# Electromagnetism Notes

by Ham Kittichet

February 9, 2025

# ▶ Table of Contents

# บทที่ 1 | ไฟฟ้าสถิต

## 1.1. สนามไฟฟ้า

### แรง Coulomb

**กฎของ Coulomb.** สำหรับจุดประจุที่อยู่นิ่ง $q_1$ และ $q_2$ จะได้ว่าแรงที่กระทำต่อประจุ $q_1$ คือ

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\mathscr{r}^2} \hat{\mathscr{r}} \tag{1.1}$$

เมื่อ $\boldsymbol{\mathscr{r}}$ คือเวกเตอร์จาก $q_1$ ไป $q_2$

โดย $\varepsilon_0$ เป็นค่าคงที่ที่เรียกว่า*สภาพยอมในสุญญากาศ* (*permittivity of free space*) เราจะเรียกแรงนี้ว่า*แรง Coulomb*

### สนามไฟฟ้า

สังเกตว่าถ้ามีประจุวางไว้อยู่แล้ว เราสามารถนิยาม*สนามไฟฟ้า*ได้ดังนี้:

**นิยามสนามไฟฟ้า.**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \tag{1.2}$$

และโดยกฎของ Coulomb (1.1) จะได้ว่า

**สนามไฟฟ้าของจุดประจุ.**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\mathbf{r}_k \neq \mathbf{r}} q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{\mathscr{r}_k^2} \hat{\mathscr{r}}_k \tag{1.3}$$

โดยถ้าประจุไม่ดิสครีตแต่กระจายตัวอย่างต่อเนื่องด้วยความหนาแน่นประจุ $\rho(\mathbf{r})$ จะได้ว่า

**สนามไฟฟ้าของประจุต่อเนื่อง.**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\tau' \tag{1.4}$$

เมื่อ $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}^3r'$ และในทำนองเดียวกันกับความหนาแน่นเชิงเส้น $\lambda$ และความหนาแน่นเชิงพื้นที่ $\sigma$

## ▶ 1.2. Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต

### ▶ ฟลักซ์ไฟฟ้าและกฎของ Gauss

**นิยามฟลักซ์ไฟฟ้า.** ฟลักซ์ของ $\mathbf{E}$ ที่ผ่านผิว $\mathcal{S}$ คือ

$$\Phi_E \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} \tag{1.5}$$

พิจารณาพื้นผิวปิด $\mathcal{S}$ ที่มีจุดประจุ $q$ อยู่ภายในและพื้นที่เล็ก ๆ $\mathrm{d}\tau$ บน $\mathcal{S}$ โดยมี $\mathscr{r}$ เป็นเวกเตอร์จาก $q$ มายัง $\mathrm{d}a$ และ $\mathrm{d}a'$ เป็นภาพฉายของ $\mathrm{d}a$ มาตั้งฉากกับ $\mathscr{r}$ จะได้

$$\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}^2}\,\mathrm{d}a\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}^2}\,\mathrm{d}a' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega$$

เมื่อ $\mathrm{d}\Omega$ คือมุมสเตอเรเดียนเทียบกับตำแหน่งของประจุ $q$ ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าจาก $q$ ที่ผ่านพื้นผิว $\mathcal{S}$ เท่ากับ

$$\Phi_E^{(q\,\mathrm{in})} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\mathcal{S}}\mathrm{d}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.6}$$

โดยทำในทำนองเดียวกันจะเห็นว่าถ้า $q$ อยู่นอก $\mathcal{S}$ แล้ว $\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = (\mathrm{const.})\,\mathrm{d}\Omega$ const จะมีคู่ของมันที่เครื่องหมายตรงข้ามในอีกฝั่งของ $\mathcal{S}$ จึงทำให้ตัดกันหมด ดังนั้นในกรณีจุดประจุ $q$ อยู่นอก $\mathcal{S}$ จะได้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้า:

$$\Phi_E^{(q\,\mathrm{out})} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \tag{1.7}$$

ดังนั้นจึงได้

**กฎของ Gauss (Integral form).** สำหรับทุกพื้นผิวปิดจะได้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวนั้นเท่ากับ

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\mathrm{enc}}}{\varepsilon_0} \tag{1.8}$$

## ▶ Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต

พิจารณาใช้ divergence theorem ($\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}\tau$) บนกฎของ Gauss (1.8) จะได้ว่า

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\mathrm{enc}}}{\varepsilon_0} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\tau$$
$$\int_{\mathcal{V}} \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}\tau = 0$$

เนื่องจากเป็นจริงทุกปริมาตร $\mathcal{V}$ ดังนั้น

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

ก็จะได้

**กฎของ Gauss (Differential form).**

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.9}$$

และเนื่องจาก curl ของจุดประจุเท่ากับ $\mathbf{0}$ ดังนั้นจึงได้ว่า curl ของสนาม $\mathbf{E}$ สถิตใด ๆ จึงเท่ากับ $\mathbf{0}$ ด้วย

**กฎของ Faraday สำหรับสนามไฟฟ้าสถิต.**

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{1.10}$$

# ▶ 1.3. ศักย์ไฟฟ้า

## ▶ นิยามศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจาก $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0$ โดย Stokes' theorem จะได้ว่า $\int \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$ ไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทาง เราจึงสามารถนิยามฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับอินทิกรัลของสนามไฟฟ้า ณ ตำแหน่งใด ๆ ได้:

**นิยามศักย์ไฟฟ้า.** ให้ $\mathcal{O}$ เป็นจุดอ้างอิง เราสามารถนิยาม*ศักย์ไฟฟ้า* $V(\mathbf{r})$ ที่จุด $\mathbf{r}$ คือ

$$V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{1.11}$$

ซึ่งโดยปกติแล้วเราจะนิยามศักย์ไฟฟ้าให้ $V|_{r\to\infty} = 0$

โดยจะได้*ความต่างศักย์*ระหว่าง $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ คือ

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{1.12}$$

และจาก

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\boldsymbol{\nabla} V) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

จะได้ว่า

**ศักย์ไฟฟ้าในรูป Gradient.**

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V \tag{1.13}$$

อีกสมการหนึ่งที่สำคัญที่ได้จากศักย์ไฟฟ้าโดยนำสมการ (1.13) ไปแทนใน (1.9) จะได้

**สมการ Poisson.** สำหรับสนามศักย์ไฟฟ้า $V$:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.14}$$

โดยถ้า $\rho = 0$ จะได้*สมการ Laplace*

$$\nabla^2 V = 0 \tag{1.15}$$

โดยสามารถหา $V$ ของจุดประจุ $q$ ได้จากกฎของ Coulomb (1.1):

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}' = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(r')^2} \,\mathrm{d}r'$$

ก็จะได้ว่า

**ศักย์ไฟฟ้าของจุดประจุ.**

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\mathscr{r}} \tag{1.16}$$

ในทำนองเดียวกันกับสนามไฟฟ้า เราสามารถหาศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ที่เกิดจากประจุที่กระจายแบบต่อเนื่องด้วยความหนาแน่น $\rho$ ได้ดังนี้:

**ศักย์ไฟฟ้าของประจุต่อเนื่อง.**

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \,\mathrm{d}\tau' \tag{1.17}$$

## ▶ สภาวะขอบเขต

ต่อมาจะมาดูสมบัติของ $\mathbf{E}$ และ $V$ ในบริเวณแผ่นประจุบาง ๆ ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ $\sigma$

1. พิจารณาผิว Gaussian ทรงกระบอกบางที่บางมากจนฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านบริเวณผิวข้างเท่ากับ $0$ ที่คลุมบริเวณเล็ก ๆ ของแผ่นประจุ จะได้ว่า

$$E^{\perp}_{\text{above}} - E^{\perp}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

จะเห็นได้ว่าส่วนของ $\mathbf{E}$ ที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุจะเกิดความไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดด้วยผลต่าง $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

2. พิจารณาอินทิกรัลเส้นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุ จาก (1.10) และ Stokes' theorem จะได้ว่า $\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$ ดังนั้น
$$E^{\parallel}_{\text{above}} - E^{\parallel}_{\text{below}} = 0$$
จะเห็นได้ว่าส่วนของ $\mathbf{E}$ ที่ขนานกับแผ่นประจุจะยังต่อเนื่องเมื่อผ่านแผ่นประจุ

3. พิจารณาจุด $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ ที่อยู่ใกล้กันมาก ๆ แต่ $\mathbf{b}$ อยู่ด้านบนแผ่นส่วน $\mathbf{a}$ อยู่ด้านล่างแผ่น จะได้ว่า
$$V_{\text{above}} - V_{\text{below}} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$$
ดังนั้น $V$ ต่อเนื่องเมื่อผ่านแผ่นประจุ

จึงสรุปได้ดังนี้:

**สภาวะขอบเขตของ $\mathbf{E}$ และ $V$ เมื่อผ่านแผ่นประจุบาง.** บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ $\sigma$ จะได้ว่า
$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}} \tag{1.18}$$
และ
$$\mathbf{E}_{\text{above}} - \mathbf{E}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \tag{1.19}$$
เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน หรือเขียนอีกอย่างหนึ่งได้ว่า
$$\frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.20}$$

## ▶ 1.4. งานและพลังงาน

### ▶ พลังงานศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจาก $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times q\mathbf{E} = 0$ ดังนั้นแรง Coulomb จึงเป็นแรงอนุรักษ์ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับแรงโน้มถ่วงด้วย จึงหาพลังงานศักย์ของจุดประจุ 2 ตัวได้คล้ายกัน

**พลังงานศักย์ไฟฟ้าสำหรับจุดประจุ.**
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\mathscr{r}} \tag{1.21}$$

และจาก (1.13) ยังได้อีกว่า

**ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์.**

$$V = \frac{U}{q} \tag{1.22}$$

ต่อมาจะมาหาพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบประจุที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามภายนอก $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ โดยพิจารณาการหาผลต่างของพลังงานศักย์ในการนำจุดประจุจาก $\infty$ มาวางทีจะตัว จะได้ผลต่างพลังงานศักย์ของประจุที่ $k$ เป็นดังนี้:

$$\Delta U_k = q_k V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_k)$$

เนื่องจากนิยามให้ $U|_{r\to\infty} = qV|_{r\to\infty} = 0$ ก็จะได้

$$U_{\text{ext}} = \sum_k \Delta U_k = \sum_k q_k V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_k) \tag{1.23}$$

หรือขยายมาในกรณีต่อเนื่องก็คือ

**พลังงานศักย์ไฟฟ้าจากสนามภายนอก.**

$$U_{\text{ext}} = \int \rho V_{\text{ext}} \, \mathrm{d}\tau \tag{1.24}$$

ส่วนพลังงานศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากระบบเองหาได้โดยการพิจารณาเอาจุดประจุจาก $\infty$ มาวางเช่นเดียวกัน จะได้ประจุตัวที่ $k$ มีพลังงานศักย์

$$U_k = \sum_{k'<k} q_k V_{k'}(\mathbf{r}_k) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k'<k} \frac{q_k q_{k'}}{\mathscr{r}_{kk'}}$$

ดังนั้นโดยใช้ความสมมาตร

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k \sum_{k'<k} \frac{q_k q_{k'}}{\mathscr{r}_{kk'}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k\neq k'} \frac{q_k q_{k'}}{\mathscr{r}_{kk'}} \tag{1.25}$$

แต่ในกรณีต่อเนื่องเราไม่จำเป็นต้องสนใจเงื่อนไข $k \neq k'$ เพราะอินทิกรัลลู่เข้าและส่วนที่มาจาก $k = k'$ สามารถมองเป็นส่วนพลังงานที่มาจากประจุที่ใกล้กันมาก ๆ ได้ จึงได้ว่า

