่ง \mathbf{r} จาก dipole ในปริมาตร เล็ก ๆ ณ ตำแหน่ง \mathbf{r}' เท่ากับ

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} d\tau' \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

ดังนั้น

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

เมื่อ ∇' คือ gradient เทียบพิกัด \mathbf{r}' ต่อมาใช้ integration by parts จะได้:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) d\tau' - \int_{\mathcal{V}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\mathbf{P}}{r} \cdot d\mathbf{a}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} d\tau' \end{aligned}$$

ซึ่งหน้าตาคล้าย ๆ ศักย์ของประจุบนปริมาตรรวมกับประจุในปริมาตร ดังนั้นเราจะนิยาม

นิยาม Bound Charges. Bound surface charge σ_b คือ:

$$\sigma_b \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.7)$$

และ bound volume charge ρ_b คือ:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.8)$$

ก็จะได้ว่า:

ศักย์ของวัตถุที่ถูกโพลารไรซ์.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{\sigma_b}{r} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{r} d\tau' \quad (3.9)$$

โดยจาก (1.13) เราจึงหาสนามได้เช่นกัน

หมายเหตุ: ไดโพลีกริกจริง ๆ ตามในส่วนที่แล้วไม่ได้เป็นเนื้อ dipole บริสุทธิ์ที่ต่อเนื่อง โดยสำหรับสนามและศักย์นอกไดโพลีกริกสามารถใช้การประมาณนี้ได้โดยไม่มีปัญหาเพราะระยะ r ใหญ่มากเมื่อเทียบกับ d แต่ถ้าเป็นสนามและศักย์ภายในเนื้อตัวนำ ถ้าจะให้การประมาณ dipole แบบต่อเนื่องใช้ได้ จะต้องเป็นศักย์หรือสนามเฉลี่ยในระดับ macroscopic เท่านั้น (เฉลี่ยในปริมาตรที่มีโมเลกุลมาก ๆ แต่ยังคงเล็กเมื่อเทียบกับปริมาตรของไดโพลีกริกอยู่พอสมควร)

อีกวิธีหนึ่งที่เราจะมีประโยชน์ในการหาคักย์หรือสนามของวัตถุที่ถูกโพลารไรซ์คือการนำวัตถุ 1 และ 2 ที่มีความหนาแน่นประจุ $+\rho$ และ $-\rho$ มาวางเหลื่อมกันด้วยระยะเล็ก ๆ d แล้วคำนวณศักย์หรือสนามตามปกติ (ถ้าระบบนี้ง่ายพอ เช่น ทรงกลมที่มีโพลารไรเซชันสม่ำเสมอ)

► 3.3. การกระจัดไฟฟ้า

► กฎของ Gauss เมื่อมีไดโพลีกริก

เราสามารถแบ่งส่วนที่ทำให้เกิด \mathbf{E} ในกรณีที่มีไดโพลีกริกออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่มาจาก bound charge และส่วนที่ไม่ได้มาจากโพลารไรเซชัน (เรียกว่า free charge) หรือก็คือ

$$\rho = \rho_b + \rho_f$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f$$

ดังนั้นถ้าเรานิยาม

นิยามการกระจัดไฟฟ้า. การกระจัดไฟฟ้า (electric displacement: \mathbf{D}) นิยามดังนี้:

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.10)$$

ก็จะได้ว่า

กฎของ Gauss สำหรับระบบที่มีไดโพลีกริก.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{และ} \quad \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f \text{ enc}} \quad (3.11)$$

เวกเตอร์การกระจายไฟฟ้าที่มีสมบัติคล้าย ๆ \mathbf{E} แต่ต้องระวังเพราะสนาม \mathbf{E} ที่หาได้จากเพียง ρ (ด้วยกฎของ Gauss) เป็นเพราะว่ายังมีอีกเงื่อนไขที่ $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ด้วย แต่ในกรณีของการกระจายไฟฟ้า

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \epsilon_0 \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P} \quad (3.12)$$

ไม่จำเป็นต้องเป็น 0 ดังนั้น \mathbf{D} จึงไม่ได้กำหนดโดยเพียง ρ_f

► รอยต่อแผ่นประจุสำหรับการกระจายไฟฟ้า

ต่อมาเช่นเดียวกับ \mathbf{E} และ V เรามาดูสมบัติของ \mathbf{D} ในบริเวณแผ่นประจุบาง ๆ ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ σ_f :

1. โดย (3.11) จะได้ว่า

$$D_{\text{above}}^\perp - D_{\text{below}}^\perp = \sigma_f \quad (3.13)$$

2. โดย (3.12) จะได้ว่า

$$D_{\text{above}}^\parallel - D_{\text{below}}^\parallel = P_{\text{above}}^\parallel - P_{\text{below}}^\parallel \quad (3.14)$$

► 3.4. ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

► สภาพอ่อนไหว สภาพยอม และค่าคงที่ไดอิเล็กทริก

เราสามารถประมาณเวกเตอร์โพลาไรเซชันในไดอิเล็กทริกได้คล้ายกับ (3.1) ดังนี้:

ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (3.15)$$

หมายเหตุ: \mathbf{E} ในที่นี้คือสนามทั้งหมด ดังนั้นสมการนี้ไม่ได้ง่ายอย่างที่คิด เพราะการโพลาไรซ์ด้วยสนามภายนอก \mathbf{E}^{ext} จะทำให้เกิดสนามมาเพิ่มจาก \mathbf{P} ที่เกิดขึ้นอีกที วนไปวนมาเรื่อย ๆ วิธีที่ง่ายที่สุดในการคำนวณก็คือควรพิจารณา \mathbf{D} ก่อน และใช้กฎของ Gauss

โดยเราจะเรียกไดอิเล็กทริกที่เป็นไปตามสมการด้านบนว่าไดอิเล็กทริกเชิงเส้น และเราจะเรียก χ_e ว่าสภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้า (electric susceptibility) ของไดอิเล็กทริกนั้น ๆ ต่อมาพิจารณา

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

จึงได้ว่า $\mathbf{D} \propto \mathbf{E}$ ด้วย เราจึงนิยามสภาพยอมทางไฟฟ้า (electric permittivity) ว่า

นิยามสภาพยอมทางไฟฟ้า.