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \, \mathrm{d}\tau' \, \mathrm{d}\tau$$

เนื่องจาก $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'}{\mathscr{r}} = V(\mathbf{r})$ ดังนั้น

**พลังงานศักย์ไฟฟ้าจากสนามภายใน.**

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V \, \mathrm{d}\tau \tag{1.26}$$

## ▶ พลังงานจากสนามไฟฟ้า

ต่อมาพิจารณาพลังงานศักย์ภายในของระบบอีกแบบโดยแทนสมการ Poisson (1.14) เข้าไปใน (1.26) โดยอินทิเกรตบนปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่ใหญ่มาก ๆ จน $\mathbf{E}$ ที่ผิวของ $\mathcal{V}$ เข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V\nabla^2 V\,\mathrm{d}\tau = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}V))\,\mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau$$

โดย Chain Rule: $\boldsymbol{\nabla}\cdot(V\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla}V\cdot\mathbf{F} + V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F})$ นำไปแทนต่อ จากนั้นใช้ divergence theorem จะได้ว่า

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(V\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau - \int_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\nabla}V)\cdot(\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_{\partial\mathcal{V}} V\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} + \int_{\mathcal{V}} E^2\,\mathrm{d}\tau\right) \end{aligned}$$

แต่จาก $\mathbf{E}$ ที่ขอบเป็น $0$ พจน์แรกจึงหายไป ดังนั้น

**พลังงานจากสนามไฟฟ้า.**

$$U = \int u(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{เมื่อ} \qquad u(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2(\mathbf{r}) \tag{1.27}$$

โดยเราจะเรียก $u$ ว่า*ความหนาแน่นพลังงานสนามไฟฟ้า* (*energy density of the electric field*)

*แต่คำถามคือ*: ทำไมสมการ (1.25) ทำให้พลังงานศักย์เป็นลบได้แต่ (1.27) จึงเป็นบวกเสมอ? เหตุผลก็คือ (1.25) ยังไม่ได้รวมพลังงานในการสร้างจุดประจุตั้งแต่แรก (ถ้ารวมด้วยจะทำให้เป็น $\infty$) ดังนั้นถ้าจะหาพลังงานของระบบที่เป็นจุดประจุ ถ้าใช้ (1.25) จะสมเหตุสมผลกว่า

ต่อมาเรามาพิจารณาพลังงานศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากอิทธิพลของทั้งสนามภายนอกและภายใน:

$$U = U_{\text{int}} + U_{\text{ext}} = \frac{1}{2}\int \rho V_{\text{int}}\,\mathrm{d}\tau + \int \rho V_{\text{ext}}\,\mathrm{d}\tau$$

หาพจน์ฝั่งขวาโดยทำคล้าย ๆ (1.27):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \rho V_{\text{ext}}\,\mathrm{d}\tau &= -\varepsilon_0\int_{\mathcal{V}} V_{\text{ext}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}V_{\text{int}}))\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\varepsilon_0\left(\cancel{\oint_{\partial\mathcal{V}} -V_{\text{ext}}\mathbf{E}_{\text{int}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}} - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_{\text{ext}}\cdot\mathbf{E}_{\text{int}}\,\mathrm{d}\tau\right) \\ &= \varepsilon_0\int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_{\text{ext}}\cdot\mathbf{E}_{\text{int}}\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

นำไปแทนในสมการ $U$ และใช้ร่วมกับ (1.27) จะได้

$$U = \int u(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{เมื่อ} \qquad u(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\Big(E_{\text{int}}^2(\mathbf{r}) + 2\mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})\Big) \tag{1.28}$$

ซึ่งจริง ๆ แล้วเหมือนกับ (1.27) เลย โดยบวกเข้าลบออกด้วย $E^2_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ ใน $u(\mathbf{r})$ และให้ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{int}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}$ จะได้

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau - \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2_{\text{ext}}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau}_{\text{const.}}$$

เนื่องจากพจน์ด้านหลังเป็นค่าคงที่ เราจึงสามารถให้พจน์นั้นเป็นค่าอ้างอิงได้ จึงได้ว่าเราสามารถใช้ (1.27) ได้ในทุกกรณี เพียงแค่ต้องรวม $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ ไปด้วย:

$$U' = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau \tag{1.29}$$

สุดท้ายจะเป็นพิสูจน์ทฤษฎีบท:

**Green's Reciprocity Theorem.**

$$\int \rho_1 V_2\,\mathrm{d}\tau = \int \rho_2 V_1\,\mathrm{d}\tau \tag{1.30}$$

ทฤษฎีบทนี้หมายความว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าในระบบ 1 ที่เกิดจากระบบ 2 มีค่าเท่ากับพลังงานศักย์ไฟฟ้าในระบบ 2 ที่เกิดจากระบบ 1 ซึ่งก็ไม่แปลกเพราะแรง Coulomb เป็นแรงที่เป็นไปตามกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน แต่จะมาพิสูจน์กันดังนี้:

*พิสูจน์.* พิจารณาปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่ใหญ่มาก ๆ

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2\,\mathrm{d}\tau &= -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} V_1 \cdot \mathbf{E}_2\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\left(\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (V_1 \mathbf{E}_2) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} - \int_{\mathcal{V}} V_1 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}_2\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= -\left(\cancel{\oint_{\partial\mathcal{V}} V_1 \mathbf{E}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}} - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} V_1 \rho_2\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} V_1 \rho_2\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} V_2 \rho_1\,\mathrm{d}\tau$$

ดังนั้น $\int \rho_1 V_2\,\mathrm{d}\tau = \int \rho_2 V_1\,\mathrm{d}\tau$ ตามต้องการ □

# ▶ 1.5. ตัวนำและความจุไฟฟ้า

## ▶ ตัวนำไฟฟ้า

ในวัตถุที่เป็น*ฉนวนไฟฟ้า* (หรือ*ไดอิเล็กทริก*) อิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ภายในบริเวณอะตอมของมัน แต่ใน*ตัวนำไฟฟ้า* จะมีอิเล็กตรอนจำนวนหนึ่งเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในเนื้อตัวนำ (ในตัวนำที่เป็นของเหลวเช่นน้ำเกลือจะเป็นไอออนอย่าง $\mathrm{Na}^+$

และ $\mathrm{Cl}^-$ ที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระแทน) โดยตัวนำอุดมคติหมายถึงตัวนำที่มีประจุอิสระไม่จำกัด ซึ่งโลหะจะเป็นตัวนำที่ใกล้เคียงกับตัวนำอิสระพอที่จะใช้การประมาณดังต่อไปนี้ได้:

**สมบัติของตัวนำไฟฟ้าอุดมคติ.** ตัวนำไฟฟ้าในสภาวะสมดุลจะต้องไม่มีประจุเคลื่อนที่ในเนื้อตัวนำ จึงสามารถตั้งข้อสมมติเกี่ยวกับสนามไฟฟ้าภายในเนื้อตัวนำได้ว่า

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{1.31}$$

ซึ่งจะเรียกว่า *electric field screening effect* สังเกตว่าจากกฎของ Gauss จะแปลว่าไม่มีประจุอยู่ภายในเนื้อตัวนำ ประจุทั้งหมดจะรวมกันที่ผิวเท่านั้น

โดย (1.31) สามารถเขียนได้ในอีกรูปคือ

$$V = \text{const.} \tag{1.32}$$

อีกสมบัติหนึ่งคือจาก (1.18) ถึง (1.20) และ (1.31) จะได้ว่าสนามไฟฟ้าที่ผิวตัวนำจะตั้งฉากกับผิวเสมอและมีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นประจุดังนี้

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{\text{out}} = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \tag{1.33}$$

สถานการณ์หนึ่งที่น่าสนใจคือเมื่อมี *"โพรง"* อยู่ในเนื้อตัวนำ โพรงนี้จะเปรียบเสมือนว่าไม่โดนผลกระทบจากสนามไฟฟ้าด้านนอกตัวนำเลย ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบท uniqueness ในบทถัดไป โดยจะเรียกตัวนำที่กันสนามภายนอกนี้ว่า *Faraday's cage* (ในทางกลับกัน สนามด้านนอกตัวนำจะไม่โดนผลกระทบจากประจุด้านในโพรง) โดยถ้าในโพรงไม่มีประจุ จะได้ว่าสนามไฟฟ้าในโพรงเป็น $0$ (พิสูจน์กรณีนี้ไม่ยาก ได้จากการสังเกตว่าถ้ามีสนามไฟฟ้าจะต้องมีเส้นแรงไฟฟ้าที่ลากจากผิวไปผิวบนโพรง ถ้าสร้างเส้นทางปิดในการอินทิเกรตบนเส้นแรงนั้นจะได้ผลลัพธ์ไม่เป็น $0$ ซึ่งจาก (1.10) เกิดข้อขัดแย้ง) แต่ถ้านำประจุ $Q$ ไว้ในโพรง โดยกฎของ Gauss จะได้ว่าประจุที่อยู่บนผิวของโพรงจะต้องรวมได้ $-Q$

และยิ่งไปกว่านั้น ถ้าโพรงดังกล่าวอยู่ในตัวนำทรงกลมที่ไม่มีประจุ (ประจุรวมเป็น $0$) สนามไฟฟ้าด้านนอกทรงกลมนั้นจะเปรียบเสมือนสนามไฟฟ้าของตัวนำทรงกลมประจุ $Q$ ทั้งนี้เป็นเพราะมัน *"เป็นไปได้"* ที่ประจุด้านในจะเรียงตัวให้ประจุที่ผิวของโพรงกับประจุ $Q$ ในโพรงหักล้างกันหมดด้านนอกโพรง และเมื่อมีวิธีการเรียงตัวหนึ่งที่เป็นไปได้ที่ทำให้สนามในเนื้อตัวนำเป็น $\mathbf{0}$ ปรากฏว่า (ซึ่งจะพิสูจน์ในบทถัดไป) วิธีการจัดเรียงประจุนั้นจะเป็นวิธีเดียวเท่านั้น

## ▶ แรงบนตัวนำไฟฟ้า

ต่อมาพิจารณาแรงที่กระทำต่อผิวตัวนำ $\mathrm{d}a$ ก้อนเล็ก ๆ จะได้ว่าสนามไฟฟ้าในบริเวณนั้นมาจากสองส่วนคือ $\mathbf{E}_{\text{other}}$ มาจากประจุอื่น ๆ นอกบริเวณ $\mathrm{d}a$ และ $\mathbf{E}_{\text{self}}$ มาจาก $\mathrm{d}a$ เอง โดยสนามด้านบนและด้านล่างของ $\mathbf{E}_{\text{self}}$ คือ $\sigma/2\varepsilon_0$ และ $-\sigma/2\varepsilon_0$ ตามลำดับ (เพราะสนามนี้ดูในบริเวณที่ใกล้ $\mathrm{d}a$ มาก ๆ จนเปรียบเสมือน $\mathrm{d}a$ เป็นผิวราบอนันต์) ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{E}_{\text{above}} = \mathbf{E}_{\text{other}} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$$
$$\mathbf{E}_{\text{below}} = \mathbf{E}_{\text{other}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{E}_{\text{other}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}})$$

ก็จะได้แรงที่กระทำต่อ $\mathrm{d}a$ คือ

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \sigma\,\mathrm{d}a \cdot \mathbf{E}_{\text{other}}$$