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0(1 + \chi_e) \quad (3.16)$$

ก็จะได้ว่า

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.17)$$

และนิยามสภาพยอมสัมพัทธ์หรือค่าคงที่ไดอิเล็กทริกว่า

นิยามค่าคงที่ไดอิเล็กทริก.

$$\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (3.18)$$

พิจารณาภายในบริเวณที่มี χ_e คงที่ จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{และ} \quad \nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

โดย Helmholtz's theorem จึงได้ว่า

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{vac}} \quad (3.19)$$

เมื่อ \mathbf{E}_{vac} คือสนามไฟฟ้าเมื่อระบบอยู่ในสุญญากาศ ก็จะได้

สภาพยอมทางไฟฟ้าในไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_r} \mathbf{E}_{\text{vac}} \quad (3.20)$$

ซึ่งเปรียบเสมือนการเปลี่ยนค่าจาก ε_0 เป็น ε ในสมการต่าง ๆ คล้าย ๆ เป็นการ “ต้าน” สนาม \mathbf{E} ให้มีค่าลดลง

ไดอิเล็กทริกเชิงเส้นด้านบนไม่ได้เป็นไดอิเล็กทริกเชิงเส้นแบบ “ทั่วไป” จริง ๆ แต่จะเรียกว่าเป็น *isotropic linear dielectric* แต่ถ้าไม่ isotropic ไดอิเล็กทริกอาจถูกโพลาไรซ์ได้ยากง่ายไม่เท่ากันในแต่ละทิศจึงทำให้สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้าจะถูกอธิบายด้วยเทนเซอร์:

เทนเซอร์สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้า.

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{e,ij} E_j \quad (3.21)$$

หรือก็คือ

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0(\chi_{e,xx} E_x + \chi_{e,xy} E_y + \chi_{e,xz} E_z) \\ P_y &= \varepsilon_0(\chi_{e,yx} E_x + \chi_{e,yy} E_y + \chi_{e,yz} E_z) \\ P_z &= \varepsilon_0(\chi_{e,zx} E_x + \chi_{e,zy} E_y + \chi_{e,zz} E_z) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

► ปัญหาสภาวะขอบเขตเกี่ยวกับไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เนื่องจาก

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\chi_e}{\varepsilon} \mathbf{D} \right) = (\text{const.}) \rho_f$$

ดังนั้นในบริเวณที่ไม่มีประจุอิสระ จะได้ว่า $\rho = \rho_b + \rho_f = 0$ ทำให้สามารถใช้สมการ Laplace แก่หา V ได้โดยวิธีจาก
บทที่แล้ว โดยมีสภาวะขอบเขตดังนี้ (พิสูจน์โดย (3.11)):

สภาวะขอบเขตของรอยต่อไดอิเล็กทริก. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นของประจุอิสระเชิงพื้นที่ σ_f จะได้ว่า

$$\epsilon_{\text{above}} E_{\text{above}}^\perp - \epsilon_{\text{below}} E_{\text{below}}^\perp = \sigma_f \quad (3.23)$$

หรือ

$$\epsilon_{\text{above}} \frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{below}} \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\sigma_f \quad (3.24)$$

เมื่อ \hat{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน
และสำหรับ V จะต่อเนื่องเช่นเคย:

$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}} \quad (3.25)$$

ตัวอย่าง. ทรงกลมไดอิเล็กทริกเชิงเส้นรัศมี R ที่มีค่าคงที่ไดอิเล็กทริก ϵ_r ถูกวางไว้ที่จุด $(0, 0, 0)$ โดยมีสนามไฟฟ้า
สม่ำเสมอ (เมื่อไม่รวมสนามจากไดอิเล็กทริก) \mathbf{E}_0 ไหลผ่านในทิศ $+z$ จงหาสนามไฟฟ้าภายในไดอิเล็กทริก

วิธีทำ. เห็นชัดว่าระบบนี้ในพิกัดทรงกลมจะสมมาตรแบบ azimuth ดังนั้นใช้คำตอบของสมการ Laplace จาก (2.8)
และ (2.10) ได้ว่าข้างในไดอิเล็กทริก ($r < R$):

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (\star 1)$$

ข้างนอกไดอิเล็กทริกจะต้องมี $V(r, \theta)$ เมื่อ $r \rightarrow \infty$ เป็น

$$V(r, \theta) \approx -E_0 r \cos \theta$$

ก็จะได้ว่าที่ $r > R$:

$$V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (\star 2)$$

เนื่องจาก V ต้องต่อเนื่องที่ $r = R$ จาก $(\star 1)$ และ $(\star 2)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 R &= -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} & \text{เมื่อ } l = 1 \\ A_l R^l &= \frac{B_l}{R^{l+1}} & \text{เมื่อ } l \neq 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_l = B_l = 0$ สำหรับทุก $l \neq 1$ ก็จะได้

$$V(r, \theta) = \begin{cases} A_1 r \cos \theta & \text{เมื่อ } r < R \\ -E_0 r \cos \theta + \frac{(A_1 + E_0) R^3}{r^2} \cos \theta & \text{เมื่อ } r > R \end{cases}$$