ดังนั้นแรงต่อหน่วยพื้นที่ $\mathbf{f} = \mathrm{d}\mathbf{F}/\,\mathrm{d}a$ คือ

**แรงต่อพื้นที่บนแผ่นประจุ.**

$$\mathbf{f} = \sigma\mathbf{E}_{\text{average}} = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}}) \tag{1.34}$$

ซึ่งจริง ๆ แล้วใช้ได้กับแผ่นประจุทุกกรณี แต่ในกรณีตัวนำ:

**แรงต่อพื้นที่บนผิวตัวนำ.**

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \tag{1.35}$$

จะได้ว่าเมื่อด้านนอกตัวนำมีสนาม $\mathbf{E}$ แล้ว*ความดันไฟฟ้าสถิต* (*electrostatic pressure*: $P$) เป็นดังนี้

**ความดันไฟฟ้าสถิตบนผิวตัวนำ.**

$$P = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \tag{1.36}$$

## ► ความจุไฟฟ้า

เมื่อมีตัวนำสองตัวโดยตัวหนึ่งมีประจุ $+Q$ และอีกตัว $-Q$ เนื่องจากเมื่อ $Q$ เพิ่มขึ้นจำนวน $k$ เท่า จะได้ว่าทำให้ $\sigma$ บนทั้งสองประจุเพิ่มขึ้นเป็น $k$ เท่าเช่นกัน (เพราะมีการจัดเรียงแบบเดียวเท่านั้นที่ทำให้เนื้อตัวนำมี $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ซึ่งจะพิสูจน์ในบทถัดไป) ส่งผลให้ $\mathbf{E}$ เพิ่มเป็น $k$ เท่า จึงทำให้ความต่างศักย์ $V = V_+ - V_-$ ก็เพิ่มขึ้นเป็น $k$ เท่าด้วย จึงสรุปได้ว่า $Q \propto V$ ดังนั้นเราสามารถนิยามค่าคงที่การแปรผันนี้ว่า*ความจุไฟฟ้า* (*capacitance*: $C$) ดังนี้

**นิยามความจุไฟฟ้า.**

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{1.37}$$

ส่วนความจุไฟฟ้าของตัวนำตัวเดียว (self-capacitance) คือให้จินตนาการว่ามีตัวนำเปลือกทรงกลมที่มีรัศมีใหญ่มาก ๆ หรือก็คือให้ใช้ $V$ เป็น $V$ ของตัวนำโดยมีจุดอ้างอิงเป็น $\infty$

สุดท้าย งานในการชาร์จตัวเก็บประจุหาได้โดยรวมงานในการย้ายประจุ $\mathrm{d}q$ จากฝั่งลบมาฝั่งบวก:

$$\mathrm{d}W = V\,\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q$$

ดังนั้นงานในการชาร์จประจุจาก $0$ มาเป็น $Q$ (หรือก็คือพลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ) เท่ากับ

**พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ.**

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 \tag{1.38}$$

## ► การต่อตัวเก็บประจุ

พิจารณาการต่อตัวเก็บประจุ $C_1$ และ $C_2$ แบบ*อนุกรม* จะได้ว่า $Q$ บนตัวเก็บประจุ $C_1$ จะเท่ากับ $Q$ บนตัวเก็บประจุ $C_2$ ดังนั้น

$$V_{\text{รวม}} = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

จึงได้ความจุไฟฟ้ารวมเท่ากับ

$$\frac{1}{C_{\text{รวม}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

โดยเราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวเก็บประจุกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

**การต่อตัวเก็บประจุแบบอนุกรม.**

$$\frac{1}{C_{\text{รวม}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \tag{1.39}$$

และพิจารณาการต่อตัวเก็บประจุ $C_1$ และ $C_2$ แบบ*ขนาน* จะได้ว่าความต่างศักย์ของตัวเก็บประจุทั้งสองจะต้องเท่ากับ (เพราะเป็นเนื้อตัวนำเดียวกัน) ดังนั้น

$$Q_{\text{รวม}} = Q_1 + Q_2 = C_1V + C_2V$$

จึงได้ความจุไฟฟ้ารวมเท่ากับ

$$C_{\text{รวม}} = C_1 + C_2$$

โดยเช่นเดียวกับการต่อแบบอนุกรม เราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวเก็บประจุกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

**การต่อตัวเก็บประจุแบบขนาน.**

$$C_{\text{รวม}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \tag{1.40}$$

# บทที่ 2 | ศักย์ไฟฟ้า

## ► 2.1. สมการ Laplace

### ► สมการ Laplace ในสามมิติ

ในการแก้หาสนามไฟฟ้า ถ้าไม่มีความสมมาตรพอที่จะใช้กฎของ Gauss (1.8) อาจจะง่ายกว่าที่จะหาศักย์ไฟฟ้าก่อน โดยเรามักสนใจศักย์ไฟฟ้าในบริเวณที่ไม่ได้อยู่ในเนื้อประจุ ดังนั้นสมการ Laplace (1.15) จึงเป็นสมการที่สำคัญ โดยมีสมบัติของผลเฉลยของมัน (ซึ่งเรียกว่า*ฟังก์ชันฮาร์มอนิก*) ที่ควรรู้คือ

**สมบัติของผลเฉลยของสมการ Laplace ในสามมิติ.** ถ้า $V$ เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace ($\nabla^2 V = 0$) แล้ว

1. $V$ มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ $V$ รอบ ๆ หรือก็คือ สำหรับทุก $\mathbf{r}$ และพื้นผิวทรงกลม $\mathcal{S}$ รัศมี $R$ ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $\mathbf{r}$ จะได้ว่า
$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\mathcal{S}} V \,\mathrm{d}a \tag{2.1}$$

2. $V$ ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ นั่นคือค่าสุดขีดทั้งหมดของ $V$ ในปริมาตร $\mathcal{V}$ จะอยู่บน $\partial\mathcal{V}$ เท่านั้น

หมายเหตุ: *ทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับสมการ Laplace มากจะใช้ได้เมื่อปริมาตร* $\mathcal{V}$ *ที่สนใจนั้นมี* $\rho = 0$ *เท่านั้น ดังนั้นต้องเลือกปริมาตรดี ๆ*

*พิสูจน์.* ให้จุดประจุ $q$ อยู่ที่ $(0, 0, z)$ พิจารณาค่าเฉลี่ยของ $V$ บนทรงกลมที่อยู่ที่จุดกำเนิดที่มีรัศมี $R$ (ให้ $\theta$ เป็นมุมที่ $\mathbf{r}$ ทำกับแกน $+z$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\mathcal{S}} V \,\mathrm{d}a &= \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\mathscr{r}} \,\mathrm{d}a \\
&= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}} R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}} R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}\Big|_0^{\pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{zR}\big((z+R)-(z-R)\big) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z} \\
&= V(\mathbf{0})
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นไปตามต้องการสำหรับจุดประจุ ดังนั้นจึงเป็นจริงสำหรับสนามใด ๆ ก็ตาม

ส่วนข้อ 2. ได้มาจากข้อ 1. โดยตรง เพราะถ้าค่าใด ๆ ของ $V$ เกิดจากค่าเฉลี่ยของจุดรอบ ๆ ค่า $V$ ค่านั้นไม่มีทางเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ $\square$

## ▶ Uniqueness ของผลเฉลยของสมการ Laplace

**ทฤษฎีบท Uniqueness ที่หนึ่ง.** สมการ Laplace จะมีผลเฉลยเดียวบนปริมาตร $\mathcal{V}$ ถ้ารู้ค่า $V$ ทั้งหมดบน $\partial\mathcal{V}$

*พิสูจน์.* ให้ $V_1$ และ $V_2$ เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace บนปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่มีค่าตรงกันบน $\partial\mathcal{V}$ ดังนั้น

$$V_3 \equiv V_1 - V_2$$

เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace ที่มีค่าที่ $\partial\mathcal{V}$ เท่ากับ $0$
แต่เนื่องจากค่าสุดขีดของสมการ Laplace จะต้องอยู่บน $\partial\mathcal{V}$ ดังนั้น $V_3 = 0$ ทุกที่ในปริมาตร หรือก็คือ

$$V_1 = V_2$$

ตามต้องการ $\square$

และไม่ยากที่จะขยายทฤษฎีบทนี้กับสมการ Poisson โดยใช้วิธีพิสูจน์คล้าย ๆ กับด้านบนจะได้ว่า:

> **บทตั้ง.** บนปริมาตร $\mathcal{V}$ ถ้ารู้ $\rho$ ภายในปริมาตรและรู้ค่า $V$ ทั้งหมดบน $\partial\mathcal{V}$ แล้วจะได้ว่ามีสนาม $V$ ในปริมาตรนั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเพียงสนามเดียว

**ทฤษฎีบท Uniqueness ที่สอง.** บนปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่มีขอบเขตอยู่บนผิวของตัวนำ (อาจมีขอบเขตหนึ่งเป็นตัวนำที่ $\infty$ ได้) ถ้ารู้ค่า $\rho$ ภายในปริมาตรและรู้ค่า $Q$ ของตัวนำทั้งหมดแล้วจะได้ว่ามีสนาม $\mathbf{E}$ ในปริมาตรนั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดเพียงสนามเดียว

*พิสูจน์.* ให้ $\mathbf{E}_1$ และ $\mathbf{E}_2$ เป็นสนามใน $\mathcal{V}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข และให้ $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ จาก (1.9) จะได้ว่า

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_3 = 0 \tag{$*1$}$$

และจาก (1.8) จะได้ว่า

$$\oint \mathbf{E}_3\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \tag{$*2$}$$

สำหรับทุก “*ผิวย่อย*” ของ $\partial\mathcal{V}$ ต่อมาพิจารณา

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(V_3\mathbf{E}_3)=\boldsymbol{\nabla}V_3\cdot\mathbf{E}_3+V_3(\cancel{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_3})=-E_3^2$$

และโดย divergence theorem จะได้ว่า

$$\oint_{\partial\mathcal{V}}V_3\mathbf{E}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}=\int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\cdot(V_3\mathbf{E}_3)\,\mathrm{d}\tau=-\int_{\mathcal{V}}E_3^2\,\mathrm{d}\tau \tag{$*3$}$$

แต่เนื่องจากทุกผิวย่อยของ $\partial\mathcal{V}$ บนแต่ละตัวนำมี $V_3$ คงที่จะได้ว่า

$$\oint_{\partial\mathcal{V}}V_3\mathbf{E}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}=\sum_{\mathcal{S}}V_{\mathcal{S}}\oint_{\mathcal{S}}\mathbf{E}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}\overset{(*2)}{=}0$$

นำไปใส่กลับใส่ใน ($*3$) จะได้ว่า $\int_{\mathcal{V}}E_3^2\,\mathrm{d}\tau=0$ ดังนั้น $\mathbf{E}_3=\mathbf{0}$ หรือก็คือ

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_2$$

ตามต้องการ □

## ▶ 2.2. การจำลองภาพ

### ▶ การสร้างระบบใหม่เพื่อแก้หาสนาม

ในบางครั้งการหาศักย์ไฟฟ้าตรง ๆ อาจจะยาก แต่ถ้าหาระบบใหม่ที่มีค่า $V$ ที่บริเวณขอบเขตและ $\rho$ ตรงกับค่าบนระบบที่เราสนใจ จากทฤษฎีบท uniqueness ที่หนึ่ง จะได้ว่าศักย์ไฟฟ้าในบริเวณที่สนใจของทั้งสองระบบจะเท่ากันพอดี ยกตัวอย่างเช่น

> **ตัวอย่าง.** ในระบบพิกัดฉากสามมิติ มีแผ่นตัวนำที่ต่อสายดินวางอยู่ทั่วทั้งระนาบ $xy$ และมีจุดประจุ $q$ วางอยู่ ณ จุด $(0,0,d)$ จงหาศักย์ไฟฟ้าในบริเวณด้านบนแผ่นตัวนำ

*วิธีทำ.* พิจารณาอีกระบบที่มีจุดประจุ $q$ ที่ $(0,0,d)$ และ $-q$ ที่ $(0,0,-d)$ สังเกตว่าระบบนี้มีสภาวะขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าในปริมาตรเหนือระนาบ $xy$ ตรงกันกับระบบในโจทย์เลย ($V=0$ บนระนาบ $xy$, $V=0$ ที่บริเวณไกลมาก ๆ) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท uniqueness ที่หนึ่ง ทั้งสองระบบนี้จะต้องมีสนามศักย์ไฟฟ้าตรงกันบนปริมาตรเหนือระนาบ $xy$ ดังนั้นจึงได้ว่า

$$V(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{-1/2}-\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{-1/2}\right) & \text{เมื่อ } z\geq 0\\ 0 & \text{เมื่อ } z<0\end{cases}$$

($V(x,y,z)=0$ เมื่อ $z<0$ เพราะด้านล่างเหมือนกับระบบที่ไม่มีประจุที่ใดเลย) □

หมายเหตุ: *ควรระวังว่าระบบที่สร้างขึ้นมาเปรียบเทียบนี้จะต้องมีการกระจายตัวของประจุในบริเวณที่สนใจเหมือนกับระบบตั้งต้นเท่านั้นจึงจะใช้ได้ และไม่ได้แปลว่าทุกอย่างของทั้งสองระบบจะเหมือนกัน เช่น ถ้าลองคำนวณดูแล้วพลังงานของระบบโจทย์จะเป็นครึ่งหนึ่งของระบบที่สร้างขึ้นมาใหม่ (มาจากสนามอีกครึ่งที่หายไป)*

# 2.3. การแยกตัวแปร

## การแยกตัวแปรบนพิกัดคาร์ทีเซียน

เริ่มจากการ “เดา” ว่า

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

ดังนั้นจากสมการ Laplace จะได้ว่า

$$\begin{aligned} YZ\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + XZ\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + XY\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} &= 0 \\ \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากแต่ละพจน์เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวโดยต้องรวมกันเท่ากับ $0$ ทุก $(x, y, z)$ ในปริมาตรที่สนใจ ดังนั้น

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = C_x, \qquad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = C_y, \qquad \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = C_z$$

จากนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตในโจทย์เพื่อดูว่า $C$ ในแต่ละสมการควรเป็นค่าบวกหรือลบ และแก้สมการเชิงอนุพันธ์ออกมาโดยจะมีคำตอบดังนี้:

**สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดคาร์ทีเซียน.** สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = CT \tag{2.2}$$

มีคำตอบคือ

$$\begin{cases} Ae^{kt} + Be^{-kt} & \text{ถ้า } C = k^2 > 0 \\ At + B & \text{ถ้า } C = 0 \\ A\sin kt + B\cos kt & \text{ถ้า } C = -k^2 < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

เมื่อ $A$ และ $B$ เป็นค่าคงที่

จากนั้นแก้หาค่าคงที่ให้ได้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้จากเงื่อนไขโจทย์ จะได้เซตของผลเฉลยมาเซตหนึ่งที่อาจไม่มีผลเฉลยใดเลยสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของโจทย์ เนื่องจากสมการ Laplace เป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นเราอาจจะหาวิธีการนำผลเฉลยที่ได้จากการแยกตัวแปรนี้มาบวกกันให้ได้คำตอบที่ตรงกับค่าขอบเขตได้ ซึ่งผลเฉลยเหล่านี้ในกรณีนี้จะอยู่ในรูป $\sin$ จึงสามารถใช้การวิเคราะห์ Fourier เพื่อนำผลเฉลยมาบวกกันให้ได้ค่าที่ตรงกับค่าขอบเขต โดยเราจะหาสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในอนุกรม Fourier ได้โดยใช้ทริคดังต่อไปนี้

**อินทิกรัลสำคัญในการวิเคราะห์ Fourier.**

$$\int_0^\pi \sin(nt)\sin(n't)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n' \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{ถ้า } n' = n \end{cases} \tag{2.4}$$

หรือแทนตัวแปร $t \mapsto (\pi/a)t$ ได้เป็น

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi t}{a}\right)\sin\left(\frac{n'\pi t}{a}\right)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n' \neq n \\ \dfrac{a}{2} & \text{ถ้า } n' = n \end{cases} \tag{2.5}$$

ดังนั้นถ้าต้องการหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $n$ ที่ทำให้อนุกรม Fourier เท่ากับฟังก์ชัน $V(x)$ ฝั่งซ้าย:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

สามารถคูณ $\sin(n\pi x/a)$ เข้าไปทั้งสองฝั่งแล้วอินทิเกรตโดยใช้ (2.5) จะได้

$$C_n = \int_0^a V(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

เหตุผลที่เราสามารถทำแบบนี้กับเซตของฟังก์ชัน $\sin$ เหล่านั้นได้เป็นเพราะ

1. เซตของฟังก์ชันนี้เป็นเซตที่*สมบูรณ์* (*complete*) หมายความว่า ฟังก์ชันใด ๆ สามารถถูกเขียนได้ในรูปผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันในเซต
2. เซตของฟังก์ชันนี้ (ให้เป็น $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$) เป็นเซตที่*ตั้งฉากกัน* (*orthogonal*) หมายความว่า

   $$\int f_n(t)\, f_{n'}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   สำหรับทุก $n' \neq n$

## ▶ การแยกตัวแปรบนพิกัดทรงกลม

ในส่วนนี้จะพิจารณาแค่ระบบที่มีความสมมาตรแบบ azimuth (สมมาตรรอบแกน $z$) ดังนั้นให้

$$V(r,\theta,\phi) = R(r)\,\Theta(\theta)$$

จากสมการ Laplace (ในระบบพิกัดทรงกลม) จะได้ว่า

$$\Theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{R}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0$$
$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0$$

เช่นเดียวกับในพิกัดคาร์ทีเซียน แต่ละพจน์จะต้องเป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = C_r, \qquad \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = C_\theta$$

เมื่อให้ $C_r = l(l+1)$ และ $C_\theta = -l(l+1)$ จะแก้สมการได้คำตอบดังนี้:

**สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดทรงกลม 1.** สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = l(l+1)R \tag{2.7}$$

มีคำตอบคือ

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \tag{2.8}$$

เมื่อ $A$ และ $B$ คือค่าคงที่

แต่อีกสมการหนึ่งจะยากหน่อย:

**สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดทรงกลม 2.** สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -l(l+1)\sin\theta\,\Theta \tag{2.9}$$

มีคำตอบคือ

$$\Theta(\theta) = A\cdot P_l(\cos\theta) \tag{2.10}$$

เมื่อ $P_l$ คือพหุนาม Legendre ดีกรี $l$ และ $A$ คือค่าคงที่

หมายเหตุ: *คำตอบในด้านบนเป็นเพียงส่วนเดียวจากคำตอบทั้งหมดเท่านั้น แต่ที่ไม่พิจารณาส่วนของค่าคงที่อีกตัวเพราะส่วนนั้นจะลู่ออกเสมอที่ค่า $\theta$ เท่ากับ $0$ และ $\pi$ (ในกรณีที่บนแกน $z$ ไม่นำมาคิดอาจต้องพิจารณาคำตอบอื่นนี้)*

โดยพหุนาม Legendre หาได้ดังสูตรต่อไปนี้

**สูตร Rodrigues.**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \tag{2.11}$$

ดังนั้นในการใช้สูตรนี้จึงจะสมมติว่า $l$ เป็นจำนวนเต็มไม่ลบและแต่ละพหุนามจะมีแค่พจน์กำลังคู่หรือคี่เท่านั้น โดยเมื่อแทนสูตร Rodrigues เข้าไปจะได้พหุนาม Legendre ที่มีดีกรีตั้งแต่ $0$ ถึง $5$ คือ:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= (3x^2-1)/2\\
P_3(x) &= (5x^3-3x)/2
\end{aligned}$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$
$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

จากนั้นเมื่อแก้ค่าคงที่ออกมามักจะเหลือเซตของผลเฉลยที่เป็นพหุนาม Legendre โดยเซตของพหุนาม Legendre นี้ เช่นเดียวกับ $\sin$ เป็นเซตของฟังก์ชันที่สมบูรณ์และตั้งฉากกันบน $(-1, 1)$ โดย

**สมบัติการตั้งฉากกันของพหุนาม Legendre.**

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_{l'}(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } l' \neq l \\ \dfrac{2}{2l+1} & \text{ถ้า } l' = l \end{cases} \tag{2.12}$$

หรือเมื่อแทนค่า $x = \cos\theta$ จะได้

$$\int_{0}^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta\, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } l' \neq l \\ \dfrac{2}{2l+1} & \text{ถ้า } l' = l \end{cases} \tag{2.13}$$

ซึ่งสามารถใช้ในการแก้หาสัมประสิทธิ์ของคำตอบสุดท้ายที่เป็นการนำคำตอบแบบแยกตัวแปรมาบวกกันได้

## ▶ การแยกตัวแปรบนพิกัดทรงกระบอก

จะพิจารณาระบบที่สมมาตรแบบทรงกระบอก (สมมาตรในแนวแกน $z$) ดังนั้นให้

$$V(s, \phi, z) = S(s)\, \Phi(\phi)$$

จากสมการ Laplace (ในระบบพิกัดทรงกระบอก) จะได้ว่า

$$\frac{\Phi}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{S}{s^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$$
$$\frac{s}{S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$$

จะได้ว่า

$$\frac{s}{S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\right) = C_s, \qquad \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = C_\phi$$

โดยถ้าให้ $C_s = k^2 = -C_\phi$ (เพราะถ้า $C_\phi$ ไม่เป็นลบจะได้คำตอบในรูป exponential ทำให้ไม่เป็นฟังก์ชันคาบตามที่ต้องการ) จะได้คำตอบของ $\Phi$ เป็น $\Phi(\phi) = A\sin k\phi + B\cos k\phi$ เช่นเดียวกับในพิกัดคาร์ทีเซียน และ

**สมการเชิงอนุพันธ์ในพิกัดทรงกระบอก.** สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{k^2}{s}S \tag{2.14}$$

มีคำตอบคือ

$$S(s) = As^k + Bs^{-k} \tag{2.15}$$

เมื่อ $A$ และ $B$ คือค่าคงที่

แต่เมื่อ $k = 0$ จะได้คำตอบเดียวคือค่าคงที่ ซึ่งไม่ครบกับอันดับของสมการ (เมื่อนำมารวมกันตอนสุดท้ายอาจทำให้ได้คำตอบไม่ครบได้ แต่กรณีของ $\Phi$ เหตุผลที่ไม่นำ $A\phi + B$ ที่เป็นผลเฉลยในกรณี $k = 0$ มาใช้เพราะว่าเห็นชัดว่า $A$ ต้องเป็น $0$ ซึ่งรวมอยู่ในกรณี $k = 0$ ของ $A\sin k\phi + B\cos k\phi$ อยู่แล้ว) จึงต้องคิดแยกกรณี:

**กรณี $k = 0$.** สมการ (2.14) ถ้า $k = 0$ จะได้คำตอบคือ

$$S(s) = A\log s + B \tag{2.16}$$

เมื่อ $A$ และ $B$ คือค่าคงที่

โดยในการหาสัมประสิทธิ์ของคำตอบต่อไปให้ใช้การวิเคราะห์ Fourier แบบเดียวกับพิกัดคาร์ทีเซียน

## ▶ 2.4. การกระจาย Multipole

### ▶ การประมาณศักย์ไฟฟ้าระยะไกล

พิจารณา *electric dipole* ที่ประกอบด้วยจุดประจุ $+q$ และ $-q$ ที่ห่างกัน $d$ โดยสมมติให้ dipole นี้ตั้งในแกน $z$ โดยมีประจุบวกอยู่ในทิศ $+z$ และจุดศูนย์กลางของ dipole อยู่ที่จุดกำเนิด และให้ $\boldsymbol{\mathscr{r}}_+$, $\boldsymbol{\mathscr{r}}_-$ เป็นเวกเตอร์จากขั้วบวกและลบมายัง $\mathbf{r}$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\mathscr{r}_+} - \frac{q}{\mathscr{r}_-}\right)$$

และจากกฎของ $\cos$ จะได้

$$\mathscr{r}_\pm^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp rd\cos\theta = r^2\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)$$

ดังนั้นเมื่อ $r \gg d$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\mathscr{r}_\pm} \approx \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

ก็จะได้ว่าที่ระยะ $r$ ไกล ๆ จาก dipole:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2} \tag{2.17}$$

และเช่นเดียวกัน quadrupole, octopole, ... จะมีศักย์ที่โตแบบ $1/r^3$, $1/r^4$, ... ตามลำดับ ที่ระยะไกล ๆ

ดังนั้นเราจึงอาจหาวิธีเขียนศักย์ของการกระจายตัวของประจุแบบใด ๆ ให้อยู่ในรูปอนุกรมของพจน์ multipole ($1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$, ...) เพื่อที่จะประมาณค่าศักย์ไกล ๆ ด้วยพจน์ monopole และ dipole ได้:

พิจารณาการให้ $\mathscr{r}$ และ $\alpha$ เป็นมุมและระยะระหว่าง $\mathbf{r}$ และ $\mathbf{r}'$ ตามลำดับ จะได้

$$\mathscr{r}^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\alpha = r^2\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\alpha\right)$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha\right)\right)^{-1/2} \tag{2.18}$$

จากนั้นใช้ทฤษฎีบททวินามกับ (2.18) และ (2.11) จะพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\alpha) \tag{2.19}$$

นำไปแทนใน (1.17) ก็จะได้ว่า

**การกระจาย Multipole.**

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int (r')^n\, P_n(\cos\alpha)\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' \tag{2.20}$$

## ► พจน์ Monopole และ Dipole

สำหรับพจน์ monopole ($n = 0$) จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int P_0(\cos\alpha)\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int \rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

ดังนั้น

**พจน์ Monopole.**

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{2.21}$$

ซึ่งก็ไม่น่าแปลกใจเพราะค่าศักย์ที่ระยะไกล ๆ ก็ควรจะโตคล้ายประจุรวม $Q$ ในระบบ (เรียก $Q$ นี้ว่า *monopole moment*) โดยพจน์ monopole นี้จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกำเนิด ต่างจากพจน์อื่น ๆ ที่ขึ้นกับตำแหน่งที่ใช้เป็นจุดกำเนิดในระบบ

ต่อมาพจน์ dipole ($n = 1$) จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r'\,P_1(\cos\alpha)\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r\cos\alpha\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

แต่ว่า $r'\cos\alpha = \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'$ ดังนั้น

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot\int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

อินทิกรัลในด้านขวาไม่ขึ้นกับ $\mathbf{r}$ ดังนั้นเราจะนิยาม *dipole moment* $\mathbf{p}$ รอบจุด ๆ หนึ่งว่า:

**นิยาม Dipole Moment.**

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' \tag{2.22}$$

ก็จะได้ว่าพจน์ dipole คือ:

**พจน์ Dipole.**

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{2.23}$$

โดยพจน์ dipole จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกำเนิดเมื่อประจุรวม $Q = 0$ (พิสูจน์จากการแทน $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$)

## ▶ Dipole บริสุทธิ์

จาก (2.17) จะได้ว่า dipole จะเหลือแค่พจน์ dipole ในการกระจาย multipole ถ้าระยะ $\mathbf{r}$ ไกลมาก ๆ หรืออาจมองกลับกันว่าถ้าระยะ $d$ น้อยมาก ๆ ก็จะเหลือแค่พจน์ dipole เช่นกัน ดังนั้นถ้าเรามองในลิมิต $q \to \infty$ และ $d \to 0$ โดยให้ $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ คงที่ตลอด จะได้จุด *dipole บริสุทธิ์* ที่จะมีสนามศักย์เป็นเพียง

$$V(\mathbf{r}) = V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\alpha}{r^2} \tag{2.24}$$

ถ้ากำหนดว่า $\mathbf{p}$ ชี้ในทิศ $+z$ ก็จะได้

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

ดังนั้นเมื่อใช้ (1.13) จะได้สนามไฟฟ้า:

$$\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \\
E_\phi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

**สนามไฟฟ้าของ Dipole บริสุทธิ์ในพิกัดทรงกลม.**

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\Big(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\Big) \tag{2.25}$$

แสดงว่าสนามไฟฟ้าของ dipole โตแบบ $1/r^3$ (และเช่นเดียวกัน สนามไฟฟ้าของ quadrupole, octopole, ... ก็จะโตแบบ $1/r^4$, $1/r^5$, ... เพราะในการใช้ gradient หาสนามไฟฟ้าจะเพิ่ม $1/r$ ขึ้นมาอีกหนึ่งตัว) แต่สูตรด้านบนยังเป็นสูตรที่ขึ้นกับระบบพิกัดทรงกลม เราสามารถหาสูตรที่ไม่ขึ้นกับระบบพิกัดได้ดังนี้:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{dip}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\Big(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(2p\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + p\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(3p\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + p\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - p\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(3\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}\Big)
\end{aligned}$$

**สนามไฟฟ้าของ Dipole บริสุทธิ์.**

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(3\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}\Big) \tag{2.26}$$

# บทที่ 3 | สนามไฟฟ้าในสสาร

## ▶ 3.1. โพลาไรเซชัน

### ▶ การเหนี่ยวนำ Dipole

เมื่อนำอะตอมที่เป็นกลางไปไว้ในสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ จะทำให้นิวเคลียสเคลื่อนที่ไปในทิศของ $\mathbf{E}$ และกลุ่มหมอกอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในทิศตรงข้าม ถ้า $\mathbf{E}$ มีค่ามากพอก็จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมทำให้อะตอมนั้นกลายเป็นไอออน แต่ถ้า $\mathbf{E}$ มีค่าไม่มากนักจะทำให้กลุ่มหมอกอิเล็กตรอนและนิวเคลียสเหลื่อมกันเล็กน้อยจึงเหนี่ยวนำให้เกิด dipole moment $\mathbf{p}$ ขึ้น (จะเรียกว่าอะตอมนี้โดน*โพลาไรซ์*) โดยปกติเมื่อ $\mathbf{E}$ เล็ก ๆ เราจะประมาณ dipole moment ที่เกิดนี้ได้ว่าแปรผันตรงกับสนาม:

**Dipole เหนี่ยวนำ.**

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \tag{3.1}$$

จะเรียก $\alpha$ นี้ว่า *สภาพมีขั้วได้ของอะตอม* (atomic polarizability)

สำหรับการปล่อยสนาม $\mathbf{E}$ นี้ไปบนโมเลกุล การเหนี่ยวนำ dipole จะต่างกันเล็กน้อย เพราะโมเลกุลนี้อาจจะถูกโพลาไรซ์ยากง่ายไม่เท่ากันในแกนที่ต่างกัน เช่นในตัวอย่างง่าย ๆ อย่าง $\mathrm{CO}_2$ ที่โมเลกุลมีรูปร่างเป็นเส้นตรง เมื่อปล่อยสนามผ่านโมเลกุลในทิศเอียงจะต้องคิด dipole moment แยกเป็นสองพจน์:

$$\mathbf{p} = \alpha_\perp \mathbf{E}_\perp + \alpha_\parallel \mathbf{E}_\parallel$$

แต่ถ้าเป็นโมเลกุลที่ซับซ้อนกว่านี้จะต้องใช้*เทนเซอร์สภาพโพลาไรซ์ได้* (polarizability tensor) $\alpha_{ij}$ ซึ่งเป็นเทนเซอร์สามมิติที่มีแรงก์ 2 โดยมีความสัมพันธ์ระหว่าง $\mathbf{E}$, $\mathbf{p}$, และ $\alpha_{ij}$ ดังนี้:

**Dipole เหนี่ยวนำในโมเลกุล.**

$$p_i = \alpha_{ij} E_j \tag{3.2}$$

หรือก็คือ

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

(ถ้าเลือกแกนดี ๆ จะทำให้เหลือแค่พจน์ $\alpha_{xx}$, $\alpha_{yy}$, และ $\alpha_{zz}$ ได้)

## ▶ การหมุนของโมเลกุลมีขั้ว

พิจารณาโมเลกุลน้ำ ($H_2O$) รูปร่างของโมเลกุลนี้จะมีออกซิเจนอยู่ตรงกลางที่เชื่อมอยู่กับไฮโดรเจน 2 อะตอม โดยจะมีมุมบิดไป $105°$ การที่โมเลกุลน้ำมีลักษณะแบบนี้จะทำให้ฝั่งหนึ่งของโมเลกุลมีประจุบวกและอีกฝั่งหนึ่งมีประจุลบจึงทำให้โมเลกุลน้ำนี้เป็น dipole อยู่แล้ว (โดยจะเรียกโมเลกุลแบบนี้ว่า*มีขั้ว*) ถ้าโมเลกุลนี้อยู่ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ $\mathbf{E}$ (หรือเปลี่ยนแปลงไม่มาก) แรงลัพธ์ของโมเลกุลจะเป็น $\mathbf{0}$ ก็จริง แต่ฝั่งบวกจะเกิดแรงกระทำในทิศเดียวกับ $\mathbf{E}$ ส่วนฝั่งลบจะเกิดแรงในทิศตรงข้าม จึงทำให้เกิดทอร์กบนโมเลกุล ถ้ากำหนดให้ $\mathbf{d}$ เป็นเวกเตอร์จากจุดศูนย์กลางของฝั่งลบไปยังฝั่งบวก จะหาทอร์กได้ดังนี้:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) \\ &= \left(\frac{\mathbf{d}}{2} \times (q\mathbf{E})\right) + \left(\frac{-\mathbf{d}}{2} \times (-q\mathbf{E})\right) \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

(ซึ่งในสนามไม่สม่ำเสมอก็ยังใช้ได้อยู่เพราะเนื่องจาก $d$ เล็กมากจะได้ว่า $|\Delta\mathbf{E}| \ll E$ ดังนั้น $\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \approx 2\mathbf{E}$)
ดังนั้นจะได้ว่า

**ทอร์กของ Dipole ในสนามไฟฟ้า.**

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{3.4}$$

ก็คือเมื่อนำโมเลกุลมีขั้วนี้ไปไว้ในสนามไฟฟ้า โมเลกุลจะหมุนไปเรื่อย ๆ จนกว่า dipole moment จะมีทิศตรงกับสนาม

แต่ถ้าสนามเปลี่ยนเยอะในช่วงเล็ก ๆ จะเกิดแรงลัพธ์ด้วยทำให้โมเลกุลเคลื่อนที่:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\,\Delta\mathbf{E} \\ &\approx q(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} \end{aligned}$$