ต่อมาใช้ (3.24) จะแก้หา A_1 ได้

$$A_1 = \frac{-3E_0}{2 + \epsilon_r}$$

ก็จะได้ V เมื่อ $r < R$:

$$V(r, \theta) = -\frac{3}{2 + \epsilon_r} E_0 r \cos \theta$$

$$V(x, y, z) = -\frac{3}{2 + \epsilon_r} E_0 z$$

ดังนั้นก็จะได้ $\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \mathbf{E}_0$

□

▶ พลังงานในระบบที่มีไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เราสามารถหาพลังงานของระบบไดอิเล็กทริกโดยการ “ประกอบ” ระบบของประจุอิสระ ρ_f ทีละชนิด แล้วปล่อยให้ไดอิเล็กทริกเกิดการโพลาไรซ์ก่อนที่จะประกอบต่อไป งานที่ต้องใช้บนประจุ $\Delta\rho_f$ ในการนำมาประกอบจะเท่ากับ

$$\Delta U = \int (\Delta\rho_f) V \, d\tau$$

แต่ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ ดังนั้น $\Delta\rho_f = \nabla \cdot (\Delta\mathbf{D})$ นำไปแทนแล้วใช้ integration by parts และ Stokes' theorem จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int (\nabla \cdot (\Delta\mathbf{D})) V \, d\tau \\ &= \int \nabla \cdot (V \Delta\mathbf{D}) \, d\tau + \int \Delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \\ &= \oint V \Delta\mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} + \int \Delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \\ &= \int \Delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \end{aligned}$$

ต่อมาพิจารณา

$$\Delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) = \epsilon \Delta(E^2) = 2\epsilon E \Delta E = 2 \Delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

ก็จะได้ว่า

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int \Delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \, d\tau$$

หรือก็คือ

พลังงานจากสนามไฟฟ้าและไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.

$$U = \int u(\mathbf{r}) \, d\tau \quad \text{เมื่อ} \quad u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (3.26)$$

หมายเหตุ: สังเกตว่า (3.26) \geq (1.27) เหตุผลเป็นเพราะว่า (1.27) จะเป็นพลังงานเนื่องจากสนามไฟฟ้าโดยตรง ไม่รวมพลังงานในการ “แยก” ขั้วของไดอิเล็กทริกในการโพลาไรซ์ (อาจมองเหมือนเป็นสปริงที่เชื่อมขั้วทั้งสองเข้าด้วยกัน) ดังนั้นก็จะได้อีกว่าพลังงานภายในของ “สปริง” นี้เท่ากับ $\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau - \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau$

► แรงแบนไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

พิจารณาไดอิเล็กทริกที่ชั้นในตัวเก็บประจุแผ่นตัวนำคู่ขนานกว้าง w ยาว l หน้า d (ให้แนวยาวขนานกับแกน x และตัวเก็บประจุนี้ชิดกับระนาบ yz) โดยที่ไดอิเล็กทริกเคลื่อนกับตัวเก็บประจุไประยะ $+x$ ถัดจากไดอิเล็กทริกออกมาอีก dx จะได้ว่างานที่กระทำ:

$$dU = dW = F_{\text{ext}} dx$$

ดังนั้นแรงที่สนามกระทำเท่ากับ

$$F = -F_{\text{ext}} = -\frac{dU}{dx} \quad (\diamond 1)$$

พิจารณาความจุไฟฟ้ารวมของตัวเก็บประจุที่มีระยะเคลื่อน x ใด ๆ:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{wx}{d} \epsilon_0 + \frac{w(l-x)}{d} \epsilon_r \epsilon_0 = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r l - \chi_e x) \quad (\diamond 2)$$

จะได้พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุที่มีระยะเคลื่อน x ใด ๆ เท่ากับ

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ดังนั้น

$$dU = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC = -\frac{1}{2} V^2 dC \stackrel{(\diamond 2)}{=} \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 \chi_e w}{d} dx$$

นำกลับไปแทนใน $(\diamond 1)$ จะได้ว่า

แรงแบนไดอิเล็กทริกระหว่างแผ่นตัวนำ.

$$F = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{2d} V^2 \quad (3.27)$$

หมายเหตุ: สังเกตว่าเมื่อ $x = 0$ ไม่ได้ทำให้ $F = 0$ เพราะการใช้ U เป็นค่านั้นเป็นการประมาณสำหรับ x ที่มีค่ามาก ๆ

บทที่ 4 | แม่เหล็กสถิต

► 4.1. กฎแรง Lorentz

► แรงแม่เหล็ก

แรง Lorentz. ประจุ Q ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \mathbf{v} ในสนามแม่เหล็ก \mathbf{B} จะถูกแรงแม่เหล็กกระทำดังนี้:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1)$$

โดยถ้ามีทั้งสนามไฟฟ้าและแม่เหล็ก:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \quad (4.2)$$

การเคลื่อนที่ใน \mathbf{B} สม่าเสมอที่น่าสนใจมีดังนี้:

1. ถ้าประจุ Q เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \mathbf{v} ในสนาม \mathbf{B} เพียงอย่างเดียว ส่วนของ \mathbf{v}_\perp จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่วงกลมตามสมการ

$$QBR = mv = p$$

เมื่อ p คือโมเมนตัม และได้

$$\omega = \frac{QB}{R}$$

จะเรียกว่าความถี่ cyclotron

2. ถ้าประจุ Q เริ่มจากหยุดนิ่งในสนาม \mathbf{E} และ \mathbf{B} ที่ตั้งฉากกัน ถ้าแก้สมการมาจะได้ว่าประจุจะเคลื่อนที่เป็นรูป cycloid ที่มีรัศมี

$$R = \frac{E}{\omega B}$$

เมื่อ ω คือความถี่ cyclotron และศูนย์กลางวงกลมที่ทำให้เกิดรูป cycloid จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

$$u = \omega R = \frac{E}{B}$$

ต่อมาพิจารณางานจากแรงแม่เหล็ก:

$$dW_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

ดังนั้นได้ว่า

งานของแรงแม่เหล็ก. แรงแม่เหล็กไม่ทำงาน:

$$W_{\text{mag}} = 0 \quad (4.3)$$

► กระแสไฟฟ้า

นิยามกระแสไฟฟ้า. กระแสไฟฟ้า (\mathbf{I}) ของจุดหนึ่งในสายไฟคือปริมาณประจุที่เคลื่อนที่ผ่านจุด ๆ นั้นต่อหน่วยเวลา หรือก็คือ

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v} \quad (4.4)$$

พิจารณา

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int d\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq$$

ดังนั้นในสายไฟจะได้

แรงแม่เหล็กบนสายไฟ.

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) d\ell \quad (4.5)$$

หรือก็คือ

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (4.6)$$

ต่อมา หากประจุที่เคลื่อนที่เป็นประจุจากความหนาแน่นในสองหรือสามมิติ เราจะนิยาม:

นิยามความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า. สำหรับประจุที่ไหลบนผิวในสองมิติ ถ้าในแถบเล็ก ๆ ที่ขนานกับทิศในการไหลของกระแส $d\mathbf{I}$ กว้าง $d\ell_{\perp}$ เราจะนิยามความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงพื้นที่ (\mathbf{K}) ว่า

$$\mathbf{K} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{d\ell_{\perp}} = \sigma \mathbf{v} \quad (4.7)$$

สำหรับประจุที่ไหลในปริมาตรสามมิติ ถ้าในท่อเล็ก ๆ ที่ขนานกับทิศในการไหลของกระแส $d\mathbf{I}$ มีพื้นที่ da_{\perp} เราจะนิยามความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงปริมาตร (\mathbf{J}) ว่า

$$\mathbf{J} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}} = \rho \mathbf{v} \quad (4.8)$$

โดยเราจึงสามารถหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านผิว ๆ หนึ่งหรือเส้น ๆ หนึ่งได้จาก

$$I = \int \mathbf{K} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad \text{และ} \quad I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.9)$$

และเช่นเดียวกับ (4.5) จะได้ว่า

แรงแม่เหล็กบนกระแสในสองและสามมิติ.

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) da \quad (4.10)$$

และ

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau \quad (4.11)$$

จากสมการ (4.8) จะได้ว่า

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.12)$$

และเนื่องจากประจุที่ไหลออก (I) จะต้องเท่ากับประจุที่หายไป ดังนั้น

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I = -\frac{dQ_{\text{enc}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau$$

ก็จะได้ว่า

สมการความต่อเนื่อง.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.13)$$

► 4.2. กฎของ Biot-Savart

► ระบบกระแสคงที่

ในบทก่อน ๆ เราได้หาสนามไฟฟ้าในระบบที่เป็นประจุหยุดนิ่งไปแล้วหรือก็คือเป็นระบบไฟฟ้าสถิต (electrostatics) ต่อมาในกรณีสนามแม่เหล็ก ในการที่ระบบจะเป็นแม่เหล็กสถิต (magnetostatics) ระบบจะต้องมีกระแสคงเดิมตลอดเวลา หรือก็คือ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad (4.14)$$

เมื่อนำไปแทนใน (4.13) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.15)$$

โดยในระบบกระแสคงที่นี้เราจะหาสนามแม่เหล็กได้จาก:

กฎของ Biot-Savart. สนามแม่เหล็ก \mathbf{B} ที่ตำแหน่ง \mathbf{r} ในระบบที่เป็นแม่เหล็กสถิต หาได้จาก

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\ell' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\ell' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (4.16)$$

เมื่อ μ_0 คือสภาพซึมผ่านได้ของสุญญากาศ (permeability of free space) โดยในกรณีความหนาแน่นกระแส:

กฎของ Biot-Savart ของกระแสในสองและสามมิติ.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} da' \quad \text{และ} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \quad (4.17)$$

► 4.3. Divergence และ Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต

► Divergence ของสนามแม่เหล็กสถิต

พิจารณา (4.17) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \right) d\tau' \end{aligned}$$

เนื่องจาก \mathbf{J} อยู่ในพิกัด (x', y', z') จึงได้ว่า $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$ และจาก

$$\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \mathbf{0}$$

ดังนั้น

กฎของ Gauss สำหรับสนามแม่เหล็ก.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.18)$$

► Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต

เช่นเดิม จาก (4.17) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \nabla \right) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \mathbf{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) - \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \right) d\tau' \end{aligned}$$

เนื่องจาก \mathbf{J} ขึ้นกับพิกัด (x', y', z') :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\mathbf{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau' \quad (\dagger)$$

พิจารณาพจน์ด้านหลัง เนื่องจาก $\hat{\mathbf{r}}/r^2 = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ดังนั้น $\nabla = -\nabla'$ จะได้ว่า

$$\int -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' = \int (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau'$$

คิดแยกแกน โดยให้ \mathcal{V} คือปริมาตรที่อินทิเกรต (ปริมาตรที่ใหญ่มาก ๆ):

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathcal{V}} -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \right)_x &= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{x - x'}{r^2} d\tau' \\ &= \int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{x - x'}{r^2} \mathbf{J} \right) d\tau' - \int_{\mathcal{V}} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \frac{x - x'}{r^2} d\tau' \\ &= \oint_{\partial \mathcal{V}} \left(\frac{x - x'}{r^2} \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

เนื่องจาก \mathcal{V} ใหญ่มาก ดังนั้นจะได้ว่าไม่มีกระแสไหลออกจากระบบเลย ดังนั้น

$$\int_{\mathcal{V}} -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' = \mathbf{0}$$

นำไปแทนใน (†) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} (4\pi \delta^3(\mathbf{r})) d\tau' \end{aligned}$$

ดังนั้น

กฎของ Ampère (Differential Form).