เพราะระยะ $d$ เล็กมาก ๆ ดังนั้น

**แรงลัพธ์ของ Dipole ในสนามไฟฟ้า.**

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} \tag{3.5}$$

### ▶ เวกเตอร์โพลาไรเซชัน

สองหัวข้อด้านต้นเป็นตัวอย่างของการโพลาไรซ์ไดอิเล็กทริก โดยทั้งสองกรณีมีสิ่งที่เหมือนกันก็คือ: ทำให้เกิด dipole เล็ก ๆ จำนวนมากชี้ในทิศเดียวกับสนามไฟฟ้า ซึ่งเราจะนิยาม*โพลาไรเซชัน* $\mathbf{P}$ คือ:

**นิยามโพลาไรเซชัน.**

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = \textit{dipole moment ต่อหน่วยปริมาตร} \tag{3.6}$$

จริง ๆ แล้วโพลาไรเซชันนี้ซับซ้อนกว่าสองกรณีที่กล่าวมาและวัตถุที่ถูกโพลาไรซ์สามารถทำให้คงสภาพโพลาไรเซชันนี้ไว้ได้ด้วย เพราะฉะนั้นจากนี้เราจึงจะเลิกสนใจแหล่งกำเนิดของเวกเตอร์โพลาไรเซชันและใช้ตามนิยามไปเลย

## ▶ 3.2. สนามไฟฟ้าของวัตถุที่ถูกโพลาไรซ์

### ▶ Bound Charges

พิจารณาปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่ถูกโพลาไรซ์ให้มีโพลาไรเซชัน $\mathbf{P}$ จาก (2.23) จะได้ว่าศักย์ที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ จาก dipole ในปริมาตรเล็ก ๆ ณ ตำแหน่ง $\mathbf{r}'$ เท่ากับ

$$\mathrm{d}V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\cdot\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{P}\,\mathrm{d}\tau'\cdot\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$$

ดังนั้น

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\mathbf{P}\cdot\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\mathrm{d}\tau'$$

เมื่อ $\boldsymbol{\nabla}'$ คือ gradient เทียบพิกัด $\mathbf{r}'$ ต่อมาใช้ integration by parts จะได้:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left(\frac{\mathbf{P}}{\mathscr{r}}\right)\mathrm{d}\tau' - \int_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{P})\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\mathrm{d}\tau'\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\partial\mathcal{V}}\frac{\mathbf{P}}{\mathscr{r}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{-\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{P}}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\tau' \end{aligned}$$

ซึ่งหน้าตาคล้าย ๆ ศักย์ของประจุบนปริมาตรรวมกับประจุในปริมาตร ดังนั้นเราจะนิยาม

**นิยาม Bound Charges.** Bound surface charge $\sigma_b$ คือ:

$$\sigma_b \equiv \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{3.7}$$

และ bound volume charge $\rho_b$ คือ:

$$\rho_b = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} \tag{3.8}$$

ก็จะได้ว่า:

**ศักย์ของวัตถุที่ถูกโพลาไรซ์.**

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\sigma_b}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}a' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_b}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\tau' \tag{3.9}$$

โดยจาก (1.13) เราจึงหาสนามได้เช่นกัน

หมายเหตุ: *ไดอิเล็กทริกจริง ๆ ตามในส่วนที่แล้วไม่ได้เป็นเนื้อ dipole บริสุทธิ์ที่ต่อเนื่อง โดยสำหรับสนามและศักย์นอกไดอิเล็กทริกสามารถใช้การประมาณนี้ได้โดยไม่มีปัญหาเพราะระยะ $\mathscr{r}$ ใหญ่มากเมื่อเทียบกับ $d$ แต่ถ้าเป็นสนามและศักย์ภายในเนื้อตัวนำ ถ้าจะให้การประมาณ dipole แบบต่อเนื่องใช้ได้ จะต้องเป็นศักย์หรือสนามเฉลี่ยในระดับ macroscopic เท่านั้น (เฉลี่ยในปริมาตรที่มีโมเลกุลมาก ๆ แต่ยังเล็กเมื่อเทียบกับปริมาตรของไดอิเล็กทริกอยู่พอสมควร)*

อีกวิธีหนึ่งที่อาจมีประโยชน์ในการหาศักย์หรือสนามของวัตถุที่ถูกโพลาไรซ์คือการนำวัตถุ $1$ และ $2$ ที่มีความหนาแน่นประจุ $+\rho$ และ $-\rho$ มาวางเหลื่อมกันด้วยระยะเล็ก ๆ $d$ แล้วคำนวณศักย์หรือสนามตามปกติ (ถ้าระบบนี้ง่ายพอ เช่น ทรงกลมที่มีโพลาไรเซชันสม่ำเสมอ)

# ▶ 3.3. การกระจัดไฟฟ้า

## ▶ กฎของ Gauss เมื่อมีไดอิเล็กทริก

เราสามารถแบ่งส่วนที่ทำให้เกิด $\mathbf{E}$ ในกรณีที่มีไดอิเล็กทริกออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่มาจาก bound charge และส่วนที่ไม่ได้มาจากโพลาไรเซชัน (เรียกว่า *free charge*) หรือก็คือ

$$\begin{gathered}\rho = \rho_b + \rho_f \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} + \rho_f\end{gathered}$$

ดังนั้นถ้าเรานิยาม

**นิยามการกระจัดไฟฟ้า.** *การกระจัดไฟฟ้า* (*electric displacement*: $\mathbf{D}$) นิยามดังนี้:

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.10}$$

ก็จะได้ว่า

**กฎของ Gauss สำหรับระบบที่มีไดอิเล็กทริก.**

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho_f \quad \text{และ} \quad \oint \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = Q_{f\,\mathrm{enc}} \tag{3.11}$$

เวกเตอร์การกระจัดไฟฟ้านี้มีสมบัติคล้าย ๆ $\mathbf{E}$ แต่ต้องระวังเพราะสนาม $\mathbf{E}$ ที่หาได้จากเพียง $\rho$ (ด้วยกฎของ Gauss) เป็นเพราะว่ายังมีอีกเงื่อนไขที่ $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ด้วย แต่ในกรณีของการกระจัดไฟฟ้า

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \varepsilon_0 \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P} \tag{3.12}$$

ไม่จำเป็นต้องเป็น $\mathbf{0}$ ดังนั้น $\mathbf{D}$ จึงไม่ได้กำหนดโดยเพียง $\rho_f$

### ▶ รอยต่อแผ่นประจุสำหรับการกระจัดไฟฟ้า

ต่อมาเช่นเดียวกับ $\mathbf{E}$ และ $V$ เรามาดูสมบัติของ $\mathbf{D}$ ในบริเวณแผ่นประจุบาง ๆ ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ $\sigma_f$:

1. โดย (3.11) จะได้ว่า
$$D^{\perp}_{\text{above}} - D^{\perp}_{\text{below}} = \sigma_f \tag{3.13}$$
2. โดย (3.12) จะได้ว่า
$$D^{\parallel}_{\text{above}} - D^{\parallel}_{\text{below}} = P^{\parallel}_{\text{above}} - P^{\parallel}_{\text{below}} \tag{3.14}$$

## ▶ 3.4. ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

### ▶ สภาพอ่อนไหว สภาพยอม และค่าคงที่ไดอิเล็กทริก

เราสามารถประมาณเวกเตอร์โพไรเซชันในไดอิเล็กทริกได้คล้ายกับ (3.1) ดังนี้:

**ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.**

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \tag{3.15}$$

หมายเหตุ: $\mathbf{E}$ *ในที่นี้คือสนามทั้งหมด ดังนั้นสมการนี้ไม่ได้ใช้ง่ายอย่างที่คิด เพราะการโพลาไรซ์ด้วยสนามภายนอก* $\mathbf{E}^{\text{ext}}$ *จะทำให้เกิดสนามมาเพิ่มจาก* $\mathbf{P}$ *ที่เกิดขึ้นอีกที วนไปวนมาเรื่อย ๆ วิธีที่ง่ายที่สุดในการคำนวณก็คือควรพิจารณา* $\mathbf{D}$ *ก่อนและใช้กฎของ Gauss*

โดยเราจะเรียกไดอิเล็กทริกที่เป็นไปตามสมการด้านบนว่า*ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น* และเราจะเรียก $\chi_e$ ว่า*สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้า (electric susceptibility)* ของไดอิเล็กทริกนั้น ๆ ต่อมาพิจารณา

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

จึงได้ว่า $\mathbf{D} \propto \mathbf{E}$ ด้วย เราจึงนิยาม*สภาพยอมทางไฟฟ้า (elctric permittivity)* ว่า

**นิยามสภาพยอมทางไฟฟ้า.**

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0(1+\chi_e) \tag{3.16}$$

ก็จะได้ว่า

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{3.17}$$

และนิยาม*สภาพยอมสัมพัทธ์*หรือ*ค่าคงที่ไดอิเล็กทริก*ว่า

**นิยามค่าคงที่ไดอิเล็กทริก.**

$$\varepsilon_r \equiv 1+\chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{3.18}$$

พิจารณาภายในบริเวณที่มี $\chi_e$ คงที่ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho_f \qquad \text{และ} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

โดย Helmholtz's theorem จึงได้ว่า

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}_{\text{vac}} \tag{3.19}$$

เมื่อ $\mathbf{E}_{\text{vac}}$ คือสนามไฟฟ้าเมื่อระบบอยู่ในสุญญากาศ ก็จะได้

**สภาพยอมทางไฟฟ้าในไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_r}\mathbf{E}_{\text{vac}} \tag{3.20}$$

ซึ่งเปรียบเสมือนการเปลี่ยนค่าจาก $\varepsilon_0$ เป็น $\varepsilon$ ในสมการต่าง ๆ คล้าย ๆ เป็นการ "ต้าน" สนาม $\mathbf{E}$ ให้มีค่าลดลง

ไดอิเล็กทริกเชิงเส้นด้านบนไม่ได้เป็นไดอิเล็กทริกเชิงเส้นแบบ "ทั่วไป" จริง ๆ แต่จะเรียกว่าเป็น *isotropic linear dielectric* แต่ถ้าไม่ isotropic ไดอิเล็กทริกอาจถูกโพลาไรซ์ได้ยากง่ายไม่เท่ากันในแต่ละทิศจึงทำให้สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้าจะถูกอธิบายด้วยเทนเซอร์:

**เทนเซอร์สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้า.**

$$P_i = \varepsilon_0\chi_{e,ij}E_j \tag{3.21}$$

หรือก็คือ

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0(\chi_{e,xx}E_x + \chi_{e,xy}E_y + \chi_{e,xz}E_z) \\ P_y &= \varepsilon_0(\chi_{e,yx}E_x + \chi_{e,yy}E_y + \chi_{e,yz}E_z) \\ P_z &= \varepsilon_0(\chi_{e,zx}E_x + \chi_{e,zy}E_y + \chi_{e,zz}E_z) \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

## ► ปัญหาสภาวะขอบเขตเกี่ยวกับไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เนื่องจาก

$$\rho_b = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\frac{\chi_e}{\varepsilon}\mathbf{D}\right) = (\text{const.})\rho_f$$

ดังนั้นในบริเวณที่ไม่มีประจุอิสระ จะได้ว่า $\rho = \rho_b + \rho_f = 0$ ทำให้สามารถใช้สมการ Laplace แก้หา $V$ ได้โดยวิธีจากบทที่แล้ว โดยมีสภาวะขอบเขตดังนี้ (พิสูจน์โดย (3.11)):