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.19)$$

ต่อมาอินทิเกรตบนผิวใด ๆ:

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

โดย Stokes' Theorem จะได้ว่า

กฎของ Ampère (Integral Form).

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (4.20)$$

► 4.4. เวกเตอร์ศักย์แม่เหล็ก

► นิยามศักย์แม่เหล็ก

ในทสนามไฟฟ้า เนื่องจาก $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ทำให้เราสามารถนิยามสนามสเกลาร์ V (ศักย์ไฟฟ้า) ซึ่ง

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

ในกรณีของสนามแม่เหล็ก เรามี (4.18) ที่กล่าวว่า $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ จึงทำให้เราสามารถนิยาม*ศักย์แม่เหล็ก*ซึ่งเป็นสนามเวกเตอร์ได้ว่า

นิยามศักย์แม่เหล็ก.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.21)$$

พิจารณา (4.19):

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{B} \\ &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

สังเกตว่าถ้า \mathbf{A}_0 สอดคล้องกับ (4.21) แล้ว $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla \lambda$ ก็สอดคล้องด้วย พิจารณา $\nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

ดังนั้นเราจึงสามารถเลือกสนามศักย์แม่เหล็กให้มี $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ได้เสมอ (เพราะเรารู้ว่าสมการ Poisson $\nabla^2 \lambda = -f(x) = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0$ มีคำตอบ) ก็จะได้ว่า

สมการ Poisson ของศักย์แม่เหล็ก.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.22)$$

ในบทไฟฟ้าสถิตเรามีคำตอบของสมการ $\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$ อยู่แล้ว (เมื่อ $\rho \rightarrow 0$ เมื่อ $\mathbf{r} \rightarrow \infty$) คือ

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau'$$

จึงดัดแปลงให้เป็นคำตอบของ (4.22) ได้ว่า

ศักย์แม่เหล็กจากสนามกระแส.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \quad (4.23)$$

หรือสำหรับหนึ่งและสองมิติ:

ศักย์แม่เหล็กจากสนามกระแสในหนึ่งและสองมิติ.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{r} da' \quad \text{และ} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{r} d\ell' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{r} d\ell' \quad (4.24)$$

โดยสมการศักย์นี้ใช้ได้เมื่อ $\mathbf{J} \rightarrow 0$ เมื่อ $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ แต่ถ้าไม่ใช่ อาจต้องหาศักย์โดยใช้วิธีอื่น วิธีหนึ่งคือสังเกตว่า

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

โดยเราจะเรียกพจน์ฝั่งขวาว่าฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ_B):

นิยามฟลักซ์แม่เหล็ก. ฟลักซ์ของ \mathbf{B} ที่ผ่านผิว S คือ

$$\Phi_B \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.25)$$

ดังนั้นสมการด้านบนก็จะได้ว่า

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \Phi_B \quad (4.26)$$

ซึ่งสามารถนำมาใช้หา \mathbf{A} ได้เช่นเดียวกับการใช้ (4.20) ในการหา \mathbf{B} ในระบบที่มีความสมมาตร

► สภาวะขอบเขต

ต่อมาเรามาหาสภาวะขอบเขตของสนามแม่เหล็ก \mathbf{B} และศักย์แม่เหล็ก \mathbf{A} เช่นเดียวกับในบทไฟฟ้าสถิต โดยพิจารณาที่บริเวณแผ่นที่มีกระแส \mathbf{K} ไหลอยู่:

1. พิจารณาผิว Gaussian ทรงกระบอกที่บางมาก ๆ ตั้งในตอนหาสภาวะขอบเขตของ \mathbf{E} และใช้ (4.18) จะได้ว่า

$$B_{\text{above}}^\perp - B_{\text{below}}^\perp = 0$$

ดังนั้นส่วนของ \mathbf{B} ที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสจะต่อเนื่อง

2. พิจารณารูป Amperian รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแคบ ๆ ที่มีด้านขนานกับแผ่นกระแสแต่ตั้งฉากกับ \mathbf{K} จะได้ว่า

$$B_{\text{above}}^\parallel - B_{\text{below}}^\parallel = \mu_0 K$$

ดังนั้นส่วนของ \mathbf{B} ที่ขนานกับแผ่นกระแสแต่ตั้งฉากกับ \mathbf{K} จะไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดด้วยผลต่าง $\mu_0 K$

3. เนื่องจาก $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ จะได้ว่า A^\perp ต่อเนื่อง และจาก (4.26) ก็จะได้ว่า A^\parallel ก็ต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}}$$

หรือก็คือ \mathbf{A} ต่อเนื่องเมื่อผ่านแนวแผ่นกระแส

4. กำหนดให้ $\Delta \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_{\text{above}} - \mathbf{A}_{\text{below}}$, $\hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{K}}$, และ $\hat{\mathbf{p}} \equiv \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$ จากข้อ 1. และ 2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) &= \mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} \\ \mu_0 K \hat{\mathbf{p}} &= \nabla \times (\mathbf{A}_{\text{above}} - \mathbf{A}_{\text{below}}) \\ &= \nabla \times \Delta \mathbf{A} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{n}} & \hat{\mathbf{p}} \\ D_k & D_n & D_p \\ \Delta A_k & \Delta A_n & \Delta A_p \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial}{\partial k} \Delta A_n - \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_k \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta A_p - \frac{\partial}{\partial p} \Delta A_n \right)\end{aligned}$$