**สภาวะขอบเขตของรอยต่อไดอิเล็กทริก.** บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นของประจุอิสระเชิงพื้นที่ $\sigma_f$ จะได้ว่า

$$\varepsilon_{\text{above}} E_{\text{above}}^{\perp} - \varepsilon_{\text{below}} E_{\text{below}}^{\perp} = \sigma_f \tag{3.23}$$

หรือ

$$\varepsilon_{\text{above}} \frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \varepsilon_{\text{below}} \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\sigma_f \tag{3.24}$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน
และสำหรับ $V$ จะต่อเนื่องเช่นเคย:

$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}} \tag{3.25}$$

**ตัวอย่าง.** ทรงกลมไดอิเล็กทริกเชิงเส้นรัศมี $R$ ที่มีค่าคงที่ไดอิเล็กทริก $\varepsilon_r$ ถูกวางไว้ที่จุด $(0,0,0)$ โดยมีสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ (เมื่อไม่รวมสนามจากไดอิเล็กทริก) $\mathbf{E}_0$ ไหลผ่านในทิศ $+z$ จงหาสนามไฟฟ้าภายในไดอิเล็กทริก

*วิธีทำ.* เห็นชัดว่าระบบนี้ในพิกัดทรงกลมจะสมมาตรแบบ azimuth ดังนั้นใช้คำตอบของสมการ Laplace จาก (2.8) และ (2.10) ได้ว่าข้างในไดอิเล็กทริก ($r < R$):

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{$\star$1}$$

ข้างนอกไดอิเล็กทริกจะต้องมี $V(r,\theta)$ เมื่อ $r \to \infty$ เป็น

$$V(r,\theta) \approx -E_0 r\cos\theta$$

ก็จะได้ว่าที่ $r > R$:

$$V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \tag{$\star$2}$$

เนื่องจาก $V$ ต้องต่อเนื่องที่ $r = R$ จาก ($\star$1) และ ($\star$2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 R &= -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} && \text{เมื่อ } l = 1 \\ A_l R^l &= \frac{B_l}{R^{l+1}} && \text{เมื่อ } l \neq 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_l = B_l = 0$ สำหรับทุก $l \neq 1$ ก็จะได้

$$V(r,\theta) = \begin{cases} A_1 r\cos\theta & \text{เมื่อ } r < R \\ -E_0 r\cos\theta + \dfrac{(A_1+E_0)R^3}{r^2}\cos\theta & \text{เมื่อ } r > R \end{cases}$$

ต่อมาใช้ (3.24) จะแก้หา $A_1$ ได้

$$A_1 = \frac{-3E_0}{2+\varepsilon_r}$$

ก็จะได้ $V$ เมื่อ $r < R$:

$$V(r,\theta) = -\frac{3}{2+\varepsilon_r}E_0 r\cos\theta$$
$$V(x,y,z) = -\frac{3}{2+\varepsilon_r}E_0 z$$

ดังนั้นก็จะได้ $\mathbf{E}_{\text{in}} = \dfrac{3}{2+\varepsilon_r}\mathbf{E}_0$ □

## ▶ พลังงานในระบบที่มีไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เราสามารถหาพลังงานของระบบไดอิเล็กทริกโดยการ "ประกอบ" ระบบของประจุอิสระ $\rho_f$ ทีละนิด แล้วปล่อยให้ไดอิเล็กทริกเกิดการโพลาไรซ์ก่อนที่จะประกอบต่อไป งานที่ต้องใช้บนประจุ $\Delta\rho_f$ ในการนำมาประกอบจะเท่ากับ

$$\Delta U = \int (\Delta\rho_f)V\,\mathrm{d}\tau$$

แต่ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho_f$ ดังนั้น $\Delta\rho_f = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\Delta\mathbf{D})$ นำไปแทนแล้วใช้ integration by parts และ Stokes' theorem จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\Delta U &= \int \big(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Delta\mathbf{D})\big)V\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int \boldsymbol{\nabla}\cdot(V\,\Delta\mathbf{D})\,\mathrm{d}\tau + \int \Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \cancel{\oint V\,\Delta\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}} + \int \Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int \Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

ต่อมาพิจารณา

$$\Delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}) = \varepsilon\,\Delta\big(E^2\big) = 2\varepsilon E\,\Delta E = 2\,\Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

ก็จะได้ว่า

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int \Delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau$$

หรือก็คือ

**พลังงานจากสนามไฟฟ้าและไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.**

$$U = \int u(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{เมื่อ} \qquad u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{D}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\Big) \tag{3.26}$$

หมายเหตุ: *สังเกตว่า (3.26) $\geq$ (1.27) เหตุผลเป็นเพราะว่า (1.27) จะเป็นพลังงานเนื่องจากสนามไฟฟ้าโดยตรง ไม่รวมพลังงานในการ "แยก" ขั้วของไดอิเล็กทริกในการโพลาไรซ์ (อาจมองเหมือนเป็นสปริงที่เชื่อมขั้วทั้งสองเข้าด้วยกัน) ดังนั้นก็จะได้อีกว่าพลังงานภายในของ "สปริง" นี้เท่ากับ* $\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,\mathrm{d}\tau$

## ▶ แรงบนไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

พิจารณาไดอิเล็กทริกที่ขั้นในตัวเก็บประจุแผ่นตัวนำคู่ขนานกว้าง $w$ ยาว $l$ หน้า $d$ (ให้แนวยาวขนานกับแกน $x$ และตัวเก็บประจุนี้ชิดกับระนาบ $yz$) โดยที่ไดอิเล็กทริกเหลื่อมกับตัวเก็บประจุไประยะ $+x$ ถ้าดังไดอิเล็กทริกออกมาอีก $\mathrm{d}x$ จะได้ว่างานที่กระทำ:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W = F_{\text{ext}}\,\mathrm{d}x$$

ดังนั้นแรงที่สนามกระทำเท่ากับ

$$F = -F_{\text{ext}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{♦1}$$

พิจารณาความจุไฟฟ้ารวมของตัวเก็บประจุที่มีระยะเหลื่อม $x$ ใด ๆ:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{wx}{d}\varepsilon_0 + \frac{w(l-x)}{d}\varepsilon_r\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0 w}{d}\big(\varepsilon_r l - \chi_e x\big) \tag{♦2}$$

จะได้พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุที่มีระยะเหลื่อม $x$ ใด ๆ เท่ากับ

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

ดังนั้น

$$\mathrm{d}U = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\,\mathrm{d}C = -\frac{1}{2}V^2\,\mathrm{d}C \overset{(♦2)}{=} \frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_0\chi_e w}{d}\,\mathrm{d}x$$

นำกลับไปแทนใน (♦1) จะได้ว่า

**แรงบนไดอิเล็กทริกระหว่างแผ่นตัวนำ.**

$$F = -\frac{\varepsilon_0\chi_e w}{2d}V^2 \tag{3.27}$$

หมายเหตุ: *สังเกตว่าเมื่อ $x = 0$ ไม่ได้ทำให้ $F = 0$ เพราะการใช้ $U$ เป็นค่านั้นเป็นการประมาณสำหรับ $x$ ที่มีค่ามาก ๆ*

# บทที่ 4 | แม่เหล็กสถิต

## ▶ 4.1. กฎแรง Lorentz

### ▶ แรงแม่เหล็ก

**แรง Lorentz.** ประจุ $Q$ ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\mathbf{v}$ ในสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ จะถูกแรงแม่เหล็กกระทำดังนี้:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{4.1}$$

โดยถ้ามีทั้งสนามไฟฟ้าและแม่เหล็ก:

$$\mathbf{F} = Q\big(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\big) \tag{4.2}$$

การเคลื่อนที่ใน $\mathbf{B}$ สม่ำเสมอที่น่าสนใจมีดังนี้:

1. ถ้าประจุ $Q$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\mathbf{v}$ ในสนาม $\mathbf{B}$ เพียงอย่างเดียว ส่วนของ $\mathbf{v}_\perp$ จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่วงกลมตามสมการ

   $$QBR = mv = p$$

   เมื่อ $p$ คือโมเมนตัม และได้

   $$\omega = \frac{QB}{R}$$

   จะเรียกว่า*ความถี่ cyclotron*

2. ถ้าประจุ $Q$ เริ่มจากหยุดนิ่งในสนาม $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{B}$ ที่ตั้งฉากกัน ถ้าแก้สมการมาจะได้ว่าประจุจะเคลื่อนที่เป็นรูป cycloid ที่มีรัศมี

   $$R = \frac{E}{\omega B}$$

   เมื่อ $\omega$ คือความถี่ cyclotron และศูนย์กลางวงกลมที่ทำให้เกิดรูป cycloid จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

   $$u = \omega R = \frac{E}{B}$$

ต่อมาพิจารณางานจากแรงแม่เหล็ก:

$$\mathrm{d}W_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = 0$$

ดังนั้นได้ว่า

**งานของแรงแม่เหล็ก.** แรงแม่เหล็กไม่ทำงาน:

$$W_{\text{mag}} = 0 \tag{4.3}$$

## ▶ กระแสไฟฟ้า

**นิยามกระแสไฟฟ้า.** กระแสไฟฟ้า ($\mathbf{I}$) ของจุดหนึ่งในสายไฟคือปริมาณประจุที่เคลื่อนที่ผ่านจุด ๆ นั้นต่อหน่วยเวลา หรือก็คือ

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v} \tag{4.4}$$

พิจารณา

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int \mathrm{d}\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}q$$

ดังนั้นในสายไฟจะได้

**แรงแม่เหล็กบนสายไฟ.**

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}\ell \tag{4.5}$$

หรือก็คือ

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (I\,\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{4.6}$$

ต่อมา หากประจุที่เคลื่อนที่เป็นประจุจากความหนาแน่นในสองหรือสามมิติ เราจะนิยาม:

**นิยามความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า.** สำหรับประจุที่ไหลบนผิวในสองมิติ ถ้าในแถบเล็ก ๆ ที่ขนานกับทิศในการไหลของกระแส $\mathrm{d}\mathbf{I}$ กว้าง $\mathrm{d}\ell_\perp$ เราจะนิยาม*ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงพื้นที่* ($\mathbf{K}$) ว่า

$$\mathbf{K} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}\ell_\perp} = \sigma \mathbf{v} \tag{4.7}$$

สำหรับประจุที่ไหลในปริมาตรสามมิติ ถ้าในท่อเล็ก ๆ ที่ขนานกับทิศในการไหลของกระแส $\mathrm{d}\mathbf{I}$ มีพื้นที่ $\mathrm{d}a_\perp$ เราจะนิยาม*ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงปริมาตร* ($\mathbf{J}$) ว่า

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}a_\perp} = \rho \mathbf{v} \tag{4.8}$$

และเช่นเดียวกับ (4.5) จะได้ว่า

**แรงแม่เหล็กบนกระแสในสองและสามมิติ.**

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B})\, \mathrm{d}a \tag{4.9}$$

และ

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B})\, \mathrm{d}\tau \tag{4.10}$$

จากสมการ (4.8) จะได้ว่า

$$I = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{4.11}$$

และเนื่องจากประจุที่ไหลออก ($I$) จะต้องเท่ากับประจุที่หายไป ดังนั้น

$$\int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J})\, \mathrm{d}\tau = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = I = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{enc}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho\, \mathrm{d}\tau = -\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\right) \mathrm{d}\tau$$

ก็จะได้ว่า

**สมการความต่อเนื่อง.**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.12}$$

# ▶ 4.2. กฎของ Biot-Savart

## ▶ ระบบกระแสคงที่

ในบทก่อน ๆ เราได้หาสนามไฟฟ้าในระบบที่เป็นประจุหยุดหนึ่งไปแล้วหรือก็คือเป็นระบบ*ไฟฟ้าสถิต* (*electrostatics*) ต่อมาในกรณีสนามแม่เหล็ก ในการที่ระบบจะเป็น*แม่เหล็กสถิต* (*magnetostatics*) ระบบจะต้องมีกระแสคงเดิมตลอดเวลา หรือก็คือ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \tag{4.13}$$

เมื่อนำไปแทนใน 4.12 จะได้ว่า

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{4.14}$$

โดยในระบบกระแสคงที่นี้เราจะหาสนามแม่เหล็กได้จาก:

**กฎของ Biot-Savart.** สนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ ที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ในระบบที่เป็นแม่เหล็กสถิต หาได้จาก

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\, \mathrm{d}\ell' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \tag{4.15}$$

เมื่อ $\mu_0$ คือ*สภาพซึมผ่านได้ของสุญญากาศ* (*permeability of free space*) โดยในกรณีความหนาแน่นกระแส:

**กฎของ Biot-Savart ของกระแสในสองและสามมิติ.**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\,\mathrm{d}a' \quad \text{และ} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\,\mathrm{d}\tau' \tag{4.16}$$

# ▶ 4.3. Divergence และ Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต

## ▶ Divergence ของสนามแม่เหล็กสถิต

พิจารณา (4.16) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{J}\times\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{J}) - \mathbf{J}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\mathrm{d}\tau'\right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathbf{J}$ อยู่ในพิกัด $(x', y', z')$ จึงได้ว่า $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{J} = \mathbf{0}$ และจาก

$$\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} = \mathbf{0}$$

ดังนั้น

**กฎของ Gauss สำหรับสนามแม่เหล็ก.**

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{4.17}$$

## ▶ Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต

เช่นเดิม จาก (4.16) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \boldsymbol{\nabla}\times\left(\mathbf{J}\times\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{J} - (\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} + \mathbf{J}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right) - \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J})\right)\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathbf{J}$ ขึ้นกับพิกัด $(x', y', z')$:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\mathbf{J}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right) - (\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\right)\mathrm{d}\tau' \tag{†}$$

พิจารณาพจน์ด้านหลัง เนื่องจาก $\hat{\boldsymbol{\imath}}/\imath^2 = f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ ดังนั้น $\boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\nabla}'$ จะได้ว่า

$$\int -(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\,\mathrm{d}\tau' = \int (\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla}')\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\,\mathrm{d}\tau'$$

คิดแยกแกน โดยให้ $\mathcal{V}$ คือปริมาตรที่อินทิเกรต (ปริมาตรที่ใหญ่มาก ๆ):

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathcal{V}} -(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\,\mathrm{d}\tau'\right)_x &= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla}')\,\frac{x-x'}{\imath^2}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}'\cdot\left(\frac{x-x'}{\imath^2}\mathbf{J}\right)\mathrm{d}\tau' - \cancel{\int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J})\,\frac{x-x'}{\imath^2}\,\mathrm{d}\tau'} \\ &= \oint_{\partial\mathcal{V}} \left(\frac{x-x'}{\imath^2}\mathbf{J}\right)\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathcal{V}$ ใหญ่มาก ดังนั้นจะได้ว่าไม่มีกระแสไหลออกจากระบบเลย ดังนั้น

$$\int_{\mathcal{V}} -(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla})\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\,\mathrm{d}\tau' = \mathbf{0}$$

นำไปแทนใน (†) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{J}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\imath^2}\right)\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{J}\left(4\pi\,\delta^3(\boldsymbol{\imath})\right)\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

ดังนั้น

**กฎของ Ampère (Differential Form).**

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \tag{4.18}$$

ต่อมาอินทิเกรตบนผิวใด ๆ:

$$\int (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \mu_0\int \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

โดย Stokes' Theorem จะได้ว่า

**กฎของ Ampère (Integral Form).**

$$\oint \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{4.19}$$

# ▶ 4.4. เวกเตอร์ศักย์แม่เหล็ก

## ▶ นิยามศักย์แม่เหล็ก

ในบทสนามไฟฟ้า เนื่องจาก $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ทำให้เราสามารถนิยามสนามสเกลาร์ $V$ (ศักย์ไฟฟ้า) ซึ่ง

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

ในกรณีของสนามแม่เหล็ก เรามี (4.17) ที่กล่าวว่า $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ จึงทำให้เราสามารถนิยาม*ศักย์แม่เหล็ก*ซึ่งเป็นสนามเวกเตอร์ได้ว่า

**นิยามศักย์แม่เหล็ก.**

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{4.20}$$

พิจารณา (4.18):

$$\begin{aligned}
\mu_0 \mathbf{J} &= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \\
&= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \\
&= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}
\end{aligned}$$

สังเกตว่าถ้า $\mathbf{A}_0$ สอดคล้องกับ (4.20) แล้ว $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\nabla}\lambda$ ก็สอดคล้องด้วย พิจารณา $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

ดังนั้นเราจึงสามารถเลือกสนามศักย์แม่เหล็กให้มี $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ ได้เสมอ (เพราะเรารู้ว่าสมการ Poisson $\nabla^2 \lambda = -f(x) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}_0$ มีคำตอบ) ก็จะได้ว่า

**สมการ Poisson ของศักย์แม่เหล็ก.**

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{4.21}$$

ในบทไฟฟ้าสถิตเรามีคำตอบของสมการ $\nabla^2 V = \rho/\varepsilon_0$ อยู่แล้ว (เมื่อ $\rho \to 0$ เมื่อ $\mathbf{r} \to \infty$) คือ

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \, \mathrm{d}\tau'$$

จึงดัดแปลงให้เป็นคำตอบของ (4.21) ได้ว่า

**ศักย์แม่เหล็กจากสนามกระแส.**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \, \mathrm{d}\tau' \tag{4.22}$$

หรือสำหรับหนึ่งและสองมิติ:

**ศักย์แม่เหล็กจากสนามกระแสในหนึ่งและสองมิติ.**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}a' \quad \text{และ} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r})}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\ell' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{1}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \tag{4.23}$$

โดยสมการศักย์นี้ใช้ได้เมื่อ $\mathbf{J} \to \mathbf{0}$ เมื่อ $\mathbf{r} \to \infty$ แต่ถ้าไม่ใช่ อาจต้องหาศักย์โดยใช้วิธีอื่น วิธีหนึ่งคือสังเกตว่า

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}$$

โดยเราจะเรียกพจน์ฝั่งขวาว่า*ฟลักซ์แม่เหล็ก* ($\Phi_B$):

**นิยามฟลักซ์แม่เหล็ก.** ฟลักซ์ของ $\mathbf{B}$ ที่ผ่านผิว $\mathcal{S}$ คือ

$$\Phi_B \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} \tag{4.24}$$

ดังนั้นสมการด้านบนก็จะได้ว่า

$$\oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \Phi_B \tag{4.25}$$

ซึ่งสามารถนำมาใช้หา $\mathbf{A}$ ได้เช่นเดียวกับการใช้ (4.19) ในการหา $\mathbf{B}$ ในระบบที่มีความสมมาตร

## ► สภาวะขอบเขต

ต่อมาเรามาหาสภาวะขอบเขตของสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ และศักย์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ เช่นเดียวกับในบทไฟฟ้าสถิต โดยพิจารณาที่บริเวณแผ่นที่มีกระแส $\mathbf{K}$ ไหลอยู่:

1. พิจารณาผิว Gaussian ทรงกระบอกที่บางมาก ๆ ดั่งในตอนหาสภาวะขอบเขตของ $\mathbf{E}$ และใช้ (4.17) จะได้ว่า

   $$B^{\perp}_{\text{above}} - B^{\perp}_{\text{below}} = 0$$

   ดังนั้นส่วนของ $\mathbf{B}$ ที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสจะต่อเนื่อง

2. พิจารณาลูป Amperian รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแคบ ๆ ที่มีด้านขนานกับแผ่นกระแสแต่ตั้งฉากกับ $\mathbf{K}$ จะได้ว่า

   $$B^{\parallel}_{\text{above}} - B^{\parallel}_{\text{below}} = \mu_0 K$$

   ดังนั้นส่วนของ $\mathbf{B}$ ที่ขนานกับแผ่นกระแสแต่ตั้งฉากกับ $\mathbf{K}$ จะไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดด้วยผลต่าง $\mu_0 K$

3. เนื่องจาก $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ จะได้ว่า $A^{\perp}$ ต่อเนื่อง และจาก (4.25) ก็จะได้ว่า $A^{\parallel}$ ก็ต่อเนื่อง ดังนั้น

   $$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}}$$

   หรือก็คือ $\mathbf{A}$ ต่อเนื่องเมื่อผ่านแนวแผ่นกระแส

4. กำหนดให้ $\Delta\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_{\text{above}} - \mathbf{A}_{\text{below}}$, $\hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{K}}$, และ $\hat{\mathbf{p}} \equiv \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$ จากข้อ 1 และ 2 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) &= \mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} \\
\mu_0 K \hat{\mathbf{p}} &= \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A}_{\text{above}} - \mathbf{A}_{\text{below}}) \\
&= \boldsymbol{\nabla} \times \Delta\mathbf{A} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{n}} & \hat{\mathbf{p}} \\ D_k & D_n & D_p \\ \Delta A_k & \Delta A_n & \Delta A_p \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{p}} \left( \cancel{\frac{\partial}{\partial k} \Delta A_n} - \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_k \right) + \hat{\mathbf{k}} \left( \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_p - \cancel{\frac{\partial}{\partial p} \Delta A_n} \right)
\end{aligned}
$$

(เนื่องจาก $\mathbf{A}$ ต่อเนื่อง $\partial/\partial k$ และ $\partial/\partial p$ ของข้างบนและข้างล่างจึงเท่ากัน) ดังนั้นก็จะได้ว่า

$$
\frac{\partial}{\partial n} \Delta A_k = -\mu_0 K \quad \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_p = 0 \tag{$\heartsuit$1}
$$

ต่อมา จาก

$$
0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \Delta\mathbf{A} = \cancel{\frac{\partial}{\partial k} \Delta A_k} + \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_n + \cancel{\frac{\partial}{\partial p} \Delta A_p}
$$

ก็จะได้ว่า

$$
\frac{\partial}{\partial n} \Delta A_n = 0 \tag{$\heartsuit$2}
$$

จาก (♡1) และ (♡2) ก็จะได้

$$
\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}
$$

สรุปก็คือ

**สภาวะขอบเขตของ $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{A}$ เมื่อผ่านแผ่นกระแส.** บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ $\sigma$ จะได้ว่า

$$
\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}} \tag{4.26}
$$

และ

$$
\mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \tag{4.27}
$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน หรือก็จะได้

$$
\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K} \tag{4.28}
$$

## ▶ การกระจาย Multipole ของศักย์แม่เหล็ก

พิจารณาการกระจาย multipole ของ $\mathbf{A}$ (อนุกรมกำลังในรูป $1/r$) โดยใช้ (2.19) และ (4.23):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{1}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\oint (r')^n P_n(\cos\alpha)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'\end{aligned}$$

ก็จะได้พจน์

$$\mathbf{A}_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\oint \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' = \mathbf{0}$$

ตามที่คาด (เพราะจาก (4.17) เราสมมติไม่มี magnetic monopole)
ต่อมาเรามาดูพจน์ dipole:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\oint r'\cos\alpha\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\oint \left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \\ &=\end{aligned}$$