(เนื่องจาก \mathbf{A} ต่อเนื่อง $\partial/\partial k$ และ $\partial/\partial p$ ของข้างบนและข้างล่างจึงเท่ากัน) ดังนั้นก็จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta A_k = -\mu_0 K \quad \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_p = 0 \quad (\heartsuit 1)$$

ต่อมา จาก

$$0 = \nabla \cdot \Delta \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial k} \Delta A_k + \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_n + \frac{\partial}{\partial p} \Delta A_p$$

ก็จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta A_n = 0 \quad (\heartsuit 2)$$

จาก $(\heartsuit 1)$ และ $(\heartsuit 2)$ ก็จะได้

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}$$

สรุปก็คือ

สถานะขอบเขตของ \mathbf{B} และ \mathbf{A} เมื่อผ่านแผ่นกระแส. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}} \quad (4.27)$$

และ

$$\mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad (4.28)$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน หรือก็ได้

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K} \quad (4.29)$$

► การกระจาย Multipole ของศักย์แม่เหล็ก

พิจารณาการกระจาย multipole ของ \mathbf{A} (อนุกรมกำลังในรูป $1/r$) โดยใช้ (2.19) และ (4.24):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r} d\ell' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \alpha) d\ell'\end{aligned}$$

ก็จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint d\ell' = \mathbf{0}$$

ตามที่คาด (เพราะจาก (4.18) เราสมมติไม่มี magnetic monopole)

ก่อนที่จะไปดูพจน์ dipole เราจะต้องพิสูจน์เอกลักษณ์หนึ่งที่จะต้องใช้อีกก่อน:

Claim.

$$\oint_{\partial S} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\ell = \int_S d\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (4.30)$$

พิสูจน์. พิจารณา Stokes' Theorem บน $\mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \cdot d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})) \cdot d\mathbf{a}$$

จากนั้นสลับการคูณของสเกลาร์ในฝั่งซ้ายและใช้กฎการคูณในฝั่งขวา จะได้

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\ell &= \int_S \cancel{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})(\nabla \times \mathbf{c})} \cdot d\mathbf{a} - \int_S (\mathbf{c} \times \nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})) \cdot d\mathbf{a} \\ &= - \int_S (\mathbf{c} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{a} \\ &= - \int_S \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \times d\mathbf{a})\end{aligned}$$

ตัด \mathbf{c} ทั้งสองฝั่ง ก็จะได้

$$\oint_{\partial S} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\ell = \int_S d\mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

ตามต้องการ □

ต่อมาเรามาศึกษาพจน์ dipole:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \alpha d\ell' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\ell'\end{aligned}$$

แต่จาก claim (4.30) ก็จะได้ว่า $\oint_{\partial S} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\ell' = \int_S d\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}}$ ดังนั้น

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

เราจึงนิยาม *magnetic dipole moment* (\mathbf{m}):

นิยาม Magnetic Dipole Moment.

$$\mathbf{m} \equiv I \int d\mathbf{a} = I\mathbf{a} \quad (4.31)$$

ก็จะได้ว่า

พจน์ Dipole.

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (4.32)$$

โดยสังเกตว่า \mathbf{m} นี้ไม่ขึ้นกับจุดกำเนิด

► Dipole บริสุทธิ์

เช่นเดียวกับ electric dipole บริสุทธิ์ เราสามารถสร้างจุดที่เป็น magnetic dipole บริสุทธิ์ได้ถ้ามองในลิมิต $I \rightarrow \infty$ และ $a \rightarrow 0$ โดยให้ $\mathbf{m} = I\mathbf{a}$ คงที่

สมมติให้ \mathbf{m} ของ dipole บริสุทธิ์นี้ชี้ในทิศ $+z$ จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ดังนั้นจึงได้สนามแม่เหล็กของ dipole บริสุทธิ์:

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right)$$

เมื่อคำนวณออกมาจะได้ว่า

สนามแม่เหล็กของ Dipole บริสุทธิ์ในพิกัดทรงกลม.

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (4.33)$$

ได้เหมือนกับสนามของ electric dipole บริสุทธิ์พอดี เราจึงหาสูตรในรูปทั่วไปที่ไม่ขึ้นกับพิกัดทรงกลมได้ในแบบเดียวกับ (2.26) ก็จะได้ว่า

สนามแม่เหล็กของ Dipole บริสุทธิ์.

$$\mathbf{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left(3 (\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m} \right) \quad (4.34)$$

บทที่ 5 | สนามแม่เหล็กในสสาร (TO-DO)

► 5.1. แมกเนไทเซชัน (TO-DO)

► Diamagnet, Paramagnet, Ferromagnet

บทที่ 6 | พลศาสตร์ไฟฟ้า

► 6.1. แรงเคลื่อนไฟฟ้า

► กฎของ Ohm

ในการเคลื่อนย้ายประจุให้เกิดกระแสก็ต้องออกแรง เราจึงมาหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับกระแสกันก่อน

พิจารณาสายไฟที่มีอิเล็กตรอนอิสระอยู่ n อนุภาคต่อหน่วยปริมาตรและแต่ละอิเล็กตรอนมีมวล m ประจุ q และสมมติมีสนามแรง \mathbf{f} (ต่อหน่วยประจุ) กระทำอยู่กับทั้งสาย แรง \mathbf{f} จะทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่ง a ก่อนที่จะชนกับอิเล็กตรอนอีกอนุภาคจนทำให้อัตราเร็ว (โดยเฉลี่ยทั้งหมดแล้ว) กลับมาเป็น 0 อีกครั้ง โดยถ้าสมมติว่าอัตราเร็วของอิเล็กตรอนเนื่องจากความร้อนเท่ากับ v_{thermal} และมีระยะทางเฉลี่ย λ ระหว่างการชน เนื่องจาก v_{thermal} มีค่าสูงมาก จึงประมาณได้ว่าความเร่งที่เกิดขึ้นนั้นมีผลน้อยมาก จึงได้เวลาโดยเฉลี่ยก่อนที่จะชนกับอิเล็กตรอนอีกอนุภาคคือ

$$t = \frac{\lambda}{v_{\text{thermal}}}$$

ก็จะได้ความเร็วเฉลี่ยหรืออัตราเร็วลอยเลื่อน (drift velocity) เท่ากับ

$$v_d = \frac{1}{2}at = \frac{a\lambda}{2v_{\text{thermal}}}$$

ดังนั้นกระแสจึงเท่ากับ

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d = nq\frac{\lambda\mathbf{a}}{2v_{\text{thermal}}} = \left(\frac{nq\lambda}{2v_{\text{thermal}}m}\right)\mathbf{F} = \left(\frac{n^2q^2\lambda}{2v_{\text{thermal}}m}\right)\mathbf{f} \quad (6.1)$$

จะเห็นว่าโดยปกติแล้วสำหรับวัสดุทั่วไป \mathbf{J} จึงแปรผันตรงกับ \mathbf{f} :

สมการการแปรผันตรงของกระแสกับแรง.

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{f} \quad (6.2)$$

โดยที่ σ เป็นค่าคงที่ที่เรียกว่าสภาพนำไฟฟ้า (conductivity) ของสารนั้น (ถ้าสารเป็นตัวนำในอุดมคติก็จะมี $\sigma = \infty$) และ $\rho \equiv 1/\sigma$ เรียกว่าสภาพต้านทาน (resistivity) โดยถ้าแรงที่ใช้เป็นแรงทางไฟฟ้าเท่านั้นโดยมีส่วนของแรงแม่เหล็กน้อยมาก ๆ ก็จะได้

กฎของ Ohm.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (6.3)$$

หมายเหตุ: สมการ (6.1) เป็นเพียงการประมาณหยาบ ๆ เท่านั้น จึงไม่สามารถนำมาใช้หา σ ได้จริง ๆ และยิ่งไปกว่านั้น ในความเป็นจริงแล้วยังมีวัสดุบางชนิดที่ไม่เป็นไปตามกฎการแปรผันตรงนี้อีกด้วย เราจะเรียกวัดุดที่เป็นไปตามกฎของ Ohm ว่าเป็นวัสดุ Ohmic

สังเกตว่าในการทำให้ความต่างศักย์มากขึ้น k เท่าระหว่างขั้วอิเล็กโทรด เราจะต้องเพิ่ม Q ไป k เท่า ทำให้ \mathbf{E} เพิ่ม k เท่าและจาก (6.3) จะได้ว่า \mathbf{J} และ I ก็เพิ่ม k เท่าเช่นกัน ก็จะได้กฎของ Ohm ในอีกรูปแบบ:

กฎของ Ohm ในรูปกระแสและความต่างศักย์.

$$V = IR \quad (6.4)$$

เมื่อ R เป็นค่าคงที่ความต้านทานระหว่างสองจุดนั้น (ในการคำนวณหาความต้านทานใช้ (6.3) ตามในแต่ละระบบได้เลย) ในกรณีที่กระแสไหลแบบคงที่ในสสารเนื้อเดียวกันที่เป็นไปตามกฎของ Ohm จาก (4.15) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.5)$$

ดังนั้นในบริเวณที่สสารเป็นไปตามกฎของ Ohm ก็จะไม่มีประจุตกค้างอยู่ภายในเลย จึงทำให้สามารถใช้ทริคในการแก้ ศักย์และสนามจากสมการ Laplace ได้ตามปกติ

สุดท้าย จาก (6.1) เนื่องจากแรงที่ออกนั้นไม่ส่งผลในอัตราเร็วลอยเลื่อนเพิ่มขึ้นเลย ดังนั้นพลังงานส่วนมากจากการชนจะถูกเปลี่ยนเป็นความร้อน โดยถ้ามีประจุไหลต่อเวลาเท่ากับ I โดยศักย์ของประจุลดลง V ก็จะได้

กฎการให้ความร้อนของ Joule.

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (6.6)$$

► แรงเคลื่อนไฟฟ้า

โดยปกติแล้วในวงจรไฟฟ้าจะมีแรงสองแรงในการทำให้ประจุเคลื่อนที่คือแรงจากแหล่งกำเนิด (\mathbf{f}_s) ซึ่งโดยปกติแล้วแรงนี้จะอยู่แค่ในบริเวณแหล่งกำเนิดเท่านั้น และอีกแรงคือแรงจากสนามไฟฟ้าที่จะเป็นตัวที่ช่วยทำให้กระแสไหลด้วย I คงที่ตลอดทั้งสาย ดังนั้นแรงต่อประจุโดยรวมจะเท่ากับ

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$$

แต่แรง \mathbf{E} ที่ช่วยให้กระแสไหลคงที่มาจากไหนล่ะ? เราลองพิจารณาทีละขั้นตอน ดังนี้:

1. เมื่อเริ่มต่อสายไฟกับแบตเตอรี่ จะเกิดแรง \mathbf{f}_s ทำให้เกิดกระแสไหลออก โดยถ้ากระแสในสายไฟเปลี่ยนเร็วไม่คงที่ จะทำให้มีประจุสะสมเกิดขึ้นจึงมี \mathbf{E} ด้านกระแสส่วนที่เร็วเกินไปและเสริมในส่วนที่ช้าเกินไป
2. ที่บริเวณตัวต้านทานก็เช่นเดียวกัน จะต้องมีการเสกเท่ากับนอกตัวต้านทาน แต่คราวนี้ประจุจะสะสมไปเรื่อย ๆ จนกว่าสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะมากพอที่จะผลักประจุผ่านตัวต้านทานไปได้ด้วยกระแสเท่ากับข้างนอก (ตาม (6.3)) โดยกระแสเกิดประจุสะสมที่ฝั่งหนึ่งของตัวต้านทานก็จะทำให้เกิดประจุสะสมที่หัวของแบตเตอรี่ด้วย
3. อีกหัวของแบตเตอรี่ก็จะเกิดกระบวนการเช่นเดียวกับ 1. และ 2. แต่ในทิศและหัวตรงข้าม

เราจึงนิยามผลของแรงทั้งหมดภายในวงจรว่าแรงเคลื่อนไฟฟ้าหรือ *emf* (electromotive force: \mathcal{E}):

นิยามแรงเคลื่อนไฟฟ้า.

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (6.7)$$

เนื่องจาก $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$

หมายเหตุ: *emf* นี้ใช้นิยามเป็นค่า ณ ขณะหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นเมื่อสายไฟขยับ เราจะใช้ $d\boldsymbol{\ell}$ เป็นทิศเดียวกับสายไฟจริง ๆ ไม่ต้องคำนึงถึงความเร็ว

พิจารณาในสภาวะสมดุลหลังจากต่อแบตเตอรี่: สมมติแหล่งกำเนิดเป็นแบตเตอรี่ไร้ความต้านทาน ($\sigma = \infty$) ก็จะได้ว่าแรงที่ออกในการเคลื่อนประจุเป็น 0 ดังนั้น $0 = \mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$ ก็จะได้

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \mathbf{f}_s \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} \quad (6.8)$$

แต่ถ้าแบตเตอรี่นี้มีความต้านทาน r (หมายความว่าถ้าตัดแรง \mathbf{f}_s ออกแล้วความต่างศักย์ $V_{\text{off}} = \int \mathbf{E}_{\text{off}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = Ir$) สมการด้านบนจะไม่เป็นจริง โดยจะได้

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \left(\mathbf{f}_s - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} + \int_a^b \mathbf{E}_{\text{off}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} - V_{\text{off}} = \mathcal{E} - Ir \quad (6.9)$$

► กฎฟลักซ์แม่เหล็ก

เราสามารถเหนี่ยวนำเส้นลวดให้เกิด *emf* ได้โดยอาศัยสนามแม่เหล็ก ซึ่งเป็นวิธีที่เครื่องกำเนิดไฟฟ้า (*generator*) ใช้ในการสร้างกระแสไฟฟ้า โดยยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราเอาสายไฟรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กว้าง h ไปวางในสนามแม่เหล็ก \mathbf{B} ที่มีทิศตั้งฉากกับสายไฟ แล้วทำการดึงสายไฟออกด้วยอัตราเร็ว v ในทิศตั้งฉากกับทั้งสายไฟและ \mathbf{B} ก็จะได้

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{f}_{\text{mag}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = vBh$$

แต่เพราะในขณะที่สายไฟมีความเร็ว v กระแสที่เกิดขึ้นก็จะทำให้มีแรงแม่เหล็กต้านไว้ แรงที่ดึงจึงต้องต้านแรงแม่เหล็กนี้ด้วย โดยถ้าสมมติว่าอิเล็กตรอนไหลด้วยอัตราเร็ว u เทียบกับสายไฟ จะได้แรงที่ต้องดึง $\mathbf{f}_{\text{pull}} = uB$ จึงได้ว่างานที่สายไฟนี้ทำต่อประจุเท่ากับ

$$\int \mathbf{f}_{\text{pull}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = uB \left(\frac{h}{\cos \theta} \right) \sin \theta = vBh$$

ดังนั้นจริง ๆ แล้วงานที่เกิดขึ้นนั้นมาจากแรงดึงทั้งหมด ไม่ได้มาจากแรงแม่เหล็ก (ซึ่งก็ไม่น่าแปลกใจเพราะแรงแม่เหล็กไม่ทำงาน) ต่อมาเราจะมาพิสูจน์กฎที่สำคัญในการหา emf จากการสนามแม่เหล็กดังกระบวนการก่อนหน้านี้

พิจารณาสายไฟวงปิดที่เกิดการเคลื่อนที่หรือบิด ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านผิวที่กำหนดเส้นขอบโดยสายไฟ เมื่อเวลาผ่านไป dt ก็จะทำให้เกิด “ริบบิ้น” ของพื้นที่ส่วนที่เปลี่ยนแปลงขึ้น ก็จะได้

$$d\Phi = \int_{\text{ribbon}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (\circ 1)$$

ถ้าพิจารณา $d\mathbf{a}$ ที่จุด ๆ หนึ่งโดยให้ความเร็วของอิเล็กตรอน \mathbf{w} มาจากสองส่วนคือส่วน \mathbf{v} ที่มีความเร็วของสายไฟ และ \mathbf{u} ที่มีความเร็วของกระแส ก็จะได้ว่า

$$d\mathbf{a} = \mathbf{v} dt \times d\mathbf{\ell} = (\mathbf{w} - \mathbf{u}) dt \times d\mathbf{\ell} = \mathbf{w} dt \times d\mathbf{\ell} \quad (\circ 2)$$

นำ (๐2) ไปแทนใน (๐1) จะได้

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{w} dt \times d\mathbf{\ell}) = - \int (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{\ell} = -\mathcal{E}$$

ดังนั้น

กฎฟลักซ์แม่เหล็ก.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (6.10)$$